This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

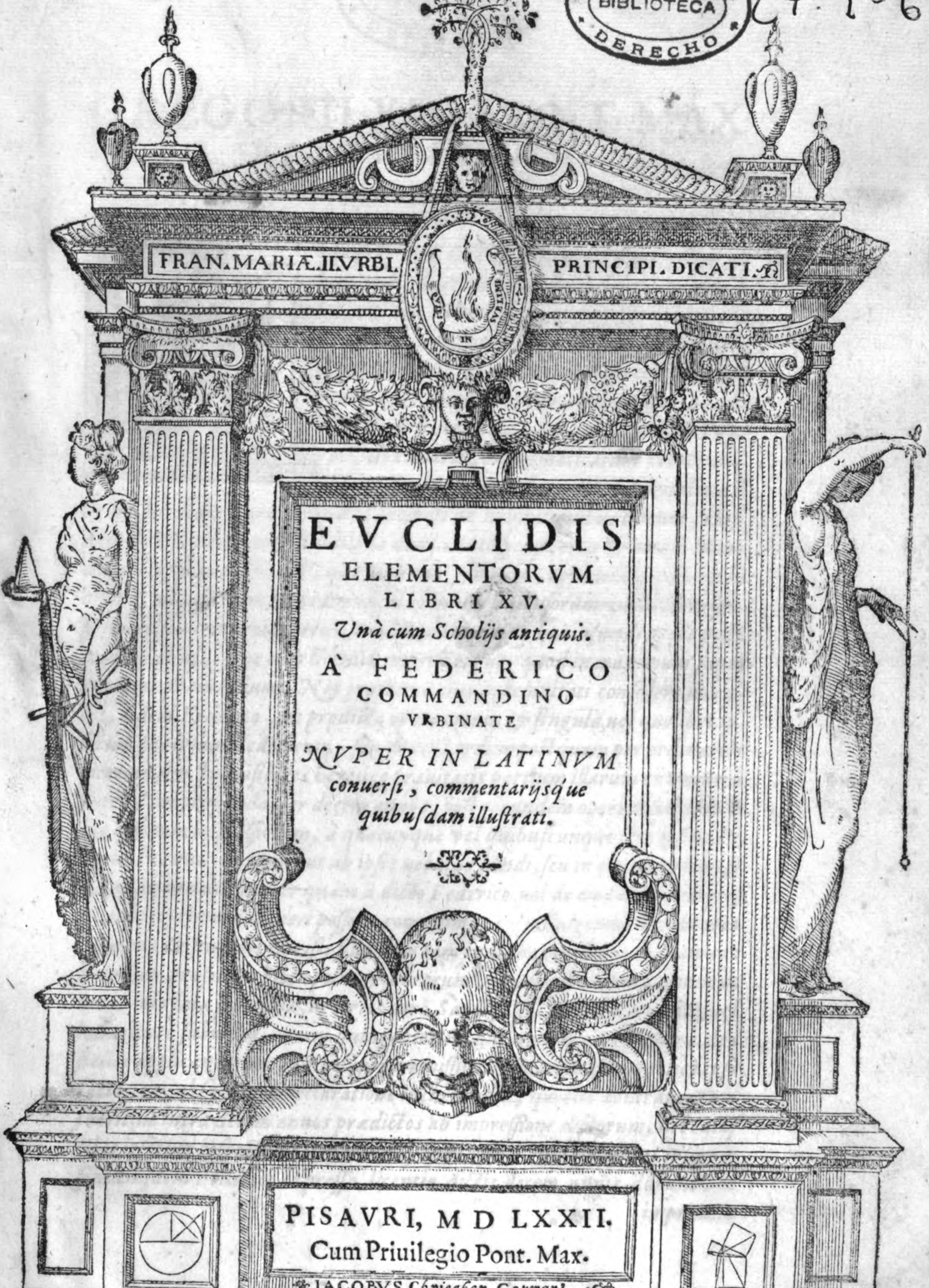
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

1573

Del colegio de Alcala



FRAN. MARIAE. II. VRBI. PRINCIPI. DICATI.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

Unà cum Scholijs antiquis.

À FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE

NVPER IN LATINVM
*conuerſi, commentarijsq́ue
quibuſdam illuſtrati.*

PISAVRI, M D LXXII.
Cum Priuilegio Pont. Max.

IACOBVS Chriegher German'.

Año de 1605

dela libreria dela Comp.a de Jesus de Alcala

GREGORII XIII. PONT. MAX. PRIVILEGIVM.

MOTV PROPRIO &c. Cum, ſicut accepimus, dilectus filius Federicus Commandinus Laicus Vrbinatenſis nonnulla noua opera hactenus non impreſſa, videlicet Euclidis elementorum libros quindecim è greco nuper conuerſos, & Ariſtarchi librum de magnitudinibus & diſtantijs Solis & Lunæ, necnon Pappi Alexandrini mathematicarum collectionũ libros ſex. Heronis Alexandrini ſpiritalium librum. Euclidis opera reliqua. Theodoſii de habitationibus librum, eiuſdem de diebus & noctibus libros duos. Autolyci de ortu & occaſu libros duos. eiuſdem de ſphæra, quæ mouetur, librum, & Archimedis opera omnia, ad publicam & communem omnium ſtudioſorum vtilitatem imprimere ſeu imprimi facere intendat, dubitetq́ue ne eiuſmodi opera poſtmodum ab alijs ſine eius licentia imprimantur, quod in maximum ſuum tenderet præiudicium, Nos propterea eius indemnitati conſulere uolentes, eidem Federico, ne prędicta opera omnia & ſingula uel quolibet ipſorum per ipſum Federicum, ſeu de eius ordine poſtquam per ordinarios locorum, & Inquiſitores hęreticę prauitatis partium illarum examinata fuerint, imprimenda, per decem annos, poſt eorundem operum uel cuiuſlibet ipſorum impreſſionem, à quocunque vel quibuſcunque ſine ipſius Federici licentia imprimi, aut ab ipſis uel alijs uendi, ſeu in eorum apothecis uel aliàs uenalia, præter quàm à dicto Federico, uel de eius ordine impreſſa, aut imprimenda teneri poſſint, concedimus & indulgemus. Inhibentes omnibus & ſingulis Chriſti fidelibus tam in Italia, quàm extra eam exiſtentibus, præſertim bibliopolis & librorum impreſſoribus, ſub excommunicationis latæ ſententiæ, in terris uerò Sanctę Ro. Eccleſiæ mediate, uel immediate ſubiectis, etiam quingentorum ducatorum auri Cameræ Apoſtolicę applicandorum, & inſuper ammiſſionis librorum pœnis toties ipſo facto, & abſque alia declaratione incurrendis, quoties contrauentum fuerit. ne intra decem annos prædictos ab impreſſione dictorum, uel cuiuſlibet ipſorum reſpectiue computandos dicta opera, uel quodlibet ipſorum ſine eiuſdem Federici expreſſa licentia dictis decem annis durantibus imprimere, ſeu ab ipſis, uel alijs præter, quàm à dicto Federico impreſſa & imprimenda uendere; ſeu uenalia habere, uel proponere, uel ea, ut ſupra, habere audeant. Mandantes uniuerſis uenerabilibus fratribus noſtris Epiſcopis, Archiepiſcopis, eorumq́ue Vicarijs in ſpiritualibus generalibus & in ſtatu temporali Sanctæ Ro. Eccleſiæ etiam Legatis et Vicelegatis Sedis Apoſtolicæ, aut ipſius ſtatus Gubernatoribus, ut quoties pro ipſius Federici parte fuerint requiſiti, vel eorum aliquis fuerit requiſitus, eidem Federico efficacis defenſionis pręſidio adſiſtentes, præmiſſa ad omnem dicti Federici requiſitionẽ contra inobedientes & rebelles per cenſuras Eccleſiaſticas, etiam ſæpius aggrauando, & per alia iuris remedia, auctoritate Apoſtolica exequantur, inuocato etiam ad hoc, ſi opus fuerit, auxilio brachij ſecularis. Et inſuper quia difficile admodum eſſet præſentes ad quodlibet forum deferri, uolumus & Apoſtolica auctoritate decernimus ipſarum tranſumptis uel exemplis in ipſis operibus impreſſis plenam & eandem prorſus fidem ubique tam in iudicio, quàm extra haberi, quæ præſenti originali haberetur. Et cum abſolutione à cenſuris ad effectum pręſentium. et quod ſola ſignatura ſufficiat, pręmiſſis omnibus conſtitutionibus & ordinationibus Apoſtolicis, ceteriſq́ue in contrarium facientibus non obſtantibus quibuſcunque.

Placet V.

Datum Romæ apud Sanctum Marcum Non. Septembr. Anno primo.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.

CVM mihi in mentem venit Illuſtriſſime Princeps quanta mathematicę facultatis olim apud veteres illos felicioris certe ſeculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit; non poſſum non vehementer dolere temporũ noſtrorũ conditionem, qua nobilis diſciplinę cultus, & ſplendor ſqualore immenſo, ac tenebris penitus contabeſcit, dum vnuſquiſque deteſtanda auri cupiditate quicquid certam in ſe lucri non habet occaſionem, ſtatim inſolenter abijcit, temereq́ue aſpernatur. Exulat iam, publiciſq́ue ferè excluſum eſt gymnaſijs nobile hoc, & pulcherrimum matheſeos ſtudium, quo nihil iucundius, ac magis domeſticum vniuerſa quondam habuit græcia. Non eſt ſanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragoniſq́ue, aut circulis depictas porticus intueri, aut de huiuſmodi rebus loquentes audire cogaris. Iacet omnino, iacet hoc diſciplinæ genus, et quod in delitijs olim habebatur, nunc quaſi rude, & obſcurũ paſſim reijcitur, vſq; adeo auaritia, cæcaq́; diuitiarum libido apud noſtræ ætatis homines increbuit. minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magnæ doctrinæ uiris has artes amanter excitatas, ſcio diligentiſſime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hęc ſtudia benigne complecti, liberaliterq́; fouere uideo: uerum enim illud eſſe quouis tempore homines ſunt experti, qualia fuerint eorum, qui ſummæ rerum præſunt, eadem & reliquorũ fore ſtudia. quam ob rem ſi non ad priſtinum dignitatis faſtigium, ad honeſtiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime deſpero. idq́; ea præſertim ratione, quòd te Princeps Illuſtriſſime, eximia mentis probitate, ſingulariq́; ornatum prudentia, pręclaros omnes animi tui conatus ad compenſanda literarum incommoda iam diu conuertiſſe lætus intueor. neque id iniuria profecto. nam vt illuſtria, & nunquam interitura memorię exempla tuæ gentis omittam, Patrem habes incomparabilis iuſtitiæ, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & pręmijs ornat. huic te ſimilẽ, ac parem vt pręſtes neceſſe eſt. Age vero quanti eſt illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam hanc voluntatem, quòd non ſolum *literas diligis, verum etiam quo ſemper fuiſti mentis acumine, tantos in illis progreſſus facis, ut omnes qui te noſcunt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Vt enim de me dicam, quoties ſummam ingenij tui præstantiam, atque ſolertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate ſum admiratus? Hoc tu honeſtiſſimo, nec vnquam ſatis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandiq́ue Euclidis onus mihi iniunxiſti, quòd geometrarum omnium facile principem, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuerſum, nec ſcite figuris ornatum fuiſſe. pręterea vero typographorum ita corruptum negligentia, vt non ſine maxima ſtudioſorum offenſione legi, nedum intelligi poſſet. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo ſuſcepi, tum vt optime tuę voluntatis mandato, quod ſemper obnixe studui, obtemperarem; tum etiam, vt pro ueteri meo instituto amatores huius diſciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicinæ, cui me totum dederam, ſalutem plurimam dixi, vt his me tantum oblectarer studijs, & in eorum cognitione parum de alijs ſolicitus, conquieſcerem; veterumq́ue præſtantiſſima in hoc genere ſcripta, pro ingenij tenuitate à ſitu, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conſpectum non ſine aliqua ſtudioſorum gratia proferrem. quod partim iam ſumus aſſecuti, partim ſummis uigilijs diu, noctuq́ue contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonij, ſereniq́ue excellentium virorum opera nonnulla ſuperioribus annis conuerſa à nobis, & explicata quàm accuratiſſime emiſimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentiæ in Pappo, Herone, Theodoſio, Autolyco, Ariſtarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iuſſu his depoſitis ſtudium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phinæus haud obſcuri nominis auctor priores tantum ſex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadē re labor eo etiā minus probatur, quòd Cāpani leditionem ex arabica conuerſam lingua, magis, quàm grę cam ſequi uouerit. Alij autem peracuti ſanè ingenij homines ἀναλύσεις geometricas in priores ſex libros conſcripſerunt, cetera tamen non ſunt proſecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione inſignis, licet omnes Elementorum libros, qui poſtulari à latinis uidebātur, latinos fecerit, locupletaueritq́ue, parum tamen (vt audio) eo nomine commenda-*

tur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonſtrationes, quę in græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas ſuis appoſitis reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, noſtra opera præſtiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare poſſumus, nullam à nobis nec impēſę, nec laboris, nec ualetudinis habitam fuiſſe rationem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non ſolum expurgatum à mēdis, & figuris eleganter excultum haberent ſtudioſi, uerum etiam ſumma fide conuerſum, & ſcholijs antiquis, commentarijsq́ue quibuſdam noſtris illuſtratū. Hoc igitur qualecumq́ue eſt meę induſtriæ teſtimoniū, nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, dono, dicoq́ue, ut quibus poſſum officijs meam in te fidem, perpetuamq́ue obſeruantiam, non modo noſtrę ætatis hominibus declarem, ſed ipſi etiā poſteritati teſtatam literarum monumentis relinquam. & quod ſemper uehementiſſime conatus ſum, uere perſuadeam, neminem te habere, qui præſtantem animi tui uirtutem, egregiamq́ue doctrinam memoria ſempiterna apud omnes propagare magis ſtuduerit, ac ſemper ſit ueneratus. vale, & nos, liberalesq́ue diſciplinas, quod facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.

Federici Commandini in elementa Euclidis prolegomena.

QVOD plerique interpretum, atque eorum præſertim, qui maxime laudantur, facere ſolent, vt antequàm euoluendi clarorum virorum monumenta, ac ſcripta, quę ſibi pro reipublicæ literariæ commodo explicanda, exornandaq; ſumpſere, initium faciant, quædam primo loco diſſerant: idem & mihi huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium eſt, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuerſa à principio admonitus, minori poſtea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnũquodque intelligendum. Primum igitur non nulla ſummatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus, quæ nam ſubiecta illis materia ſit, tum generatim, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quae ſit earundem diffinitio, quis ortus. Deinde vero miram ipſarum ad humanos vſus opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Poſt de Auctore, videlicet de Euclide ipſo, de operis inſcriptione, de ſcopo, ac de ipſius demõſtrationibus, deq; eorum, quæ in his libris complexus eſt, diſpoſitione, & methodo quędam minime inutilia attingemus. Denique ſummam vniuerſæ ςοιχειώσεως eo conſilio adiungemus, vt non ſolum facilius quicquid de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum cuſtodiatur. Itaque philoſophiam omnem, quæ in contemplatione verſatur, præclariſſimi philoſophorum in tres partes diſtributam nobis ea ducti ratione tradiderunt, quòd rerum aliæ prorſus materiei quaſi labe, ac cœno carentes ſolæ per ſe ſubſiſtunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuerſam penitus materiam ab his ſortitæ, ſic materiæ innituntur, vt nullo pacto abſque illa poſſint conſiſtere: aliæ denique medium inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent; tum quòd omni vacant materia, ſi accuratiori ſtudio veram illarum conditionem inſpexeris, tum quòd materia præditæ quodam modo videantur, quia ſine aliqua eius adiunctione ob ingenij noſtri imbecillitatem cognoſci nequeunt. Hinc triplex illud philoſophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt nomine, ita & re duo reliqua ſupra quàm dici poteſt, antecellit; Naturale, quod tertium eſt, ac poſtremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam ſolum vere diſci, ac ſciri poteſt, ob ſummam rei ſubiectæ conſtantiam, & certam demonſtrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis ſubſtantijs inferius eſt (quid enim tam eximium, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præſtat, atque ſuperius eſt; quæ materiæ funditus immerſa, variam, & mutabilem eius ſequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum eſt hominibus, qui ante orbis terrarum eluuiem cum feliciori fruerentur & cælo, & ingenio, ſapientiam rerum cæleſtium, admirabilemq; mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerãt, diligentiſſime inſcripſerunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum prædictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheſeos ſtudiũ incultum iacuit. Hoc poſt terrarum eluuionem apud chaldæos ſummo præſertim Abrahami diuini propè hominis ſtudio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam cæli ſerenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus ſcientiæ nati à Chaldæis acceptum ſummopere excoluerunt. Ab Agyptijs ad græcos, quibus nec ingenij acumine, nec ſciendi cupiditate quemque merito antepoſueris, tranſlatum eſt, Thaletis Mileſij, Pytagoræ Samij, aliorumq; excellentium hominum induſtria, quos ſcientiæ amor & vaſta maria trãſire, & longinquas peragrare regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, ſi græcis credimus, natæ & altæ ſunt mathematicæ diſciplinæ. quas poſtea & exercitatione, & ſcriptis illuſtrarunt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antiphо, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Architas, Euclides, Ariſtarcus, Archimedes, alijq; innumerabiles, qui hac eximia, præſtantiq; matheſeos diſciplina mortales propè cunctos in ſui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim hiſtoriam hic contexere propoſitum eſt. ſed hæc pauca attigimus, vt antiquam huius ſtudij nobilitatem obiter quaſi digito oſtenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis partibus

tibus

tibus,illarumq́; ordine breuiter dicatur.Mathematicę omnes circa quantitatem verſantur, atque illius præſidio quicquid moliuntur efficiunt. hinc facile eſt cognoſcere, quot,& quæ ſint huius diſciplinę partes.Quis enim ignorat quantitatem aliam eſſe continuam, aliam vero diſcretam? & harum vtramque bifariam diuidi,quòd continua ſit mutabilis,et immutabilis.diſcreta vero per ſe & ad aliquid,ita ut quadruplex quoque ſit matheſeos genus.ſcientia igitur, quæ magnitudines,et figuras continuas,non mobiles contemplatur,Geometrię ſibi nomen vindicat.& eſt ſcientia quantitatis continuæ,atque immobilis poſitione.quæ vero mobilem,& continuam contemplatur quantitatem Aſtronomia dicitur.& eſt cognitio quantitatis continuæ ſemper mobilis, & eorum, quæ illius motu accidūt. Eodem modo quantitatem diſcretam Arithmetica obtinet,quæ numerum aut parem,aut imparem non ad alium comparando,ſed per ſe conſiderat. eſtq́; ſcientia diſcretę quantitatis,ac per ſe cognitæ. Muſica circa mutuam ſonorum uerſatur habitudinem, ex quibus harmonia efficitur,ob diſcretam quidem,ſed tamen alia ratione coniunctam quantitatem: & eſt diſcretæ quantitatis inuicem comparatæ atque ad aliquid cognitio. ſed antequā ceteras matheſeos ſpecies enumeremus,explicanda nobis eſt ratio,& modus aperiendus,quo mathematicis quantitatem & continuam,& diſcretam pro ſubiecto, eruditorum auctoritate ſubſterni dicimus: neque enim de quoto,quod in ſenſilibus ipſis eſt,nec de quanto,quod circa corpora excogitatur, eſt abſolute intelligendum;phyſici enim potius,quàm mathematici finibus continetur hęc contemplatio. Eorum igitur quæ naturali corpori inſunt, nec ab eo ſeparātur,alia quidem nec re, nec cogitatione remoueri queunt,ut calor frigus, ſiccitas, quòd illa qua naturale eſt corpus,obtineat,alia vero etiam ſi re ipſa diſiungi minime queant, animi tamen cogitatione fingimus abeſſe, eò quòd per accidens,non aūt per ſe,nec quatenus natura præditum eſt corpus,hęc habeat,qualia ſunt rectū,curuū,inflexū, ceteraq́; id genus.Mathematicus igitur hoc pacto ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως circa quantitatem,formaſq́; à materia ſeparabiles uerſatur: & earum diffinitiones tradit,materiam non attingens.Quid eſt linea? μῆκος ἀπλατὲς, longitudo latitudinis expers. quid eſt triangulum? figura, quæ tribus rectis lineis continetur. & circulus figura,quæ ab vna comprehenditur linea.nulla hic materiæ mentio eſt, nullum eius veſtigium ob allatam modo rationem. nemo tamen ſuſpicetur mathematicas aliquo errore labi, quòd ita infirmo, ac debilis nitantur ſubiecto,quòd ſola cogitatione conceptum poſſidetur. nam imaginatione quidem Geometra tamquam abaco vtitur, magnitudines diuidendo,internalla dimetiendo,& lineas deſcribendo.hæc tamen omnia, non vt figmenta quędam, ſed vti res quaſdam,quę non nullam habent cum natura connexionem, nec mera ſomnia dici poſſunt: nec illarum imaginatione aliquo contaminantur mendacio mathematicæ diſciplinæ. quæ vt ſubiectę materiei conditione à Diuinis diſtant, ſic illas conſtanti,certaq́; rationum demonſtratione longe antecellunt.Sed recenſemus iam reliquas mathematicæ ſpecies. Altera igitur facta diuiſione. dicimus mathematicam facultatē,aut in intellectilibus dūtaxat aut in ſenſilibus verſari;intellectilia vtrique appellantes,quaſcumque inſpectiones anima ipſa per ſe ipſam excitat, à materialibus ſeſe vindicans formis. atque huius ſanè generis duas principes, longeq́; præſtantes ponimus ſpecies,Arithmeticam & Geometriam. Eius vero generis, quod in ſenſilibus officium, atque opus, exercet ſuum,ſex fieri ſolent partes.Mechanica,Aſtrologia,Optica,Geodeſia,Canonica,vel Muſica,& ſupputatrix.Geometria rurſus diuiditur in planorum, & ſolidorum contemplationem, quæ ſtereometria appellatur. ſi quidem circa puncta, & lineas peculiaris quædam non eſt tractatio, quoniam neq; figura in his vlla ſine planis, vel ſolidis fieri poſſet.Geometria enim nihil aliud vbique agit,niſi vt plana,& ſolida vel conſtituat, vel iam conſtituta inter ſe comparet,aut diuidat. Arithmetica ſimiliter diuiditur in numerorum linearium,& planorum, & ſolidorum contemplationem;etenim ſpecies numeri per ſe conſiderat ab vnitate procedentes, ortuſq́; planorum numerorum, tum ſimilium,tum diſſimilium; & ad tertiam vſque auctionem progreſſus.Geodeſia,& ſupputatrix congruenter his non de intellectilibus numeris, vel figuris,ſed de ſenſilibus tractant. non enim ad Geodeſiam attinet cylindrum,vel conum metiri,ſed aceruos,vt conos metitur,& puteos vt cylindros,neque id rectis lineis intellectilibus,ſed ſenſilibus efficit, interdum quidem certioribus quodammodo,vt radijs ſolaribus,interdum vero craſsioribus,vt ſpartis, & perpendiculo.neque ſupputator ipſas per ſe ſe numerorum paſſiones conſiderat, ſed vt ſunt in ſenſilibus inuoluti. Rurſus Optica,& Canonica à Geometria,& Arithmetica ortum habent.nam Optica quidem radijs viſorijs tamquam lineis vtitur & angulis, qui ex his conſtant.diuiditur autem in tres partes,

in

in Opticam, quę generis nomen obtinuit, catoptricam, & ſcenographicam. Optica reddit cauſas eorum, quæ aliter quàm ſint, ſeſe nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum viſarum ſitus, ac diſtantias. Catoptrica circa varias, multipliceſq; verſatur reflexiones, & coniecturali cognitioni implicatur. Scenographrica oſtendit, quo pacto ea, quæ apparent in imaginibus, non inconcinna videantur, vel deformia, iuxta diſtantias, atque altitudines eorum, quæ deſignantur. non igitur veram æqualitatem, & concinnitatem imitandam præcipit, ſed eam, quæ aſpectum noſtrum concinne, & appoſite feriat, ita vt cum circuli repręſentandi ſint, interdum non circuli, ſed ellipſes deſcribantur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Muſica apparentes harmoniarum conſiderat proportiones, regularũ ſectiones adinueniẽs, et ſenſus vbique vtens adminiculo. Mechanica circa res ſenſiles, ac materiæ coniũctas verſatur, dum aut bellica parat inſtrumenta, qualia Archimedes excogitauit, cum Marcellus Syracuſas graui premeret obſidione: aut admirabilia quædam ſummo cum artificio conſtruit ſpiritu, ponderibus, & ſpartis, qualia Cteſibius, Hero, & Archimedes non ſine maximo ſtupore ſuorum temporum hominibus ſpectanda propoſuerunt. Quis enim non admiretur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem? atque vel hac vna re mathematicas facultates, quæ talia præſtare poſſunt, non ſummopere veneretur? Percurrit propriũ mentitus ſignifer annum, Et ſimulata nouo cynthia menſe redit. ita ut eleganter exclamet Iuppiter apud Claudianum. Huccine mortalis progreſſa potentia curæ. Iam meus in fragili luditur arte labor. Quid quod aiũt Architam hac in re tantum potuiſſe, ut columbam ligneam in aere uolantẽ, quaſi anima præditam, ac ſeſe ſuſtentantẽ fecerit. Aſtrologia de mundanis ediſſerit motibus, de cœleſtium corporum magnitudine figura, atque illuminandi ui, nec non de eorundem à nobis diſtantia. Huius partes ſunt Gnomonica, Meteoroſcopica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimenſionem per gnomonum poſitiones uerſatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inſcribitur, diffuſe pertractat. Meteoroſcopica eleuationum differentias, & diſtantias ſyderum exquirit, atque alia multa, & uaria, quę ad Aſtrologiam attinent theoremata docet. Dioptrica diſtantias ſolis, & lunæ, aliorumq; aſtrorum, per eiuſmodi inſtrumenta inueſtigat. Ceterum de his hactenus ſummatim dixiſſe ſatis ſit. Sed quoniam plerique his præſertim temporibus ſola utilitate ad optimarum artium ſtudia excitantur, liberaleſq; colunt diſciplinas, uideamus obſecro, an mathematica nullius ſint commodi ad iuuandos humanæ uitę uſus, uti cęca quorundam turpiſſimi lucri cupiditas falſa iam prædicatione diuulgauit, ita ut qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitis, uel alio ſtudio occupatis hominibus palàm derideantur, tamquam in re inutili, atque uana oleum, & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aiunt, Minerua, quando nobis negocium eſt cum ijs, qui ſola quæſtus ratione perſuaderi poſſunt, & inuramus hanc notam ingenuæ, ac nobili diſciplinæ, ut lucrum, & diuitias pollicendo huiuſmodi hominum ſibi ſtudia, & gratiam comparet. Negent iſti primum, ſi poſſunt, mathematicas artes popularem utilitatem nullam habere, ſi mercatura cuius exercitatione tam multi diſtinentur ob magnam quæſtus occaſionem, ſine arithmetica tractari poteſt. Experiantur deinde ſiquid dimetiri queunt abſque Geodeſiæ adiumento. ſulcent maria, & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo aſtrologiæ nauticæ fulti præſidio. Quid medicus? quantum uel unius Hipocratis iudicio debet Aſtronomiæ, cuius ductu ſyderum curſus & lunæ præſertim cognoſcit. Vnde uniuerſa dierum, quos criticos uocant, dependet ratio, quàm diligenter cauendum eſt, ne grauiori aliqua curatione uexet ęgrotantem, dum luna, idq; præcipue morbi initio, à combuſtione, ut nunc loquuntur, ad oppoſitionis gradum proficiſcitur? Quantum denique commodi, atque utilitais affert Geometria, Arithmetica, & relique omnes in publicos, & priuatos uſus? cum nulla uel infimarum artium, ut finem conſequatur, matheſeos ope non egeat. quod ſingulas accuratius intuenti facile patet; & à nobis nullo negocio probaretur, niſi longam de re certa uitaremus diſputationem. colore, umbra, ſitu, raritate, ac denſitate mediorum, & refractione, quã uarios ornatus, admirabileſq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum uoluptate ſpectando decipimur? ſed errauimus, ſola enim vtilitate cum illis agendum eſt. quare omiſſis opticis, & pictoribus mera afferantur commoda. Quónam pacto igitur diffiteri poſſunt, quin mathematicæ ad uniuerſam ciuitatum utilitatum mirabiliter ualeant, tum actionum tempora dimetiendo, tum uarias uniuerſi reuolutiones demonſtrãdo? Ars uero militaris, quę politices dextra manus eſt, qua ratione uolens, quæ numeroſa eſt, pauciſſiuam oſtendere multitudinem, caſtra, aciesúe ad figuram circuli; ubi uero copias oſtentare cupit, ad figuram quadranguli format, niſi unius Geometriæ auxilio? Quomodo aut hoſtiũ vrbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, niſi

ipſius

ipſius Mechanices adiumento,quæ admirabiles ad oppugnandum,aut reſiſtendum fabricatur machinas,vti Archimedes aduerſus Marcellum,qui(nam Cteſibios,Architas,Priſcos,Eudoxos,Diogenetos miſſos facio)cum hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem predicaret,Rex Geometram admiratus rogauit,vt tantæ fiduciæ periculum faceret.Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in ſiccum eductam , grauiuſq; oneratam ſolus machinis ſuis ad ſe pertraxit , non ſecus ac ſi in mari remis,ac uelis agitaretur.contra poſtea Alexandriam regis eiuſdem nauim è littore in Mare deduxit , quod omnes ſiciliæ vires non potuerunt.Hac igitur arte qui inſtructi ſunt,vrbis mœnia tueri, & hoſtium oppugnationes eludere queunt. & habuiſſet tanto impetu res cœpta fortunam(ait Liuius,cum de Marcello Syracuſas oppugnante loquitur) niſi vnus homo Syracuſis ea tempeſtate fuiſſet.Archimedes is erat,vnicus ſpectator cœli,Syderumq;,mirabilior tamen inuentor,ac machinator bellicorum tormentorum, operumq;,è quibus ea quae hoſtes ingenti mole agerent, ipſe perleui momento ludificaret. libuit tam inſigne illuſtris hiſtorici de Archimede teſtimonium afferre, vt huius exemplo,quantum vtilitatis,ac commodi ſibi ac patriæ homines comparare poſſunt,intelligant,ſi nobilem Matheſeos facultatem diligenti cura,ſtudioq; excoluerint . ceterum diſſimulare nequeo,me multo grauius perturbari quorundam philoſophorũ, (vt ſibi videntur) impudenti audacia(Cur enim grauius non ferã mathematicas ab ijs calumniari,quorũ eſset munus eas colere,ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarũ cupiditas arctiſſimis deuinctos laqueis tenet)Sed aduerſus hoc philoſophorum genus nihil aliud dicã nũc,quòd ſciã Ariſtippos iſtos,& Epicureos, vt vere,& eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multę eruditionis, potius dolore quodã, ſtudioq; ſuam tegendi ignorantiam talia dicere,quàm quòd reuera putẽt matheſeos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adiumenti afferre ad omnes liberalium artium diſcinas,præſertimq; ad Platonis Ariſtotelisq; monumenta,quos hoc doctrinæ genere plurimũ delectatos fuiſſe planè conſtat . Qui enim hoc putent , cum multa quotidie neceſſaria imprimis, ſcituq; pulcherrima apud hos inueniant,quę quoniam mathematico more tradita ſunt,quaſi ſcopulos quoſdam euitare coguntur. Hinc Timæum non attingunt tãquã fabuloſum,& nullius pretij librũ.Hinc ſeptimum phyſicæ auſcultationis librum,multaq; alia Ariſtotelea ſuis diſcipulis,quòd,vt aiũt,inutilia ſint , explanare grauantur. ſed plura fortaſſe dicta ſunt de hac re , quàm oportuit.nam vera matheſeos vtilitas,eximij fructus, incredibileſq; voluptates in ſola veritatis cognitione, ad quam nati ſumus, poſitæ ſunt. hac vna nos vere hominès, uereq; diuini luminis participes oſtendimus. cetera terrenam & fragilem præſeferunt conditionem.Age vero accedamus ad ea,quæ ad Geometram noſtrum ſpectant.Et primum de ipſo Euclide;deinde de inſcriptione,et ſcopodicamus. poſtremo de illius demonſtrationibus,quemadmodum à principio promiſeramus. Liberemus igitur,multos ab eo errore , quo perſuaſi credunt Euclidem noſtrum eundem eſſe & philoſophum megarenſem, & geometram,totamq; hanc rem breuiter explanemus.Fuit ſenior Euclides ex Megaris oppido,quod iſthmo adiacet,Parmenidis librorum in primis ſtudioſus , ac megaricæ ſectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes ſocratici,triginta tyrannorum metu cõfugerũt. Hic dialogos ſex conſcripſit,quos enumerat Laertius.vſus eſt probationibus non ijs,quę per aſſumptiones,ſed quę per concluſiones fiunt,ac magis dialecticę ſunt.ſucceſſorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui ϛοιχειώτης ac geometra,dictus eſt, tempore Primi Ptolemæi floruit,academiam diligenter coluit , & quotidiana ferè Platonis diſcipulorum conſuetudine egregie eruditus,Matheſim, quæ in Academia pręceptoris inſtituto tunc maxime vigebat , ita præclaro animi impetu eſt aggreſſus,vt progreſſus admirabiles,ac ſempiterna æui memoria digniſſimos in ea fecerit;conſtantiq; omnium doctorum teſtimonio principem locum ſibi vendicarit . nemo autem mihi ignotum eſſe arbitretur,Valerium Maximum ſcribere Platonem ſacrę aræ conductores ad Euclidem,tamquam ad primarium mathematicum reieciſſe.ſed nos Heronem , & Proclum matheſeos ſtudio inſignes ſequimur, vel potius Eudemum ac Theophraſtum ex peripateticis poſt præceptorem nobiliſſimos.hi namque hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris,quos de hiſtoria geometrica conſcriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo periſſe non ignoramus. Euclides igitur noſter poſt Hippocratem,Leontem,Teudium, & Hermotimum,qui geometrica elementa, alius poſt aliũ conſcripſerant,opus hoc vere aureũ,ſummo cum labore,præſtantiq; mentis iudicio contexuit. Multa quidẽ inuenerant ſuperiores illi homines excellenti quodã,ac propè diuino ingenij acumine. non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus , qui cum Platone verſati ſunt. Itaque Euclides

diſperſa

diſperſa collegit, collecta diſpoſuit, & quæ pinguius, negligentiuſq́ demonſtrata fuerant, ipſe ad abſolutas, ἀνελέκτουςq́ demonſtrationes redegit. magna profecto laus ſuperiorũ, multo tamen maior Euclidis, qui indigeſta eo compoſuit ordine, vt vel hac vna re perpetuam ſibi apud ſanę mentis homines laudem compararit. inchoata ita abſoluit, incerta ita firmiſſimis rationibus certiſſima effecit, vt nihil amplius propè in eo deſideretur. Iam duo ferè annorum millia abierunt, ex quo Euclides inter viuos cõnumeratus eſt. multos habuit aduerſarios, qui inuidiæ potius morbo, quàm veritatis amore illius ſcripta omni ſtudio labefactare ſunt conati; nullam tamẽ adhuc in illis ψευδογραφίαν, nullum errorem, nullum paralogiſmum ſeueri inquiſitores deprehendere potuerunt. Cetera vero præſtantiſſimi huius viri monumenta hęc habentur. Optica, Catoptrica, Muſica, Data, phænomena, ſcripſit etiam librum de diuiſionibus, conicorum libros quattuor, poriſmatum tres, vt ex Proclo, Pappoq́ conſtat, qui quidem ad manus noſtras non peruenerunt. Atque hæc ſunt, quæ inuenire potuimus de Euclide noſtro, cuius immortali beneficio Matheſis, quæ gręcũ mare ex Aegypto tranſgreſſa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, ſuam dignitatem, ſuoſq́ honores non ſine deorum voluntate eſt conſecuta. Nunc quæ ſtudioſorum mentes haud leuiter perturbat opinio de elementorum demonſtrationibus, paucis referatur. quamuis enim hæc diſceptatio nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maxime tamen ſolicitos habet, neſcio quo pacto huius diſciplinæ amatores; quippe quòd ſcire percupiant, cui nam tantum beneficij, atque adeo ſingulare munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re diſputarunt, Ioannes Buteo, & Petrus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorſus abiere ſententias. hic enim in ſuo Matheſeos proœmio non ſolum demonſtrationes Theoni (quod etiam alij dixerunt) aſcribendas putat, verum etiã ipſa elementa, tum quia ϛοιχειώτης vltimus fuerit, nulliuſq́ propoſitionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipſe ſuas editiones in elementa nominatim laudarit in primo commentario ſuper Ptolemai magnam conſtructionem, ita vt elementa ſibi eo iure vindicare poſſit Theon, quo antea Euclides. Idipſum ea quoq; probat ratione, quòd Euclidis demonſtrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in ſuis annotationibus in Euclidem hoc diſerte negat; veteremq́ pręclariſſimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos numquam ſine demõſtratione theoremata proferãtur; vt quæ nullã, ſi nuda fuerint, habeant vtilitatẽ, ac dignitatẽ; quodq́ vero ſimile ſit, verba illa ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν, ex quibus omnis effluxit diſputãdi occaſio, ita poſſint intelligi, vt dicamus, Theonem conſcripſiſſe quidem commentarios in elementa, ſed illos temporum calamitate periſſe, quemadmodum & quæ in eundem Pappus Alexandrinus ſcripſerat, conſeruato tamen titulo, qui poſtea Euclidi ipſi negligentur adiectus eſt. Nos autem medium ſecuti credimus libros de elementis ſuis ornatos demonſtrationibus ab Euclide nobis fuiſſe relictos. qui enim de hoc dubitare poſſumus, cum Proclus in commentarijs in X. propoſitionem, poſt recitatam Apollonij pergæi demonſtrationem hęc verba ſubiungat? πολλῷ δὴ οὖν κρείττων ἡ τοῦ ϛοιχειωτοῦ ἀπόδειξις hoc eſt lõge igitur melior eſt ſtichiotę (ita enim Euclidem appellat) demonſtratio, & ſimplicior, magiſq́ ex principijs. vt autem hoc vere aſſerimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonſtrationes fuſius, planiuſq́ explicatas in lucẽ protuliſſe: quod apud Proclum obſeruari poteſt. Sic data nõ eo prorſus habentur modo, quo apud Pappum in ſeptimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoprica, quæ nos vidimus Romę in vaticana bibliotheca. Quamobrem ſi hæc omnium conſenſu Euclidi concedimus, etiam elementa concedenda ſunt, præſertim cum verbis potius, quàm re ipſa Theon ab eo diſcrepet in demonſtrandi ratione. ſunt igitur illę quidem demenſtrationes Euclidis, ſed eo modo conſcriptæ, quo olim Theon Euclidem ſecutus ſuis diſcipulis explicauit. Non inutile autem, nec iniucundum illud legentibus fore crediderim, ſi Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis noſtri inſignes huic diſputationi ſententias, tamquam coronidem addidero. poterunt enim Geometriæ candidatis eſſe loco orationis copioſæ, atque elegantis. Plato igitur vt neceſſariam prorſus facultatis huius cognitionem futuro philoſopho palam oſtenderet, verba hęc pro foribos gymnaſij poſuit. οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. nemo rudis Geometrię huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui poſt præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematum, ac Geometrię ignaro gymnaſium ingredienti, Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας. anſas enim philoſophiæ non habes. Quid vero de noſtro Geometra habemus dicere? Hic Ptolomeo Regi primo interroganti,

an alia

an alia facilior, atque commodior eſſet, diſcendæ Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla, inquit, ò Rex eſt via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quàm conſtantem igitur animi diligentiam, alacremq; diſcendi voluntatem iuuenes ad hæc ſtudia afferre oporteat, non ſolum Geometriæ, quæ per ſe nobiliſſima eſt, ſed & totius philoſophię cauſſa, nos tantorum virorum teſtimonijs declaraſſe ſit ſatis. Dicamus iã de operis inſcriptione, ſimulq; de Auctoris propoſito. Nã quoties illa ab operis argumento deſumpta eſt; explicatione vnius, & alterum fermè cognoſcitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legiſſe Ευκλείδου στοιχειώσις. qui vero ex Theonis ſententia hoc opus nobis exortum reliquit. Ευκλείδου στοιχείων βιβ. ιε. Idem tamen vtraque ſignificat, ſiue illa ſit Elementaris inſtitutio, ſiue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, ſed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicũque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõceſſiſſe, verborum illorum ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν permotus teſtimonio. nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Ariſtotelem commentarios ipſe compoſuit, ſe ex Hamonij Hermeæ colloquijs, ac diſputationibus collegiſſe, ingenue prorſus grati animi exemplo profeſſus eſt. Haud tamen negauerim Theonis auditorẽ, cum nomẽ ſuum ſuppreſſerit, voluiſſe nos totum hunc laboris, ac induſtriæ fructum Theoni dũtaxat acceptum referre. At enim quæret fortaſſe aliquis, nec iniuria profecto, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, ſolum protulerit. cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, alijſq; dici ſoleat, adiungendum erat omnino, cuiusnam rei illa eſſent elementa, elementorumve inſtitutio, vt à latinis poſtea factum eſt, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omiſſum diceremus ratione, quia ſtatim idipſum ex primis verbis de puncti notione cognoſcitur; aut Hamonium ſecuti, qui Porphyrianam inſcriptionem ab eadem culpa defendit, affirmaremus hanc inſcriptionem κατ᾽ ἐξοχὴν, ac quandam Geometriæ excellentiam; & ſi ex nomine, quod multis commune eſt, factum ſit, de Geometricis tantum elementis intelligi poſſe, ſic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ ſtudium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt proclus ſcribit) alia quidem elementa appellare conſueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet ſcientiam, & ex quibus apparet ſolutio eorum, quæ in ipſis dubitare contingit. Vt enim vocis literatæ ſunt principia prima, & ſimplicia, & indiuiſibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, orationq; ex his conſtat, ſic & totius Geometriæ ſunt quædam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ ſequuntur, perq; omnia peruadentia, & multorum accidentium præbentia demonſtrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcumque ad plura pertinent & ſimplicẽ quandam ſuauitatem habent, non tamen eam, quæ eſt elementorum; propterea quòd eorum contemplatio non ſit communis omni ſcientiæ. Quæcumque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque ſcitum aliquod, aut elegans demonſtrant, hæc extra elementarium vim cadunt. Rurſus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum eſt, vt primum ſecundi apud Euclidem, & quartũ quinti; ſic & alia multa inter ſeſe elementa eſſe dicentur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quòd extrinſeci rectilineorum anguli quattuor rectis ſunt æquales, intrinſecorum recto æqualium multitudo, & contra ex hoc illud oſtenditur. eſtq; huiuſmodi elementum lemmati aſſimile. Aliter prętera dicitur elementum, in quod, cum ſit magis ſimplex, compoſitum reſoluitur. Ita vero non omne rurſus elementum dicetur, ſed quę principaliſſima ſunt eorum, quæ in rei effectæ ratione ſunt cõſtituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum ſunt elementa. iuxta hoc elementi ſignificatum & ab Euclide elementa conſtructa ſunt, alia quidem illius Geometrię, quę circa plana verſatur; alia vero eius, quæ circa ſolida. ſic & in Arithmeticis, & in Aſtronomicis elementares inſtitutiones multi conſcripſerũt. Propoſitũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuerſã Geometriã neceſſaria, hoc eſt principaliſſima, ſimpliciſſimaq;, at primis principijs maxime affinia theoremata, ſine quibus reliquæ huius ſciẽtię partes cõprehẽdi nõ pñt. Euclides.n. ipſe in alijs libris Ariſtarchus, Archimedes, Apollonius, Theodoſius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus, et reliqui ad eorum demonſtrationes his tamquam notiſſimis vbique vtuntur. Quod vero ad diſpoſitionẽ, ac methodum Geometricorũ ſermonũ attinet, ſciendum eſt (vt inquit

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias ſcientias certa quędam, & definita principia habere, ex quibus ea, quę ſequuntur, demonſtrat. quare neceſſe eſt ſeorſum quidem de principijs, ſeorſum vero de ijs, quæ à principijs fluunt pertractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia conſequuntur, rationibus confirmare. nulla enim ſcientia ſua demonſtrat principia, verum circa ea per ſeſe ſibi fidem facit, cum magis euidentia ſint, quàm quæ ex ipſis deriuãtur: & illa quidem per ſeſe, hæc vero deinceps per illa cognoſcit. Ita & naturalis philoſophus à determinato principio rationes producit, motum eſſe ponens; ita & medicus, & aliarum ſcientiarum, atq; artium peritus. Quòd ſi quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem commiſceat, is totam perturbat cognitionem: eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter ſe conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quę conſequuntur, ſunt diſtinguenda. quod ſanè Euclides in vnoquoque ſuorum librorum obſeruauit; quippe qui ante omnem tractationem communia huius ſcientię prĩcipia exponit: et ipſa in ſuppoſitiones, ſeu diffinitiones, poſtulata, et axiomata diuidit. differũt nãque hæc omnia inter ſe, nec idem eſt axioma, & poſtulatum, & ſuppoſitio, vt Ariſtoteles aſſerit. Cum enim is, qui audit propoſitionem aliquam, ſtatim ſine doctore vt veram admittit, eique certeſſimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per ſe ſe fidem faciat; verum tamen ſupponit, & eo vtenti aſſentitur, ea ſuppoſitio eſt, verbi gratia, circulum eiuſmodi eſſe figuram, communi quadam notione non percepimus, ſed audientes abſque vlla demonſtratione approbamus. Cum autem rurſus & ignotum ſit addiſcenti, quod dicitur, & tamen eo aſſentiente aſſumatur, tunc id poſtulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales eſſe. Quæ autẽ à principijs enaſcũtur, ea ſunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud eſt, in quo quippiam, cum primum non ſit proponitur inueniendum, ac conſtruendum. Theorema autẽ in quo quippiam in conſtituta iam figura ita eſſe uel non eſſe demonſtratur. In hac igitur elementari inſtitutione Euclidem quis non ſummopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit, theorematũ, atque problematũ? non enim oĩa aſſumpſit, quæ poterat dicere, ſed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios ſyllogiſmorũ modos vſurpauit, alios quidem à cauſis fidem accipientes, alios vero à ſignis profectos, omnes neceſſarios & certos, atque ad ſcientiam accõmodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diffinientem in eſſentialibus rationibus; demonſtrãtem vero in progreſſibus, qui à principijs ad quæſita fiunt. denique reſoluentem in ijs, qui à quæſitis ad principia fiunt regreſſibus. Quin etiam varias conuerſionum ſpecies tum ſimplicium, tum compoſitarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis conuerti poſſint, quæ ve tota partibus, & contra, & quę vt partes partibus. Poſtremo admirabilem omnium diſpoſitionem, antecedentiũq; & conſequentiũ ordinẽ, ac cohærentiã, vt nihil prorſus addi, aut detrahi poſſe videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietateſq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipſa inter ſe ſe comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma tranſit, eorumq; ortum declarat, & ſymptomata, quę in ipſis ſunt, demonſtrat. poſtea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem oſtendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat ęquale triangulo. Denique de ijs, quę in triãgulis rectangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à ſubtendente rectum angulum deſcribitur ad ea, quæ comprehendetibus ipſum fiunt.

In ſecundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarantur. poſtea de quadratis, quæ à lateribus obtuſiangulorum, & acutiangulorum triangulorum deſcribuntur, quam habeant proportionem, quæ à ſubtendentibus obtuſum & acutum angulum fiunt ad ea, quę à comprehendentibus deſcribuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum conſtituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias conſiſtunt.

In quarto libro de figurarum planarum inſcriptionibus & circumſcriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In ſexto de proportionibus figurarum inter ſeſe, de figuris ſimilibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quę vel deficiant parallelogrammis ſimilibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione ſecetur, de proportionibus circumferentiarum & angulorum, itemq́; ſectorũ in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In ſeptimo agitur de numeris primis, & compoſitis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura inueniatur. de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcumque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & ſolidis. de ſimilibus planis, & ſimilibus ſolidis.

In nono item de ſimilibus planis, de cubis, & ſolidis, & de numeris deinceps proportionalibus ſiue ab vnitate, ſiue ſimpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus magnitudinibus, itẽq́; de rationalibus & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad ſtereometriam ſpectant, hoc eſt ad ſolidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad ſolida corpora referũtur, videlicet quando ſint in vno plano, quando rectæ, ſeu perpendiculares ad planum, quando parallelę, quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis ſimul deſſerit, tũ de ſolidis angulis, poſtremo de ſolidis parallelepipedis, & nõnulla de priſmatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et priſmatibus; poſtea de conis et cylindris, demum de ſphęris.

In tertiodecimo de conſtitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellãt; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icoſaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema, ac media ratione ſectæ, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo ęquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphęra deſcriptorum comparatione.

In quintodecimo & vltimo de inſcriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundẽ lateribus, & angulis.

FINIS.

INDEX EORVM, QVAE IN HIS LIBRIS demonſtrantur præter ea, quę Euclidis ſunt.

IN PRIMO LIBRO.

IN SECVDDO LIBRO.

IN TERTIO LIBRO.

IN QVARTO LIBRO.

IN QVINTO LIBRO.

IN SEXTO LIBRO.

IN SEPTIMO LIBRO.

IN VNDECIMO LIBRO.

IN DVODECIMO LIBRO.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

Latus

IN QVARTODECIMO LIBRO.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

DIFFINITIONES.

I.

PVNCTVM EST, cuius nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium ſignificauit nobis punctum, quod eſt principium totius propoſitę contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum ſunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam oſtendant; non immerito negantes ſermones principijs ipſis conuenire comperti ſunt: quod etiam aſſerit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & tranſlationem quandam, punctum diffinierunt eſſe vnitatem poſitionem habentem: punctum enim poſitionem habet, vnitas non habet. Ariſtoteles in quarto diuinę phyloſophię libro. vbique, inquit, ipſum vnum aut forma, aut quantitate indiuiſibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas eſt, diuidi non poſſunt, id quidem, quod penitus eſt tale, & ſine poſitione, dicitur vnitas; quod vero penitus eſt tale, poſitionemq; habet, dicitur punctũ; & id quod vno modo diuidi poteſt, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, ſuperficies: quod vero omni ex parte, & trinam dimenſionẽ habet, dicitur corpus.

Punctum ſecundum Pythagoricos eſt unitas poſitionem habens.

I I.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Poſt punctum linea ſecundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad ſuperficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipſum, vt magnitudinum omnium principium per ſolam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem ſignificauit cum dixit, longitudinem eſſe latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημείου ῥύσιν *hoc eſt puncti fluxum dixerunt; alij ut Ariſtoteles* τὸ μέγεθος μοναχῇ διαιρετὸν ἢ ἐφ᾽ ἓν διαιρετὸν *hoc eſt magnitudinem, quae vno modo diuidi poteſt, nempe ſecundum longitudinem. lineae autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & craſſitudinem adiungimus, ſed vnicam duntaxat dimenſionem conſideramus; quemadmodum & cum agros metimur, ſuperficiem reſpicimus; cum autem puteos, ſolidum: omnes enim dimenſiones ſimul colligentes dicimus tantum eſſe ſpacium putei ſecundum longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem. ſenſum vero ipſius lineae habebimus, ſi diſiunctiones locorum illuminatorum ab vmbroſis inſpexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimenſionem non habet, ſed iuxta longitudinem, quae vnà cum lumine, & vmbra producitur,*

Punctũ magnitudinum omniũ principium.

Lineæ notio.

Superficiei notio.

Solidi.

Lineæ ſenſus unde habeatur.

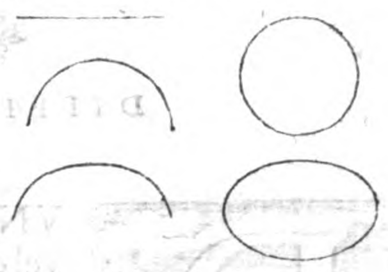
Lineæ ſimplices. Mixtæ.

ducitur. linearum aliae ſimplices, aliae mixtae. ſimplices ſunt recta, & circularis, quamquam recta ſimplicior ſit, reliquae vero omnes mixtae, quales ſunt coni ſectiones, helices, conchoides, ciſſoides, & aliae.

III.

Lineæ fines ſunt puncta.

F. C. COMMENTARIVS.



Linea tribus modis vtitur Euclides

Circularis linea p ſe nullos habet fines.

Ellipſis.

Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quae vtrinque finita eſt, ſermo habetur; cuius fines dicit eſſe duo puncta. Circularis autem linea per ſe nullos habet fines; ſed ſi aliquod in ea punctum accipiatur, idem erit & principium, & finis, diuerſa tamen ratione. quod diximus de circulari linea, idem & de ellipſi dici poteſt, quae ipſa in ſe ipſam vergit ſicuti circulus: ſi autem ſumatur portio circularis lineae, ſeu ellipſis, eius non aliter, quàm rectae lineae fines erunt duo puncta. Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum eſt.

IIII.

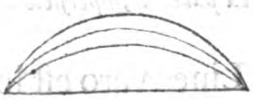
Recta linea eſt, quæ ex æquali ſuis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Plato q. rectā lineam diffiniat.

Archimedis diffinitio rectæ lineæ.

Hoc eſt recta linea eſt, quae aequalem continet diſtantiam, eam ſcilicet, quae inter ſua interijcitur puncta. quantum enim alterum punctorum ab altero diſtat, tanta eſt magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae. atque hoc eſt ex aequali ſuis interijci punctis. ſi autem in circumferentia circuli, aut alia quauis linea duo puncta ſumantur; eius portio, quae interijcitur, longe maior erit, quàm ſit dictorum punctorum diſtantia. ad hunc quidem modū rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus. Plato autem rectam lineā diffinit eſſe eam ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, *hoc eſt cuius media extremis obſiſtunt. illud.n. ijs, quę in recta linea ſunt, neceſſario contingit; ijs vero, quae in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde & aſtrologi dicunt ſolem deficere, cum in eadem recta linea conſtituitur ipſe, lunaq; et oculus noſter: obſiſtit enim ei tunc luna media exiſtens. At Archimedes, vt Proclus auctor eſt, dixit rectam lineam eſſe breuiſſimam omnium, quae eoſdem habent fines. quae quidem diffinitio recepta eſt in Campani editione. linea, inquit, recta eſt ab vno puncto ad alium breuiſſima extenſio in extremitates ſuas eos recipiens.*



V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei variæ diffinitiones.

Superficiei cognitio & ſenſus.

Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd craſſitudinis expers ſit. alij corporis terminum ipſam eſſe diffinierunt; alij magnitudinem binis diſtantem interuallis. ſuperficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum terminos iuxta longitudinem, ac latitudinem diſtinguimus. ſenſum vero quendam capere, quando vmbras aſpicimus, cum enim ipſae craſſitudinis ſint expertes, quòd partes terrae interiores penetrare non poſſunt; latitudinem, & longitudinem tantum habent. ſuperficierum aliae ſimplices ſunt,

aliae

alię mixte. ſimplices ſunt plana, & ſphęrica, reliquę vero mixtę, vt Cylindrica, conica, & quę à coni ſectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & ſphęroidum figurarum, & alię.

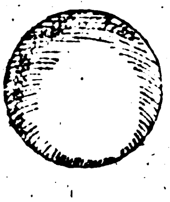
Superficies ſimplices & Mixtæ.

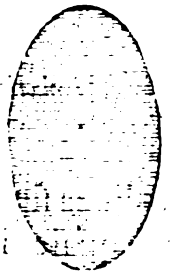
V I.

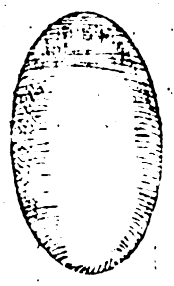
Superficiei fines ſunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineae fines ſunt puncta, ita non omnis ſuperficiei fines ſunt lineae; ſuperficies enim ſphęrae, vel ſphęroidis per ſe nullos habet huiuſmodi fines, niſi planis abſcindatur, nam tunc fines habet lineas ipſas, quę ex ſectione oriuntur. ſuperficiei autem circuli, & eius, quę ellipſi continetur, finis eſt linea vna, videlicet circumferentia, & ellipſis. quòd ſi ſecentur tunc pro finibus lineas habebunt.







Superficies Sphæræ, & Sphæroidis. Superficies circuli, & ellipſi cõtẽta.

V I I.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æquali ſuis interijcitur lineis.

F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philoſophi (vt teſtatur Proclus,) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc eſt ſuperficiem, & planum pro vno, eodemq; accipiebant. At Euclides, & qui eum ſecuti ſunt, genus quidem ſuperficiem faciunt, eius vero ſpeciem planum, vel planam ſuperficiem, quemadmodum lineę ſpeciem rectam lineam. & idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. vt enim recta linea eſt, qua ex ęquali ſuis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſima omnium, quę eoſdem habent fines, ita planam ſuperficiem dixerunt eſſe eam, quę ex ęquali ſuis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſimam omnium ſuperficierum eoſdem fines habentium, & omnino quęcunque ſunt rectę lineę diffinitiones, omnes ad planam ſuperficiem commodiſſime transferri poſſunt. Quòd cum multę ſint ſuperficierum ſpecies, Euclides planam tantum diffiniuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.

Superficiẽ, & planũ Antiqui pro eodem accipiebant.

Planæ superficiei uariæ diffinitiones

Euclides ſuperficiẽ planam tãtum diffiniuit.

V I I I.

Planus angulus eſt duabus lineis in plano ſe ſe contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

I X.

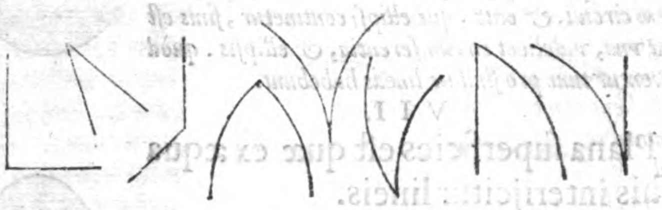
Quando autem quę angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prędicamento eorum quę ſunt ad aliquid ponentes, inclinationem eſſe dixerunt, vel linearum, vel planorum, quę ad ſe inuicem inclinata ſunt. alij in qualitate ipſum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt eſſe ſuperficiei, vel ſolidi. alij autem ad quantitatem referentes vel ſuperficiem, vel ſolidum eſſe aſſeuerarunt. diuiditur, inquiunt, is, qui in ſuperficie eſt angulus linea; qui in ſolidis ſuperficie. quod *autem his diuiditur nihil aliud eſt, niſi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. quare relinquitur, vt ſit ſuperficies, vel ſolidum. Quid igitur in tanta controuerſia dicendum? aut quid eorum dicemus eſſe angulum? Reſpondet Proclus angulum nihil eſſe eorum per ſe, ſed ex concurſu omnium conſtitui. contingere autem hoc non ſolum angulo, ſed & ipſi triangulo, quod quidem particeps eſt quantitatis; & idcirco ęquale dicitur, & inęquale, vt pote materię rationem habens, particeps quoque eſt qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam & ſimilia dicuntur triangula, & inęqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & exiſtentię figuram. indiget denique & determinantium ipſum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. atque ex his omnibus angulus conſtat. non tamen eſt vnum aliquod eorum. & eſt quidem diuiſibilis, & ęqualitatem, & inęqualitatem ſuſcipere poteſt, iuxta eam, quę in ipſo eſt, quantitatem.*

Angulorũ diuiſio.

Angulorum alij quidem in ſuperficiebus, alij vero in ſolidis conſiſtunt: & eorum qui in ſuperficiebus alij in ſimplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis ſunt alij ſimplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtriſque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.



X.

Cum vero recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens eos, qui deinceps ſunt angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque ęqualium angulorum: et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui maior eſt recto.

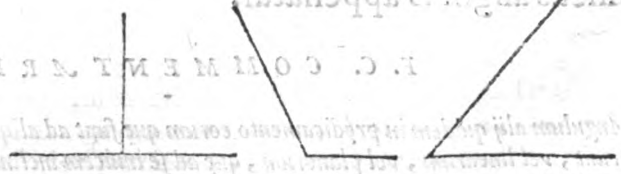
XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulus corniculaus.
Sermicirculi angulus.
Anguli deinceps qui ſĩt.

In diffinitione anguli obtuſi, & acuti genus ſubintelligi oportet, eſt enim vterque ipſorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non ſimpliciter quicumque minor eſt recto, is eſt acutus; neque quicumque maior recto eſt obtuſus. nam qui gręce κερατοειδὴς *dicitur, hoc eſt cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia ipſa, non tantum recto, ſed etiam omni acuto eſt minor, acutus autem non eſt. & ſemicirculi angulus omni recto eſt minor, ſed tamen non eſt acutus. quorum quidem cauſa eſt, quod ſunt mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi recto maiores apparent, non tamen ſunt obtuſi. Cum igitur rectum angulum diffinire propoſuiſſet Euclides rectã aſſumpſit lineam ſuper aliam rectam inſiſtentem; & angulos, qui ex vtraque parte ſunt, quos angulos deinceps appellat, inter ſe aequales facientem. Obtuſum autem, & acutum diffiniens non item aſſumpſit rectam lineam ad alterutram*



partem inclinatam, ſed per comparationem ad rectum explicauit. ipſe enim etiam non rectorum menſura eſt, quemadmodum & inęqualium ęqualitas. linęę vero ad alterutram partem inclinatę infinitę ſunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminiſſe oportet Euclidem hoc loco de ijs ſermonem habere, quę in eodem plano conſiſtunt. quare neque perpendicularem omnem diffiniuit, neque omnem angulum. ſolida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, ſed ad omnes, quę ipſam tangunt, in ſubiecto exiſtentes plano, dę qua in vndecimo libro agetur.

Angulus rectus eſt non rectarū mēſura, quemadmodum inæqualium æqualitas.

X I I I.

Terminus eſt, qui alicuius eſt finis.

F. C. COMMENTARIVS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt ſcribit Proclus, linęę namque terminus eſt, & finis, ſed ad ſpacia, quę ſunt in ſuperficiebus, & ad ſolida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui ſpacium vnumquodque determinat; & huiuſmodi terminum, finem eſſe dicit, non vt punctum dicitur linęę finis, ſed vt includit, & ſeiungit ab ijs, quę circumpoſita ſunt. eſt autem hoc nomen priſcę illi geometrię proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos diſtinctos ſeruabant, ex qua huius ſcientię cognitionem aſſecuti ſunt. huiuſmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipſum finem determinauit ſpaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum pręfinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus eſt, & finis; ipſum vero planum aliquod ſpacium eſt, & ſimiliter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini ſunt, & fines; ſpacium vero, quod his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

X I I I I.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Figurarum aliae planae, aliae ſolidę. planarum figurarum circulus quidem, & ellipſis, ſolidarum ſphęra, & ſphęroides vnico termino, alię pluribus terminis continentur.

Figurarum aliæ planæ, aliæ ſolidæ.

X V.

Circulus eſt figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertinentes ſunt ęquales.

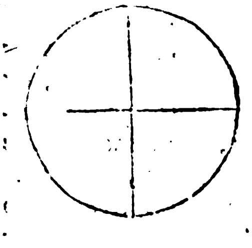
X V I.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Circulus planarum figurarum prima eſt, ſimplicitate quidem ſolidis pręſtans; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis*. Plana] *ad differentiam figurarum ſolidarum*. Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, quę pluribus lateribus continentur*. quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipſi, quę & ipſa vna linea continetur, ſed eam ellipſim vocant. liceat enim mihi nunc ſpacium ellipſi contentum etiam ellipſim appellare.* Ad quam] *ab ellipſis autem centro non plures, quam quattuor rectę linęę ęquales ad ambitum duci poſſunt.* ab vno puncto] *ex infinitis punctis, quę intra figuram ſunt, vnum duntaxat hoc pręſtare poteſt.* intra figuram exiſtente] *eſt etiam punctum extra figurę planum, à quo omnes rectę linęę ad circumferentiam ductę ſunt ęquales, quod non centrum, ſed circuli polus in ſphęricis appellatur.*



Ellipſis.

Circuli polus.

Diameter

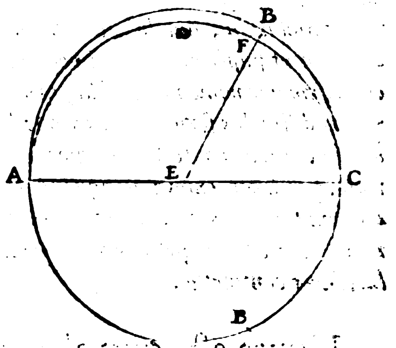
XVII.

Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum ſecat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorum.

Diameter circuli] *ſunt enim parallelogrammorum quoque diametri, ſed hę interdum διαγώνιοι hoc eſt diagonij appellantur. ſunt & diametri ellipſis, quarum duę axes dicuntur. pręterea etiam ſphęrę diametri ſunt, quę axes nuncupantur. circuli igitur propria eſt diameter.* recta quædam linea per centrum ducta] *poſſunt namque in circulo duci infinitae rectae lineę, quę per centrum non tranſeunt.* & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata.] *rectę lineę etiam per centrum ductę, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminantur, diametri non ſunt.* quæ & bifariam circulum ſecat.] *ſit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: et ſtante diametro intelligatur circumferẽtia A B C eleuari, ac ſuperponi circumferentię A D C. Dico circumferentiam A B C ipſi A D C congruere. ſi enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. cadat primum extra ſi fieri poteſt: & ex centro circuli, quod ſit E, ducatur E B ſecans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectę lineę à centro ad circumferentiam ductę inter ſe ſunt ęquales, erit recta linea E B ęqualis ipſi E F, hoc eſt totum parti quod fieri non poteſt. quarę circumferentia A B C extra ipſam A D C non cadet. ſimiliter demonſtrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. in ipſam igitur cadat neceſſe eſt: & circumferentia A B C congruet ipſi A D C. Quòd ſi circumferentia circumferentię congruit, & ſuperficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet ſuperficiei, quę eadem A C, & circumferentia A D C continetur. ex quibus ſequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentię, & ſuperficiem ſuperficiei ęqualem eſſe. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam ſecat. quod oportebat demonſtrare.*



XVIII.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Portio circuli eſt figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo ſunt differentem; à centro autem diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quę intra circulum deſcribuntur, ſeiunxit. nunc autem à diametro quid nam ſit ſemicirculus tradit, cum dicat ipſum contineri duobus terminis, ijsq; ſemper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia:

& rectam

& rectam lineam non eſſe quamlibet, ſed circuli diametrum, ſi quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quae tamen ſemicirculi non ſunt, quoniam circuli diuiſio non eſt facta per centrum. omnes autem huiuſmodi figurae biformes ſunt, & ex diſſimilibus conſtant. figurae enim contentae duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictae, vel duabus lineis mixtis, vt ſi duae ellipſes ſe inuicem ſecent, figuram continebunt, quae inter ipſas intercijcitur, vel mixta & recta, vt ellipſis dimidium. itaque ſemicirculus duabus quidem lineis diſſimilibus, ſed tamen ſimplicibus, atque ad ſe ſe applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito poſt circulum ad biformes acceſſit, quoniam duae rectae lineae ſpacium concludere nunquam poſſunt; recta autem linea & circumferentia poſſunt. & duae circumferentiae ſimiliter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt ſi duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium intericitur ſpacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum ſe inuicem non ſecent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At vero centrum ſemicirculi idem eſſe, quod & circuli centrum, manifeſte conſtat. diameter enim centrum in ſe habens complet ſemicirculum. Illud autem notatione dignum ſolam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres eſſe locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipſi, vel in ambitu vt in ſemicirculo, vel extra, vt in vna ſectionum conicarum, videlicet in hyperbola.

Centrũ tres habet locos.

X X.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

X X I.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

X X I I.

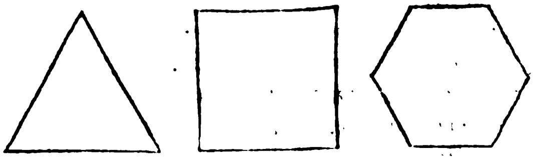
Quadrilateræ, quæ quattuor.

X X I I I.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

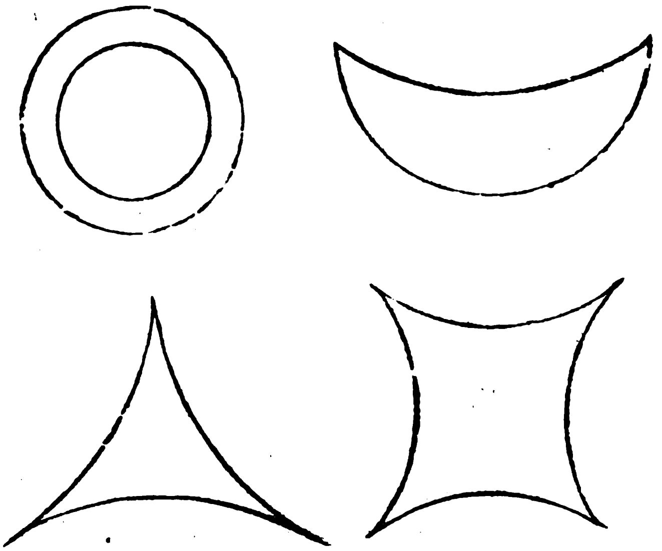
F. C. COMMENTARIVS.

Poſt circulum, ſemicirculum, & circuli portiones, tranſit ad figuras rectilineas, quae quidẽ ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duae rectae lineae ſpacium concludere non poſſunt, vti dictum eſt. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum duntaxat figurarum, vtpote quae magis elementares ſunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae ſimplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtriſque. & earũ, quae ſimplicibus, aliae quidem ſimilibus ſpecie continentur, vt rectilinea, aliae ſpecie diſſimilibus, vt ſemicirculi, & circulorum portiones. earum inſuper, quae ſpecie ſimilibus aliae circulari cõprehenduntur linea, aliae recta. At earũ quae circulari, aliae duabus, aliae pluribus continentur & vna quidem circulus ipſe, quae vero duabus, aliae angulorum expertes, ſunt,



Figurarum planarum diuiſio.

Corona. *ſunt, vt corona, quae concentricis circulis terminatur, alię angulares ut meniſcus. earum quae pluribus, quàm duabus continentur, proceſſus eſt in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps ſunt circumferentijs quędam figurae comprehendũtur. ſi enim tres circuli ſe ſe contingant, ſpacium concludũt trilaterum, quod tribus circumferẽtijs terminatur, ſi vero quattuor, quattuor circumferentijs, & deinceps ſimiliter. poſtremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.*



XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſiue æquicrure, quod duo tantũ æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.

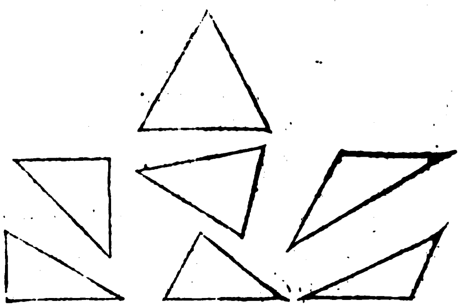
XXVIII.

Obtuſiangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

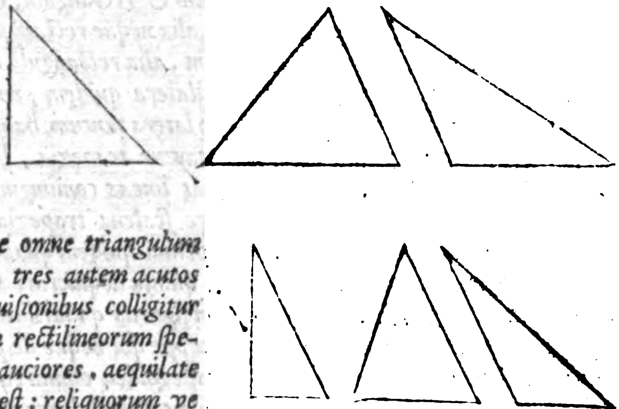
F. C. COMMENTARIVS.



Triangulorum diuiſio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & pręcedit ea, quae à lateribus tamquam nota, ſequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipſi anguli, videlicet rectus, obtuſus, & acutus ſolis rectilineis figuris conueniunt: aequalitas verò laterum, & inequalitas inuenitur etiam in ijs, quae rectilineae non ſunt. dicit igitur triangulorũ alia eſſe aequilatera, alia acquicruria, alia ſcalena, vel enim omnia latera aequalia ſunt, vel omnia inequalia, vel duo tantũ aequalia. Rurſus triangulorum alia rectangula, alia obtuſiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtuſiangulum, quod vnum

habet

habet obtuſum, fieri enim non poteſt, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtuſos angulos habeat: acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim ſatis eſt vnicum acutum habere, omnia ſi quidem triangula hoc modo acutiangula eſſent, namque omne triangulum duos habeat acutos neceſſe eſt, tres autem acutos acutiangulum ſolum. ex his diuiſionibus colligitur ſeptem tantum eſſe triangulorum rectilineorum ſpecies, & neque plures, neque pauciores. aequilaterum enim acutiangulum tantum eſt; reliquorum vero vnumquodque eſt triplex; nam aequicrure vel rectangulum eſt, vel obtuſiangulum, vel acutiangulum: & ſimiliter ſcalenum vel rectangulum, vel obtuſiangulum, vel acutiangulum.



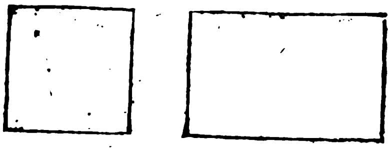
Septem triã gulorum rectilineorum ſpecies.

X X X.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.

X X X I.

Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non eſt.

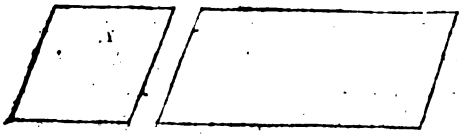


X X X I I.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

X X X I I I.

Rhomboides, quæ & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe ęquales habet, neque ęquilatera eſt, neque rectangula.

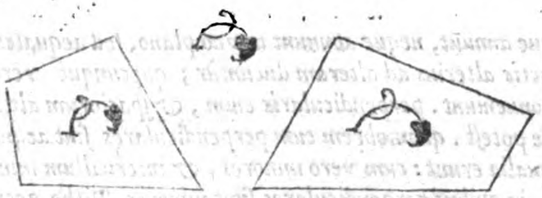


X X X I I I I.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarũ aliae aequilaterae ſunt, aliae non aequilaterae. rurſus aliae rectangulae; aliae non rectangulae. quae igitur aequilaterae, & rectangulae ſunt quadrata appellantur. quae vero rectangulae & non aequilaterae, altera parte longiores: & quae aequilaterae, & non rectangulae, rhombi. & poſtremo quae neque aequilaterae, neque rectangulae latera habent, & angulos, qui è regione ſunt inter ſe aequales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliae parallelogramma ſunt, quae la-



Quadrilaterarum figurarum diuiſio.

Quadratũ.

Altera pars longius.

Rhombus.

Rhomboides.

Quadrata. τετράγωνα

Rhomboidea.

Rhombus.

Trapezia.

Trapezoidea.

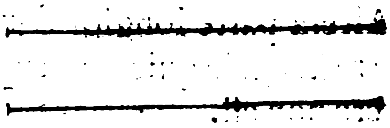
Trapezia aequicruria, & Scalena.

tera ex oppoſito parellela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non habent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera ſunt vt quadrata, quae à graecis τετράγωνα *appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, vt rhombo idea, quae figuram rhombo ſimilem habent. alia rectangula quidem, ſed non aequilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus. non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorſus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, hęc vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero inaequalia. & illa aequicruria trapezia, hęc ſcalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur figura ſeptem modis conſtituitur. nam prima quidem quadratum eſt, ſecunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta aequicrure trapexium, ſexta ſcalenum trapezium, ſeptima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non parallelogramma diuidere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogrãmo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellauit trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum ineſt proprietas, nempe ex oppoſito latera & angulos habere aequales; quod ipſe in rhomboide tantum poſuit, ne ſolis negationibus ipſum diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus enim proprijs caremus rationibus, communibus vti neceſſarium eſt. videtur autem rhombus dimotum eſſe quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quòd iuxta latera quidem hęc ab illis non differunt, ſed iuxta angulorum dumtaxat obtuſitates, & acumina, cum illa rectangula ſint.*

In quibus proprijs rõnibus caremus, cõmunibus utendum.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineę ſunt, quę cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producãtur, in neutram partem inter ſe conueniunt.



F. C. COMMENTARIVS.

Quae nam ſint parallelarum, ſeu aequidiſtantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoſcantur, poſtea diſcemus. nunc quae ſint parellelae his verbis diffinit. Quæ cum in eodem ſint plano] *ſi enim altera quidem ſit in ſubiecto plano, altera autem in ſublimi iuxta quamuis poſitionem, inter ſe non conueniũt, non tamẽ propterea parallelae ſunt.* Et ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conueniunt] *nam rectae lineae non parallelae, ſi aliquatenus producantur, non conuenient; in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas deſignat, neque hoc ſimpliciter, ſed ex vtraque parte, in infinitum produci, & non conuenire. fieri namque poteſt, vt non parallelae etiam ex vna quidẽ parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. annuentes enim in hac parte, in altera plurimum diſtant. cauſſa autem hęc eſt, quoniam duae rectae lineae ſpacium aliquod comprehẽdere non poſſunt, quòd ſi ex vtraque parte annuant hoc non continget. & Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Poſſidonius vero parallelae, inquit, ſunt, quae neque annuũt, neque abnuunt in vno plano, ſed aequales habent omnes perpendiculares, quae à punctis alterius ad alteram ducuntur; quęcunque vero minores faciunt perpendiculares inter ſe conueniunt. perpendicularis enim, & ſpaciorum altitudines, & linearum interualla determinare poteſt. quamobrem cum perpendiculares ſint aequales, & rectarum linearum interualla aequalia erunt: cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter ſe ad eas partes, in quibus perpendiculares ſunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus ijs, quae ſcripſit Euclides, eas aptiſſime exemplo declarauit. dixit enim rectas lineas parallelas eſſe, quales in parietibus, vel pauimento columnarum vmbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum ſit vide apud Se-*

Poſsidonius parallelas aliter diffinit.

Perpendicularis ſpaciorum altitudines et linearũ interualla determinat.

renum

renum in fine libri de ſectione Cylindri. Poſt diffinitiones ſequuntur poſtulata, deinde axiomata, ſeu communes notiones. poſtulata autem & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino illud habent commune, vt non indigeant demonſtratione aliqua, aut geometrica fide, ſed ſumantur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae ſequuntur. at differunt axiomata à poſtulatis eodem prorſus modo, quo theoremata à problematibus. vt enim in theorematibus quidem id, quod ſubiecta conſequitur, perſpicere & cognoſcere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita & in axiomatibus ea ſumuntur, per quae ſeſe manifeſta ſunt, noſtriſq́; inſitis notionibus ſunt in promptu; in poſtulatis vero ea ſumere quęrimus, quae facilia, parabiliaq́; ſunt, & in quibus ſumendis cogitatio non defatigatur, quęq́; nulla neque varietate, neque conſtructione indigent.

Axiomata a poſtulatis differunt codẽ modo, quo theoremata a problematibus.

POSTVLATA.

I

Poſtuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

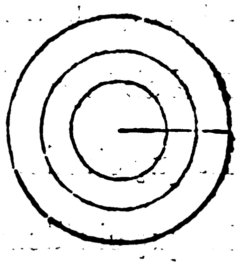
II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.

F. C. COMMENTARIVS.



Tria hęc & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in poſtulatis neceſſario collocanda ſunt, ex Gemini ſententia. nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, ſequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam eſſe puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non decliuem fluxum. ſi igitur intelligamus punctum aequabili, & breuiſſimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum poſtulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis. ſi vero recta linea puncto terminata, ſimiliter intelligamus eius terminum breuiſſimo, & aequabili motu ferri, ſecundum poſtulatum facili, ſimpliciq́; aggreſſione comparatum erit. Quòd ſi rurſus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet poſtulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum à centro ad omnes circumferentiae partes.

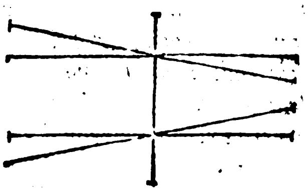
IIII.

Omnes angulos rectos inter ſe æquales eſſe.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifeſtum, & nulla indigens demonſtratione à nobis concedatur, poſtulatum tamen non eſt ex ſententia Gemini, ſed axioma. accidens enim quoddam per ſe rectis angulis dicit, nihil ſimplici notione facere iubens. ſi cui vero non ſatis conſtet rectos angulos omnes inter ſe aequales eſſe, is petat demonſtrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduertit huius conuerſum non etiam verum eſſe, nempe angulum recto aequalem omnino eſſe rectum, niſi rectilineus ſit; poteſt enim curuilineus quoque angulus recto aequalis oſtendi.

V.



Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidẽs interiores,& ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter ſe conuenire ex ea parte, in qua ſũt anguli duobus rectis minores.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à poſtulatis penitus reijciendum cenſet Proclus, cum theorema ſit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemęus in quodam libro ſoluere ſibi propoſuit. multis vero & diffinitionibus, & theorematibus in demonſtratione indiget, cuius conuerſum Euclides etiam tanquam theorema oſtendit. ſed de hoc inferius ſuo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem ęqualia, et inter ſe ſunt ęqualia.

II.

Et ſi ęqualibus ęqualia adijciantur tota ſunt ęqualia.

III.

Et ſi ab ęqualibus ęqualia auferantur, reliqua ſunt ęqualia.

IIII.

Et ſi inęqualibus ęqualia adijciantur, tota ſunt inęqualia.

V.

Et ſi ab inęqualibus ęqualia auferãtur, reliqua ſunt inęqualia.

VI.

A Et quę eiuſdem dupla, inter ſe ſunt ęqualia.

VII.

Et quę eiuſdem dimidia inter ſe ſunt ęqualia.

VIII.

B Et quę ſibi ipſis congruunt, inter ſe ſunt ęqualia.

IX.

Totum eſt ſua parte maius.

X.

C Duę rectæ lineæ ſpacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis ſcientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis ſcientijs communia ſunt: neque ſolum in magnitudinibus, ſed & in numeris, & motibus, & temporibus vera eſſe deprehenduntur: aequale enim & inequale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & diſcretis communia ſunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines verſatur, his omnibus tanquam manifeſtis indiget. communibus autem exiſtentibus vnuſquiſque vtitur ſecundum propriam materiam, quoad ipſa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius uero ut in temporibus ipſis utitur, & hoc modo propriae in unaquaque ſciẽtia cõcluſiones fiunt, licet axiomata cõmunia fuerint.

Et quæ eiuſdem dupla inter ſe ſunt æqualia. A

Hoc ex illo ſequitur, Si aequalibus aequalia adijciantur tota aequalia eſſe, nam quae dimidio ſunt aequalia, cum ipſum dimidium aſſumpſerint eiuſdem dupla fiunt, & inter ſe aequalia ob aequale additamentum; & hac ratione non ſolum dupla, ſed & tripla & eiuſdem etiam multiplicia omnia aequalia apparebunt.

Et quæ ſibi ipſis congruunt inter ſe ſunt æqualia] *hoc geometriae proprium eſt.* B

Duæ rectæ lineę ſpacium non comprehendunt] *Hoc non admodum manifeſtum videtur. quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adijcienda cenſuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autē omnis ſcientia duplex ſit. alia quidem circa immediatas propoſitiones verſatur, alia vero circa ea quę ex illis demonſtrantur, comparanturq́;, & omnino circa ea, quae principia conſequuntur, ſuam perficit tractationem. hęc rurſus in geometricis rationibus ſe ipſam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem diſpertiuit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quae non ſunt quodammodo comparare proponit, in apertumq́; proferre; & machinari: theoremata vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoſcereq́;, ac demonſtrare inſtituit. & illa quidem ortus, & poſitiones, & applicationes, & deſcriptiones, & circumſcriptiones, & bipartitiones, atque alia huiuſmodi conſtituere iubent; hęc vero ſymptomata, & quae ſubiectis geometriae per ſe inſunt, perſuadere, demonſtrationibuſq́; firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́; ſuis partibus, hęc omnia in ſe ipſo habere debet, Propoſitionem, Expoſitionem, Determinationem, Conſtructionem, Demonſtrationem, & Concluſionem. harum autem Propoſitio dicit quo dato quid quęſitum ſit, perfecta enim propoſitio ex vtriſque conſtat. Expoſitio ipſum per ſe datum aſſumens pręparat quęſtioni. Determinatio ſeorſum quęſitum quodnam ſit explicat. Conſtructio ea, quae dato deſunt ad quęſiti uenationem adijcit. Demonſtratio perite ex conceſſis quod propoſitum eſt colligit. Concluſio rurſus ad propoſitionem regreditur confirmans id, quod oſtenſum eſt. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot ſunt. maxime autem neceſſariae, & quae in omnibus inſunt Propoſitio, Demonſtratio, & Concluſio: oportet enim ante cognoſcere quęſitum, perq́; media oſtendere. & quod oſtenſum eſt concludere. Harum autem trium, vt aliqua deſit, fieri non poteſt. at reliquae ſępe aſſumuntur, ſępe vero, cum nullam afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expoſitio non ſunt in illo problemate. Aequicrure triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui. Conſtructio autem in compluribus theorematibus non eſt, cum ſatis ſit expoſitio abſque alia additione, vt ex datis propoſitum oſtendatur. Quando igitur deficere expoſitionem dicimus? cum in propoſitione nullum fuerit datum. quamquam enim propoſitio diuidatur in datum & quęſitū, non tamen hoc ſemper fit, ſed aliquando ſolum dicit quęſitum, quod cognoſcere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat aequicrure triangulum conſtituere, habens vtrumque aequalium angulorum duplum reliqui, ſed tantum quod oportet illud comparare. & fit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propoſiti ſumptio. etenim quid aequicrure, & quid aequale, vel duplum ſit cognoſcimus. hoc autem omni dianoiticae diſciplinae proprium eſſe dicit Ariſtoteles. nihil tamen nobis ſubijcitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare. hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipſam bifariam diuidere. ſeorſum igitur ponitur datum, & ſeorſum quęſitum. Cum autem propoſitio vtrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expoſitio; ſed cum deficit datum, & hae deficiant neceſſe eſt. expoſitio etenim eſt dati, & determinatio, quae propoſitioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, niſi quod aequicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propoſitio. ſi igitur propoſitio non habeat datum, & quęſitum, expoſitio quidem tacetur, quod non ſit datum; determinatio vero prętermittitur, ne eadem fiat, quae propoſitio. multa autem alia inuenias huiuſmodi problemata, pręſertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenire duas rectas lineas potentia commenſurabiles, quae medium comprehendant, & omnia, quae eiuſmodi ſunt. Animaduertendum tamen Archimedem quidem ſępe, vt in libro de quadratura parabolae, Pappum vero ferè ſemper propoſitionem ipſam omittere, contentos ex poſitione, ac determinatione, loco propoſitionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel poſitione, vel proportione, vel magnitudine, vel ſpecie: punctum enim duntaxat poſitione datur, linea vero, &

alia

Omne problema, & omne theorema perfectū ſex habet partes.

Propoſitio, demonſtratio & cōcluſio maxime neceſſariæ.

Cōſtructio deeſt, cum expoſitio ſatis ſit.

Archimedes & Pappus aliquādo propoſitionem omittunt.

Specie,

Magnitudine

Proportione

Cum poſitio uaria ſit, & conſtructio uariabitur.

Demonſtratio perfecta.

Geometricæ rationes neceſsitatē habent ob ſubiectam materiam.

Cōcluſio duplex.

Lemma.

Caſus.

Corollariū.

Inſtantia.

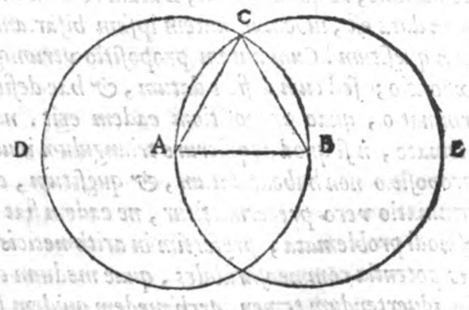
Deductio.

Cubi duplicatio.

alia omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum biſariam ſecare, ſpeciem anguli, quae data eſt, ſignificamus, nempe rectilineam, vt ne quęramus eiſdem methodis etiam curuilineum angulum biſariam ſecare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inęqualibus à maiori aequalē minori abſcindere, magnitudine datae ſunt. maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales ſint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus. Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, punctum poſitione datur. quare cum poſitio varia eſſe poſſit, & conſtructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipſius terminos. itaque cum datum quadrupliciter ſumatur, & expoſitio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur. demonſtratio vero interdum quidem quae demonſtrationis propria ſunt habere inuenietur, ex diffinitionibus medijs quęſitum oſtendens; hęc enim demonſtrationis perfectio eſt: interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet, ubique enim geometricae rationes neceſſitatem habent ob ſubiectam materiam, non ubique uero demonſtrantibus methodis perficiuntur. denique concluſio duplex eſſe ſolet, particularis, & uniuerſalis. nam cum in dato concluſionem fecerimus, ne uideamur particularia propoſuiſſe, ad uniuerſalem tranſimus concluſionem. Verum cum hęc ita determinata ſint, de ijs quae ipſis adnectuntur, breuiter diſſeremus, nempe quid ſit lemma, quid caſus, quid corollarium, quid inſtantia, quid deductio. lemma uel ſumptio proprie in geometricis eſt propoſitio fide indigens. cū enim uel in conſtructione, uel in demonſtratione aliquod ſumimus eorum, quae oſtenſa non ſunt, ſed ratione indigent, tunc id quod ſumptum eſt, veluti per ſe ambiguum inquiſitione dignum eſſe arbitrati, lemma ipſum appellamus, à poſtulato, & axiomate differens quatenus demonſtrari poteſt, cum illa abſque demonſtratione ad aliorum fidem faciendam per ſe ſumantur. Caſus autem differentes conſtructionis modos, & poſitionis mutationem indicat, nimirum tranſpoſitis punctis, uel lineis, uel planis, uel ſolidis, & omnino ipſius uarietas circa deſcriptionem uerſatur; ac propterea dicitur caſus, quòd ſit conſtructionis tranſpoſitio. Corollarium uero dicitur quidem & de quibuſdam problematibus, qualia ſunt corollaria Euclidi aſcripta ſed proprie dicitur corollarium, quando ex demonſtratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propoſitum non eſt; & corollarium ob id uocant, quòd ſit tanquam lucrum quoddam accedens pręter demonſtrationis propoſitum. Inſtantia uero totum orationis impedit curſum, uel conſtructioni, uel demonſtrationi occurens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, ſed remouere, & oſtendere falſam eſſe. Deductio autem eſt tranſitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud, quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propoſitum eſt, apparet, ut cum quęreretur cubi duplicatio tranſtulerunt quęſitum in aliud, quod hoc conſequitur, uidelicet in duarum mediarum inuentionem. & deinceps quęſierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duae mediae proportionales inueniantur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū conſtituere.



Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipſa A B triangulum æquilaterum conſtituere. centro quidem A interuallo autem A B circulus deſcribatur B C D. & rurſus centro B, interualloq; B A deſcribatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli ſe inuicem ſecant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum eſt circuli C B D, erit A C ipſi A B æqualis. rurſus quoniā B circuli C A E eſt centrum, erit B C æqualis B A. oſtenſa eſt autem et C A æqualis A B. vtraque igitur ipſarum C A C B ipſi A B eſt æqualis. quæ autem eidē ſunt æqualia, et inter ſe æqualia ſunt. ergo C A ipſi C B eſt æqualis. tres igitur C A A B B C in-

ter

ter ſe ſunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum eſt A B C, & conſtitutum eſt in data recta linea terminata A B, quod feciſſe oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quae ante dicta ſunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema eſſe manifeſto apparet; impouit enim nobis trianguli aequilateri ortum machinari. & propoſitio ex dato; & queſito conſtat. datur enim recta linea terminata, queritur autem quo pacto in ipſa triangulum aequilaterum conſtituatur. & precedit quidem datum, ſequitur autem queſitum, vt coniunctum etiam texere poſſis, ſi eſt recta linea terminata, fieri poteſt vt in ipſa conſtituatur triangulum aequilaterum. neque enim non recta exiſtente triangulum conſtituetur, quod ex rectis lineis conſtat, neque non terminata; angulus enim fieri non poteſt, niſi ad vnum punctum, infinitae autem extremum punctum non eſt. poſt propoſitionem ſequitur expoſitio. Sit data recta linea terminata A B] *& uides expoſitionem datum ſolum explicare, non etiam queſitum adiungere, poſt quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulum æquilaterũ conſtituere] *determinatio autem quoddammodo attentionis eſt cauſa, attentiores enim ad demonſtrationem nos reddit queſitum pronunciando, quemadmodum expoſitio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. poſt determinationem conſtructio ſequitur* [centro quidem altero rectæ lineæ termino; interuallo autem reliquo circulus deſcribatur, rurſusq; centro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius centrum erat, deſcribatur circulus, et à communi ſectionis circulorum puncto ad lineæ terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad conſtructionem vti poſtulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, & quouis centro & interuallo circulum deſcribere. vniuerſe enim poſtulata conſtructionibus, axiomata vero demonſtrationibus vtilitatem afferunt. deinde ſequitur demonſtratio, quae ex circuli diffinitione, & illo axiomate. Quae eidem aequalia, & inter ſe ſunt aequalia, concludit tres rectas lineas C A A B B C inter ſe eſſe aequales. vnde colligitur triangulum A B C aequilaterum eſſe, atque hec eſt prima concluſio, quae expoſitionem conſequitur; poſt hanc eſt ipſa vniuerſalis.* [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum conſtitutum eſt,] *ſiue enim duplam eius, quae nunc expoſita eſt, feceris datam, ſiue triplam, ſiue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; aedem conſtructiones, & demonſtrationes congruent. his appoſuit particulam* [quod feciſſe oportebat] *oſtendens concluſionem problematicam eſſe; etenim in theorematibus appoſuit* [quod oſtendiſſe oportebat] *namq; illa factionem alicuius, hec demonſtrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare voluimus, ac perſpicua facere, oportet autem illos, qui hec legent, in reliquis eadem querere, & que nam eorum aſſumantur, quenamue omittantur, & id, quod datum eſt, quotupliciter detur; & ex quibus principijs vel conſtructiones, vel demonſtrationes pendeant; horum enim perſpicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. ſed fortaſſe non inutile erit reliqua eiam triangula conſtituere. & primum aequicrure. Sit igitur A B, in qua oportet aequicrure triangulum conſtituere. & deſcribantur circuli, vt in aequilatero, producaturq; A B ex vtraque parte ad C D puncta. aequalis igitur eſt C B ipſi A D. quare centro quidem B, interuallo autem C B circulus C E deſcribatur, & rurſus centro A, & interuallo D A deſcribatur circulus D E, & à puncto E, in quo ſe ſe circuli ſecant ad A B puncta ducantur E A E B. quoniam igitur E A aequalis eſt ipſi A D, & E B ipſi B C: aequalis autem A D ipſi B C: erit & E A ipſi E B aequalis. ſed & maiores ſunt quam A B. aequicrure igitur triangulum eſt A B E. quod feciſſe oportebat. At propoſitum ſit ſcalenum conſtituere triangulum in data recta linea A B, & deſcribantur circuli centris, interualliſq;, vt in ſuperioribus. & ſumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F, & ducta A F producatur ad G; & G B iungatur.*

Propoſitio, quæ ex dato & quæſito conſtat.

Expoſitio.

Determinatio.

Cõſtructio.

Poſtulata cõſtructionib' utilia

Demonſtratio.

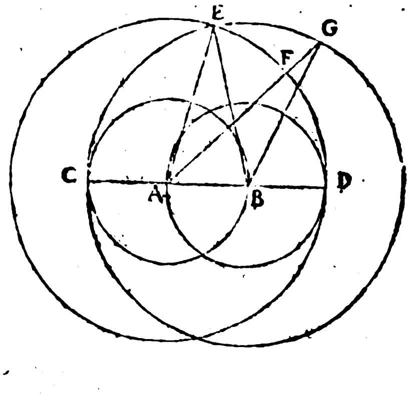
Concluſio prima, & particularis.

Cõcluſio uniuerſalis.

Quod feciſſe oportebat.

Quod oſtendiſſe oportebat.

Aequicruris trianguli cõſtitutio.



Scaleni triãguli conſtitutio.

quoniam igitur A cētrum eſt circuli D E,erit A F ipſi A D aequalis.maior igitur eſt A G quàm A D , hoc eſt quàm G B . centrum enim eſt ipſum B circuli C E . ergo G B eſt aequalis B C , ac propterea G B quàm B A maior . at G A maior quàm G B . tres igitur C B B A A G inęquales ſunt . quare ſcalenum triangulum eſt.tria igitur triangula ſunt conſtituta.ſed hęc diuulgata ſunt. Illud vero in his pulchrum inuenitur.Triangulum ſcilicet aequilaterum vndequaque aequale exiſtens vnico modo conſtitui , Aequicrure autem in duobus tantum lateribus aequalitatem habens, conſtitui dupliciter; data namque recta linea,vel ambabus aequalibus minor eſt,vt nos poſuimus, vel maior : ſcalenum vero vndique inęquale exiſtens tripliciter conſtitui . vel enim data recta linea maxima eſt,vel minima trium , vel alter a quidem maior , altera vero minor.& licet in vnaquaquc harum poſitionum vel protendenti , v el contrahenti ſe exercere . nobis autem quae ſunt expoſita ſufficiant . At ſi vniuerſe contemplabimur dicemus,problematum alia quidem ſimpliciter , alia vero multipliciter,& alia infinite conſtitui , & ea , quae ſimpliciter conſtituuntur (vt inquit amphinomus) ordinata appellantur, & quae conſtituuntur multipliciter,media,quae vero finite,inordinata vocantur.Vide reliqua apud Proclum,fortaſſe enim hęc ſatis ſuperq́;.

Aequilaterũ triangulum unico modo cõſtituitur. Aequicrure dupliciter. Scalenum tripliciter.

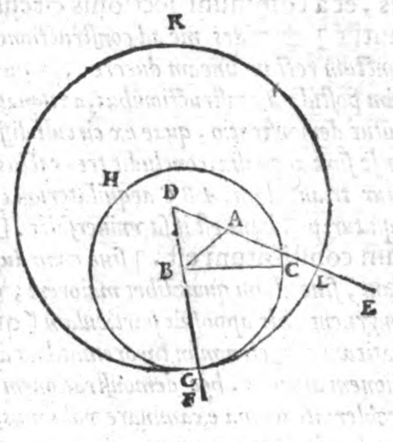
Problemata ordinata. Media. Inordinata.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctũ datæ rectæ lineę ęqualẽ rectam lineã ponere.

Poſtul. 1. Prima huius Poſtul. 2. 3. Diffin. 15. Com. no. 3. Com. no. 1.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipſi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. ducatur à puncto A ad B recta linea A B: et in ipſa conſtituatur triangulum ęquilaterum D A B , producanturq́; in directum ipſis D A D B rectæ lineæ A E B F. et centro quidem B , interuallo autem B C circulus C G H deſcribatur. rurſuſq́; centro D, et interuallo D G deſcribatur circulus G K L.Quoniam igitur punctum B cētrum eſt C G H circuli , erit B C ipſi B G æqualis . & rurſus quoniam D centrum eſt circuli G K L , erit D L æqualis D G : quarum D A eſt æqualis D B. reliqua igitur A L reliquę B G eſt æqualis. oſtenſa autẽ eſt B C æqualis B G. quare vtraque ipſarum A L B C eſt æqualis ipſi B G. quæ autem eidem æqualia ſunt, et inter ſe ſunt æqualia. ergo & A L eſt æqualis B C. ad datum igitur punctũ A datę rectę lineę B C ęqualis poſita eſt A L.quod facere oportebat.

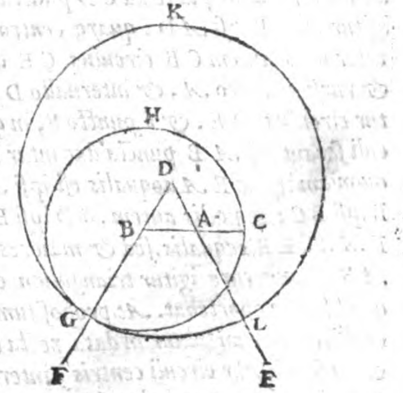


F. C. COMMENTARIVS.

Problematum,& theorematum. alia ſunt ſine caſu , alia multos habent caſus.

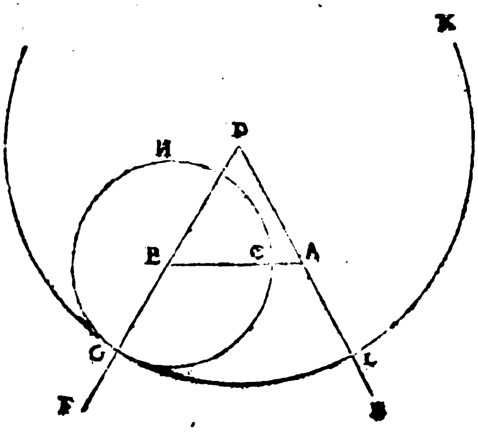
Problematum , & theorematum alia quidem ſine caſu ſunt , alia vero multos habent caſus. quęcunque igitur eandem vim habent per plures deſcriptiones peruadentem , & poſitiones permutantia eandem demonſtrationis rationem ſeruant , hęc caſum habere dicuntur . quęcunque vero iuxta vnam dumtaxat poſitionem , vnamq́; conſtructionem procedunt , ea ſunt ſine caſu. ſimpliciter enim caſus circa conſtructionem tum theorematum , tum problematum conſideratur . ſecundum igitur problema multos habet caſus . datur autem in ipſo punctum quidem poſitione, eo enim tantum modo dari poteſt ; linea vero ſpecie, & magnitudine datur . quęritur autem rectae lineae aequalem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque ſitum fuerit , & conſtat omnino punctum illud in eo-

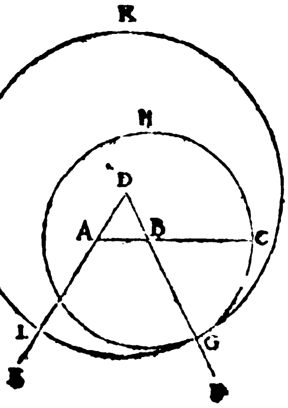
Secundũ problema multos habet caſus.



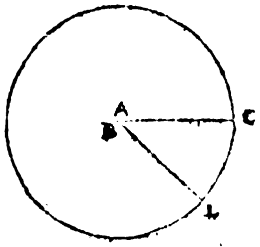
dem

dem eſſe plano, in quo & recta linea, non autem in ſublimi. omnibus ſi quidem planorum problematibus, & theorematibus vnum ſubijci planum exiſtimare oportet. at vero huius problematis caſus fieri iuxta puncti dati differentem poſitionem manifeſtum eſt. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipſa. & ſiquidem in ipſa, vel in altero eius termino, vel intra terminos. ſi vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectae lineae ducta angulum faciat; vel in directum ipſi ſiue à fronte, ſiue à tergo, ita vt producta linea ad dictum punctum pertineat. Euclides autem punctum datum extra rectam lineam ſumpſit, atque à lateribus. ſi enim in ipſa, fruſtra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quae iam ducta eſſet. at ſi in recta linea B C punctum ſumatur inter B C, vel in directum ipſi, producta nimirum B C ad A, ſimiliter in ipſa B A conſtituetur triangulum aequilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonſtratio eadem erit. Quòd ſi loco trianguli aequilateri, aequicruri vti libeat, nihilo minus eadem ſequentur. denique ſi punctum datum fuerit in altero rectae lineae termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, ſed ſola deſcriptio vnius circuli ſatis erit. centro enim dicto termino, in quo eſt punctum datum, interuallo autem reliquo, ſi circulus deſcribatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae lineae ductae fuerint, problema efficient.





Aequicruri triangulo pro æquilatero uti licet.

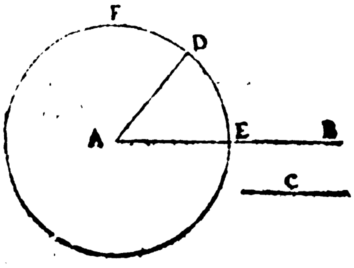


RPOBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abſcindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C; quarum maior ſit A B. oportet à maiori A B minori C æqualem rectam lineam abſcindere. ponatur ad A punctum ipſi C æqualis recta linea A D: & centro quidem A, interuallo autem A D circulus deſcribatur D E F. et quoniam A centrũ eſt D E F circuli, erit A E ipſi A D æqualis. ſed & C eſt æqualis AD. vtraque igitur ipſarum AE C ipſi AD æqualis erit. Quare & A E ipſi C eſt æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à maiori AB minori C æqualis Abſciſſa eſt A E. quod feciſſe oportebat.



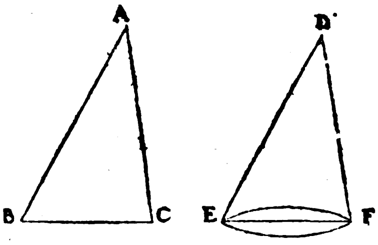
Ex antecedente.

poſt. 3.

Com. no. 1.

THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipſi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico & baſim B C baſi E F æqualem eſſe, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angu-
B lum A B C angulo D E F: et angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipſi D E F, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: et punctum B puncto E congruet; quòd A B ipſi D E ſit æqualis. congruente autem A B ipſi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. quare et C congruet ipſi F: eſt enim rurſus recta linea A C æqualis rectæ D F. ſed et punctum B congruebat puncto E. ergo et baſis B C baſi E F congruet. nā ſi puncto quidē B congruēte ipſi E, C vero ipſi F; Com.no.10 baſis B C baſi E F non congruit; duæ rectæ lineæ ſpacium comprehendent: quòd fieri non poteſt. congruet igitur B C baſis baſi E F, & ipſi æqualis erit. quare et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipſi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipſis æquales erunt. videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. ſi igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulū angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtēdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri] *in hac propoſitione duo ſunt, quę dantur, videlicet duorum laterum ęqualitas, & ęqualitas eorum angulorum, qui ęqualibus lateribus continentur. quae quidem proportione dati manifeſtum eſt. quęruntur autem tria, aequalitas baſium, aequalitas triangulorum, & aequalitas reliquorum angulorum. ſed quoniam fieri poteſt vt duo quidem latera duobus lateribus ſint aequalia, theorema autem verum non ſit, quòd non alterum alteri eſt aequale, ſed vtraque ſimul: propterea addidit, aequalia eſſe latera non ſimpliciter, ſed alterum alteri.*

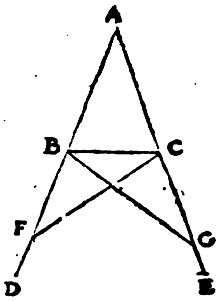
B Triangulo enim A B C congruente ipſi D E F, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea A B in ipſa D E: et punctum B puncto E congruet, quòd A B ipſi D E ſit æqualis, et reliqua.

Demonſtratio per ſuper poſitionē figurarū mathematicis uſitata. *Hic demonſtrationis modus, qui fit per ſuperpoſitionem figurarum preterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum ſcientiarum peritiſſimo, eſt etiam maximo vſui mathematicis. Archimedes enim etiam vſurpat non ſolum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, ſed etiam in ſolidis, vt in libro de conoidibus, & ſphęroidibus.*

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur indirectum ipſis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B; angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. ſumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iunganturq; F C, G B. Quoniam igitur A F quidem eſt ęqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B ęquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. baſis igitur F C baſi G B eſt ęqualis; et triangulum A F C ęquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, alter alteri; quibus ęqualia latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F ęqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt ęqualis A C; erit et reliqua B F reliquę C G ęqualis. oſtenſa eſt autem F C ęqualis G B. duę igitur B F, F C duabus C G G B ęquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C ęqualis angulo C G B: eſtq; baſis ipſorum B C communis. ergo et triangulum B F C triangulo C G B ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri; quibus ęqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur F B C eſt ęqualis angulo G C B: et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F ęqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt ęqualis ipſi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli: oſtenſus autem eſt & F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. æquicrurium igitur triangulorum, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt. quod oſtendiſſe oportebat.

3. Huius.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum alia ſimplicia ſunt, alia composita. dico autem ſimplicia quęcunque iuxta poſitiones, & concluſiones indiuidua ſunt, vnum habentia datum, et vnum quęſitum. vt ſi Euclides ita dixiſſet. omne triangulum aequicrure aequales habet, qui ad baſim ſunt, angulos. compoſita verò ſunt, quae ex pluribus conſtantia, vel poſitiones habēt compoſitas, vel concluſiones, vel etiam vtraſque. compoſitorum autem alia ſunt complexa, alia incomplexa. incomplexa ſunt quęcunque in ſimplicia theoremata diuidi non poſſunt, cuiuſmodi eſt quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quęſitum, ſed datum in ſimplicia diuidi minime poteſt, vt plura fiant theoremata: non enim ſi triangula aequales habeant angulos, vel eum duntaxat, qui eſt ad verticem, reliqua contingunt. complexa vero ſunt quęcunque in ſimplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes. fieri enim poteſt, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes; & in parallelogrammis ſimiliter. Omnium autem compoſitorum alia quidem iuxta concluſionem componuntur, ab eadem poſitione ortum habentia; alia vero iuxta poſitiones, & eandem omnibus concluſionem inferunt; & alia iuxta concluſiones, & poſitiones componuntur. Itaque iuxta concluſionem compoſitio eſt in quarto theoremate. in eo enim tria ſunt quae concluduntur, videlicet baſes aequales eſſe, & triangula aequalia, & reliquos angulos reliquis angulis aequales; quibus aequalia latera ſubtenduntur. iuxta poſitiones compoſitio inuenitur in theoremate, quod triāgulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune eſt. iuxta vtraſque autem

Theoremata ſimplicia.

Theoremata cōpoſita.

Compoſit. Theo. alia cōplexa, alia incomplexa.

Complexa theoremata.

Theorema compoſitū iuxta concluſionem.

Theo. cōpo. iuxta poſitiones.

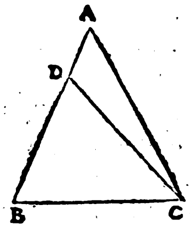
Complexorum Theorematũ alia, uniuerſalia, alia ex particularibus uniuerſale cõcludunt.

in illo. Diametri circulorum & ellipſium tum ſpacia, tum lineas ſpacia continentes bifariam diuidunt. Rurſus complexorum theorematum alia vniuerſalia ſunt, alia ex particularibus vniuerſale concludunt. omnino autem has compoſitiones geometrae ob breuitatem, ac reſolutiones excogitarunt. multa enim cum incompoſita ſint, non reſoluuntur: compoſita vero ſolum commoditates prębent ad reſolutionem, quae in principia tendit. his igitur conſideratis apparet quintum theorema compoſitum eſſe, tum iuxta datum, tum iuxta quęſitum, & vtrumque eorum, quae componuntur perfectum eſt ac verum. quamobrem reſolutio quoque vera eſt in vtroque. ſiue enim qui ad baſim anguli, ſiue productis aequalibus rectis lineis anguli ſub baſi aequales ſint, aequicrure triangulum erit. Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus. is enim primus dicitur animaduertiſſe omnis aequicruris angulos qui ad baſim eſſe aequales, ac more antiquorum aequales ſimiles appellaſſe.

Thales quinti Theorematis inuẽtor.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe ęqualia erunt.



3.huius.

4.huius.

Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe; ſi enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt maior. ſit maior A B; atque à maiori A B minori A C æqualis auferatur D B; et D C iungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A E; communis autem B C; erunt duæ D B B C duabus A C C B æquales, altera alteri; et angulus D B C æqualis angulo A C B. baſis igitur D C baſi A B eſt æqualis; et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus maiori; quod eſt abſurdum. non igitur inæqualis eſt A B ipſi A C. ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod demonſtraſſe oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema præcedẽti cõuertitur

Conuerſio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Conuerſio alia.

Quarto octauum conuertitur.

Theorematũ, q̃ cõuertũtur, alia p̃cedentia sũt alia cõuerſa.

Pręſens theorema duo hec in primis oſtendit, theorematum ſcilicet conuerſionem, & deductionem ad id, quod fieri non poteſt. conuertitur enim pręcedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, demonſtratur. conuerſio autem apud Geometras proprie dicitur, quando concluſiones, & poſitiones viciſſim in theorematibus tranſmutantur, & quod prioris eſt concluſio, in poſteriori poſitio fit: & contra poſitio tanquam concluſio infertur. vt in illo, Aequicrurium triangulorum, qui ad baſim anguli ęquales ſunt. poſitio quidem eſt aequicrure triãgulum: concluſio autem triangulorum, qui ad baſim ſunt, aequalitas. Et quorum anguli qui ad baſim aequales; ea aequicruria ſunt, vt in hoc theoremate, in quo poſitio quidem eſt, angulorum, qui ab baſim, aequalitas; concluſio autem aequalitas laterum, quae aequalibus angulis ſubtenduntur. eſt etiam alia conuerſio iuxta quandam duntaxat compoſitorum tranſmutationẽ. Si enim ſit theorema compoſitum à pluribus poſitionibus incipiens, & in concluſionem deſinens, ſumentes concluſionem, & vnam ex poſitionibus, vel etiam plures; concluſionem faciunt aliquã reliquarum poſitionum. & hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera aequalia; & angulus angulo aequalis, qui aequalibus lateribus continetur: cõcluditur aũt baſim baſi aequalẽ eſſe. At in octauo ponuntur duo latera aequalia; baſisq; baſi aequalis: & concluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, aequalem eſſe. Cum igitur duae ſint conuerſiones, ea quae proprie ſic dicitur, vniformis eſt, & determinata; altera vero varia, & non in vno, ſed in multis conuertens ob multitudinem poſitionum, quae in compoſitis theorematibus ſunt. Theorematum vero, quae conuertuntur, alia pręcedentia vocare conſueuerunt; alia conuerſa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipſo ſymptoma demõſtrãt, hoc pręcedens appellatur: & cum è contrario poſitionem quidem faciunt ſymptoma; concluſionẽ vero genus, cui illud accidit, conuerſum vocatur. vt omne triangulum aequicrure angulos qui

ad

ad baſim ſunt, aequales habet. hoc pręcedens eſt. Omne triangulum duos angulos aequales habẽs, latera quoque aequales angulos ſubtendentia habet aequalia, & eſt aequicrure. hoc cõuerſum eſt. & hęc de cõuerſionibus geometricis dicta ſufficiant. deductiones vero id, quod fieri non pot, in euidens abſurdum deſinunt, & cuius oppoſitã omnes fatentur. accidit autem ipſarũ alias deſinere in ea, quae cõmunibus notionibus, vel poſtulatis, vel poſitionibus opponũtur; alias in ea, quae prius demonſtratis contradicunt. Nam ſextum hoc theorema, quod accidit fieri non poſſe oſtendit, cum deſtruat communem notionem illam: Omne totum eſt maius ſua parte. octauum vero deſinit quidem in id, quod fieri non poteſt; non tamen deſtruit communem notionem, ſed id quod per ſeptimum theorema oſtenſum eſt. quod enim ſeptimum fieri poſſe negauit, hoc illud affirmans conſequi oſtendit ijs, qui quęſitum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non poteſt, ſumens quod cum quęſito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti abſurdo occurat, perq; illud poſitionem deſtruens, cõfirmat id quod à principio quęrebatur. omnino enim ſcire oportet mathematicas probationes omnes vel à principijs eſſe, vel ad principia: vt etiã inquit Porphyrius. & quae à principijs ſunt, itidem duplices eſſe. aut enim ex cõmunibus notionibus, & ſola euidentia per ſe fidem faciente emanant; aut ex ijs, quae ante oſtenſa fuere. Quae vero ad principia aut principia ponunt, aut deſtruunt. quae principia ponunt reſolutiones vocantur; atque his opponuntur compoſitiones. fieri enim poteſt, vt à principijs illis ad quęſitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud eſt, niſi compoſitio. quae vero principia deſtruunt, deductiones ad id, quod fieri non poteſt nuncupantur. aliquid enim eorum, quae conceſſa, manifeſtaq; ſunt deſtruere huius ipſius viae munus eſt: atque eſt hac ſyllogiſmus quidam, ſed non idem, qui in reſolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non poteſt iuxta ſecundum hypotheticarum ratiocinationum modum complexio eſt. vt ſi triangulorum aequales angulos habentium latera aequales illos angulos ſubtendentia aequalia non ſint; totum parti eſt aequale. atqui hoc fieri non poteſt. triangulorum igitur duos angulos aequales habentium latera quoque aequales angulos ſubtendentia aequalia erunt. Vtitur autem Euclides conuerſione quidem in propoſitione ipſa; vtpote qui concluſionem quinti theoretis, vt datum accipiens, poſitionem illius adiunxit, vt quęſitum; deductione autem ad id, quod fieri non poteſt in conſtructione, & demonſtratione vtitur. hec ex Proclo.

Deductiones ad id, qđ fieri non poteſt in euidens abſurdũ deſinunt.

Mathematicæ probationes uel a prĩcipijs sũt uel ad principia.

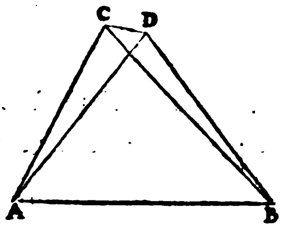
Reſolutiões.

Compoſitiones.

Deductiones ad id, ꝗ fieri non poteſt.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. VII.

In eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea A B duabus eiſdem rectis lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri conſtituantur ad aliud, atque aliud punctum C D, ad eaſdem partes vt ad C D, eoſdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita vt C A quidem ſit ęqualis D A, eundem, quem ipſa terminum, habens A; C B vero ſit æqualis D B, eundem habens B terminum: & C D iungatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis A D; erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur eſt A D C angulus angulo D C B. quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rurſus quoniam C B eſt æqualis D B; et angulus C D B æqualis erit angulo D C B: oſtenſus autem eſt ipſo multo maior; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primę rectæ lineæ, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.

5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propoſitionibus, quae ſcientiam

pariunt

Propoſitiones theorematum geometricorũ, arithmeticorũq; ut plurimũ affirmationes ſunt.

pariunt euenire conſueuit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipſarum proprium eſt, cum propoſitiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes ſint. Cauſſa autem eſt (vt inquit Ariſtoteles) quod vniuerſale affirmans ſcientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. at vniuerſale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonſtratio, neque ratiocinatio aliqua conſtat: ac propterea demonſtrantes ſcientiae plurima affirmantia oſtendunt: raro autem negantibus concluſionibus utuntur. hęc Proclus.

Theorematis uarij caſus.

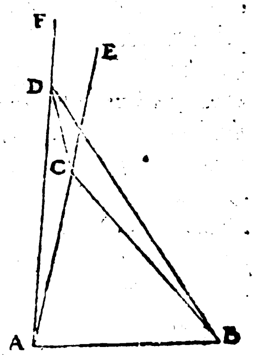
5. huius.

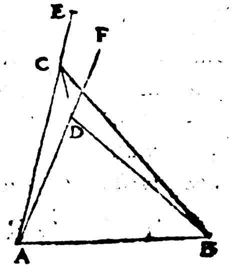
9 com. not.

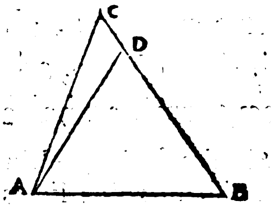
5. huius.

Theorema uero multos habet caſus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipſis. & ſiquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B ſecat alteram ipſarum A D D B, aut neutra neutram ſecat. cadat primum extra, ſecetq; A D ipſam C B, ut apparet in prima figura, & iungatur C D. cui quidem conſtructioni Euclidis demonſtratio congruit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obſcura quibuſdam viſa ſit, planius, & apertius ſic explicabitur. Itaque quoniam A C eſt aequalis ipſi A D, erit angulus A C D angulo A D C aequalis. angulus autem A C D maior eſt angulo D C B; quippe quòd totum maius ſit ſua parte. angulus igitur A D C angulo D C B eſt maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior eſt angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior ſit neceſſe eſt. Rurſus quoniam B C eſt aequalis B D; erit & angulus C D B aequalis angulo D C B. atqui oſtenſus eſt multo maior; quod fieri non poteſt. ſimiliter demonſtrabitur idem ſequi abſurdum ſi recta linea B D ſecet ipſam A C. cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neutra neutram ſecet; & producantur rectae linae A C A D in puncta E F. Quoniam igitur A C eſt aequalis A D, angulus A C D ad baſim angulo A D C aequalis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C ſub baſi aequalis angulo D C E. Rurſus cum B C ſit aequalis ipſi B D, angulus B C D angulo B D C eſt aequalis. ſed F D C angulus maior eſt angulo C D B. quare & D C E ipſo D C B eſt maior, pars ſcilicet toto; quod fieri non poteſt. Non aliter demonſtrabimus ſequi abſurdum, ſi punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipſis cadere non poſſe manifeſto conſtat. totum enim parti eſſet aequale. Videtur autem hoc, ut inquit Proclus, lemma eſſe octaui Theorematis: ſiquidem ad illius demonſtrationem confert, & neque ſimpliciter elementum eſt, neque elementare: non enim ad plura ſuam extendit vtilitatem. rariſſimum igitur ipſius vſum apud geometram inueniemus.

Theorema hoc ſequentis lemma eſſe uidetur.



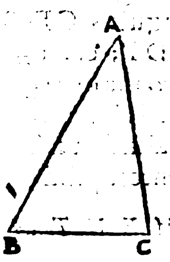


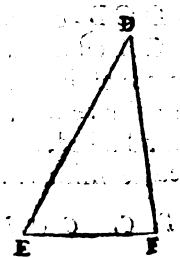


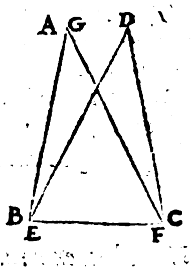
THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterũ alteri; habeant autem, et baſim baſi ęqualē: angulũ quoque, qui ęqualibus lateribus continetur angulo ęqualē habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; vt ſit A B quidē æquale D E; A C uero ipſi D F: habeant autem et baſim B C baſi E F æqualem. Dico







lem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F ęqualem eſſe. Triangulo enim A B C congruente ipſi D E F triangulo; et puncto quidem B poſito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, et C punctum puncto F, quoniam B C ipſi E F eſt ęqualis. Itaque congruente B C ipſi E F; congruent et B A A C ipſis E D D F, ſi enim baſis quidem B C baſi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, ſed permutantur; vt E G G F: conſtituentur in eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineę ęquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad eaſdem partes; eoſdem habentes terminos. non conſtituuntur autem; vt demonſtratum eſt. non igitur, ſi baſis B C congruit baſi E F, non congruent et B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipſi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et baſim baſi æqualem: angulum quoque ęqualibus lateribus contentum angulo ęqualem habebunt: quod demonſtrare oportebat.

In antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Octauum Theorema quarti conuerſum eſt, vt ſupra diximus, non tamen iuxta propriam conuerſionem, non enim totam illius poſitionem, concluſionem, totamq́; concluſionem poſitionem facit. Sed aliquam quidem ex poſitionibus, aliquam vero ex concluſionibus quarti theorematis contexens, vnum quid eorum, quae in illo data fuerunt, oſtendit.

Octauum Theorema quarti conuerſum eſt.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

A

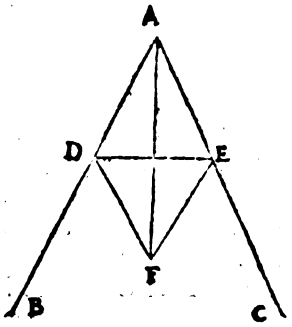
Sit datus angulus rectilineus B A C. Itaque oportet ipſum bifariā ſecare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C ipſi A D æqualis auferatur A E; iunctaq́; D E conſtituatur in ea triangulum æquilaterum D E F; & A F iungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam ſecari. Quoniam enim A D eſt æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales ſunt, altera alteri; & baſis D F æqualis baſi E F. angulus igitur D A F angulo E A F eſt æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam ſectus eſt: quod facere oportebat.

3. huius.

B

1. huius.

Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

A

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare] *Angulus hoc loco ſpecie datur, quippe qui rectilineus ſit, & non quilibet. namque angulum omnē bifariam ſecare ex elementari inſtitutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam eſt, num omnis angulus bifariam ſecari poſſit. Sectionis autem ratio non ab re diſtincta fuit: in quamlibet enim proportionem ſecare pręſentem conſtructionem trāſgreditur, verbi gratia in tres, vel quattuor, vel quinque partes aequales. nam rectum quidem angulum trifariam ſecare poſſumus, paucis eorum, quae poſterius tradentur, vtentes: acutū vero minime, niſi ad alias lineas, quae mixtae ſunt, tranſcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam ſecare docuit Nicomedes ex conchoidibus. alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirū ijs, quae à gręcis τετραγωνίζουσαι dicūtur, nos quadrātes appellare poſſumus. alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum. alij denique ex lineis ſpiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum ſecuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles ſint, pręſertim ijs, qui inſtituuntur, in pręſentia omittemus.*

Omnem angulum bifariam ſecare ex elementari inſtitutione non licet. Rectum angulum trifariam ſecare poſſumus, acutū uero minime, niſi ad lineas mixtas tranſcendamus.

B

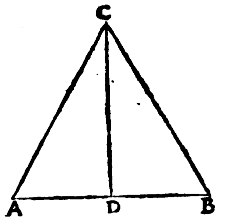
Iunctaq́; D E conſtituetur in ea triangulum æquilaterum D E F.

Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure conſtitui poteſt. *Idem etiam ſequetur ſi loco aequilateri tum in hoc, tum in ſequentibus aequicrure triangulum conſtituamus, & demonſtratio eadem erit.*

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

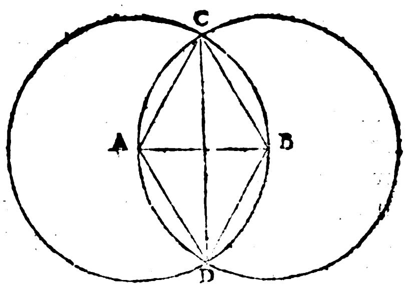
Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare.



Sit data recta linea terminata A B. oportet ipſam A B bifariam ſecare. 1.huius. conſtituatur in ea triangulum æquilaterum A B C; Ex antecedēte. & ſecetur A C B angulus bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam ſecari. Quoniam enim A C eſt æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales ſunt; altera alteri: et angulus A C D æqualis angulo B C D. 4.huius. baſis igitur A D baſi B D eſt æqualis. et ob id recta linea terminata A B bifariam ſecta eſt in puncto D: quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

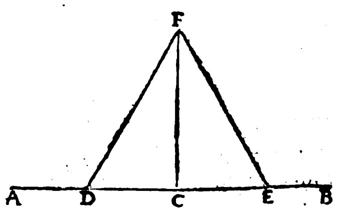
Hoc etiam Theorema eſt, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non poſſumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, vbicumque punctum accipiatur, in partes inęquales fit ſectio. etenim quae in eiſdem partibus eſt, in quibus recta linea infinita exiſtit, reliqua finita exiſtente neceſſario eſt maior. relinquitur igitur, vt ex vtraque parte finita accipiatur, quae bifariam ſecari debet.



Rectā lineā terminatam q̄uo Apollonius bifariā ſecat. *Apollonius vero Pergęus rectam lineam terminatam bifariam ſecat in hūc modum. Sit, inquit, recta linea terminata A B, quam bifariam ſecare debemus. & centro quidem A, interuallo autem A B circulus deſcribatur: & rurſus centro B, & interuallo B A deſcribatur alius circulus; & ducatur C D communes circulorum ſectiones coniungens, quae rectam lineam A B bifariam ſecabit. Iungantur enim A C C B, quae inter ſe aequales ſunt, cum vtraque ipſi A B ſit aequalis. communis autem C D; & D A eſt aequalis D B ob eandem cauſſam. angulus igitur A C D eſt aequalis angulo B C D. quare A B per quartum bifariam ſecta eſt.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

Datæ rectæ lineę à pūcto in ipſa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.



Sit data recta linea A B, et datum in ipſa punctum C. oportet à puncto C ipſi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quoduis punctum D: 3.huius. ipſiq; C D æqualis ponatur C E, 1. et in D E conſtituatur triangulū ęquilaterum F D E, et E F iungatur. Dico datæ rectę lineę A B à puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe F C. Quoniam enim D C eſt æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri: 8.huius. et baſis D F eſt æqualis baſi F E. angulus igitur D C F angulo E C F eſt æqualis: et ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos qui deinceps ſunt, angulos æquales inter ſe fecerit: Diffi.10. rectus eſt vterque ęqualium angulorum. ergo vterque ipſorum D C F F C E eſt

eſt rectus. datæ igitur rectæ lineę A B à puncto in ipſa dato C ad rectos angulos ducta eſt F C recta linea. quod feciſſe oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

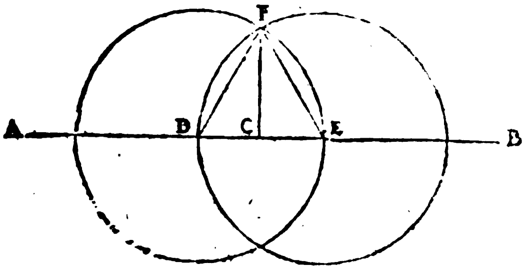
Datæ rectæ lineę à puncto in ipſa dato.] *linea ſpecie datur; punctum vero poſitione: quod vel in medio erit rectae linae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae linae ſumpſit. Quòd ſi in extremitate altera ſumatur, vel ipſam producentes, reliqua eodem modo conſtruemus; vel aliter propoſitum aſſequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C, & in linea A C ſumpto quouis puncto D, ab ipſa C B auferatur C E aequalis ipſi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus deſcribatur. Rurſusq́; centro E, & interuallo E D alius circulus deſcribatur: & à puncto F, in quo circuli ſe inuicem ſecant, ducatur F C. Dico eam ad rectos angulos eſſe. ſi enim iungatur F D, F E aequales inter ſe erunt. ſed & D C C E aequales; & cõmunis F C. Quare ex octauo anguli qui ad C etiam inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.*

* Problematis caſus.

Qũo Apollonius rectã lineam ad rectos angulos ducit.

3. huius.

Poſtul. 3.



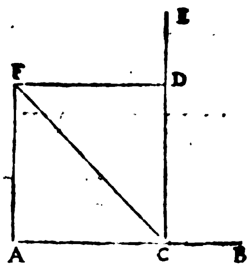
Si vero punctum in extremitate rectae lineae ſumatur, ita faciendum cenſet Proclus. Sit recta linea A B, datumq́; punctum A, & ſumatur in A B quod vis punctum C, à quo ipſi A B, quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipſi A C aequalis abſcindatur C D, angulus vero qui eſt ad C per rectam lineam C F biſariam ſecetur: atque à puncto D ipſi E C ad rectos angulos ducta occurat rectae lineae C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum eſſe. Quoniam enim D C eſt aequalis C A, communis autem C F, & angulos aequales continent, quòd angulus ad C biſariam ſectus eſt: erit & D F ipſi F A aequalis, & omnia ſimiliter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis eſt angulo ad D. angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat.

Quãdo pũctum in extremitate lineæ ſumitur quõ faciẽdum ſit.

3. huius.

9. huius.

4. huius.



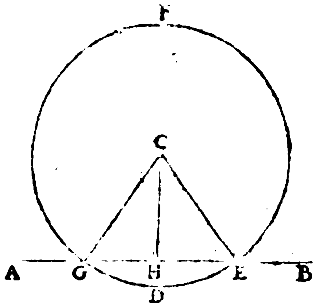
PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato pũcto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linca infinita A B, datum vero punctnm C, quod in ea uon eſt. oportet ſuper datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipſius A B rectæ lineę quod vis punctum D: et centro quidem C, interuallo autem C D circulus deſcribatur E F G: et E G in H biſariam ſecetur: iunganturq́; C G C H C E. Dico ſuper datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C; quod in ea non eſt, perpendicularem C H ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt G H ipſi H E, communis autem H C, duę G H H C, duabus E H H C æquales ſunt, altera alteri; & baſis C G eſt ęqualis baſi C E.

Poſtul. 3.

10. huius.



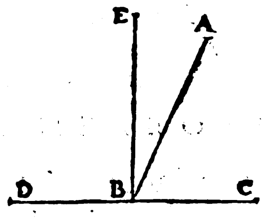
8.huius. angulus igitur C H G angulo E H C eſt ęqualis; & ſunt deinceps. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens eos, qui deinceps ſunt angulos, ęquales inter ſe fecerit; rectus eſt vterque ęqualium angulorum; Diffi.10. et quę inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit. ergo ſuper datam rectam lineam infinitam A B à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt C H, quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit. Perpendiculare antiqui gnomonen appellarunt. Perpendicularis plana, & ſolida. *Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indagauit, vtile ipſum ad aſtrologiam exiſtimans. perpendicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos eſt. quae autem ad angulos rectos, eadem eſt perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum ſubiecto eadem ſit, quemadmodum et gnomon. Rurſus perpendicularis duplex eſt, alia plana, alia ſolida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in ſubiecto plano ſit, plana appellatur: quando autem punctum ſit ſublime, atque extra ſubiectum planum, ſolida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, ſolida vero ad planum. Quare neceſſarium eſt illam non ad vnam rectam lineam angulos rectos facere, ſed ad omnes, quae in ſubiecto exiſtentes plano ipſam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia conſiſtant, ſermo procedat. At in linea quae eſt ad angulos rectos quoniam punctum in ipſa ſumptum eſt, nulla erit infinitatis neceſſitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipſam ſtatuatur. ſi enim non eſſet infinita, poterat ita punctum ſumi; vt extra quidem rectam lineam eſſet, indirectum autem ipſi, adeo vt protracta recta linea in ipſum incideret, & non fieret problema. Adde, quod niſi eſſet infinita, poſſemus etiam punctum ita ſumere, vt ſi duceretur perpendicularis, non in ipſam, ſed extra ipſam neceſſario caderet. His igitur de cauſſis recta linea, ad quam perpendicularis ducẽda eſt, infinita ponitur.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

* Cum recta linea ſuper rectam cõſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet.



Recta enim linea quædam A B ſuper rectam C D conſiſtens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos; vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales. ſi enim C B A eſt æqualis ipſi A B D, duo recti ſunt; diffi.10. ſin minus, ducatur à puncto B ipſi C D ad rectos angulos B E. anguli igitur C B E E B D ſunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E eſt æqualis, communis apponatur E B D. ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D ſunt ęquales. Rurſus quoniam D B A angulus eſt ęqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C ęquales ſunt. Axioma.1. At oſtenſum eſt angulos quoque C B E E B D eiſdem tribus ęquales eſſe: quę vero eidem ſunt ęqualia, et inter ſe æqualia ſunt. ergo et anguli C B E E B D ipſis D B A A B C ſunt ęquales. ſuntq́; C B E E B D duo recti. anguli igitur D B A A B C duobus rectis ęquales erunt. ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit.] *Animaduertendum eſt, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propoſitione maximam diligentiam adhibuiſſe. non*

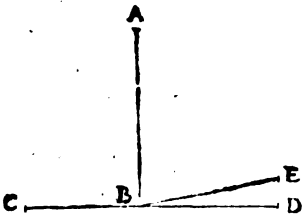
enim

enim ſimpliciter dixit. Omnis recta linea ſuper rectā lineā conſiſtēs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, ſed ſi angulos fecerit. quid enim ſi in rectae lineae extremitate cōſiſtens vnum efficit angulum? accidit'ne quandoque hunc duobus rectis aequalem eſſe? hoc certe fieri non poteſt. Omnis ſi quidem rectilineus angulus duobus rectis eſt minor, quemadmodum omnis ſolidus minor eſt quattuor rectis. Quòd ſi angulum, qui maxime obtuſus eſſe videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorum menſuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam ſic conſiſtere, vt angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duobus rectis eſt minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineæ non ad eaſdem partes poſitę, angulos qui deinceps ſunt, duobus rectis ęquales fecerint; ipſę rectæ lineæ indirectum ſibi inuicem erunt.



Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in ea B, duę rectę lineę B C B D non ad eaſdem partes poſitę angulos, qui deinceps ſunt, A B C A B D duobus rectis ęquales faciant. Dico B D ipſi CB indirectū eſſe. ſi enim B D non eſt in directū ipſi C B, ſit ipſi C B in directum B E. Quoniā igitur recta linea A B ſuper rectam C B E conſiſtit; anguli A B C A B E duobus rectis ſunt ęquales. Sed et anguli A B C A B D ſunt ęquales duobus rectis. anguli igitur C B A A B E ipſis C B A A B D ęquales erunt. cōis auferatur A B C. ergo reliquus A B E reliquo A B D eſt ęqualis, minor maiori, quod fieri non pōt. non igitur B E eſt indirectū ipſi B C. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe, pręter B D. ergo C B ipſi B D indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineę non ad eaſdem partes poſitę angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis ęquales fecerint, ipſę rectę lineę indirectum ſibi inuicem erunt. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

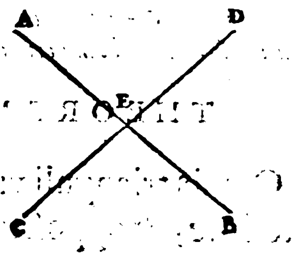
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema pręcedentis conuerſum eſt, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, oſtēditur. ſic enim conuerſa theorematum oſtendi debent, vt inquit Proclus.

Conuerſa theoremata per deductionē ad id, qđ fieri nō pōt, oſtendūtur.

THEOREMA. VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duę rectę lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos qui ad verticē ſunt, inter ſe ęquales efficient.



Duæ enim rectæ lineæ A B C D ſe inuicem ſecent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo AED æqualem eſſe. Quoniam enim recta linea A E ſuper rectā C D conſiſtens angulos facit C E A A E D; erunt hi duobus rectis æquales. Rurſus quoniam recta linea D C, ſuper rectam A B conſiſtens facit angulos A E D D E B; erunt AED DEB anguli æquales duobus rectis. Oſtenſum autē eſt angulos quoque C E A A E D duobus rectis eſſe æquales. anguli igitur C E A A E D angulis A E D D E B æquales ſunt. communis auferatur A E D. ergo reliquus C E A reliquo B E D eſt

13. huius.

3. com. not.

æqualis. Simili ratione, & anguli C E B D E A æquales oſtendentur. Si igitur duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

❈ Ex hoc manifeſte conſtat rectas lineas quot quot ſe inuicem ſecant, facere angulos ad ſectionem quattuor rectis ęquales.

F. C. COMMENTARIVS.

Anguli deinceps. Anguli ad uerticem.

Anguli qui deinceps ſunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum ſectione fit; illorũ uero ex altera tãtũ ab altera ſecta. Nã ſi recta linea ipſa inſecta manẽs, alteramq; ſuo extremo ſecãs, duos angulos fecerit; hos deinceps angulos vocamus. Si uero duae rectae linae, ſe inuicẽ ſecuerint, anguli ad uerticẽ efficiuntur, ſic dicti, quòd vertices in eodẽ puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipſorum ſunt puncta, ad quae plana dum contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema oſtendit duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, angulos ad verticem aequales eſſe: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonſtratum; in quo deeſt conſtructio, vtpote minus neceſſaria: demonſtratio enim expoſitione contenta conſtructione aliqua non indiget.

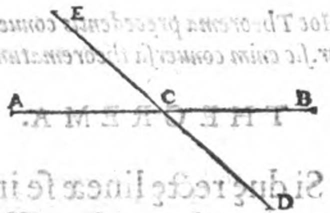
Angulorum uertices. Theorema a Thalete inuentũ.

❈ Corollaria quæ nã ſint in elementari inſtitutione.

Ex hoc manifeſtum eſt.] *Corollarium eſt quod ex pręcedenti demõſtratione apparet. corollaria enim in elementari inſtitutione ſunt, vt inquit Proclus, quae ſimul cum aliorum demonſtrationibus apparent, ipſa vero non pręcipue quęruntur: veluti id quod in pręſentia propoſitum eſt, nam quęrebatur quidem ſi duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, anguli ad verticem ęquales eſſent. dum autem hoc oſtenditur, ſimul etiam oſtẽſum eſt, quattuor, qui fiunt, angulos, quattuor rectis aequales eſſe. Corollarium igitur eſt theorema, quod ex alterius problematis, uel theorematis demonſtratione ex improuiſo emergit. nam ueluti caſu quodam in corollaria incidere uidemur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam quęrentibus obuiam ſe ſe offerunt. Corollariorum uero alia geometrica ſunt, alia arithmetica, & rurſus alia problematibus conſequentia ſunt, alia theorematibus; & alia directis oſtenſionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non poteſt, oſtẽduntur. Huius autem theorematis conuerſum à Proclo ita demonſtratur.*

Corollaria geometrica, et arithmet. Huius theorematis conuerſũ a Proclo demonſtratur.

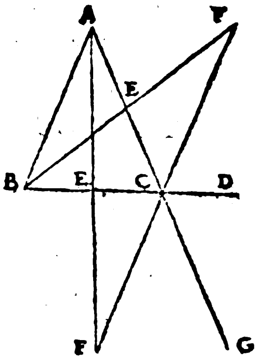
Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ indirectũ ſibi inuicem erunt.



Sit enim recta linea quędam A B, & in ipſa quod vis punctum C; & ad C duae rectae lineae C D C E non ad eaſdẽ partes ſumptae, quae angulos A C D B C E aequales faciant. Dico ipſas C D C E in directum ſibi ipſis eſſe. Quoniam enim recta linea C D ſuper rectam lineã A B inſiſtit, duos angulos duobus rectis efficit aequales; videlicet D C A D C B. 13. huius. *Sed angulus D C A angulo B C E eſt aequalis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis aequales ſunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam B C duae rectae lineae conſequenter C D C E non ad eaſdem partes ſumptae, angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt: indirectum ſibi inuicem erunt.* 14. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

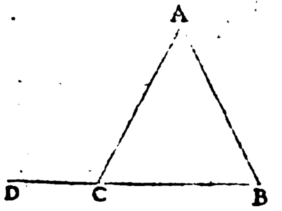
Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & oppoſito eſt maior.



Sit triangulum A B C, et vnum ipſius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D vtroque interiore, et oppoſito, videlicet C B A et B A C maiorem eſſe. Secetur enim A C bifariam in E, et iuncta B E producatur ad F; ponaturq; ipſi B E ęqualis E F. iungatur pręterea F C, et ducta A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem eſt ęqualis E C, B E vero ipſi E F, duę A E E B duabus C E E F ęquales ſunt, altera alteri: et angulus A E B angulo F E C eſt ęqualis, ad verticem enim ſunt. baſis igitur A B ęqualis eſt baſi F C; et A B E triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus B A E eſt ęqualis angulo E C F. Sed E C D angulus maior eſt ipſo E C F. maior igitur eſt angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam ſecta, oſtendetur etiā B C G angulus, hoc eſt A C D angulo A B C maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore et oppoſito maior eſt, quod oportebat demonſtrare. 4.huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocumque ſumpti.

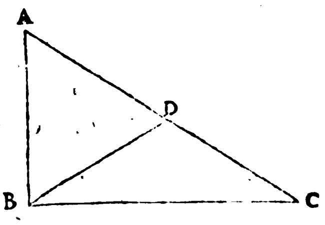


Sit triangulum A B C. Dico ipſius A B C triāguli duos angulos quomodocumque ſumptos duobus rectis minores eſſe. producatur enim B C ad D. et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D maior eſt interiore, et oppoſito A B C: cōmunis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B angulis A B C B C A maiores ſunt. Sed A C D A C B ſunt ęquales duobus rectis. ergo A B C B C A duobus rectis ſunt minores. Similiter demōſtrabimus angulos quoque B A C A C B, itemq; C A B A B C duobus rectis minores eſſe. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt; quomodocumque ſumpti. quod demonſtrare oportebat. 13.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, indeterminate oſtenditur, trianguli duos quoſlibet angulos duobus rectis minores eſſe, in ſequentibus vero determinabitur etiam quanto ſint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipſius anguli duobus rectis aequales ſunt. quare duo tanto minores ſunt duobus rectis, quantus eſt reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.



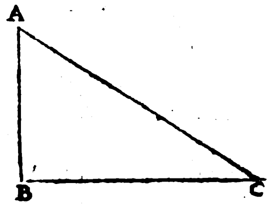
Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B maius. Dico et A B C angulum angulo B C A maiorem eſſe. Quoniam enim A C maior eſt, quàm A B, ponatur ipſi A B æqualis A D; et B D iungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus eſt A D B, erit is maior interiore, et oppoſito 16.huius.

5.huius. poſito D C B. Sed A D B æqualis eſt ipſi A B D, quòd et latus A B lateri A D ſit æquale. maior igitur eſt et A B D angulus angulo A C B. quare A B C ipſo A C B multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit: quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIX.

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus ſubtendit.



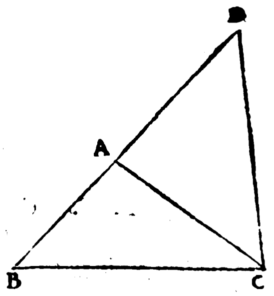
Sit triangulum A B C maiorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B maius eſſe. Si enim non eſt maius, vel A C eſt æquale ipſi A B, vel ipſo minus. æquale igitur non eſt, nam et angulus A B C angulo A C B æqualis eſſet. non eſt autem. non igitur A C ipſi A B eſt æquale. Sed neque minus. eſſet enim et angulus A B C angulo A C B minor. atqui non eſt. non igitur A C minus eſt ipſo A B. oſteſum autem eſt neque æquale eſſe. ergo A C ipſo A B eſt maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus ſubtendit. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc precedentis theorematis conuerſum eſt, quare & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, demonſtratur.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora ſunt, quomodocumque ſumpta.



Sit enim triangulum A B C. Dico ipſius A B C triãguli duo latera reliquo maiora eſſe, quomodocũque ſumpta: videlicet latera quidem B A A C maiora latere B C; latera vero A B B C maiora latere A C: et latera B C C A maiora ipſo A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturq; ipſi C A æqualis A D; et D C iungatur. Quoniam igitur D A eſt
5.huius. æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D equalis. Sed B C D angulus maior eſt angulo A C D. angulus igitur B C D angulo A D C eſt maior. Et quoniam triangulum eſt D C B, habens B C D angu
Ex antecedente. lum maiorem angulo B D C: maiorem autem angulum maius latus ſubtendit: erit latus D B latere B C maius. Sed D B eſt æquale ipſis B A A C. quare latera B A A C ipſo B C maiora sũt. Similiter oſtendemus et latera quidem A B B C maiora eſſe latere C A: latera vero B C C A ipſo A B maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora ſunt, quomodocumque ſumpta. quod oſtendere oportebat.

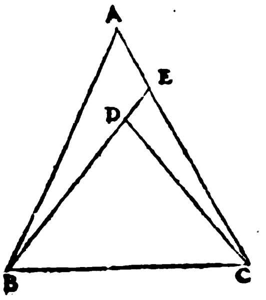
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema Epicurei impugnarũt tamquam. Aſino manifeſtum. *Preſens theorema, vt ſcribit Proclus, Epicurei impugnare conſueuerunt, tum Aſino ipſum manifeſtum eſſe dicentes, tum nulla egere probatione. Aſino autem manifeſtum eſſe, oſtendunt ex eo, quòd herba in altero laterũ extremo poſita, Aſinus pabulũ expetens, vnũ latus peragrat, & non duo. Aduerſus hec dicendum. Theorema ſenſu quidem manifeſtum eſſe, non autem & ſcientiam gignente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque ſenſui indubitatum*

dubitatum eſt, ſed quo nam pacto calefaciat, conuincere ſcientiae officium eſt. Sic igitur duo trianguli latera reliquo eſſe maiora, ſenſui manifeſtum, quō aūt hoc fiat dicere ad ſciētiā pertinet. Alij aliter hoc theorema demonſtrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclū.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duę rectæ lineæ intra conſtituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.



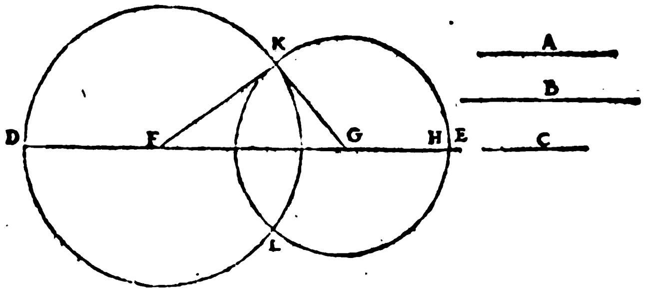
Trianguli enim A B C in vno latere B C à terminis B C duæ rectæ lineæ intra conſtituantur B D D C. Dico B D D C reliquis duobus trianguli lateribus B A A C minores quidem eſſe, maiorem vero continere angulum B D C angulo B A C. producatur enim B D ad E. Et quoniam omnis triāguli duo latera reliquo ſunt maiora, erunt trianguli A B E duo latera B A A E maiora latere B E. communis apponatur E C. ergo B A A C ipſis B E E C maiora ſunt. Rurſus quoniam C E D triāguli duo latera C E E D ſunt maiora latere C D, communis apponatur D B. quare C E E B ipſis C D D B ſunt maiora. Sed oſtenſum eſt B A A C maiora eſſe B E E C. multo igitur B A A C ipſis B D D C maiora ſunt. Rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore, et oppoſito eſt maior: erit trianguli C D E exterior angulus B D C maior ipſo C E D. Eadem ratione et trianguli A B E exterior angulus C E B ipſo B A C eſt maior. Sed angulus B D C oſtenſus eſt maior angulo C E B. multo igitur B D C angulus angulo B A C maior erit. Quare ſi à terminis vnius lateris trianguli duæ rectę lineæ intra conſtituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedēte.

15. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quę tribus rectis lineis datis ęquales ſint, triangulum conſtituere. oportet autem duas reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora ſunt, quomodocumque ſumpta. *



Sint tres datæ rectę lineæ A B C, quarum duæ reliqua maiores ſint, quomodocūque ſumptæ, vt ſcilicet A B quidem ſint maiores quàm C, A C vero maiores quàm B, et præterea B C maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis ęqualibus ipſis A B C triāgulū cōſtituere, exponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipſi quidem A æqualis D F, ipſi vero B æqualis F G, et ipſi C æqualis G H: et

3.poſtul.

centro F, interuallo autem F D circulus deſcribatur D K L. Rnrſusq́; centro G, et interuallo G H alius circulus K L H deſcribatur, et iungantur K F K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis A B C triangulum K F G conſtitutum eſſe. Quoniam enim punctum F centrum eſt D K L circuli; erit F D æqualis F K. Sed F D eſt æqualis A. ergo et F K ipſi A eſt æqualis. Rurſus quoniam punctum G centrum eſt circuli L K H, erit G H æqualis G K. Sed G K eſt æqualis C. ergo et G H ipſi C æqualis erit. eſt autem et F G æqualis B. tres igitur rectæ lineæ K F F G G K tribus A B C æquales ſunt. Quare ex tribus rectis lineis K F F G G K, quæ ſunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum conſtitutum eſt K F G. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematū alia indeterminata, alia terminata.

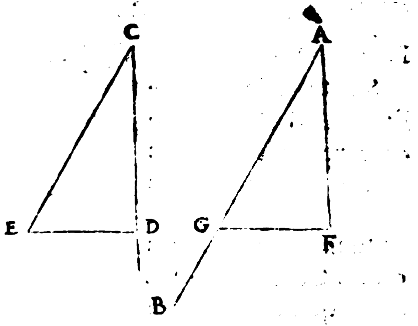
Determinatio duplex.

Pręſens problema determinatum eſt. problematum enim quemadmodum & theorematum alia quidem indeterminata ſunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo ſimpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quae tribus datis rectis lineis aequales ſint, triangulum conſtituere. problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duae reliqua ſint maiores, quomodocumque ſumptae, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim duplex eſt, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quae poſt expoſitionem ponitur, ſignificans quid ſit illud, quod quęritur; altera uero, quae propoſitionem vniuerſalem eſſe prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propoſitum eſt fieri poſſit, vt hoc loco, [oportet autem duas reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas. quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocumque ſumpta] *& in ſexto libro*] Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrãmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę ſimilis ſit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui ęquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, et eo, quod à dimidia, et eo, cui oportet ſimile deficere.] *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falſum diuiſio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri poteſt. Proclus in commentarijs citat Euclidis verba, quae à verbis huiuſce demonſtrationis diſcrepant, vt luce clarius ſit Euclidis demonſtrationes aliquibus in locis à Theone immutatas eſſe, & eas, quas nunc habemus Theonis eſſe, non Euclidis.*

Theorematum diuiſio iuxta uerum & falſum. Problematū diuiſio iuxta id, quod fieri, & qđ non fieri poteſt.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

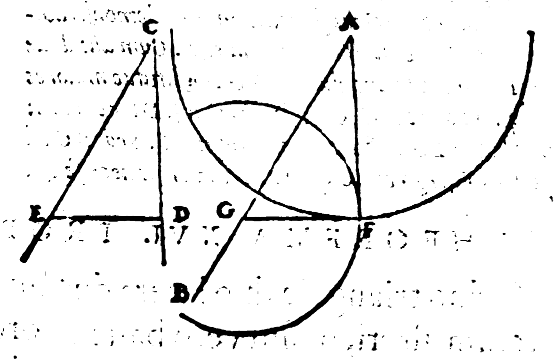
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo ęqualem angulum rectilineum conſtituere.



Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipſa punctum A, et datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum conſtituere. Sumãtur in vtraque ipſarum C D C E quęuis puncta D E, iungaturq́; D E, et ex tribus rectis lineis, quæ ęquales ſint tribus C D D E E C triangulum conſtituatur A F G, ita ut C D ſit ęqualis A F, et C E ipſi A G, et D E ipſi F G. Itaque quoniam duę D C C E duabus F A A G ęquales ſunt, altera alteri; et baſis D E eſt æqualis baſi F G: erit et angulus D C E angulo F A G æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt F A G. quod facere oportebat.

8.huius.

F. C. COMMENTARIVS.



Et ex tribus rectis lineis, quę æquales ſint tribus CD DE EC triangulum conſtituatur AFG.] *A recta linea A B abſcindatur A G aequalis ipſi C E: & centro quidem A, interuallo autem ipſi C D aequali deſcribatur circulus: & rurſus centro G & interuallo aequali ipſi E D alius circulus deſcribatur, vt circuli ſe inuicem in puncto F ſecent: & iungantur A F F G. Dico iam factum eſſe, quod proponebatur: & demonſtratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inuentum eſſe tradit Eudemus.*

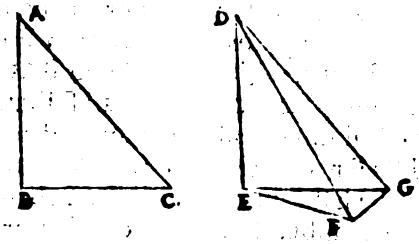
✱ 3. Huius.

3. Poſtul.

Hoc theorema ab Oenopide inuentum eſt.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et baſim baſi maiorem habebunt.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B æquale lateri D E; latus vero A C æquale D F: & angulus B A C angulo E D F ſit maior. Dico et baſim B C baſi E F maiorem eſſe. Quoniam enim angulus B A C maior eſt angulo E D F, conſtituatur ad rectam lineam D E, et ad punctū in ea D, angulo B A C ęqualis angulus E D G, ponaturq́; alterutri ipſarum A C D F æqualis D G, et G E F G iungantur. Itaque quoniam A B quidem eſt æqualis D E, A C vero ipſi D G; duæ B A A C duabus E D D G æquales ſunt, altera alteri; et angulus B A C eſt æqualis angulo E D G. ergo baſis B C baſi E G eſt æqualis. Rurſus quoniam æqualis eſt D G ipſi D F; et angulus D F G angulo D G F: erit D F G angulus angulo E G F maior. multo igitur maior eſt E F G angulus ipſo E G F. Et quoniam triangulum eſt E F G, angulum E F G maiorem habens angulo E G F; maiori autem angulo maius latus ſubtenditur; erit et latus E G latere E F maius. Sed E G latus eſt æquale lateri B C. ergo et B C ipſo E F maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribns æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem augulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et baſim baſi maiorem habebunt. quod oportebat demonſtrare.

Ex antecedente.

✱

4. huius.

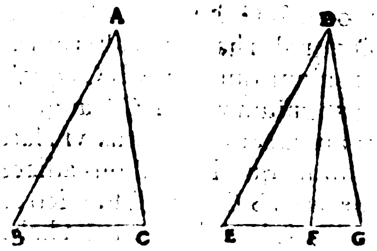
5. huius.

19. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema quarto oppoſitum eſt, illud enim angulos qui ſunt ad vertices triangulorū ęquales ponit, hoc inęquales; illud baſes aequales, hoc inęquales eſſe demonſtrat.

Et GE FG iungantur] *recta linea EG, vel cadit ſupra EF, vel in ipſam, vel infra ipſam. Euclides vt ſupra cadentē accepit. Quòd ſi in ipſam cadat, vt in ſecunda figura, idē oſtendetur. Sunt enim duę B A A C duabus ED DG aequales: & cū aequales contineant angulos, & baſis B C baſi E G aequalis erit. Sed E G*



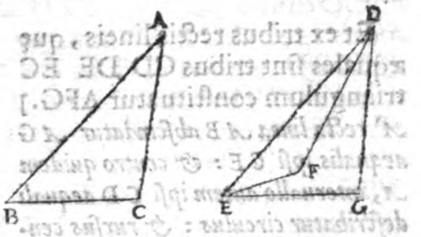
Hoc theorema quarto oppoſitum.

✱

4. Huius.

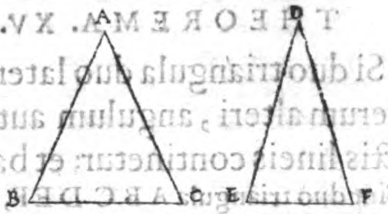
21. huius.

eſt maior, quàm E F, vt totum eſt maius, quàm ipſius pars. ergo & BC quàm EF eſt maior. Cadat poſtremo infra ipſam. ut in tertia figura. Similiter demonſtrabimus baſim B C baſi EG aequalem eſſe. Cum aũt duae E F F D intra triangulum E D G conſtitutae minores ſint, quàm duae E G GD; ſitq́; D G ipſi DF aequalis; erit reliqua EG maior, quàm reliqua EF. Sed B C eſt ęqualis EG. ergo et BC quàm EF maior ſit neceſſe eſt.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, baſim vero baſi maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.



4. huius.

Ex antecedenti.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F: baſis autem B C baſi E F ſit maior. Dico et angulum B A C angulo E D F maiorem eſſe. ſi enim non eſt maior, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autẽ non eſt angulus B A C angulo E D F: eſſet enim et baſis B C baſi E F ęqualis. non eſt aũt. nõ igitur æqualis eſt BAC angulus angulo E D F. ſed neque minor. minor enim eſſet et baſis BC baſi E F. atqui nõ eſt. non igitur angulus B A C angulo E D F eſt minor. oſtenſum autẽ eſt, neque eſſe ęqualem. ergo angulus B A C angulo E D F neceſſario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, baſim vero baſi maiorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

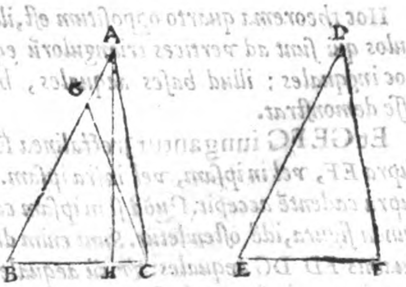
Hoc theorema octauo oppoſitum, eſt et præcedentis conuerſum.

Hoc theorema octauo quidem oppoſitum eſt, pręcedentis vero conuerſum, quod alij aliter demonſtrarunt, vt tradit Proclus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habeāt, alterum alteri, vnumq́; latus vni lateri ęquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis D E F E F D æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem A B C ęqualem angulo DEF; angulum vero B C A angulo E F D. habeant autem et vnum latus vni lateri æquale, et primum quod ęqualibus adiacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterũ alteri, latus ſcilicet AB lateri DE; et latus AC



ipſi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inęqualis eſt A B ipſi D E, vna ipſarum maior eſt. Sit maior A B, ponaturq; G B ęqualis D E; et G C iungatur. Quoniam igitur B G quidem eſt ęqualis D E, B C vero ipſi E F, duę G B B C duabus D E E F ęquales ſunt, altera alteri: et angulus G B C æqualis angulo D E F. baſis igitur G C baſi D F eſt æqualis: et G B C triangulū triāgulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera ſubtēdūtur. ergo G C B angulus eſt ęqualis angulo D F E. Sed angulus D F E angulo B C A ęqualis ponitur. quare et B C G angulus angulo B C A eſt æqualis, minor maiori, quod fieri nō pōt. non igitur inæqualis eſt A B ipſi D E. ergo ęqualis erit. eſt autem et B C æqualis E F. Itaque duę A B B C duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. baſis igitur A C baſi D F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt ęqualis. Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur ęqualia, vt A B ipſi D E. Dico rurſus et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia eſſe; A C quidem ipſi D F, B C vero ipſi E F: et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F ęqualem. Si enim inæqualis eſt B C ipſi E F, vna ipſarum maior eſt. Sit maior B C, ſi fieri poteſt; ponaturq; B H ęqualis E F, et A H iungatur. Quoniam igitur B H quidem eſt æqualis E F, A B vero ipſi D E; duæ A B B H duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo baſis A H baſi D F eſt ęqualis: et A B H triangulum triangulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ęqualis igitur eſt angulus B H A angulo E F D. Sed E F D eſt æqualis angulo B C A. ergo et B H A angulus angulo B C A eſt æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A ęqualis eſt interiori; et oppoſito B C A, quod fieri non poteſt. quare non inęqualis eſt B C ipſi E F. ęqualis igitur. eſt autem et A B æqualis D E. duæ igitur A B B C duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri: anguloſq; æquales continent. quare baſis A C æqualis eſt baſi D F, et A B C triangulum æquale triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel qnod vni ęqualium angulorum ſubtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonſtrare.

4. huius.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & aequalitate, vel inęqualitate quęcunque in elementari inſtitutione dici poterant, ex ſuperioribus didicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; pręcipue vero de parallelogrammis: ſimul cum horum contemplatione de trapezijs differens. diuiditur enim quadrilaterum, vt ſuperius dictum eſt in parallelogrammum, & trapezium: rurſusq; parallelogrammum in alias ſpecies: & trapezium ſimiliter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob ęqualitatis participationem ordinatum eſt: trapezium vero neque eundem, neque ſimilem ſeruat ordinem: non immerito pręcipue quidem de parallelogrammis ſermonem habet; ſimul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim ſectione ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifeſtum. Sed quoniam rurſus fieri non poteſt, vt de parallelogrammorum, vel conſtructione, vel aequalitate aliquid dicatur abſque parallelarum conſideratione; vt enim ex ipſo quoque nomine apparet parallelogrammum eſt, quod à parallelis rectis lineis è regione poſitis deſcribitur: neceſſario à parallelis doctrinae initium facit. paulum vero progreſſus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit; vno vſus theoremate medio inter harum, illorumq; inſtitutionem elementarem, quod quidem videtur ſymptoma quoddam, quod parallelis ineſt, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim eſt. [Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt, et ipſæ æquales, et parallelæ ſunt.]*nam in hoc conſideratur quidem ſymptoma quoddam aequalibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera aequalia, et parallela è regione poſita habet. Parallelarum*

Hoc theorema ad Thaletem refertur.

Parallelogrā mum ordinatum eſt, trapeziū uero minime.

Parallelogrā mum eſt quod a parallelis deſcribitur.

Parallelogrā morum ortus.

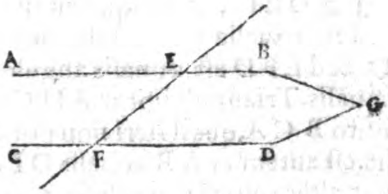
Parallelis tria per ſe inſunt.

igitur ſermonem neceſſario preaſſumptum eſſe, ex his conſtat. Tria autem aſſumere oportet, quae parallelis per ſe inſunt, ipſaſq́; explicant: & cum ipſis cõuertuntur. neque ſolum tria ſimul, ſed & vnum quodque ſeorſum ab alijs ſumptum. quorum vnum hoc eſt. recta linea parallelas ſecante, alternos angulos inter ſe aequales eſſe: aliud, recta linea parallelas ſecante angulos interiores duobus rectis eſſe aequales. reliquum vero, recta linea parallelas ſecante, angulum exteriorem interiori; & oppoſito aequalem eſſe. horum autem ſymptomatum vnumquodque demonſtratum parallelas eſſe rectas lineas affirmare poteſt. Hoc modo & alij mathematici de lineis diſſerere conſueuerunt, vniuſcuiuſque ſpeciei ſymptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid ſymptoma ſit oſtendit: & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadrantibus. & Perſeus in ſpiricis. nam poſt earum ortum, quod ipſis per ſe, & quatenus ipſum ineſt, aſſumptum, conſtitutam nobis formam ab omnibus alijs diſtinguit. Eodem igitur modo, & elementorum inſtitutor parallelarum ſymptomata primum inueſtigat. Hec ex Proclo.

Apollonius de conicis lineis aget. Nicomedes de cõchoid. Hippias de quadrãtibus Perſeus de ſpiricis.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

✻ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

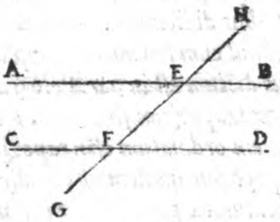


In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter ſe faciat. Dico rectam lineam A B ipſi C D parallelam eſſe. Si enim non eſt parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C. producantur, conueniantq́; ad partes B D in pũcto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus AEF maior eſt interiore et oppoſito EFG. Sed et æqualis. quod fieri nõ põt. non igitur A B C D productę ad partes B D conuenient. Similiter demonſtrabitur neque conuenire ad partes A C. quę vero in neutras partes conueniunt, parallelę inter ſe ſunt. parallela igitur eſt AB ipſi CD. Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe ęquales fecerit, parallelę inter ſe erunt rectę lineæ. quod oſtendere oportebat.

16. huius.

diffi. 35.

F. C. COMMENTARIVS.



✻ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos] *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad eaſdem partes, neque deinceps ſunt, ſed ab incidente linea diſtinguuntur, cum vtrique intra parallelas exiſtant. differunt autem quòd alter ſurſum alter deorſum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis A B, & C D exiſtentibus, incidenteq́; in ipſas recta linea E F, angulos A E F D F E; itemq́; angulos C F E B E F alternos eſſe dicit. vt pote alterno, commutatóue ordine iuxta poſitionem ſe habentes. Illud autem ſciendum eſt, cum talis ſit rectarum linearum ſitus, omnia ſymptomata ex diuiſione ſex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omiſit. vel enim ad eaſdem partes angulos ſumemus, vel non ad eaſdem: & ſi ad eaſdem, vel vtroſque intra rectas lineas, quas parallelas oſtendit, vel vtroſque extra, vel vnum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad eaſdem partes, ſimiliter vel vtroſque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rurſus rectae lineae A B C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G pũcta producatur. Si igitur ad eaſdẽ partes angulos accipias, vel vtroſq; intra pones, vt B E F, & E F D, vel ipſos, A E F, & E F C, vel vtroſq; extra, vt H E B D F G, vel H E A C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt H E B E F D, vel G F D F E B; vel H E A E F C, vel G F C A E F.*

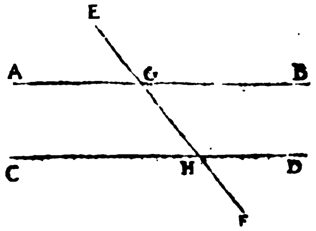
quadrupliciter

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad eaſdem partes, vel vtroſque intra, vt AEF EFD, vel CFE FEB: vel vtroſque extra, vt AEH DFG, vel HEB CFG, vel vnum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rurſus quadrupliciter, vel enim AEH EFD, vel HEB EFD, vel GFC FEB, vel GFD FEA. Cum igitur anguli ſex modis ſumatur, Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, vnam quidem ex iis angulis, qui non ad eaſdem ſunt partes, et qui intra tantum ſumũtur; quos alternos appellauit; duas vero ex iis, qui ad eaſdem partes vel vtrique intra ſumuntur, quos duobus rectis aequales eſſe dicit: vel vnus quidem extra, alter vero intra ſumitur, quos dicit inter ſe aequales eſſe. Tres vero reliquas omiſit, vt pote quos eadem omnino conſequãtur. Sint enim ad eaſdem partes vtrique extra anguli HEB DFG. Dico hos duobus rectis aequales eſſe. angulus enim DFE angulo HEB, & angulus BEF angulo DFG eſt aequalis. Si autem anguli BEF EFD duobus rectis ſunt aequales, anguli etiam DFG HEB duobus rectis aequales erunt. Sint rurſus non ad eaſdem partes anguli AEH EFD, quorum alter ſit extra, alter intra; ipſi quoque duobus rectis ſunt aequales. Quoniam enim angulus AEH aequalis eſt angulo BEF, anguli vero BEF EFD duobus rectis aaquales ſunt; erunt & anguli AEH EFD duobus rectis aequales. Sint poſtremo non ad eaſdem partes vtrique extra anguli AEH DFG. Dico eos etiam inter ſe aequales eſſe. Nam cum angulus AEH aequalis ſit angulo BEF, & angulus DFG ungulo EFC, ſintq; anguli BEF EFC alterni inter ſe aequales: anguli etiam AEH DFG inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.

Cum anguli ſex modis ſumantur. Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, reliquas omiſit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulũ interiori, et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erũt inter ſe rectæ lineæ.



In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori et oppoſito G H D æqualem faciat; vel interiores, et ad eaſdem partes B G H G H D, duobus rectis ęquales. Dico rectam lineam A B rectę C D parallelam eſſe. Quoniam enim E G B angulus ęqualis eſt angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H, erit et angulus A G H angulo G H D ęqualis: et ſunt alterni. parallela igitur eſt A B ipſi C D. Rurſus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis ſunt æquales, et ſunt A G H B G H ęquales duobus rectis: erunt anguli A G H B G H angulis B G H G H D æquales. communis auferatur B G H. reliquus igitur A G H eſt ęqualis reliquo G H D: et ſunt alterni. ergo A B ipſi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectę lineę. quod demonſtrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente.

13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

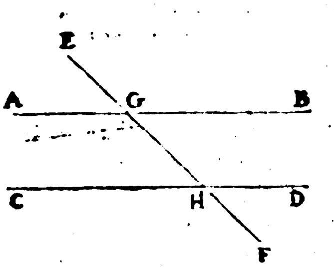
Hoc theorema à Ptolemęo aliter demonſtratur, vt tradit Proclus.

Theorema a Ptolemæo aliter demõſtratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito, et ad eaſdem

eaſdem partes ęqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.



In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat E F. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, et exteriorē EGB interiori et oppoſito, et ad eaſdē partes GHD æqualē: et interiores et ad eaſdem partes B G H G H D duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt A G H ipſi G H D, vnus ipſorum maior eſt. Sit maior A G H. et quoniam A G H angulus maior eſt angulo G H D; communis apponatur B G H. anguli igitur A G H B G H angulis B G H 13.huius. G H D maiores ſunt. Sed anguli A G H B G H ſunt æquales duobus rectis. ergo B * G H G H D anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quàm ſint Poſt.5. duo recti in infinitum producuntur rectæ lineæ inter ſe conueniunt. ergo rectæ lineæ A B C D in infinitum productæ conuenient inter ſe. atqui non conueniunt, cum parallelę ponantur. non igitur inæqualis eſt A G H angulus angulo G H D. 15.huius. quare neceſſario eſt ęqualis. angulus autem A G H ęqualis eſt angulo E G B. ergo et E G B ipſi G H D ęqualis erit. communis apponatur B G H. anguli igitur E G B B G H ſunt ęquales angulis B G H. G H D. Sed E G B B G H ęquales ſunt duobus rectis. ergo et B G H G H D duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorē interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem; et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtriſque pręcedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum eſt quęſitum, poſitionem facit; & quae in illis data ſunt, demonſtrare proponit. atque hęc conuerſorū differentia ſilentio prętereunda non eſt. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto ſextum, aut pluribus vnum, vt pręcedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo poſt manifeſtum erit.

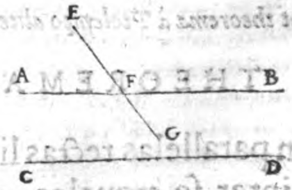
* Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineę inter ſe conueniunt] *Poſtulatum quintum eſt, quod tamen cum euidens non ſit, & demōſtratione indigere videatur, Proclus ita demoſtrandum cenſuit, duobus pręmiſſis, nimirum axiomate quopiam, quo etiam Ariſtoteles vſus eſt, & lemmate.*

AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit.

LEMMA.

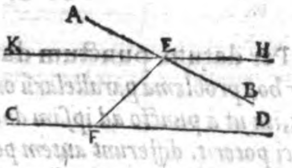
Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædam linea; reliquam quoque ſecabit.



Sint parallelae A B C D; ſecetq; ipſam A B recta linea E F G. Dico E F G reliquam quoque C D ſecare. Quoniam enim duae rectae lineae ſunt, quae ab vno puncto F in infinitum producuntur, BF FG; omni finita magnitudine maiorem habebunt diſtantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quae tanta eſt, quantum eſt interuallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum linearum diſtantia maior fuerit, quàm diſtantia parallelarum, recta linea F G ſecabit ipſam C D. Quare ſi alteram parallelarum ſe-

cueris

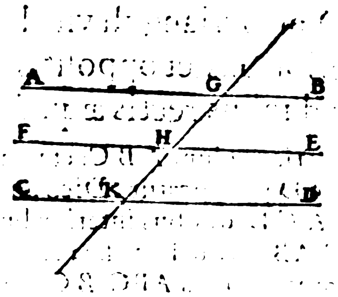
cuerit quędam recta linea, reliquam quoque ſecabit.



Hoc ante demonſtrato conſequenter propoſitum demonſtrabitur. Sint enim duae rectae lineae A B C D, & in ipſas incidat recta linea EF, angulos BEF DFE duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter ſe conuenire ad eas partes, in quibus ſunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli B E F D F E duobus rectis minores ſint, ſit exceſſui duorum rectorum aequalis HEB angulus, & HE ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas H K C D recta linea E F incidit, interioresq; angulos HEF DFE duobus rectis efficit aequales; rectae lineae HK C D parallelae erunt. & A B ſecat ipſam H K. ergo reliquam quoque C D ſecabit per antecedens lemma. conuenient igitur inter ſe rectae linae A B C D ad eas partes, in quibus ſunt anguli duobus rectis minores. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quę eidem rectę lineę ſunt parallelę, & inter ſe parallelæ erunt.



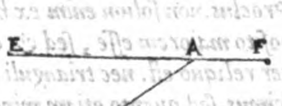
Sit vtraque ipſarum A B C D ipſi E F parallela. Dico et A B ipſi C D parallelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B E F, recta linea GK incidit, angulus A G H angulo G H F eſt æqualis. Rurſus quoniam in parallelas rectas lineas E F C D, recta linea incidit G K, ęqualis eſt G H F angulus angulo G K D. oſtenſus autem eſt & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo et A G K ipſi GKD æqualis erit. et ſunt alterni. parallela igitur eſt A B ipſi C D. ergo quæ eidem rectæ lineę ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, et inter ſe parallelæ erunt] *Contingit autem hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus reſpectibus verum eſſe. non enim quę eiuſdem dupla, & inter ſe dupla ſunt, nec quae eiuſdem ſeſquialtera, inter ſe ſunt ſeſquialtera, ſed in illis ſolis locum habere videtur, quęcunque vnitate conuertuntur, ut in ęqualitate, in ſimilitudine, in identitate, & in parallela poſitione. Quae enim parallelae parallela, & ipſa parallela eſt, quemadmodum, & quod aequali aequale, & ipſum eſt aequale; & quod ſimili ſimile, & ipſum ſimile. parallelarum enim ad ſe ſe reſpectus ſimilitudo poſitionis eſt.* *

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. *



Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet per A punctum ipſi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quod uis punctum D, & iungatur A D: conſtituaturq; ad rectam lineam D A, & ad punctum in ipſa A, angulo A D C æqualis angulus D A E: 23. Huius. & in directum ipſi E A recta linea A F producatur. Quoniã igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter ſe æquales efficit, EF ipſi BC parallela erit. 27. Huius. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta eſt recta linea EAF. quod facere oportebat.

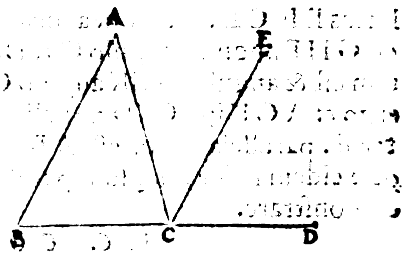
F. C. COMMENTARIVS.

✻ Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.]*Videtur hoc problema parallelarũ ortũ tradere. At datum punctũ extra rectam lineam ſumere oportet, ita ut à puncto ad ipſam ducta recta linea angulum faciat, alioqui nulla alia pręter iam dictã, duci poterit. differunt autem per datum punctum, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium eſt; ab ipſo fit deductio, vt in illo problemate,* [ſuper datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere] *Quando autem punctum in recta linea eſt, per ipſum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.* [per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelã rectam lineam ducere.] *& quemadmodum non licet ab eodem puncto ſuper datam rectam lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae lineae duas, uel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter ſe conuenirent. quod eſt abſurdum.*

Per datum punctum, & a dato pũcto lineã ducere.

THEOREMA XXII. ROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus, duobus interioribus, et oppoſitis eſt æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt.



Sit triangulum A B C: et vnum ipſius latus B C in D producatur. Dico angulum exteriorem A C D duobus interioribus et oppoſitis CAB ABC æqualem eſſe; et trianguli tres interiores angulos ABC B C A C A B duobus rectis eſſe æquales. Ducatur enim per punctũ C ipſi A B rectæ lineę parallela C E. Et quoniam AB ipſi C E parallela eſt, et in ipſas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter ſe ęquales ſunt. Rurſus quoniã AB parallela eſt CE, et in ipſas incidit recta linea BD, exterior angulus E C D interiori et oppoſito A B C eſt æqualis. Oſtenſus autem eſt angulus ACE æqualis angulo B A C. Quare totus A C D exterior angulus æqualis eſt duobus interioribus et oppoſitis BAC ABC. communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B tribus A B C B C A C A B ęquales ſunt. Sed anguli A C D AC B ſunt ęquales duobus rectis. Ergo et A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppoſitis eſt ęqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis ęquales ſunt. quod demonſtrare oportebat.

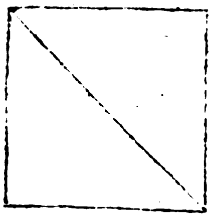
Ex antecedente.

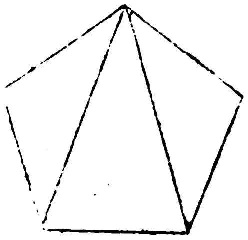
25.huius.

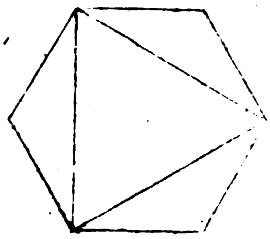
F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in ſextodecimo, & ſeptimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. non ſolum enim ex hoc diſcimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore & oppoſito maiorem eſſe, ſed & quanto maiorem. nam cum vtriſque ſit aequalis, maior quam alteruter reliquo eſt. nec trianguli duos quoſlibet angulos duobus rectis minores eſſe ſolum ex hoc cognoſcimus, ſed quanto etiam minores: reliquo enim trium. illa igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero ſcientiae terminum vtriſque attulit. eius theorematis, triangulum ſcilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inuentionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipſi aliter demonſtrarunt, vt Proclus tradit: qui etiam huius theorematis duo oſtendit conuerſa, ex quibus apparere poteſt, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc conſtet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis eſſe aequales, aperta eſt nobis via, per quã ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis aequales ſint: vt puta *ta quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae ſequuntur. Itaque primo ſciendum eſt omnem rectilineam figuram in triangula reſolui; omnium ſi quidem conſtitutionis principium eſt triangulum. vnaquęque autem in triangula binario pauciora, quàm ſint propria latera, reſoluitur, vt ſi quattuor latera habeat, in duo reſoluitur triangula; ſi quinque in tria, ſi ſex in quattuor, & similiter reliquae. Quòd cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſint aequales, numerus triangulorum, ex quibus vnaquęque figura conſtat, duplicatus multitudinem prębebit rectorum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triãgulis conſtans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos aequales ſex rectis, & deinceps eodem modo, Sed & illud ſciendum eſt,* [omnem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus ſemel producto, angulos qui extra conſtituũtur, quattuor rectis æquales habere] *quod nos hoc modo demonſtrabimus.*

Omnis recti linea figura in triangula binario pauciora quam sĩt propria latera reſoluitur.



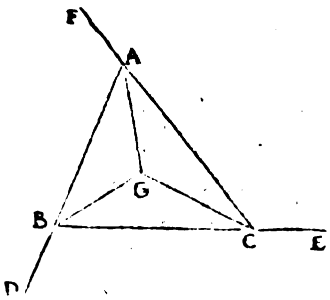




Omnis recti linea figura angulos qui extra conſtituũtur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum A B C, et producantur latera A B B C C A ad puncta D E F. Dico angulos C B D B A E A C E, qui extra conſtituuntur, quattuor rectis æquales eſſe.

Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum G, & iungãtur G A G B G C. erunt triangulorum A G B B G C C G A omnes anguli ſex rectis aequales; Sed & anguli C B A C B D B A C B A F A C B A C E ſunt aequales ſex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis C B A C B D B A C B A F A C B A C E aequales ſunt. communes auferantur C B A B A C A C B. reliqui igitur, qui ſiunt ad G ſunt aequales angulis extra figuram conſtitutis. anguli autem ad G quattuor rectis ſunt aequales. ergo & anguli, qui extra figuram conſtituuntur, videlicet C B D B A F A C E quattuor rectis aequales erunt. quod demonſtrare oportebat. eodẽ modo demonſtrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipſas conſtituuntur, quattuor rectis eſſe aequales.

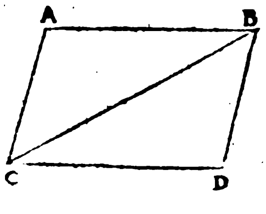


Corol.15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quę æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectę lineę, et ipſæ æquales, et parallelæ ſunt.

Sint ęquales et parallelę A B C D: et ipſas cõiungant ad eaſdem partes rectę lineę AC BD. Dico AC B D æquales, et parallelas eſſe. iungatur enim B C. et quoniam A B parallela eſt C D: in ipſaſq; incidit B C, alterni anguli A B C B C D æquales ſunt. Rurſus quoniam A B eſt æqualis C D, communis autẽ B C, duæ A B B C duabus B C C D ſunt ęquales; et angulus A B C ęqualis angulo B C D. baſis igitur A C baſi B D eſt ęqualis: triangulumq; A B C trian



29.huius.

4.huius.

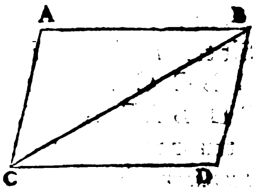
gulo B C D: et reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D eſt ęqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C
17.huius. B D ęquales inter ſe efficit, parallela eſt A C ipſi B D. oſtenſa autem eſt et ipſi ęqualis. Quæ igitur ęquales et parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectæ lineæ, et ipſæ æquales et parallelæ ſunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum, parallelogrammorumq; conſiderationis eſſe dicebamus. aequalium namque & parallelarum rectarum linearum ſymptoma quoddam dicere videtur, parallelogrammorumq; ortum latenter tradit. Parallelogrã mum quomodo fiat. *parallelogrammum enim fit ex aequalibus, & parallelis, quae initio ductae ſunt, & ex ijs, quae ipſas coniungunt rectis lineis: quae etiam aequales & parallelae oſtenduntur. Qua propter quod ſtatim ſequitur, veluti conſtituto iam parellelogrammo, quae per ſe inſunt eiuſmodi ſpacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propoſitione adhibita ſit, accurate & diligenter notauit Proclus.*

THEOREMA XXIIII. PROPO. XXXIIII.

Parallelogrammorum ſpaciorum latera, quæ ex oppoſito, et anguli, inter ſe ęqualia ſunt; et diameter ea bifariam ſecat.



Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex oppoſito, et angulos inter ſe æqualia eſſe; et diametrum B C ipſum bifariam ſecare. Quoniam enim parallela eſt A B ipſi C D, et in ipſas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter ſe ęquales ſunt. Rurſus quoniam A C ipſi B D parallela eſt, et in ipſas incidit B C; alterni anguli A C B C B D ęquales ſunt inter ſe. duo igitur triangula ſunt A B C C B D, quę duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent, alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale, quod eſt ad ęquales angulos, vtrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. ęquale igitur eſt latus quidem A B lateri C D; latus vero A C ipſi B D; et angulus B A C angulo B D C ęqualis. Et quoniam angulus A B C eſt ęqualis angulo B C D; et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. oſtenſus autem eſt, et angulus B A C angulo B D C ęqualis, parallelogrammorũ igitur ſpaciorum latera, quę ex oppoſito, et anguli, inter ſe ęqualia ſunt. Dico etiam diametrum ea bifariam ſecare. Quoniam enim æqualis eſt A B ipſi C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus D C C B ęquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis eſt angulo B C D. baſis igitur A C baſi D B ęqualis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit. ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam ſecat. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

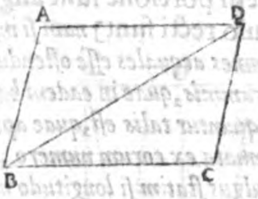
Theorematum alia uniuerſalia, alia non uniuerſalia. *Theorematum, vt inquit Proclus, alia vniuerſalia ſunt, alia non vniuerſalia. quomodo autem vtrumque horum dicamus, commemorabimus, cum quęſitum partiemur, quod vnam partem habet vniuerſalem, alteram vero non vniuerſalem. quamuis enim omne theorema vniuerſale quidem eſſe fortaſſe videretur, & omne, quod ab Euclide oſtenditur huiuſmodi eſſe (quemadmodum in prę-ſentia quoque non ſolum latera, quae ex oppoſito ſunt, & angulos aequales habere vniuerſe de omnibus parallelogrammis dici videtur, verum etiam diametrum vnumquodque bifariam ſecare)* Vniuerſale duobus modis appellari conſueuit. *attamen alia quidem vniuerſe oſtendi dicimus, alia uero non vniuerſe. aliter enim vniuerſale appellari conſueuit, quod de omnibus verum dicit, de quibus prędicatur; aliter autem quod omnia comprehendit,*

comprehendit, quibus idem ſymptoma ineſt. vniuerſale ſiquidem eſt, & quod omne aequicrure tres angulos duobus rectis aequales habet, quoniam de omnibus aequicruribus verum eſt; vniuerſale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis aequales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per ſe ineſt. Quocirca primum quoque hoc de triangulo oſtendi dicimus, tres angulos duobus rectis aequales habere. Itaque iuxta hanc ſignificationem alia quidem vniuerſalia theorematum dicentes, alia vero non vniuerſalia, pręſens theorema dicimus vnum quidem quęſitorum vniuerſale habere: alterum vero non vniuerſale. nam hoc quidem latera, quae ex oppoſito ſunt, & angulos aequales habere vniuerſale eſt. ſolis enim parallelogrammis ineſt. hoc vero, diametrum bifariam ſpacium ſecare, non vniuerſale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus ſymptoma hoc inſpicitur. etenim circulis, & ellipſibus hoc etiam ineſt. & videntur primae quidem rerum huiuſcemodi notiones eſſe magis particulares, progreſſae autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuiſſent, diametrum bifariam ſecare circulum, ellipſim, & parallelogrammum, commune in his poſtea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Ariſtoteles, quidã nõ vniuerſale tamquã vniuerſale oſtendens, eò quod commune eſt innominatũ, cui primum ſymptoma ineſt. nam quid commune ſit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & ſonis, quibus omnibus ineſt permutata proportio, dicere non licet. quid pręterea cõmune ſit circulo, ellipſi, & parallelogrammo, difficile eſt exprimere, nã vna quidem figura rectilinea eſt, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuerſale eũ oſtẽdere opinamur, qui demonſtrat, omne parallelogrãmũ à diametro bifariã ſecari, eo quòd commune ſimul nõ cernimus, propter quod hoc verum eſt. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiuſcemodi vniuerſale non eſt propter iam dictam cauſſam. illud vero eſt, omne parallelogrammum latera, quae ex oppoſito ſunt & angulos habere aequalia. Etenim ſi aliqua figura poſita fuerit, quae ex oppoſito ſunt latera, & angulos aequalia habere, parallelogrammum hęc eſſe oſtendetur. hęc Proclus. Huius autem theorematis conuerſum, quatenus ad primam partem attinet, tale eſt.

Tres angulos duobus rectis æquales habere primũ de triangulo oſtenditur.

Diametrum bifariam ſecare ſpaciũ, ineſt non ſolum parallelogrãmo ſed circulis, et ellipſibus.

Omne quadrilaterum, quod latera ex oppoſito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum eſt.



Sit quadrilaterum A B C D, habens latus quidem A B aequale lateri D C; latus vero A D lateri B C; angulumq́; A B C angulo A D C aequalem; & angulum B A D angulo B C D. Dico quadrilaterum A B C D parallelogrammum eſſe. Ducatur diameter B D. Et quoniam A B eſt aequalis D C, & A D ipſi B C, duae D A A B duabus B C C D aequales ſunt, anguloſq́; aequales cõtinẽt, & baſis B D vtrique cõis. triangulũ igitur A B D triãgulo CDB aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, videlicet angulus A B D angulo C D B, & angulus A D B angulo C B D, qui ſunt alterni. ergo A B parallela eſt in ipſi D C & A D ipſi B C, ideoq́; A B C D parallelogrammum eſt. quod demonſtrare oportebat. 27.huius.

Conuerſum vero vt ad ſecundam partem huiuſmodi erit [omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt. *quod nos Paulo poſt demonſtrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem baſi, et in eiſdem paralellis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.

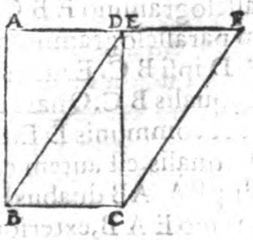
Sint parallelogramma A B C D E B C F in eadem baſi B C, et in eiſdem parallelis A F B C conſtituta. Dico A B C D parallelogrammũ parallelogrammo E B C F æquale eſſe. Quoniã enim parallelogrammum eſt A B C D, æqualis eſt A D ipſi B C. Eadem quoque ratione, et E F eſt ęqualis B C. Quare et A D ipſi E F ęqualis erit: et communis D E. tota igitur A E toti D F eſt æqualis. eſt autem et A B æqualis D C. ergo duę E A A B duabus F D D C ęquales ſunt, altera alteri, et angulus F D C ęqualis angulo E A B, exterior interiori. baſis igitur E B baſi F C eſt æqualis, et E A B 4.huius.

triangulum ęquale triangulo FDC. commune auferatur D G E. reliquum igitur trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F eſt ęquale. commune apponatur G B C triangulum, ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F ęquale erit, parallelogramma igitur in eadem baſi; et in eiſdem parallelis cōſtituta inter ſe æqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum theorematum, vt inquit Proclus, alia quidem vniuerſalia, alia vero particularia eſſe dicebamus, & quemadmodum hęc diuidentes ſubiungebamus, alia eſſe ſimplicia, alia compoſita, & quid vnumquodque horum eſſet oſtendebamus, ita ſanè iuxta aliā diſtinctionem, alia quidem localia eſſe dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuſcumque idem ſymptoma in toto quodam loco accidit. locum uero lineae, vel ſuperficiei ſitum, qui vnum, idemq́; ſymptoma efficiat. localium enim alia in lineis conſtituuntur, alia in ſuperficiebus. Et quoniam linearum aliae ſunt planae, aliae ſolidae. & planae quidem, quarum ſimplex eſt in plano intelligentia, ut ipſius rectae: ſolidae uero quarum ortus ex quadam ſolidae figurae ſectione apparet. ut Cylindicae helicis, canonicarumque linearum, dicerem utique eorum etiam, quae in lineis conſtituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia uero ſolidum. Pręſens igitur theorema & locale eſt, & in lineis locale, & planum. totum enim ſpacium, quod inter parallelas interijcitur, locus eſt parallelogrammorum, quae in eadem baſi conſtituntur. quae ſanè aequalia quoque inter ſe Euclides oſtendit. eorum uero localium theorematum, quae ſolida uocantur, tale ſit exemplum, [parallelogramma, quæ in aſymptotis, et hyperbola deſcribuntur æqualia ſunt.] *nam hyperbolen ſolidam eſſe lineam, manifeſtum eſt, quòd ſit una ex coni ſectionibus. Cum autem in pręſentia de rectilineis ſermo ſit, localia plana in rectis lineis tradit; in tertio autem libro, cū de circulis, eorumq́; ſymptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs conſtituuntur localium ſimul, & planorum theorematum docebit, tale ſiquidem in illis eſt, quod ait* [Qui in eadem portione ſunt anguli inter ſe ſunt ęquales] *nec non illud.* [Anguli qui in ſemicirculo recti ſunt] *nam ſi infiniti quidē anguli in circūferentia conſtituti fuerint, eadē exiſtēte baſi, omnes aequales eſſe oſtenduntur. & illa quidem proportione reſpondent triangulis, & parallelogrammis, quae in eadem baſi, & in eiſdem ſunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox ſequuntur talis eſt, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt pręterea hęc theoremata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis diſciplinis appellantur. ſtupet enim uulgus ſtatim ſi longitudo multiplicata ſpaciorum aequalitatem non deſtruit, eadem exiſtēte baſi. quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur. Sciendum autem eſt angulorum aequalitatem, & inęqualitatem maximam uim habere ad augenda minuendaq́; ſpacia. quo enim magis angulos inęquales efficimus, eò ſpacium magis diminuimus, ſi longitudo latitudoq́; eadem ſit. Hoc theorema plures habet caſus, uel igitur latus B E ſecat C D, uel non ſecat. & ſi non ſecat, uel E cadit inter A D uel in D. Euclides autem difficiliorem caſum elegit, cum ſcilicet latus BE ipſum CD ſecat. ſi uero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quoniam enim A D eſt aequalis EF, quòd utraque ipſi BC ſit aequalis, communi ablata E D, erit reliqua A E aequalis reliquae DF. eſt autem D C aequalis A B. Itaque duae F D D C duabus E A A B aequales ſunt, & angulos aequales continent. baſis igitur F C baſi E B eſt aequalis. & FDC triangulum triangulo E A B. addatur cōmune trapezium E B C D. erit totum A B C D parallelogrammum toti E B C F parallelogrammo aequale. Quòd ſi E cadat in D, ſimiliter demonſtrabimus triangulum F DC aequale triangulo D A B. quare addito utrique communi D B C triangulo, totum A B C D parallelogrammum toti parallelogrammo D B C F, hoc eſt E B C F aequale erit.*

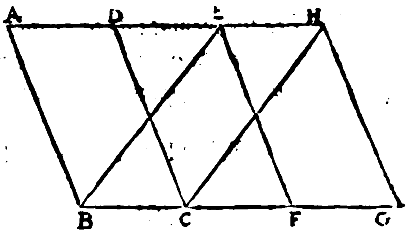
Theoremata localia.
Locus lineæ, uel ſuperficiei ſitus, qui idē ſymptoma efficit..
Linearum aliæ planæ aliæ ſolidæ.
Localium theorematū alia planum habent locū, alia ſolidū.
localia theoremata, quæ ſolida appellantur.
Hyperbole ſolida linea.
Localia plana in rectis lineis.
Localia plana in circumferentijs.
Theoremata quæ in mathematicis admirabilia dicuntur.
Angulorum æqualitas, et inæqualitas maximam uim habent ad augenda minuendaq; ſpacia.
Theorematis caſus.
4. huius.



THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

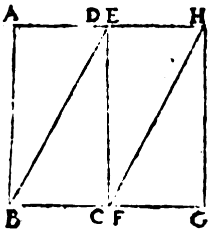
Parallelogramma in ęqualibus baſibus,

et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ęqualia ſunt.



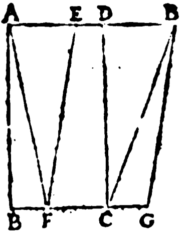
Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus baſibus B C F G, et in eiſdẽ parallelis AH BG conſtituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale eſſe. coniungantur enim BE CH. Et quoniam æqualis eſt BC ipſi FG, & FG ipſi EH; erit et BC ipſi EH æqualis. ſuntq; parallelæ, et ipſas cõiungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad eaſdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ ſunt. 33.huius. Ergo E B, C H et æquales ſunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum eſt, et æquale parallelogrammo ABCD; baſim enim eandem habet B C, et in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur. Ex antecedente. ſimili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt ęquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH ęquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.



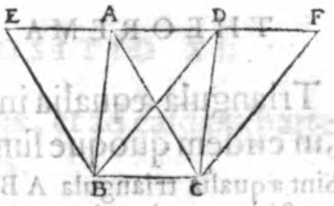
Parallelogrã ma in eiſdẽ parallelis, quæ ſint. Theorematis caſus.

Precedens theorema eaſdem baſes accipiebat, hoc vero aequales. commune autem vtriſque eſt in eiſdem eſſe parallelis. oportet igitur ipſa neque intra ſubiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eiſdem dicuntur eſſe parallelis, cum baſes ipſorum, & quae his ex oppoſito ſunt, latera eiſdem parallelis aptantur. Caſus huius theorematis plures ſunt. Nam vel baſes omnino ſeiunctae ſunt, vel ſe ſe contingunt, uel aliquam partem habent communem, vtcunque ſe habeant latera, quae baſibus opponuntur. & quamquam Proclus dicat Euclidem cum baſim ſeiunctam accepiſſet, theorema demonſtraſſe, attamen demonſtratio, quam habemus omnibus caſibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi poſſit demonſtrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas eſſe.



THEOREMA XXVII.
PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



Sint triangula ABC DBC in eadem baſi BC, et in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC ęquale eſſe. producatur AD ex utraque parte in E F pũcta: et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE, 31.huius. per C vero ipſi BD parallela CF. parallelogrammũ igitur eſt vtrũque ipſorũ EBCA DBCF, et parallelogrammum E B C A eſt ęquale parallelogrammo D B C F, etenim in eadem ſunt baſi BC, et eiſdem parallelis BC EF; 35.huius. eſtq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero DBCF dimidium triangulum DBC; 34.huius. diameter enim DC ipſum bifariam ſecat. Quæ autem æqualium dimidia, inter ſe ęqualia ſunt. 7.com.no. ergo triangulum A B C triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur in eadem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ęqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

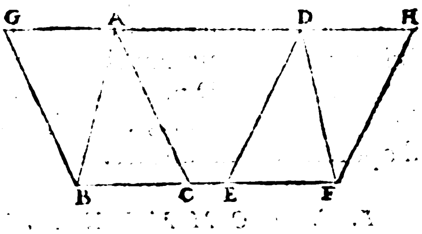
F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata de triangulis localia, & in lineis localia & plana

Sunt etiam hec theoremata de triangulis, quae in eadem baſi, vel in aequalibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituuntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eiſdem eſſe parallelis, quae cum baſes habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figũt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in baſibus, ęqualibus et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt ęqualia.



Sint triangula ABC DEF in æqualibus baſibus, B C E F, et in eiſdem parallelis BF AD conſtituta. Dico ABC triangulum triangulo D E F æquale eſſe. producatur enim AD ex vtraq; parte in GH puncta: et per B quidem ipſi CA parallela ducatur B G: per F vero ducatur FH parallela ipſi DE. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA DEFH. atque eſt parallelogrammum GB CA ęquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim ſunt baſibus BC EF, et in eiſdem BF GH parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat. et parallelogrammi DEFH dimidium eſt triangulum DEF, diameter enim D F ipſum ſecat bifariam. quę autem ęqualiũ dimidia, inter ſe æqualia ſunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF eſt ęquale. triangula igitur in ęqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.

31.huius.

35.huius.

34.huius.

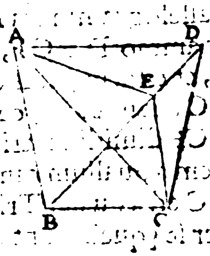
7 com.not.

F. C. COMMENTARIVS.

Caſus in hoc theoremate tot ſunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus oſtendit, vno illo theoremate comprehendiſſe, in principio ſexti libri. [triangula et parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, ut baſes.] *eadem enim altitudo nihil aliud eſt, niſi in eiſdem eſſe parallelis. nã figurae oẽs quę in eiſdẽ ſunt parallelis, eandẽ altitudinẽ habent, & contra, altitudo ſiquidem eſt perpendicularis, quae ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. illic igitur per proportionem oſtenſum eſt, ita ſe ſe habere triangula, et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, hoc eſt quae in eiſdẽ ſunt parallelis, vt baſes: & aequalibus exiſten-tibus baſibus aequalia eſſe ſpacia, & dupla duplis, & aliam proportionẽ habentibus, eandem habere & ſpatia inter ſe proportionem: in pręſentia uero, quoniam non decebat proportione uti, qui nondũ de ipſa docuerat, contentus fuit aequalitate ſolu, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

A Triangula æqualia in eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.



Sint æqualia triangula A B C D B C in eaſdem baſi B C conſtituta, et ad eaſdem partes. Dico et in eiſdem parallelis eſſe. Iungatur enim A D. Dico A D parallelam eſſe ipſi B C. Si enim non eſt parallela, ducatur per A punctum ipſi B C parallela recta linea A E, et E C iungatur. æquale igitur eſt A B C triangulum triangulo E B C, in eadem enim eſt baſi B C, et in eiſdem BC, AE parallelis. Sed A BC triangulũ triangulo D B C eſt ęquale, ergo et triangulum

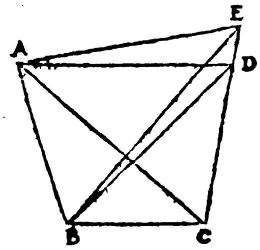
D B C æquale eſt ipſi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non poteſt. non igitur A E ipſi B C parallela eſt. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter ipſam A D. ergo A D ipſi B C eſt parallela. Triangula igitur ęqualia in eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematũ conuerſio triplex.

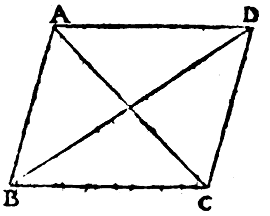
Hoc theorema vigeſimi ſeptimi conuerſum eſt, & quod ſequitur eſt conuerſum vigeſimi octaui. nam, vt inquit Proclus, cum triplex ſit theorematum conuerſio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium ſecũdo; aut pars parti, vt quintum primo. non enim totum in altero datum, quęſitum in altero eſt, nec quęſitum, datum, ſed pars: talia videntur eſſe hęc quoque theoremata in triangulis. erat ſiquidem quęſitum in pręcedentibus, triangula aequalia eſſe. hoc autem non ſolum in his datum eſt, quippe cum partem inſuper ſumpſerit eius, quae in illis erat, poſitionis: hoc enim, in eadem baſi eſſe, & in aequalibus baſibus tum in his, tum in illis datum eſt, pręterquam quòd in hiſce poſitionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quęſitum, nec datum in illis ęrat. particula enim illa, ad eaſdem partes, extrinſecus inſuper fuit aſſumpta. conuerſa vero vigeſimi quinti, & vigeſimi ſexti in parallelogrammis conſulto omiſit, quod eadem ſit in vtriſque demonſtratio.

A Et ad eaſdem partes.] *Quae his reſpondent, videlicet* καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη *in aliquibus gręcis exẽplaribus, tum in hoc theoremate, tum in ſequenti nõ legũtur, ſed neceſſario addita ſunt. fieri enim poteſt vt in eadem baſi aequalia triangula ſumantur, vnum quidẽ ad partes ſuperiores, aliud vero ad inferiores, quae tamen non ſunt in eiſdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.*



B Maius minori quod fieri non pōt.] *Idẽ abſurdũ ſequetur, ſi recta linea A E ſumatur extra ipſam A D, vt notat Proclus. Ex his, quae hoc loco demonſtrata ſunt, patebit cõuerſũ ſecũdę partis vigeſimĩ quarti theorematis, quod erat huiuſmodi.*

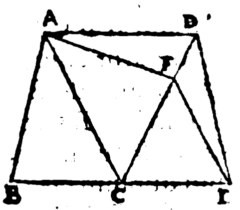
Omne quadrilaterum, quod ab utriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt.



Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C B D ipſum bifariam ſecent. Dico A B C D parallelogrammum eſſe. Quoniam enim triangula A B C D B C eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe aequalia ſunt: & eandem habent baſim B C. quare in eiſdem ſunt parallelis. parallela igitur eſt A D ipſi B C. ſimiliter cum triangulum A B C aequale ſit triangulo A B D, & ſint in eadem baſi A B, demonſtrabitur rectam lineam D C ipſi A B parallelam eſſe. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in baſibus æqualibus, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.



Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus baſibus B C C E conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. cõiungatur enim AD. Dico A D ipſi B E parallellam eſſe. Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E eſt æquale, cum in æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis B E A F conſtituantur. 38. huius. Sed triangulũ A B C ęquale eſt rriangulo D C E.

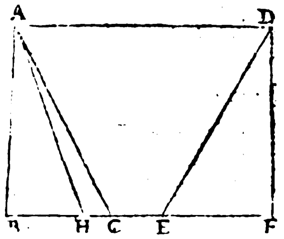
ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E ęquale erit, maius minori, quod fieri nõ poteſt. non igitur A F ipſi B E eſt parallela. ſimiliter demonſtrabimus neque aliam quampiam parallelam eſſe, pra ter A D. ergo A D ipſi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in baſibus æqualibus, et ad eaſdem partes conſtituta, etiam in eiſdem ſunt parallelis. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria ſint in iam dictis propoſitionibus, videlicet in aequalibus, vel eiſdem baſibus eſſe, in eiſdem parallelis, & aequalia eſſe triangula, & parallelogramma; nos duo ſemper contexentes, vnum vero relinquentes varie conuertemus. aut enim baſes eaſdem, vel aequales ponemus, in eiſdemq́ parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipſa ſuſcipiemus, & baſes eaſdem, vel aequeles, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omiſit Euclides, nimirum ea, quae ſunt in parallelogrammis; reliqua vero duo oſtendit, videlicet ea, quae in triangulis ſunt: aut etiam cum aequalia ſumpſerimus, & in eiſdẽ parallelis, reliquum oſtendemus, vel in eiſdem baſibus eſſe, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omiſit. in his namque eadem eſt demonſtratio, niſi quòd duo ex his quattuor per ſe vera non ſunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eiſdem ſunt parallelis, neceſſario in eadem baſi ſunt. Sed totum hoc in hiſce poſitionibus verum eſt, vel in eiſdem eſſe baſibus, vel in ęqualibus; alterum autem, non omnino ſumptas poſitiones conſequitur. Quapropter cũ decem ſint omnia theoremata, ſex quidem geometra conſcripſit, quattuor vero omiſit, ne rurſus eadem ratione fruſtra laboret, cum eadem ſit demõſtratio. oſtẽdetur enim in triangulis hoc modo.

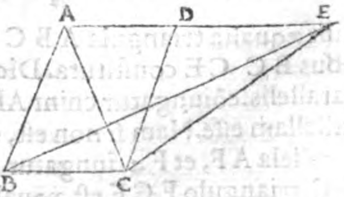
Triangula æqualia, et in eiſdem parallelis conſtituta, vel in eiſdem, vel in æqualibus baſibus erunt.



Sint aequalia triangula A B C D E F in eiſdem parallelis A D B F conſtituta. Dico in aequalibus quoque baſibus eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint baſes B C E F inęquales, & ſit B C maior, abſcindaturq́ BH aequalis ipſi E F; & 38.huius. *A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus ſunt baſibus B H E F, & in eiſdem parallelis, inter ſe aequalia ſunt. Sed & ipſa A B C D E F triangula poſita ſunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H eſt aequale; ſed & maius, quod fieri non poteſt. Non igitur inequales ſunt triangulorum A D C D E F baſes. Idem demonſtrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonſtrandi idem ſit, & id, quod fieri non poteſt, idem, totum, ſcilicet ſuae parti aequale eſſe: non in merito ab Euclide prętermiſſum fuit. hęc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem baſim habeant, in eiſdemq́; ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triãgulum E B C, baſim habeant eandem B C, et in eiſdem ſint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum eſſe. Iũgatur enim A C. 37.huius. triangulum igitur A B D triangulo E B C eſt æquale; namque in eadem baſi B C, et in eiſdem B C A E 34.huius. parallelis cõſtituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum eſt trianguli A B C, cum diameter A C ipſum bifariam ſecet. Quare et ipſius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triangulum

gulum

gulum eandem baſim habeant, et in eiſdem ſint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis duo ſunt caſus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtriſque demonſtratio eadem eſt. Quòd ſi baſes aequales ſint, eodem modo oſtendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in baſibus aequalibus conſtituta inter ſe aequalia ſint, parallelogrammum, quod alterius eſt duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuerſa ſimiliter demonſtrabuntur, quorum vnum eſt.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq́; baſim, aut æquales habuerint, et fuerint ad eaſdem partes: in eiſdem etiam parallelis erunt.

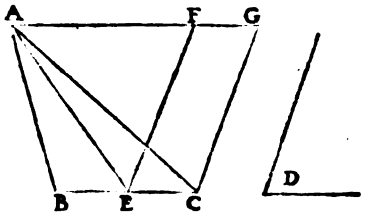
Si enim non ita ſit, totū parti erit aequale, eademq́; ratio vigebit. neceſſe enim eſt, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtro autem modo ſe ſe habuerit, idem ſequetur abſurdum, parallela ipſi baſi per trianguli verticem ducta. alterum vero eſt.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eiſdemq́; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq́; baſi, aut in æqualibns erunt.

Si enim in baſibus inaequalibus ſint, cum aequales ſumpſerimus, totnm parti aequale erit. In hoc igitur commune abſurdum omnia hęc theoremata deſinunt. Quare elementorum inſtitutor nobis reliquit eam, quae in his eſt, veritatem inueſtigare, cum in ſimplicioribus ipſe, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum conſtituerę in dato angulo rectilineo.

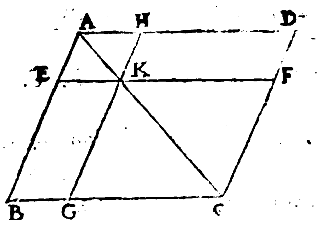


Sit datum triangulum A B C, datus au-
tem rectilineus angulus D. Itaq; oportet,
dato triangulo ABC ęquale parallelogrā-
mum conſtituere in angulo rectilineo ipſi
D æ quali. ſecetur B C bifariam in E, et iun
cta A E ad rectam lineam E C, atque ad pū
ctum in ea E, conſtituatur angulus C E F 23.huius.
ęqualis ipſi D: et per A quidē ipſi E C paral
lela ducatur A G; per C vero ipſi F E ducatur parallela C G. parallelogrāmum igi- 31.huius.
tur eſt F E C G. Et quoniam B E eſt ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangu- 38.huius.
lo A E C ęquale; in ęqualibus enim ſunt baſibus B E E C, et in eiſdem B C A G pa
rallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C eſt duplum. eſt autem et parallelo 34 huius.
grammum F E C G duplum trianguli A E C; baſim enim eandem habet, et in eiſdē
eſt parallelis. ęquale igitur eſt F E C G parallelogrammum triangulo A B C, ha-
betq́; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æqua-
le parallelogrammum F E C G conſtitutum eſt, in angulo C E F, qui angulo D eſt
æqualis. quod quidem facere oportebat.

THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi ſpacij eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum ſupplementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipſam A C paral
lelogramma quidem ſint E H F G, quæ vero ſupplementa dicuntur B K K D. Dico
BK ſuplementum ſupplemento K D æquale eſſe. Quoniam enim parallelogram-
mum eſt A B C D, et eius diameter A C, ęquale eſt A B C triangulum triangulo 34.huius.

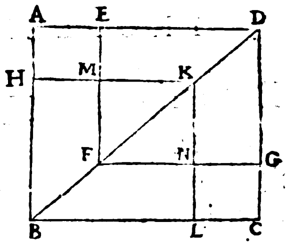


A D C. Rurſus quoniam E K H A parallelogrammum eſt, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C eſt æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K ęquale ſit triangulo A H K: triangulum vero K G C ipſi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C ęquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. eſt autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E. reliquum igitur B G ſupplementum reliquo ſupplemento K D eſt ęquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpacii eorum, quę circa diametrum ſunt, parallelogrãmorum ſuppleměta inter ſe æqualia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

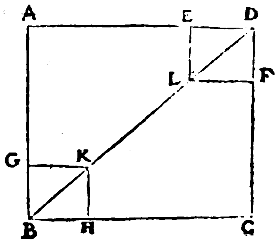
Huius theorematis tres ſunt caſus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem conſiſtunt diametrum, ſe ſe in puncto contingunt, vel ſe ſe ſecant, vel quadam diametri parte à ſe diſiunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonſtratio, quamquam non ſemper quadrilatera ſint ſupplementa. Euclides ſumpſit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum conſiſtere dicuntur, videlicet quae ſe ſe in puncto contingunt, in quo caſu ſupplementa B K K D quadrilatera ſunt, vt apparet in prima figura. Sit rurſus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogromma ſint E F G D H B L K, quae ſe ſe in punctis M N ſecent. Dico quadrilatera A H M E N L C G inter ſe aequalia eſſe. Quoniam enim triangulum quidem A B D eſt aaquale triangulo D B C; triangulum vero E F D triãgulo D F G; erit reliquum quadrilaterum A B F E ęquale reliquo quadrilatero C B F G. Rurſus quoniam triangulũ H B K eſt aequale triangulo K B L, triangulumq́; M F K triãgulo K F N; erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G. reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale ſit neceſſe eſt; & hęc quidem quadrilatera ſunt, quae ſupplementa dicuntur.

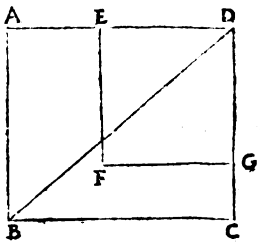
34. huius.



Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à ſe inuicem diſiunguntur parte ipſius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D eſt aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia ſunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum ſupplementa ſunt. At nomen ſupplementorum à re ipſa ſumptũ eſt, quatenus hęc quoque preter duo parallelogramma, quae ſunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum ſunt, quęcumque partem totius diametri pro ſua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi ſecat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non eſt, vt in parallelogrammo A B C D diameter BD ſecat E F latus ipſius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non eſt circa eandem diametrum.

Supplementorũ nomen a re ipſa sũptum.





PROBLEMA XII. ROPOSITIO. XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo ęquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D ęquali. conſtituatur triangulo C æquale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui eſt ęqualis D. et ponatur B E in directum ipſi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipſarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iūgatur. Quoniā igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales ſunt. quare BHG GFE duobus rectis ſunt minores. Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti, in infinitum producuntur, cōueniunt inter ſe. Ergo H B F E productæ conuenient, producantur, et cōueniant in K: perq; K alterutri ipſarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur eſt H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem ſunt A G M E; ea vero, quæ ſupplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipſi B F eſt æquale. Sed et B F æquale eſt triangulo C. quare et L B triāgulo C ęquale erit. Et quoniā G B E angulus ęqualis eſt angulo A B M, ſed et æqualis angulo D; erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C ęquale parallelogrammum conſtitutum eſt L B, in angulo A B M, qui eſt æquaiis angulo D, quod facere oportebat.

42. huius.

31. huius.

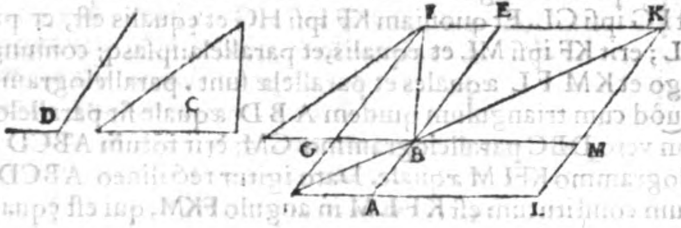
29. huius.

5. poſtul.

31. huius.

Ex antecedente.

15. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hęc ſunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio ſpaciorum, exceſſus, & defectus. cum enim propoſita recta linea, datum ſpacium toti rectae lineae coaptaueris, tunc ſpacium illud applicari dicunt; cum vero ſpacij longitudinem ipſa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt ſpacio deſcripto aliqua rectae linae pars extra ſit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in ſexto libro, tum exceſſus, tum defectus mentionem facit. in pręſentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo aequale parallelogrammum applicare uolens, vt non ſolum parallelogrammi dato triangulo aequalis conſtitutionem habeamus, ſed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

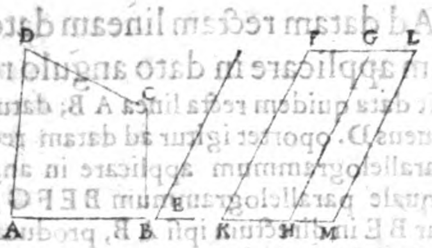
Rectilineo dato ęquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtituere in angulo ipſi E æquali. coniungatur enim DB, et conſtituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH; in angulo HKF, qui eſt æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E eſt æqualis. Et quoniam angulus E æqualis eſt vtrique ipſorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42. huius.

Ex antecedente.

29. huius. KHG angulis KHG GHM æquales ſunt. Sed MKH KHG ſunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad eaſdem partes poſitę angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur eſt KH ipſi 14. huius. HM. Et quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli 29. huius. MHG HGF æquales ſunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL ſunt æquales. at anguli MHG HGL ęquales ſunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur eſt FG ipſi GL. Et quoniam KF ipſi HG et ęqualis eſt, et parallela; ſed et HG ipſi 34. huius. ML; erit KF ipſi ML et æqualis, et parallela: ipſasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL. 30. huius. ergo et KM FL æquales et parallelæ ſunt. parallelogrammum igitur eſt KFLM. 33. huius. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale ſit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtitutum eſt KFLM in angulo FKM, qui eſt ęqualis angulo E dato. quod facere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & conſtitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuerſalius eſt. ſiue enim triangulum, ſiue quadratum, ſiue omnino quadrilaterum, ſiue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipſi parallelogrammum conſtituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per ſe in triangula reſoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus; reſoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipſorum aequale parallelogrammum conſtituentes, reliquis uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelogramma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta eſt; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis conſtat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hęc Proclus.

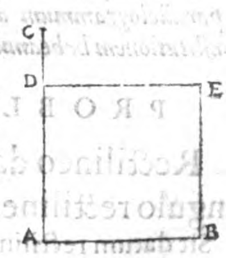
COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifeſtum eſt, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum deſcribere.

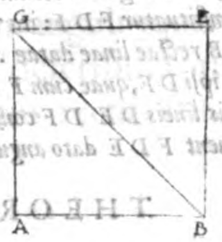
Sit data recta linea AB. oportet ab ipſa AB quadratũ deſcribere. Ducatur rectę lineę AB à pũcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipſi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipſi AB parallela: et per B ipſi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur eſt ADEB. et AB quidem eſt æqualis DE, AD vero ipſi BE. Sed et BA ipſi AD eſt æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter ſe ęquales ſunt, ideoq; æquilaterum eſt ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis ſunt æquales. rectus 29. huius. autem eſt BAD. ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum vero ſpaciorum, 34. huius. quæ ex oppoſito ſunt latera, et anguli inter ſe ęqualia ſunt. rectus igitur eſt vterque oppoſitorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum eſt ADEB. oſtenſum autem eſt, et æquilaterum eſſe. quadratum igitur ſit neceſſe eſt. atque eſt à recta linea AB deſcriptum. quod ipſum facere oportebat.



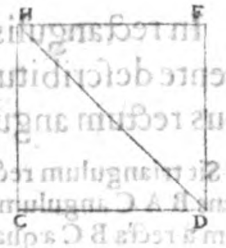
Hoc problemate indigemus potiſſimum in ſequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluiſſe, nimirum trianguli aequilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & praecipue earum quattuor, quarum & ortus eſt & reſolutio, huſce rectangulis opus eſt. nam icoſaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis conſtant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonſtrat, quibus mathematici tamquam demonſtratis paſſim vtuntur, nempe hęc.

Quadrata ab ęqualibus rectis lineis deſcripta, etiam inter ſe æqualia ſunt.

Sint enim aequales rectae lineae AB CD, & ab ipſa quidem AB deſcribatur ABEG quadratum; ab ipſa vero CD quadratum CDFH. Dico hęc quadrata inter ſe aequalia eſſe. Quoniam enim rectae linae AB CD aequales ſunt, erunt & ipſae AG CH aequales, anguloſq; aequales continent. 4.huius. *ergo & baſis GB eſt aequalis baſi HD, & triangulum ABG aequale triangulo CDH, & ipſorum dupla ſunt aequalia. quadratum igitur ABEG quadrato CDFH aequale erit. Sed & huius ipſius conuerſum.*



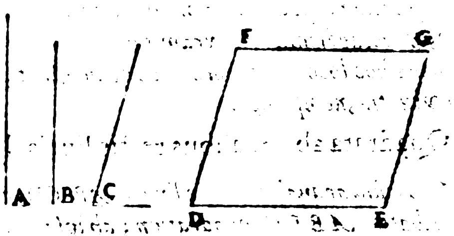
Quadrata ęqualia ab ęqualibus rectis lineis deſcripta sũt.



Sint enim quadrata aequalia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB ſit in directum ipſi BC. Cum igitur anguli recti ſint, recta quoque linea FB rectae BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectae linae. Et quoniam AF quadratum eſt aequale quadrato CG, & AFB triangulum aequale erit triangulo CBG. commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG eſt aequale; ideoq; parallela eſt AG ipſi FC. 39.huius. *Rurſus quoniam angulus AFG eſt aequalis angulo CGB, cum vterque ſit dimidia pars recti; erit AF ipſi CG parallela.* 28.huius. *aequalis igitur eſt recta linea AF rectae linae CG, parallelogrammi ſiquidem latera ex oppoſito iacentia ſunt.* 34.huius. *Itaque quoniam duo ſunt triangula ABF BCG, quae alternos angulos aequales habent, quippe quòd AF CG parallelae ſint, & latus vnum AF eſt aequale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG aequale. Oſtenſum igitur eſt latera etiam à quibus deſcripta ſunt AF CG quadrata inter ſe aequalia eſſe, cum illa aequalia ſint. poſſumus etiam aliter propoſitum demonſtrare per deductionem ad id, quod fieri non poteſt in hunc modum. Sint aequalia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea deſcribuntur inter ſe aequales eſſe. Si enim AB EF aequales non ſint, altera earum eſt maior, ſit maior AB, & abſcindatur AK, quae ipſi EF ſit aequalis, & ex AK quadratum AKLM deſcribatur. Quoniam igitur AK eſt aequalis EF, erit & quadratũ AKLM, ex ante demõſtratis, aequale quadrato EFGH; ſed et quadratum ABCD aequale erit eidem EFGH quadrato. ergo quadratum ABCD quadrato AKLM eſt aequale, totum parti, quod fieri non poteſt. non igitur aequalibus exiſtentibus quadratis ABCD EFGH rectae lineae AB EF à, quibus ea deſcribũtur, inequales ſunt. ergo inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.*

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam conſtitutionem problema, quod ſequitur.

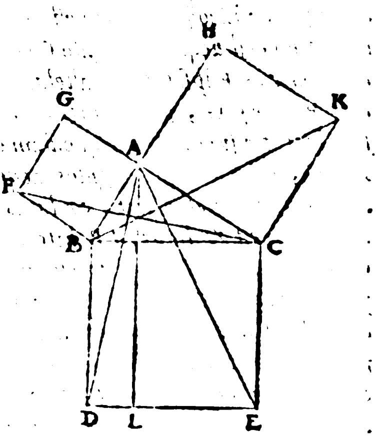
Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales ſint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum conſtituere.



Sint datae quidem rectae linae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipſis A B aequales ſint, & in angulo ipſi C aequali, parallelogrammum conſtituere. exponatur recta linea D E, 23.huius. *quae ipſi A ſit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus conſtituatur F D E: ita vt F D ſit aequalis ipſi B rectae linae datae. poſtea per F ducatur F G parallela ipſi D E, & per E ducatur parallela ipſi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur eſt F D E G, ex rectis lineis D E D F conſtitutum, quae datis rectis lineis A B ſunt aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.*

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.



Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum deſcriptum à recta B C æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis B A A C deſcribuntur. Deſcribatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipſis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipſarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungātur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus eſt, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad eaſdem partes poſitę, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis ęquales efficiunt. 14.huius. in directum igitur eſt C A ipſi A G. eadem ratione, et A B ipſi A H eſt in directum. Et quoniam angulus D B C eſt ęqualis angulo F B A, rectus enim vterque eſt, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C eſt æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus F B B C ęquales ſint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; 4 huius. erit et baſis A D baſi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C ęquale. 41.huius. eſtq; trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; baſim enim eandem habent B D, et in eiſdem B D A L ſunt parallelis: trianguli vero F B C duplum eſt G B quadratum. rurſus enim baſim habent eandem F B, et in eiſdem ſunt parallelis F B G C. Quæ autem ęqualium dupla inter ſe æqualia ſunt. ergo æquale eſt parallelogrammum B L ipſi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, oſtendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C eſt æquale. et deſcribitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipſis B A A C. quadratum igitur B E, à latere BC deſcriptum ęquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod deſcribitur à latere rectum angulum

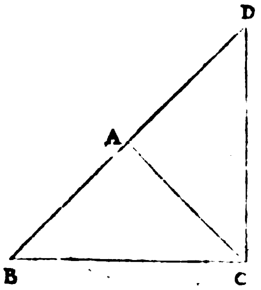
gulum ſubtendente æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq́ eum cum illud inueniſſet, bouem immolaſſe. Quod autem ab Euclide in ſexto libro conſcribitur multo vniuerſalius eſt, oſtendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum ſubtendente aequalem eſſe figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitae, deſcribuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod deſcribitur ab vno laterum trianguli ęquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C deſcribitur quadratum æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C deſcribuntur. Dico angulum B A C rectum eſſe. Ducatur enim à puncto A ipſi A C ad rectos angulos A D; 11. huius. ponaturq́; A D ipſi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A eſt ęqualis A B, erit et quadratum, quod deſcribitur ex D A, ęquale quadrato, quod ex A B. cōmune apponatur quadratum, quod ex A C. ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia ſunt quadratis, quæ ex B A A C deſcribuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale eſt, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus eſt D A C; quadratis vero, quæ ex B A A C ęquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex DC æquale eſt ei, quod ex B C quadrato. ergo et latus D C lateri C B eſt æquale. Et quoniam D A eſt æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales ſunt; et baſis D C eſt æqualis baſi C B. angulus 8. huius. igitur D A C angulo B A C eſt ęqualis. rectus autem eſt D A C. ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod deſcribitur ab vno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema pręcedenti, & totum toti conuertitur. ſi enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum ęquale eſt quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur. & ſi quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quòd eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

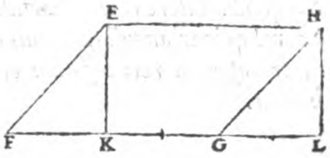
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER SECVNDVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIO. I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum conſtituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid ſit parallelogrammum rectangulum dictum eſt ſuperius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae ſunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non ſunt. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D: & ſit, exempligratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem ſunt altitudine, & baſes, vel eaſdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius baſis F G ſit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K ſit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L ſit ipſi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogramma E F G H E K L H cum aequales habeant baſes F G K L, ſintq́, eadem altitudine, hoc eſt in eiſdem parallelis, inter ſe aequalia ſunt: ſed parallelogrammi E K L H area eſt pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum ſit neceſſe eſt. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum ſunt, in preſentia ponatur, quo ad ita eſſe manifeſto apparebit. Demonſtratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in cõmentarijs in librum Archimedis de dimenſione circuli.



DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi ſpacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipſius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus ſupplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

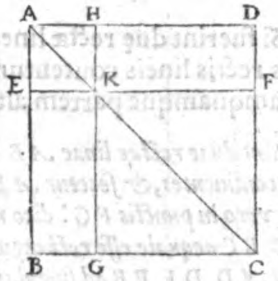
Sciendum eſt gnomonem breuitatis cauſſa à geometris inuentum fuiſſe. nomen vero ex accidente impoſitum eſt; ab ipſo enim forma cognoſcitur, vel totius ſpacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoſcopijs eius officium dumtaxat eſt præſentes horas notas efficere. ſupplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non ſint, ſed vt non ſimilia toti, complentia vero totius ad ipſum ſimilitudinem.

Gnomon a Geometris breuitatis cāuſſa inuentus.

Gnomonis officium in horoſcopiis.

Supplementa.

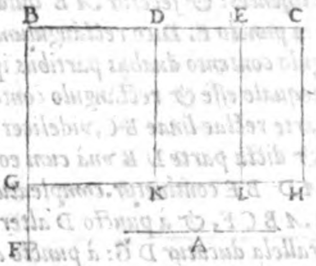
F. C. COMMENTARIVS.



Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum conſiſtere, ſuperius dictum eſt, ut quae ſe inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum ſint AEKH, KGCF: & ſupplementa BK KD. Itaque duo ſupplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae ſunt circa diametrum, gnomon appellatur. & ſi parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrãmum AC ſimile ipſi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BFH reliquũ eſt parallelogrãmũ EH ſimile toti. Quamobrẽ ab Ariſtotele dictum eſt, quadratũ circũpoſito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum eſt. Illud autem, quod in ſcholio additur ſupplementa non eſſe ſimilia toti, non omnino verum eſt. fieri enim poteſt ut quandoque etiam ſint ſimilia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & ſecetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipſarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipſarum AB DC. erunt ſupplementa BE ED ſimilia quidem toti, ipſis vero FH KG parallelogrammis, & ſimilia & aequalia, quod ex ijs, quae in ſequentibus tradentur, facile demonſtrare poſſumus.

THEOREMA I. PROPO. I.

Si ſint duæ rectæ lineę, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ recta linea inſecta, et ſingulis partibus continentur.



Sint duæ rectæ lineæ A BC; et ſecta ſit BC vtcumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale eſſe rectanguloq;, quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipſi BC ad rectos angulos BF: atque ipſi A ponatur ęqualis BG: et per G quidem ipſi BC parallela ducatur GH; per D E C vero ducantur DK EL CH parallelæ ipſi BG. rectangulum igitur BH eſt æquale rectangulis BK DL EH: atque eſt BH quidem, quod A BC continetur; etenim continetur GB BC: et BG ipſi A eſt æqualis; rectangulum

15.primi.

3.primi.

31 primi.

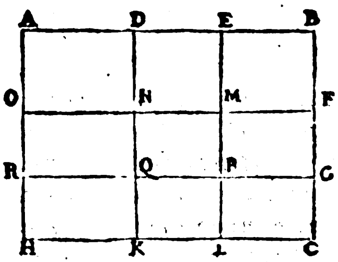
autẽ B K eſt quod continetur ipſis A BD; continetur enim GB BD, quarũ GB eſt æqualis A:et rectangulum D L eſt quod continetur A DE,quoniam D K,hoc eſt B G ipſi A eſt ęqualis:et ſimiliter rectangulum E H eſt quod A E C continetur.ergo rectangulum contentum A B C eſt æquale rectanguloq́; contento A BD, et contento A D E,et adhuc contento A E C. Si igitur ſint duę rectæ lineę,altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale eis,quę recta linea inſecta,et ſingulis partibus continentur.quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his ſimilia demonſtrare libuit, quae tum ad alia, tum ad ea, quae in decimo libro traduntur, vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

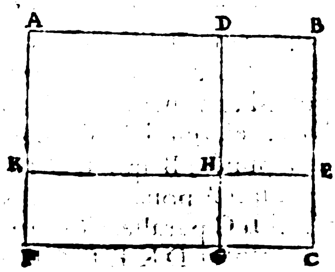
Si fuerint duę rectæ lineæ,quæ ſecentur in quotcumque partes;rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis, quæ vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.



Sint duae rectae linae A B B C rectum angulum A B C continentes, & ſecetur A B quidem in punctis DE, B C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale eſſe rectangulis, quae ſingulis ipſarum A D D E E B ad ſingulas B F F G G C applicatis continentur. completo enim parallelogrammo A B 31. primi. *CH, ducantur per D E puncta rectae linae D K EL, alterutri ipſarum A H B C parallelae; & per F G ducatur F M N O G P Q R parallelae alterutri ipſarum A B H C, erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F O Q N P M G R K Q L P C: & ſunt parallelogramma A N D M E F, quae continentur ipſa B F, & ſingulis partibus rectae linae A B, videlicet A D D E E B: parallelogramma vero O Q N P M G ſunt, quae continentur F G, & ſingulis partibus A D D E E B: & denique parallelogramma R K Q L P C, quae continẽtur G C, & ſingulis partibus eiuſdem rectae linae A B. Si igitur fuerint duae rectae linae, quae ſecentur in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt aequale rectangulis, quae vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque ſecentur; rectangulum totis contentũ vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt ęquale rectangulis, quæ continentur totis,et dictis partibus vnà cum eo,quod reliquis partibus continetur.



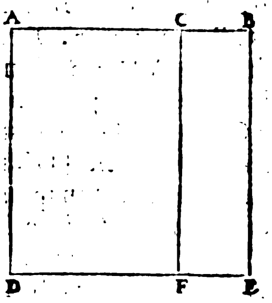
Sint duae rectae linae A B B C, rectum angulum A B C continentes: & ſecetur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipſarum, videlicet D B E C aequale eſſe & rectangulo contento tota A B, & dicta parte rectae linae B C, videlicet E C, & contento tota B C, & dicta parte D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. compleatur enim parallelogrãmum A B C F, & à puncto D alterutri ipſarum B C A 31. primi. *F parallela ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallela alterutri ipſarum A B F C. itaque conſtat rectangulum A B C aequale eſſe rectangulis A E K C. addatur vtrinque commune rectangulum H C, quod continetur duabus partibus*

D B

D B E C. Rectangulum igitur A B C vnà cum rectangulo H C eſt aequale tribus rectangulis A E K C, & H C. quorum rectangulum quidem K C eſt quod continetur tota A B, hoc eſt K E, & parte E C: rectangulum vero D E vna cum rectangulo H C eſt quod continetur tota B C, & parte D B: & reliquum A H eſt quod continetur reliquis partibus A D B E, hoc eſt A D D H. ergo rectangulum A B C vnà cum rectangulo H C eſt aequale & rectangulo contento tota A B, & E C, & contento tota B C, & D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. Si igitur duae rectae lineae vtcumque ſecentur et reliqua, quod oportebat demonſtrare. Eodem modo demonſtrabitur & in alys partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

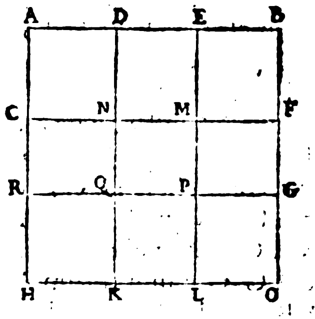
Si recta linea ſecta fuerit vtcumque; rectangula quæ tota, et ſingulis partibus cõtinẽtur æqualia ſunt ei, quod à tota fit quadrato.



Recta enim linea A B ſecta ſit vtcumque in pũcto C. Dico rectangulum, quod A B B C continetur, vnà cum contento B A A C ęquale eſſe quadrato, quod fit ex A D. Deſcribatur enim ex A B quadratũ ADEB, et per C ducatur alterutri ipſarum A D B E parallela C F. æquale igitur eſt A E rectãgulis A F C E. atque eſt A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum cõtentum B A A C; etenim D A A C continetur, quarum A D ipſi A B eſt ęqualis: et rectangulum C E continetur AB BC, cum B E ſit ęqualis AB. ergo rectangulum B A C vnà cum rectangulo A B C æquale eſt quadrato ex A B. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit, rectangula, quę tota, et ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonſtrare oportebat.

46.primi.
31.huius.

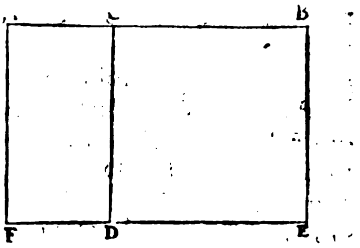
F. C. COMMENTARIVS.



Similiter vt ſuperius demonſtrabitur, ſi recta linea ſecetur in quotcumque partes, quadratum totius lineae aequale eſſe rectangulis, quae ſingulis partibus ad ſingulas applicatis continentur.

THEOREMA. III.
PROPOSITO. III.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum ęquale eſt et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à prædicta parte fit quadrato.



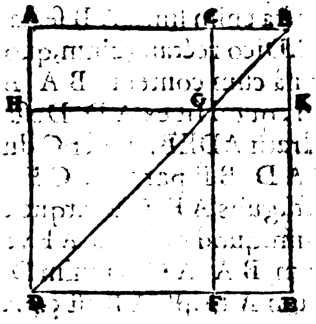
Recta enim linea A B ſecta ſit vtcumque in puncto C. Dico A B C rectangulum ęquale eſſe rectangulo A C B vnà cum quadrato, quod fit ex B C. Deſcribatur enim ex B C quadratũ C D E B; producaturq; E D in F; et per A alterutri ipſarum C D B E parallela ducatur A F. ęquale vtique erit rectangulũ A E ipſis A D C E: et eſt AE quidem rectãgulum contentum A B B C; etenim A B B E continetur, quarum B E eſt æqualis B C: rectangulum vero A D eſt quod continetur A C C B, cum D C

46.primi.
31.primi.

ipſi C B ſit ęqualis:et D B eſt quadratum,quod fit ex B C.ergo rectangulum A B C eſt ęquale rectangulo A C B vnà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale eſt rectangulo,quod partibus continetur,et ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea ſecta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota ęquale erit,et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei,quod bis partibus continetur rectangulo.



Recta enim linea A B ſecta ſit vtcumque in C.
Dico quadratum, quod fit ex A B æquale eſſe, et
quadratis ex A C C B, et ei rectangulo quod bis
A C C B continetur. Deſcribatur enim ex A B
46.primi. quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C
31.primi. quidem alterutri ipſarum A D B E parallela ducatur
C G F;per G vero alterutri ipſarum A B D
E ducatur parallela H K. Et quoniam C F eſt parallela
29.primi. ipſi A D, et in ipſas incidit B D: erit exterior
angulus B G C interiori et oppoſito A D B
5.primi. æqualis:angulus autem A D B eſt ęqualis angulo
A B D, quod et latus B A æquale eſt lateri A D.
quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis:
6.primi. ac propterea latus B C lateri C G æquale.Sed et latus C B æquale eſt lateri G K, et
34.primi. C G ipſi B K.ergo et G K eſt æquale K B,et C G K B æquilaterum eſt. dico inſuper
etiam rectangulum eſſe.quoniam enim C H eſt parallela ipſi B K, et in ipſas incidit
29.primi. C B;anguli K B C G C B duobus rectis ſunt æquales.rectus autem eſt K B C angulus.
34.primi. Ergo et rectus G C B,et anguli oppoſiti C G K G K B recti erunt. rectangulũ
igitur eſt C G K B. Sed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt C
G K B,quod quidem fit ex B C.eadem ratione et H F eſt quadratum, quod fit ex H
G.hoc eſt ex A C.ergo H F C K ex ipſis A C C B quadrata ſunt.et quoniam rectāgulum
43.primi. A G eſt æquale rectangulo G E, atque eſt A G quod A C C B continetur,
eſt enim G C ipſi C B æqualis:erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B.quare
rectangula A G G E ęqualia ſunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem
et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis
ex A C C B,et ei quod bis A C C B continetur rectangulo ſunt æqualia.Sed H F C
K A G G E ſunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B.quadratum igitur ex
A B æquale eſt,et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo.quare
ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale
erit et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei rectangulo, quod bis partibus continetur,atque
illud eſt,quod demonſtrare oportebat.

A L I T E R. Dico quadratum ex A B æquale eſſe,& quadratis ex A C C B. et ei
rectangulo,quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis
5.primi. eſt B A ipſi A D; et angulus A B D angulo A D B æqualis erit:et cum omnis trian
32.primi. guli tres anguli duobus rectis ſint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B
D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus B A D.ergo reli
qui A B D A D B ſunt vni recto æquales, et ſunt ęquales inter ſe ſe, vterque igitur
29.primi. ipſorum A B D A D B eſt recti dimidius. Sed rectus eſt B C G,æqualis namque eſt
angulo oppoſito, qui ad A. reliquus igitur CGB dimidius eſt recti;ac propterea C
6.primi. G B angulus angulo C B G eſt ęqualis; et latus B C æquale lateri C G.Sed C B eſt
æqualis G K,et C G ipſi B K. æquilaterum igitur eſt C K; et cum habeat rectum an
gulum C B K,etiam eſt quadratum;quod quidem fit ex C B,eadem ratione et H F
quadratum

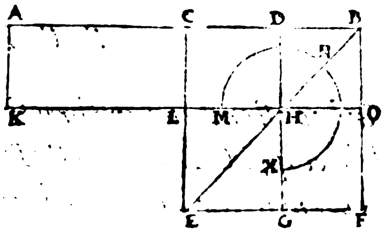
quadratum eſt,et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur ſunt C K H F, et 34.primi. quadratis ex A C C B ęqualia.Rurſus quoniam rectangulum A G eſt ęquale ipſi G 43.primi. E,atque eſt A G id quod A C C B continetur, eſt enim C G ipſi C B æqualis: erit et G E æquale contento A C C B.quare A G G E ęqualia ſunt ei, quod bis A C C B continetur.Sunt autem et C K H F ęqualia quadratis ex A C C B.ergo C K H F A G G E æqualia ſunt et quadratis ex A C C B,et ei quod bis A C C B cõtinetur. Sed C K H F et A G,G E ſunt totum A E,quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B ęquale eſt,quadratisq; ex A C C B,et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicue conſtat in quadratis ſpacijs parallelogramma, quæ ſunt circa diametrum,quadrata eſſe.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

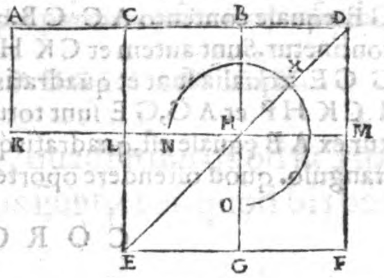
Si recta linea ſecta fuerit in partes æquales,et in partes inęquales,rectangulum inęqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interijcitur, æquale eſt ei quod à dimidia fit quadrato.



Recta enim linea quædam A B ſecta ſit in partes ęquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D.Dico rectangulum contentum A D D B vnà cum quadrato quòd fit ex C D æquale eſſe ei quod ex C B quadrato. Deſcribatur enim ex B C quadratum C E F B, iungaturq; B E;et per D quidem alterutri ipſarũ C E B F parallela ducatur D H G;per H vero ducatur K L O parallela alterutri ipſarum C B E F:et rurſus 46.primi. 31.primi. per A ducatur alterutri C L B O parallela A K.Et quoniã C H ſupplementum æquale eſt ſupplemento H F,commune apponatur D O.totum igitur C Q toti D F eſt æquale, ſed C O eſt æquale A L,quoniam et 43.primi. A C ipſi C B.ergo et A L æquale eſt D F.commune apponatur C H.totum igitur A 36.primi. H ipſis F D D L æquale erit.Sed A H quidẽ eſt quod A D D B continetur, etenim D H ipſi D B eſt æqualis: F D D L vero eſt gnomon M N X. gnomon igitur M N X æqualis eſt ei,quod A D D B continetur.commune apponatur L G, ęquale ſcilicet quadrato quod ex C D.ergo M N X gnomon, et L G ęqualia ſunt rectangulo,quod continetur A D D B, et ei, quod fit ex C D quadrato. Sed M N X gnomon, et L G ſunt totum quadratum C E F B,quod quidem fit ex C B.ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato quod ex C D æquale eſt ei,quod ex C B quadrato.Si igitur recta linea ſecta fuerit in partes æquales,et in partes inæquales,rectangulum inęqualibus totius partibus cõtẽtum vnà cum quadrato lineę,quæ inter ſectiones interiicitur, æquale eſt ei,quod à dimidia fit quadrato.quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea bifariam ſecetur, atque ipſi in rectum adijciatur quædam recta linea;rectangulum tota cum adiecta,et adiecta cõtentũ,vnà cum quadrato dimidię,ęquale eſt quadrato,quod ab ea, quę ex dimidia, et adiecta cõſtat tãquã ab vna linea deſcribitur.



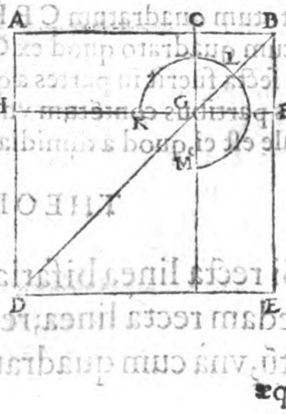
Recta enim linea quędam A B ſecetur bi-
fariam in puncto C, adiiciaturq; ipſi in re-
ctum B D. Dico rectangulum A D B vnà
46.primi. cũ quadrato ex B C æquale eſſe ei, quod ſit
ex C D quadrato. Deſcribatur enim ex C
31 primi. D quadratum C E F D, et iungatur D E;
perq; B alterutri ipſarum C E D F paralle-
la ducatur B H G: et per H ducatur K L M
parallela alterutri ipſarum A D E F: et ad-
huc per A alterutri C L D M parallela A
36.primi. K. Itaque quoniã A C eſt æqualis C B, erit
43.primi. et rectangulum A L rectangulo C H æqua-
le. ſed C H æquale eſt H F. ergo et A L ipſi H F æquale erit. commune apponatur C
M. totum igitur A M gnomoni N X O eſt ęquale: atq; eſt A M, quod A D D B cõtine-
tur, etenim D M eſt ęqualis D B. ergo et gnomon N X O ęqualis eſt rectãgulo A D B.
rurſus commune apponatur L G, æquale ſcilicet quadrato, quod ex C B. rectangu-
lum igitur A D B vnà cum quadrato quod ex B C ęquale eſt gnomoni N X O, et ip-
ſi L G. Sed gnomon N X O, et L G totum ſunt C E F D quadratum; quod quidem
fit ex C D. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato ex B C æquale eſt ei, quod
fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea ſecetur bifariam, adiiciaturq; ipſi in re-
ctum quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum vnà
cum quadrato dimidiæ æquale eſt quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, et adiecta
conſtat, tamquàm ab vna linea deſcribitur. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIUM.

In hoc oſtenditur arithmetica anologia. quo enim A D ſuperat D C, videlicet ipſa C B, eo & C D ſuperat D B. quod per numeros manifeſtius cognoſcitur, cum medius ſemper æqualiter & excedatur, & excedat. Theorema autem eſt. Quadratum quod fit ab exceſſu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale eſſe.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata ęqualia ſunt, et rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quòd à reliqua parte fit quadrato.



Recta enim linea quædam A B ſecta ſit vtcum-
46.primi. que in pũcto C. Dico quadrata ex A B B C ęqua-
lia eſſe et rectangulo, quod bis A B B C contine-
43.primi. tur, et ei quod fit ex A C quadrato. Deſcribatur
enim ex A B quadratum A D E B, et figura con-
ſtruatur. itaque quoniam A G rectangulũ æqua-
le eſt rectangulo G E. commune apponatur C F.
quare totum A F toti C E eſt æquale. rectangula
igitur A F C E dupla ſunt rectanguli A F. Sed A
F C E ſunt K L M gnomon, et quadratum C F. er-
go K L M gnomon, et quadratũ C F dupla erũt
rectanguli A F. eſt autem id quod bis A B B C
continetur duplum ipſius A F; etenim B F eſt

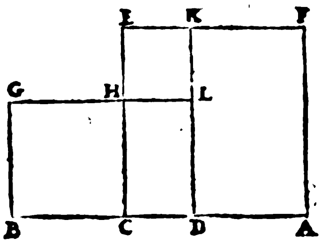
æqualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod eſt ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD ęqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum ſunt ADEB, et CF; quæ ſunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC ęqualia ſunt rectãgulo, quod bis AB BC cõtinetur vnà cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia ſunt rectanguloq́;, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Non alienum eſſe videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergei conica demonſtrauimus: eo enim ad ſequentia vtemur.

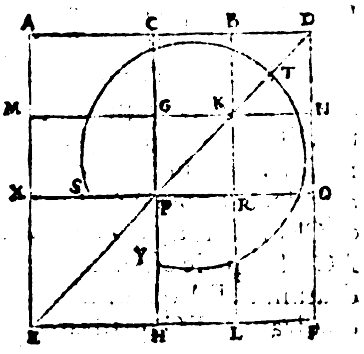
Si recta linea in partes inęquales ſecetur; earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.



Secetur recta linea AB in partes inęquales in C ita
vt AC maior ſit quàm CB; & ipſi CB aequalis ponatur
AD. Dico quadrata ex AC CB aequalia eſſe rectangulo,
quod bis ACB continetur vnà cum quadrato rectae li-
neae DC, qua ſcilicet AC ipſam CB ſuperat. conſtituan-
tur enim ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D 46.primi.
ducta linea DK, ipſi CE parallela, producatur GH, vt ſe 31.primi.
cet DK in L. Itaque quoniam AD eſt aequalis CB, addi-
ta vtrique communi DC; erit DB ipſi AC aequalis. Sed 34.primi.
GL eſt aequalis BD, & CE aequalis AC: ergo & GL
ipſi CE aequalis erit, eſt autem & CH aequalis HG. reliqua igitur EH reliqua HL eſt aequalis: ideoq́; KH eſt quadratum, quod à linea KE, hoc eſt DC deſcribitur. rectangula vero AK DG ſunt quae continentur lineis AC CB; etenim AD eſt aequalis BC, & DB ipſi AC. quadrata igitur ex AC CB aequalia ſunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipſius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inęquales ſecetur; earum partium quadrata aequalia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineae, qua maior pars ſuperat minorem, quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquę partis ęquale eſt quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea deſcribitur.



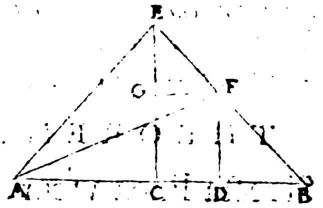
Recta enim linea AB ſecta ſit utcumque in C. Di
co rectangulum quater AB BC contẽtum vnà cum
quadrato quod ex AC æquale eſſe quadrato, quod
ex AB BC, tamquam ex vna linea deſcribitur. Pro-
ducatur enim recta linea AB in D; et ipſi CB pona-
tur æqualis BD; deſcribaturq́; ex AD quadratum
AEFD; et dupla figura conſtruatur. Quoniam igi- 34.primi.
tur CB eſt æqualis BD, atque eſt CB ipſi GK ęqua-
lis; BD vero ipſi KN: erit et GK ęqualis KN. eadem
ratione et PR ipſi RO eſt æqualis. et quoniam CB
eſt ęqualis BD, et GK ipſi KN; erit rectangulum 36.primi.

quidem

43.primi. quidem CK rectangulo KD; rectāgulū vero GR ipſi RN ęquale. Sed CK eſt æquale RN, ſuppleméta enim ſunt parallelogrāmi CO. ergo et KD æquale eſt GR, et quattuor rectāgula DK KC GR RN inter ſe æqualia; ideoq; quadrupla ſunt rectāguli CK. Rurſus quoniā CB eſt ęqualis BD, et BD quidē ipſi BK, hoc eſt ipſi CG æqualis; CB vero ipſi GK, hoc eſt GP: erit et CG æqualis GP. eſt autem et PR ipſi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipſi RF æquale erit. 43.primi. Sed MP eſt æquale PL; ſupplementa enim ſunt ML parallelogrammi. quare et AG ipſi RF eſt æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter ſe æqualia ſunt, ac propterea ipſius AG quadrupla. Oſtenſum autem eſt et quattuor CK KD GR RN quadrupla eſſe CK. quare octo continentia gnomonem STY ipſius AK quadrupla ſunt, et quoniam AK eſt quod AB BC continetur; etenim BK eſt æqualis BC; erit contentum quater AB BC ipſius AK quadruplum. At demonſtratus eſt gnomon STY quadruplus AK. quod igitur quater AB BC continetur ęquale eſt gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC eſt æquale. ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC ęquale eſt ipſi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum ſunt AEFD quadratum, quod deſcribitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale eſt ei, quod ex AD, hoc eſt ex AB BC tamquam ex vna linea deſcribitur, quadrato. ergo ſi recta linea vtcumque ſecta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquę partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea deſcribitur. quod oſtendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes ęquales, et in partes inęquales ſecta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ eius, quę inter ſectiones interijcitur.



Recta enim linea quędam AB ſecta ſit in partes ęquales ad C, et in partes inęquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla eſſe. 11.primi. Ducatur enim à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipſarum AC CB ęqualis ponatur, iunganturq; EA EB. 31.primi. ac per D quidem ipſi CE parallela ducatur DF; per F vero ipſi AB paralle la FG, et AF iungatur. 5.primi. itaque quoniam AC eſt ęqualis CE; erit et 32.primi. angulus EAC angulo AEC ęqualis. Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto ęquales erunt. et ſunt æquales inter ſeſe. vterque igitur ipſorum AEC EAC recti eſt dimidius. eadem ratione et recti dimidius eſt vterque ipſorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus eſt. et quoniam angulus GEF dimidius 29.primi. eſt recti, rectus autem EGF; ęqualis enim eſt interiori, et oppoſito ECB; erit et re- 6.primi. liquus EFG recti dimidius: æqualis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG. quare et latus EG lateri GF eſt ęquale. rurſus quoniam angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autem FDB, quòd ſit æqualis interiori, et oppoſito ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis eſt angulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. et quoniam AC eſt æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla ſunt quadrati ex AC. quadratis autem ex 41.primi. AC CE ęquale eſt quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG æqualis eſt GF; et quadratū ex EG quadrato ęx GF eſt æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla ſunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale eſt quod ex EF quadratum. Ergo

quadratum

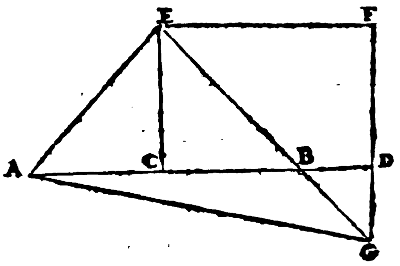
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. ęqualis autem eſt GF ipſi CD. quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla ſunt quadratorũ ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale eſt ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus eſt. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD eſt duplum. Sed quadrato ex AF ęqualia ſunt ex AD DF quadrata. rectus enim eſt angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC CD. eſt autem DF ipſi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, et in partes inęquales ſecta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata dupla ſunt, et quadrati dimidię, et quadrati lineæ eius, quæ inter ſectiones interiicitur. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

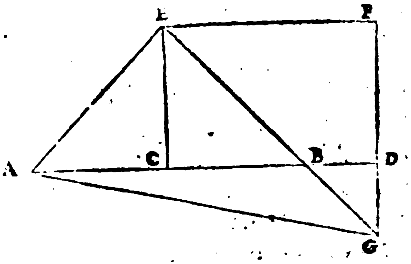
Poſſumus etiam illud aliter demonſtrare hoc modo. Iiſdem enim poſitis quoniam recta linea AB ſecatur in partes aequales ad punctum C, et in partes inęquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipſam CD ſuperat. Ergo ex ijs, quę demonſtrauimus ad ſeptimam huius, quadrata ex AC CD aequalia ſunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipſius DB quadrato: ideoq; quadrata ex AC CD unà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipſius DB, dupla ſunt quadratorũ ex AC CD. 4.huius. *Sed quadratum ex AD eſt aequale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD ſunt dupla. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur bifariam, et ipſi in rectum quædam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla ſunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta conſtat, tamquam ab vna linea deſcribitur.



Recta enim linea AB ſecetur bifariam in C, et ipſi in rectum adiiciatur quędam recta linea BD. Dico quadrata ex ad DB quadratorum ex AC CD dupla eſſe. ducatur enim à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, 11.primi. et vtrique ipſarum AC CB æqualis ponatur; iunganturq; AE EB: 31.primi. et per E quidem ipſi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipſi CE. et quoniã in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD ęquales ſunt duobns rectis. 29.primi. anguli igitur FEB EFD duobus rectis ſunt minores. quæ autem à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur, conueniunt inter ſe ſe. Ergo EB FD productæ ad partes BD conuenient; Ex demonſtratis ad. 29.primi. producantur, et conueniant in puncto G, et AG iungatur. itaque quoniam AC eſt æqualis CE, et angulus AEC angulo EAC 5.primi. æqualis erit: atque eſt rectus qui ad C. vterque igitur ipſorum EAC AEC eſt recti dimidius. eadem ratione et recti dimidius eſt vterque CEB EBC. ergo AEB 15. primi. eſt rectus. et quoniam EBC eſt dimidius recti; erit et recti dimidius DBG; cum ſit 29.primi, aduerticem. Sed et BDG rectus eſt; etenim eſt æqualis ipſi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidius eſt recti, et ob id ipſi DBG ęqualis. ergo et latus BD ęquale lateri DG. rurſus quoniam EGF eſt dimidius recti, rectus autem, qui ad F, eſt



enim angulo oppoſito qui ad C ęqualis; erit et reliquus FEG recti dimidius, et æqualis ipſi E GF. quare et latus GF lateri EF eſt ęquale. et cũ EC ſit ęqualis CA; et quadratũ ex EC ęquale eſt ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla ſũt quadrati ex C A. quadratis aũt ex EC CA ęquale eſt quadratũ ex E A. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniã GF eſt ęqualis F E, æquale eſt et ex G F quadratũ quadrato ex F E. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF ſũt dupla. at quadratis ex GF FE æquale eſt, quod ex EG quadratũ. ergo quadratũ ex E G duplum eſt quadrati ex E F. æqualis aũt eſt EF ipſi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed oſtenſum eſt quadratũ ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC C D ſũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale eſt quod ex A G quadratum. quadratum igitur ex A G duplũ eſt quadratorũ ex AC CD. at quadrato ex A G æqualia ſunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D DG ſunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed D G eſt æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorũ ex A C C D ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, et ipſi in rectũ quædam recta linea adiiciatur; quę à tota cũ adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla ſunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta conſtat tamquam ab vna linea deſcribitur. quod oſtendere oportebat,

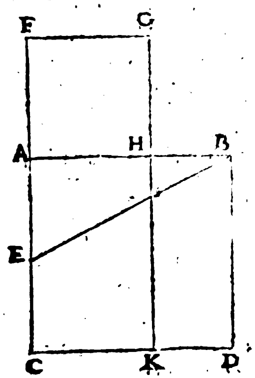
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quoque aliter demonſtrabimus.

Quoniam enim recta linea A B ſecatur bifariam in C, & ipſi adijcitur B D, erit B D linea, qua DC ipſam C A ſuperat quare ex demõſtratis ad ſeptimã huius quadrata ex A C C D aequalia ſunt rectangulo, quod bis continetur A C C D, & quadrato ipſius B D. ergo quadrata ex A C C D vnà cum rectangulo, quod bis A C C D cõtinetur, & ipſius B D quadrato dupla ſunt quadratorum ex A C C D. at quadratum ex A D eſt aequale quadratis ex A C C D, & rectangulo bis A C C D contento. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla erunt; quod demonſtrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineã ſecare, ita vt quod tota, et altera parte cõtinetur rectãgulũ ęquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.



Sit data recta linea A B. oportet ipſam A B ita ſecare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Deſcribatur enim ex A B quadratum A B C D: ſeceturq; A C bifariam in E, et B E iungatur: deinde producta C A in F, ponatur ipſi B E ęqualis E F: deſcribaturq; ex A E quadratum F G H A: et G H ad K producatur. Dico A B ſectam eſſe in H, ita vt A B H rectangulum æquale ſit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam ſecatur in E, adiiciturq; ipſi in rectum A F; rectãgulum C F A vnà cum quadrato ex A E ęquale erit quadrato ex E F. Sed E F eſt æqualis E B. rectangulum igitur C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia ſunt quadrata ex B A A E etenim angulus ad A rectus eſt. ergo rectangulum C F A vnà cum quadrato ex A E æquale eſt quadratis ex B A A E. commune auferatur, quod ex A E quadratum. reliquum igitur rectangulum

6.huius.
47 primi.

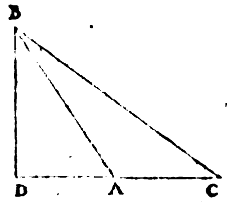
lum C F A æquale eſt quadrato ex A B. eſt autem CF A quidem rectangulum F K. ſiquidem A F eſt æqualis F G: quadratum autem ex A B eſt ipſum A D. rectangulum igitur F K æquale eſt quadrato A D. commune auferatur A K. ergo reliquum F H reliquo H D eſt æquale. atque eſt H D rectangulum A B H, cum A B ſit æqualis B D, et F H eſt quadratum ex A H. rectangulum igitur A B H quadrato ex A H æquale erit. quare data recta linea A B ſecta eſt in H, ita vt A B H rectangulum quadrato ex A H ſit æquale. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Ex hoc conſtat geometricam eſſe analogiam. quoniam enim A B ſecta eſt in H, & quod A B B H continetur quadrato A H eſt æquale. hoc autem ſoli geometricæ accidit medietati. Hanc in ſequentibus extrema, ac media ratione ſecari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum eſt, non dicit extrema, ac media ratione ſecari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

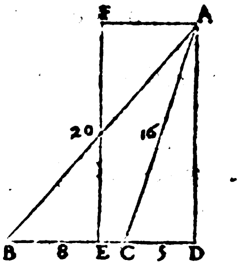
In obtuſiangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum maius eſt quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę ſunt circa obtuſum angulum, in quod ſcilicet protractũ perpendicularis cadit, et linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum.



Sit obtuſiangulum triangulum A B C. obtuſum angulum habens B A C: et ducatur à puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. 12. primi. Dico quadratum ex B C maius eſſe, quàm quadrata ex B A A C, rectãgulo, quod bis C A A D continetur. Quoniam enim recta linea C D ſecta eſt vtcumque in puncto A, erit quadratum ex C D ęquale, et quadratis ex C A A D, 4. huius. et ei quod bis C A A D continetur rectangulo. commune apponatur ex D B quadratum. quadrata igitur ex C D D B æqualia ſunt et quadratis ex C A A D D B, et rectangulo, quod bis C A A D continetur. 47. primi. Sed quadratis ex C D D B ęquale eſt quadratum ex C B. rectus enim eſt angulus ad D, cum ſit B D perpendicularis. quadratis vero ex A D D B ęquale eſt quadratum ex A B. quadratum igitur ex C B æquale eſt et quadratis ex C A A B, et rectangulo bis C A A D contento. Ergo quadratum ex C B maius eſt, quàm quadrata ex C A A B, rectangulo quod bis C A AD continetur. In obtuſiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtuſum angulum ſubtendendente fit, maius eſt quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę ſunt circa obtuſum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

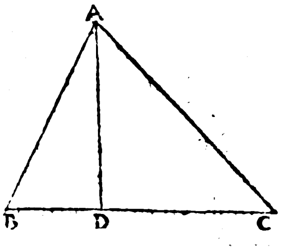
Ex iis, quæ in hoc theoremate demõſtrata ſunt poſſumus cuiuſlibet trianguli; obtuſum angulum habentis aream dimetiri.



Sit triangulum obtuſiangulum A B C, habens angulum A C B obtuſum; ſitq́; latus AB exempli gratia pedum viginti, B C octo, & C A ſexdecim: & à puncto A ad B C protractam ducatur perpendicularis A D. Primum igitur quanta ſit linea C D, quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq́; laterum AC C B, quae ſunt circa obtuſum angulum ſimul ſumpta à quadrato lateris A B, quod obtuſo angulo ſubtenditur, detrahemus; & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris BC. ex hac enim diuiſione prouenit linea, quam quęrimus. eſt autem quadratum lateris A C 256, & quadratum ipſius B C 64, quae ſimul ſumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod eſt quadratum lateris A B, relinquuntur 80, atque his diuiſis per 16, videlicet per duplum ipſius B C prodibunt 5, & tot pedum erit 47.primi, *linea C D. Itaque quoniam triangulum A C D rectangulum eſt, quadratum lateris A C aequale erit quadratis, quae fiunt ex C D D A. quare dempto quadrato lineae C D, quod eſt 25 à quadrato ipſius A C 256, reliquum erit quadratum perpendicularis A D, quod eſt 231, cuius latus AD eſt 15 $\frac{1}{5}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inueniatur, docuimus in noſtris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimenſione. Vt igitur trianguli A B C aream habeamus, ſecetur B D biſariam in puncto E, & ab eo ducatur E F ipſi D A parallela; rurſuſq́; à puncto A ducatur parallela ipſi D B, & conueniens cum E F in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum A D E F aequale triangulo A B D: vtrumque enim dimidium eſt parallelogrammi, cuius baſis eſt B D, & altitudo eadem A D. Ergo ducta E D, quae eſt 6 $\frac{1}{2}$ in AD 15 $\frac{1}{5}$ proueniet area rectanguli A D E F, & ob id etiam A B D trianguli 98 $\frac{4}{5}$ pedum quadratorum. Eadem ratione inuenietur area trianguli A C D eſſe eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à 98 $\frac{4}{5}$ relinquentur 60 $\frac{4}{5}$ proximè, pro area trianguli A B C, quam nobis inquirendam propoſuimus.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

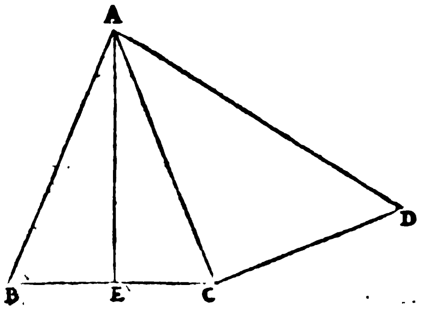
In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſub tendente fit quadratum minus eſt, quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpẽdicularis cadit, et linea à perpẽdiculari intus aſſumpta ad angulũ acutũ.



Sit acutiangulum triangulum A B C acutum ha- 12.primi, bens angulum ad B: et ducatur à puncto A ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C minus eſſe, quàm quadrata, quę ex C B B A, rectangulo, quod bis C B B D continetur. Quoniam 7.huius, enim recta linea C B ſecta eſt vtcumque in D, erũt quadrata ex C B C D æqualia, et rectangulo quod bis C B B D continetur, et quadrato ex D C. commune apponatur quod ex A D quadratum, quadrata igitur ex C B B D D A æqualia ſunt, et rectangulo bis C B B D contento. 47. primi, et quadratis ex A D D C. Sed quadratis ex B D D A ęquale eſt quod ex A B quadratum; rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis vero ex A D D C ęquale eſt quadratum ex A C. quadrata igitur ex C B B A ſunt æqualia quadrato ex A C, et ei quod bis C B B D continetur, rectangulo. quare ſolum quadratum ex A C minus eſt quàm quadrata ex C B B A rectangulo, quod bis C B B D continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum ſubtẽdẽte fit, minus eſt quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutũ. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum eſſe, quod tres acutos angulos habet, ſciendum eſt hoc loco non ita dicere, ſed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propoſitio igitur huiuſmodi eſt. Omnis trianguli latus, quod acutum ſubtendit angulum, minus poteſt, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quæ ſequuntur. Itaque ſi rectangulũ ſit triangulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo ſubtenditur, vt in ipſum perpendicularis cadat. & ſimiliter faciemus, ſi obtuſiangulum ſit. Conuerſum vero theorematis eſt hoc.

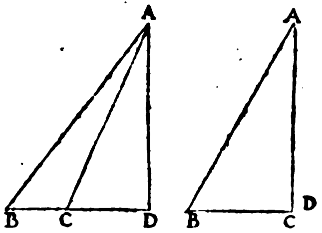


Sit quadratũ ex AB minus quàm qua-
drata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõ-
tinetur, et reliqua deinceps; atque à pũ-
cto C ipſi C A ad rectos angulos duca-
tur C D, quæ ipſi C B ſit ęqualis. ergo
quadrata ex BC C A ęqualia ſunt qua-
dratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC
C A minus eſt quadratum ex A B. ergo
& quadratis ex DC CA minus erit. qua- 47.primi.
dratis autem ex DC CA æquale eſt qua-
dratum ex D A. quadratum igitur ex
DA quadrato ex AB maius, et ipſa DA
maior, quàm A B. Itaque quoniam duæ
D C C A duabus B C C A æquales ſunt, et baſis D A maior baſi A B, erit et an- 25.primi.
gulus D C A angulo A C B maior. rectus autem eſt D C A. ergo A C B acutus erit.
quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non ſolum in triangulis acutiangulis verum eſt, ſed etiam in obtuſiangulis, & rectangulis, quę duos angulos neceſſariò habent acutos. Quare dicemus pręſens theorema tres habere caſus, vel enim ducta perpendiculari A D, punctum D cadit inter B C, vel extra, vel in ipſum C, ita vt A D ſit eadem, quae A C. Euclidis demonſtratio congruit primo caſui in triangulis, quae acutiangula dicuntur; in alijs autem ſi modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuſo ſubtenditur. At ſi cadat in alterum latus eorum, quae acutis angulis ſubtenduntur, nihilominus idem ſequetur, vt demonſtrabimus.

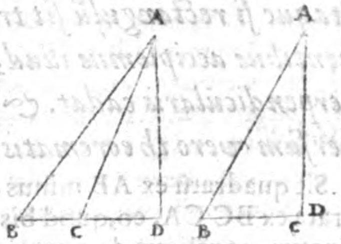
Sit obtuſiangulum triangulum A B C, obtuſum habens A C B angulum, et ducatur à puncto A ad B C protractam perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C, acutum angulum A B C ſubtendente minus eſſe. quàm quadrata, quæ ex A B B C fiunt, rectangulo, quod bis C B B D continetur.



Quoniam enim A B D triangulum rectangulum eſt, quadratum, quod fit ex AB aequale eſt quadratis, quę ex BD DA. commune addatur quadratū ex BC. ergo quadrata ex AB BC aequalia ſunt quadratis ex BD DA BC. Sed quadrato ex BD aequalia

aequalia ſunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC eſt aequale. Quadrata igitur ex AB BC aequalia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. 3.huius. *ſed quadrato ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur aequale eſt rectangulum CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD aequale eſt rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC aequalia ſunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus eſt, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.*

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC ſubtendit minus eſſe, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



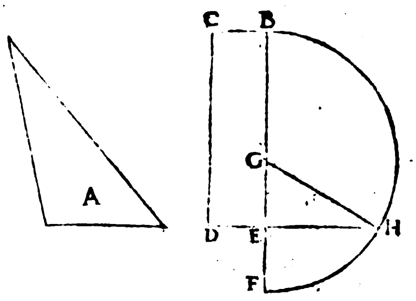
Quoniam enim triangulum rectangulum eſt, erit perpendicularis AD eadem, quae latus trianguli AC, & pũctum D idem, quod C. quadratum vero, quod fit ex AB aequale quadratis ex BC CA. cõmune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC ęqualia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc eſt rectangulo, quod bis cõtinetur CB BD. Quadratũ igitur ex AC minus eſt quàm quadrata ex AB BC rectangulo, quod bis CB BD continetur. quod demonſtrare oportebat.

Ex proxime demonſtratis licebit cuiuſque trianguli, ſiue acutianguli, ſiue rectanguli, ſiue obtuſianguli quod nota latera habeat, aream inuenire.

Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quae inter BC neceſſario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B ſubtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC ſimul iunctis auferemus, & quod reliquitur, diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & proueniet recta linea BD, quae à perpendiculari intus aſſumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod ſubtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipſius BD, et eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC eſt 225. quadratum vero ipſius AB 169, & quadratum BC 196, quae duo ſimul iuncta faciunt 365. ergo ſublatis 225 à 365 relinquentur 140: atque bis per 28 diuiſis prouenient 5: ac propterea BD erit pedum quinque. Rurſus ſi à quadrato lateris AB, hoc eſt à 169 auferatur quadratum BD, quod eſt 25, relinquẽtur 144, cuius quadrati latus eſt 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in baſis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area triãguli ABC, quam à principio quęrebamus.

PROBLEMA II.

ROPOSITIO XIIII.



Dato rectilineo ęquale quadratum conſtituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipſi A rectilineo ęquale quadratum conſtituere. conſtituatur rectilineo A ęquale parallelogrammum rectangulum BCDE. 45. primi. Si igitur BE eſt æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum cõſtitutum eſt BD: ſin minus, vna ipſarum BE ED maior eſt. ſit BE maior; et producatur ad F, ponaturq; ipſi ED ęqualis EF. deinde ſecta FB bifariã in G, centro

centro quidem G, interuallo autem vna ipſarum GB GF ſemicirculus deſcribatur BHF; producaturq; DE in H, et GH iūgatur. quoniā igitur recta linea BF ſecta eſt in partes ęquales ad G, et inæquales ad E; erit rectangulum BEF vnà cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. eſt autem GF æqualis GH. rectangulum igitur BEF vnà cum quadrato ex GE æquale eſt quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH ęqualia ſunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum BEF vnà cum quadrato ex EG æquale eſt quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum BEF eſt æquale quadrato ex EH. Sed rectāgulum BEF eſt ipſum BD parallelogrammum, quoniam EF eſt æqualis ED. ergo BD parallelogrammū quadrato ex EH eſt ęquale. parallelogrammum autem BD eſt ęquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto æquale erit. quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſa EH deſcribitur. quod facere oportebat. 5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuerſalius eſt, quod in ſexto libro demonſtratur, nempe. Dato rectilineo ſimile, et alteri dato æquale idem conſtituere.

LIBRI SECVNDI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER TERTIVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

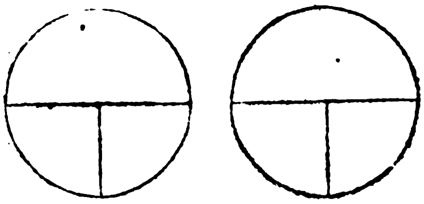
SCHOLIVM.

Propoſitum Euclidi eſt hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES.

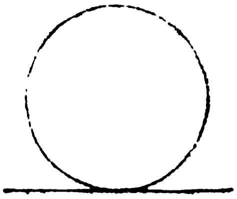
I.

AEQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.



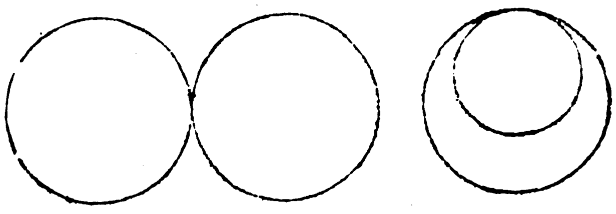
II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, et producta ipſum non ſecat.



III.

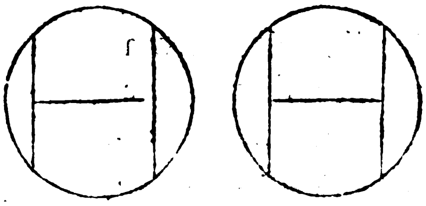
Circuli contingere ſe ſe dicũtur, qui contingentes ſe ipſos non ſecant.



Incirculo

IIII.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpẽdiculares ductę ſũt ęquales.

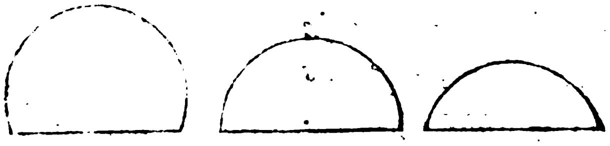


V.

Magis autem diſtare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

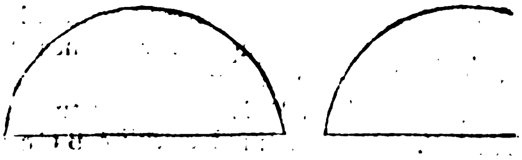
VI.

Portio circuli eſt figura, quę recta linea, et circuli circumferẽtia continetur.



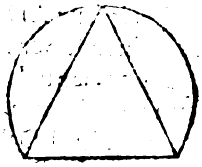
VII.

Portionis autẽ angulus eſt, qui recta linea, et circuli circũferentia cõprehẽditur.



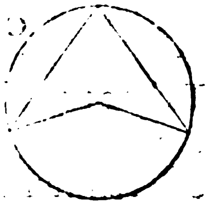
VIII.

In portione angulus eſt, quando in circũferentia portionis ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ eius, quæ baſis eſt portionis, rectę lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis ſit cõtentus.



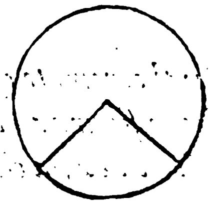
VIIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.



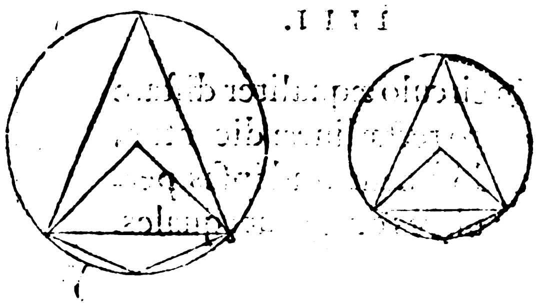
X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum cõſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumfęrentia ab ipſis aſſumpta.



X I.

Similes circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

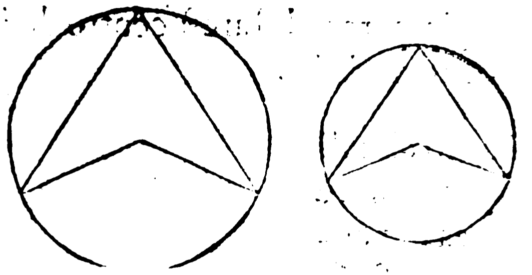


X I I.

A FED. COMMAN.

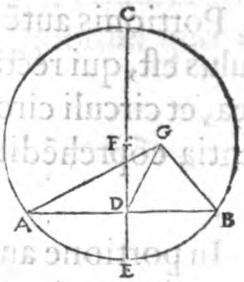
ADDITA.

Similes circumferentiæ circulorum ſunt, in quibus anguli conſiſtunt æquales.



PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.



10. primi,
11.. primi,
Diffi. 15. pri.
8. primi.
diffi. 10. pri,

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipſo quędam recta linea AB vtcũque, et in puncto D bifariam ſecetur. à puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducta DC in E producatur; et ſecetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit G, et GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD eſt æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB ęquales, altera alteri: et baſis G A ęqualis eſt baſi G B. ſunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB eſt ęqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB eſt rectus. Sed et rectus F D B. ęqualis igitur eſt angulus FDB angulo G D B, maior minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. Similiter oſtendemus neque aliud eſſe, præter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

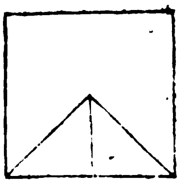
Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo quędam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos ſecet, in ſecante circuli centrum ineſſe.

SCHOLIVM.

Conuerſum diffinitiones circuli.

Ex theoremate oſtenditur conuerſum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus eſt.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit rectilineum, et ſit aliquod ipſius latus, in quod incidant duæ rectæ lineæ ipſum determinantes. erit igitur æquicrure triangulum: atque eius baſi bifariam ſecta, ſi ducatur recta linea rectos angulos faciet, et vtroque latere trianguli minor erit. quod eſt abſurdum, ponũtur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidũt, æquales eſſe.



ALIVD.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico, eam, quæ maxime elementaris eſt, triangulum videlicet æquilaterum in factionẽ initio propoſuit, ob conſtructiones earum, quæ deinceps ſunt, demonſtrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit. hoc enim circuli ipſius ortus cauſſa eſt.

Triangulum æquilaterum figura maxime elementaris eſt.

Cẽtrum, circuli ipſius ortus cauſſa eſt.

ALIVD.

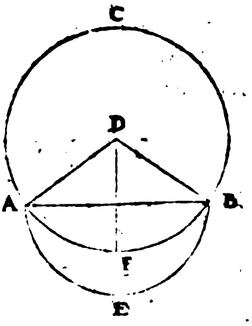
Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, ſed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factis iam circulis, etiam centra manifeſta ſunt. at in his cum quæratur ſubſtantia, centrum etiam quæritur: quod quidem ſubſtantiam circuli complet. hoc autem primum, vt inquiunt, inter problemata, et theoremata mediũ eſt. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus vero non in factionem, ſed in inuentionem, ob id proponit contemplari. Itaque mihi videtur formatam habens propoſitionem theorema eſſe, vt ſi de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera æqualia ſunt, & anguli, inuenire ſi baſes ſint æquales. quemadmodum enim illic ſymptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ ineſt, ita & hoc loco, quod ineſt naturæ circuli. At ſi problematis proprium, & contrarium propoſitioni ſuſcipit, multo magis quod propoſitum eſt problematis denominationem effugiet.

Cẽtrum ſubſtantiam circuli cõplet.

Inter problemata, ac theoremata medium.

THEOREMA I. PROPOSITIO. II.

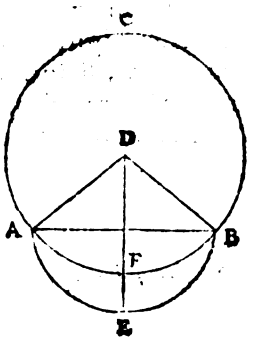
Si in circumferentia circuli, duo quęuis puncta ſumantur, quæ ipſa coniungit recta linea intra circulum cadet.



Sit circulus ABC, et in circumferentia ipſius ſumantur duo quęuis puncta AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, vt AEB, et ſumpto circuli ABC centro, quod ſit D, iungantur DA DB, et producatur DF in E. Quoniam igitur DA eſt æqualis DB; erit et angulus DAE angulo DBE æqualis. et quoniam trianguli DAE vnũ

Ex antecedente.

5, primi.



16 primi. latus AEB protẽditur, angulus DEB angulo DAE maior erit. angulus autem DAE ęqualis eſt angulo DBE.
18. primi. ergo DEB angulus angulo DBE eſt maior. Sed maiori angulo maius latus ſubtẽditur. maior igitur eſt DB
ipſa DE. eſt aũt DB æqualis DF. Ergo DF eſt maior DE,
minor maiore, quod fieri nõ poteſt. non igitur à pũcto
✻ A ad B ducta recta linea extra circulũ cadet. Similiter
oſtẽdemus neque in ipſam cadere circũferentiã. Ergo extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circũferentiã circuli duo quęuis pũcta ſumãtur, quæ ipſa cõiũgit recta linea intra circulũ cadet. quod oportebat demõſtrare.

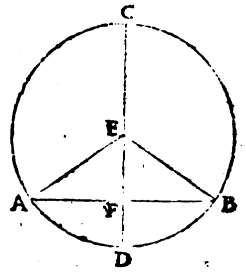
F. C. COMMENTARIVS.

✻ Similiter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam.

16. primi. 18. primi. *Si enim in ipſam circumferentiam caderet, eadem ratione ſequeretur angulum DFB maiorem eſſe angulo DAF, hoc eſt angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius eſſet. ſed & aequale, quod fieri non poteſt. non igitur in ipſam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductã per cẽtrũ bifariã ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, et bifariam ſecabit.



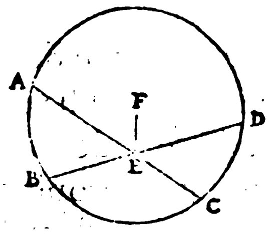
Sit circulus ABC, et in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. Dico et ad angulos rectos
1. huius. ipſam ſecare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod ſit
E, et EA EB iungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales ſunt, et baſis EA baſi EB eſt ęqualis. ergo et angulus AFE angulo BFE æqua-
Diffi. 10. primi. lis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum. vterque igitur AFE BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineã AB non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB ęqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ ex centro eſt ęqualis E
5 primi. B, et angulus EAF angulo EBF æqualis erit. eſt autem et AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habẽt, vnumq; latus vni lateri æquale EF, commune ſcilicet vtriſque, quod vni angulorũ
26. primi. æqualium ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, et bifariam ſecabit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA. III. PROPOSITO. IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent non ductę per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe inuicem ſecent in puncto E, non ductę per centrum. Dico eas ſe ſe bifariam nõ ſecare. Si enim fieri poteſt,

ſecent



ſecent ſe ſe bifariam, ita vt AE ſit æqualis EC, et BE ipſi ED: ſumaturq; centrum ABCD circuli, quod ſit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrũ ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam ſecat, et ad rectos angulos ipſam ſecabit. quare rectus eſt FEA angulus. rurſus quoniã recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per cẽtrum bifariam ſecat, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. rectus igitur angulus eſt FEB. oſtenſus autem eſt rectus et FEA. ergo FEA angulus ipſi FEB ęqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur AC BD ſe ſe bifariam ſecant. quare ſi in circulo duæ rectę lineæ ſe inuicem ſecent, non ductę per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt. quod oſtendere oportebat.

1. huius.

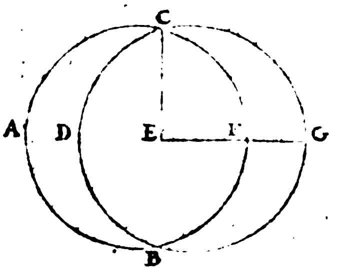
Ex antecedente.

SCHOLIUM.

Si rectæ lineæ per centrum tranſirent, quærendum vtique non eſſet, an bifariam ſe inuicem ſecent: ipſorum enim centrum bipartita ſectio eſt. ſimiliter & ſi altera per centrum tranſeunte, altera non ſit per centrum. nam quæ per centrum tranſit bifariam non ſecatur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

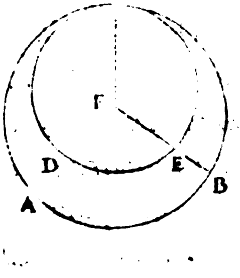
Si duo circuli ſe inuicem ſecent, non erit ipſorum idem centrũ.



Duo enim circuli ſe inuicem ſecent ABC CDG in punctis BC. Dico ipſorum idem cẽtrum nõ eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum E; iũgaturq; EC, et EFG vtcumque ducatur. Et quoniam E cẽtrum eſt circuli ABC, erit CE ipſi EF ęqualis. rurſus quoniam E centrum eſt CDG circuli, ęqualis eſt CE ipſi EG. Sed oſtenſa eſt CE ęqualis EF. ergo EF ipſi EG ęqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur punctum E centrum eſt circulorum ABC CDG. quare ſi duo circuli ſe inuicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. quod oſtendendum fuit.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VI.

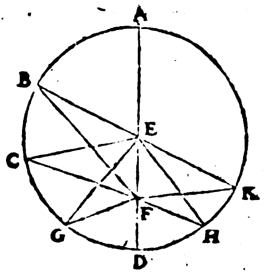
Si duo circuli ſe ſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.



Duo enim circuli ABC CDE contingat ſe ſe intra in puncto C. Dico ipſorum non eſſe idem centrum. ſi enim fieri poteſt, ſit F, iũgaturq; FC, et FEB vtcumque ducatur. quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, ęqualis eſt CF ipſi FB. rurſus quoniam F centrum eſt circuli CDE, erit CF æqualis FE. oſtenſa autem eſt CF æqualis FB. ergo et FE ipſi FB eſt æqualis, minor maiori; quod fieri non poteſt. non igitur F punctum centrum eſt circulorum ABC CDE. quare ſi duo circuli ſe ſe intra contingant, ipſorum idẽ centrum non erit. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

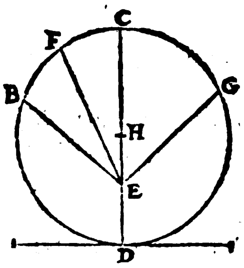
Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quędam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum tranſit, ſemper remotiore maior eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtraſque partes minimę.



Sit circulus ABCD,cuius diameter AD: et in ipſa AD
ſumatur aliquod punctum F,quod non ſit centrum circuli.
Sit autem circuli centrum E:et à puncto F in circulum
ABCD cadant quędam rectę lineę FB FC FG.Dico FA
maximam eſſe, et FD minimam:aliarum vero FB quidē
maiorem quàm FC, et FC maiorem quàm FG.Iungātur
20.primi. enim BE CE GE.Et quoniam omnis trianguli duo latera
reliquo ſunt maiora; erunt BE EF maiores quàm BF.
eſt aūt AE æqualis EB.Ergo BE EF ipſi AF ſūt æquales.
maior igitur eſt AF quàm FB.rurſus quoniā BE eſt ęqualis
EC,communis autem FE,duę BE EF duabus CE EF
24.primi. æquales ſunt. Sed BEF angulus maior eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt
maior.eadem ratione et CF maior eſt quàm FG.rurſus quoniam GF FE maiores
ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED;erunt GF FE maiores quam ED. communis
auferatur EF. ergo reliqua GF maior eſt quàm reliqua FD. maxima igitur
eſt FA, et FD minima:maior vero BF quàm FC, et CF quàm FG maior.dico et à
puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtraſque partes
23.primi. minimæ FD.conſtituatur enim ad lineam EF,atque ad datum in ea punctum E angulo
GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quoniā igitur GE eſt æqualis E
H, communis autem EF,duæ GE EF duabus HE EF æquales ſunt: et angulus G
4.primi. E F eſt æqualis angulo HEF.baſis igitur FG baſi FH æqualis erit.dico à puncto F in
circulum non cadere aliam ipſi FG ęqualem. Si enim fieri poteſt,cadat FK.et quoniam
FK eſt æqualis FG,eſtq́; ipſi FG æqualis FH;erit et FK ipſi FH æqualis, videlicet
propinquior ei,quæ per centrum tranſit,æqualis remotiori, quod fieri non poteſt.
Vel hoc modo.iungatur EK.et quoniam GE ipſi EK eſt ęqualis,communis autem
FE,et baſis GF ęqualis baſi FK;erit et angulus GEF ęqualis angulo KEF:Sed angulus
GEF angulo HEF eſt æqualis.angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor
maiori,quod fieri non poteſt. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta
linea æqualis ipſi GF. ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diamtero aliquod
punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, et reliqua quę ſequuntur.
quod demonſtrare oportebat.

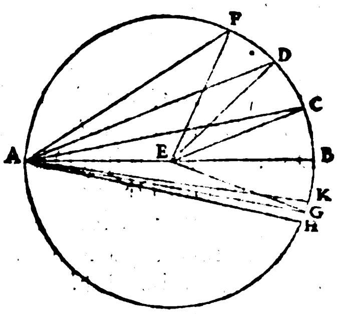
SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si intra circulum punctum ſumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima ſit, vna vero minima, & reliquarum aliæ ſint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem ſunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter diſtant.



Per punctum enim E,quod eſt intra circulum maxima quidem ſit EC,minima vero ED;et FE quàm EB maior.Dico CE per centrum tranſire, et DE ipſi eſſe in directum;EF vero centro propinquiorem eſſe, quàm EB. Si enim CE non tranſit per centrum,ſed alia quædam à puncto E in circulum cadẽs,illa maxima erit per.ſeptimum theorema.eſt autem et EC maxima, quod fieri non poteſt.diameter igitur eſt CE,et ipſi in directum ED.Dico EF centro H propinquiorem eſſe,quàm EB.Si enim non eſt propinquior,vel remotior eſt,vel æqualiter diſtat: et ſiquidem remotior,maior erit BE,quàm EF,quod fieri non poteſt.non enim ponitur ita eſſe. Quòd ſi æqualiter diſtant, ęquales ſunt. ſed neque hoc ponitur.propinquior igitur eſt FE ipſi H, quàm EB,et GE ipſi EB eſt æqualis.Ergo à centro H æqualiter diſtant, inæqualiter enim diſtantes inęquales ſunt, per ſeptimum theorema.quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



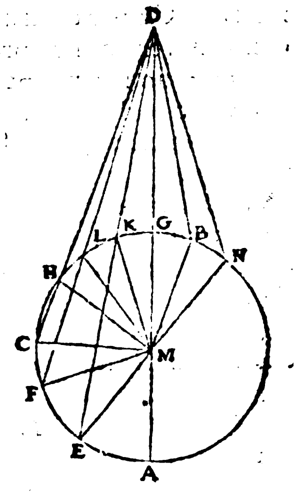
Illud quoque verum eſt, quod nos demonſtrauimus in commentario in propoſitionem octauam libri Archimedis de lineis ſpiralibus.

Si in circumferentia circuli aliquod ſumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineę; quæ per centrum tranſit, omnium erit maxima,aliarum verò quæ tranſeunti per cẽtrum propinquiores ſunt, remotioribus erunt maiores; duę autem tantum ęquales ſunt ad vtraſque partes maximæ.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectę lineæ, quarum vna per centrum tranſeat, alię vero vtcumque; earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt,maxima eſt, quę per centrum tranſit;aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, ſemper remotiore maior eſt.at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt minima eſt, quæ inter punctum, et diametrum interijcitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ ſemper remotiore eſt minor, duæ autem tantum ęquales à puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ.

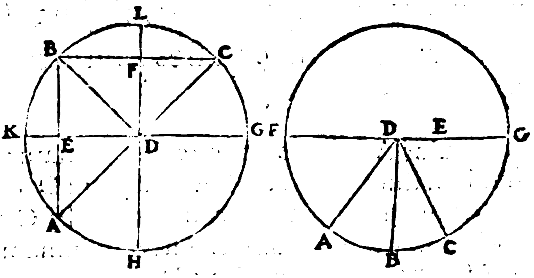
Sit circulus ABC,et extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectę lineæ quędam DA DE DF DC:ſitq; DA per cẽtrum. Dico earum quidem quæ in concauam AEFC circumferentiam cadunt,maximam eſſe DA, quæ per centrum tranſit;et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG:maiorem autem DE quàm DF, et DF maiorem quàm DC; earum vero, quæ in curuam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG ſemper remotiore eſſe minorem,hoc eſt DK minorem, quàm DL,et DL minorem quàm DH.Sumatur enim centrum circuli ABC,quod ſit M,et iungantur ME MF MC MK ML MH. et quoniam AM eſt æqualis ME,communis



nis apponatur MD . Ergo AD eſt æqualis ipſis EM MD.
10.primi. Sed EM MD ſunt maiores quàm ED.Ergo et AD quàm
ED eſt maior.rurſus quoniam æqualis eſt ME ipſi MF, cõmunis
apponatur MD.erũt EM MD ipſis MF MD ęquales
; et angulus EMD maior eſt angulo FMD.baſis igitur
24 primi. ED baſi FD maior erit. Similiter demonſtrabimus et FD
maiorẽ eſſe quàm CD. ergo maxima eſt DA ; maior aũt
DE quàm DF,et DF quàm DC maior.pręterea quoniam
MK KD sũt maiores quã MD, et MG eſt ęqualis MK; erit
reliqua KD quàm reliqua GD maior . quare GD minor
quàm KD , et idcirco GD minima eſt.et quoniam trianguli
MLD in vno latere MD,duæ rectę lineæ MK KD intra
21. primi. conſtituuntur,erunt MK KD minores ipſis ML LD,
quarum MK eſt æqualis ML. reliqua igitur DK minor eſt
quàm reliqua DL.Similiter oſtendemus et DL quam DK
minorẽ eſſe.Ergo DG minima eſt.minor vero DK quàm
DL,et DL minor quàm DH . dico ẽt duas tantum æquales
à puncto D in circulum cadere ad vtraſque minimæ
34.primi. partes.conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumq́; in ea punctum M angulo K
MD ęqualis angulus DMB,et DB iungatur.itaque quoniam MK eſt æqualis MB,cõmunis
autem MD,duæ KM MD duabus BM MD æquales ſunt, altera alteri.et angulus
4.primi. KMD æqualis augulo BMD . baſis igitur DK baſi DB eſt ęqualis.dico à puncto
D nullam aliam ipſi DB æqualem in circulum cadere. ſi enim fieri poteſt,cadat
DN.et quoniam DK eſt æqualis DN , et DK ipſi DB eſt ęqualis;erit et DB æqualis
DN,propinquior ſcilicet minimæ ęqualis remotiori,quod fieri non poſſe oſtenſum
eſt,vel et aliter.iungatur MN.et quoniam æqualis eſt KM ipſi MN, communis autẽ
MD;et baſis DK baſi DN ęqualis erit,et propterea angulus KMD ęqualis angulo D
MN.Sed KMD angulus eſt æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NM
D æqualis erit,minor maiori,quod fieri non poteſt.quare,non plures quàm duæ rectæ
lineæ à puncto D in circulum ABC ad vtraſque partes minimæ GD cadent. Si
igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur , et reliqua deinceps.quod oſtendere
oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum , atque ab eo in circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales; punctũ quod ſumitur,circuli centrum erit.



Sit circulus ABC , et intra ipſum ſumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quàm duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC.Dico punctum D circuli ABC centrum eſſe. Iungantur enim AB BC,ſecenturq́; bifariam in punctis EF:et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur.quoniam igitur AE eſt
ęqualis EB,communis autem ED,erunt duæ AE ED duabus BE ED ęquales;et baſis
DA eſt æqualis baſi DB.angulus igitur AED angulo BED ęqualis erit, et idcirco
8.primi. vterque angulorũ AED BED eſt rectus.Ergo GK bifariam ſecans AB, et ad an-
13 primi. gulos rectos ſecat.et quoniam ſi in circulo quædã recta linea,rectam lineam quandam

dam

dam bifariā,et ad angulos rectos ſecet,in ſecante eſt circuli centrum;erit in GK centrum circuli ABC. Eadē ratione et in HL centrum eſt ABC circuli,et nullum aliud commune habent rectæ lineę GH HL,niſi punctum D.Ergo D circuli ABC eſt centrum.Si igitur intra circulum ſumatur aliquod punctum , atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ ęquales; punctum, quod ſumitur circuli centrum erit. Corol.1.huius.

ALITER.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod ſumitur,circuli ABC eſſe centrum. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit E, et iuncta DE in FG producatur.ergo FG diameter eſt ABC circuli.itaque quoniam in FG diametro citculi ABC ſumptum eſt aliquod punctum D, quod non eſt centrum circuli; maxima quidem erit D G, maior autem D C quàm D B, et D B quàm D A maior. Sed et ęquales, quod fieri non poteſt. non igitur E centrum eſt circuli ABC. Similiter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum D. ergo D circuli ABC centrum erit.quod oportebat demonſtrare. 7.huius.

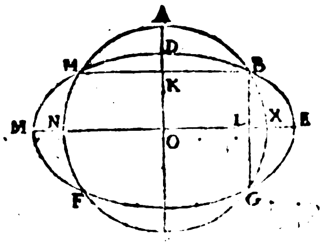
THEOREMA IX. PROPO. X.

Circulus circulum in pluribus,quàm duobus punctis non ſecat.

Si enim fieri poteſt,circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quàm duobus, videlicet in B G H F:et iunctæ BG BH bifariam ſecentur in KL. atque à punctis KL ipſis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniā igitur in circulo ABC quędam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos ſecat,in ipſa AC circuli ABC erit centrum.rurſus quoniam in eodē circulo ABC quædam recta linea NX rectam lineam quādam BG bifariam ſecat, et ad rectos angulos;in ipſa NX centrum erit circuli. oſtenſum autem eſt et in ipſa A C centrum eſſe,et in nullo alio puncto conueniunt inter ſe rectæ lineę A C NX,præterquàm in O. ergo O circuli ABC eſt centrum. Similiter oſtendemus punctum O centrum eſſe circuli DEF. ergo duorum circulorum ſe ſe ſecantium A B C DEF. idem erit centrum O. quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum ſecat in pluribus punctis,quàm duobus.

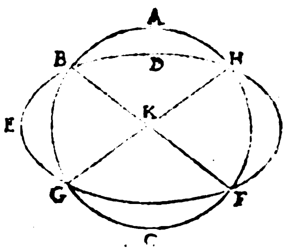
Corol 1.huius.

5.huius.



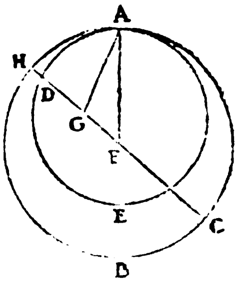
ALITER.

Circulus enim ABC rurſus circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quàm duobus ; nempe in B G F H, et circuli A B C centrum ſumatur, quod ſit K;et KB KG KF iungātur.qm igitur intra circulū DEF ſumptum eſt aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures , quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF;erit punctum K circuli D E F centrum. eſt autem et circuli ABC centrum K. duorū igitur circulorum , qui ſe ſe ſecant,idem erit K centrum,quod fieri non poteſt. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus pūctis non ſecat,quod oportebet demonſtrare.



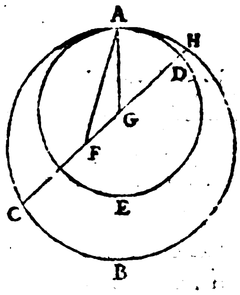
THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

Si duo circuli ſe ſe intus contingant, et ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra coniungens, et producta in circulorum contactum cadet.



Duo enim circuli ABC ADE ſe ſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem ABC cētrum,quod ſit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam,ſi producatur in punctum A cadere. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat vt FGDH. et 20.primi. AF AG iungantur. Itaque quoniā AG GF maiores ſunt, quàm FA, hoc eſt quàm FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG maior eſt, quàm reliqua GH. Sed AG eſt æqualis GD. ergo GD ipſa GH eſt maior, minor maiore, quod fieri non poteſt. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cōtactum A cadet.quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſe ſe intus contingant;recta linea ipſorum centra coniungens, ſi producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonſtrare.

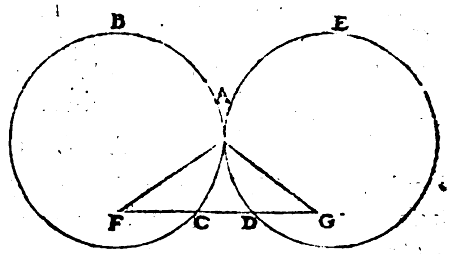
ALITER.



Sed cadat vt GFC, et producatur in directum CFG ad pūctum H: iunganturq́; AG AF.Quoniam igi- 20.primi. tur AG GF maiores ſunt quàm AF,et AF eſt ęqualis FC, hoc eſt ipſi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH eſt maior: hoc eſt DG maior ipſa GH,minor maiore,quod fieri non poteſt. Similiter et ſi extra circulum paruum ſit centrum maioris circuli,idem ſequi abſurdum oſtendemus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli ſe ſe extra contingant, recta linea ipſorū centra coniungens per contactum tranſibit.

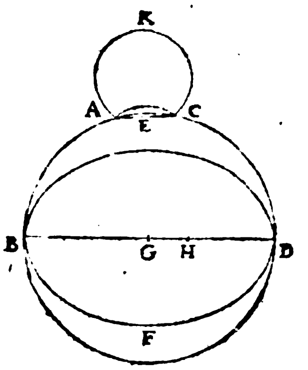


Duo enim circuli ABC ADE ſe ſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem ABC centrum, quod ſit F: circuli vero ADE cētrum G.Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A tranſire. Non enim ſed ſi fieri poteſt, cadat, vt FCDG:et FA AG iungantur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC,erit AF æqualis FC.Rurſus quoniam G centrum eſt ADE circuli,erit AG ipſi GD æqualis.oſtenſa eſt autem et AF ęqualis FC.ſunt igitur FA A- 20.primi. G ipſis FC DG ęquales.ergo tota FG maior eſt,quàm FA AG.Sed et minor,quod fieri non poteſt.Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A nō tranſibit.quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt.Si igitur duo circuli ſe ſe extra cōtingant,recta linea ipſorum centra coniungens per contactum tranſibit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

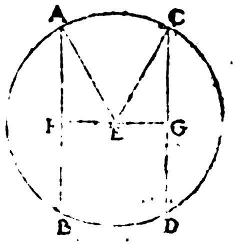
Circulus circulum non contingit in pluribus pūctis, quàm vno, ſiue intus,ſiue extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulus ABDC circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et ſumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea, quę à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. et quoniam G centrum eſt circuli ABDE, erit BG ipſi GD æqualis. maior igitur eſt BG, quàm HD: et BH quàm HD multo maior. Rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo maior, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra cōtingat in pluribus pūctis, quàm vno, videlicet in AC, et AC iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK ſumpta ſunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quę ipſa coniungit intra vtrumque ipſorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. non igitur circulus circulū extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. circulus igitur circulū non contingit in pluribus punctis; quàm vno, ſiue intus, ſiue extra contingat. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

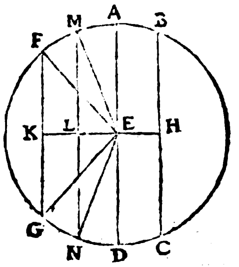
In circulo ęquales rectæ lineæ ęqualiter à centro diſtant, et quę ęqualiter à centro diſtant; inter ſe ſunt æquales.



Sit circulus ABDC, et in ipſo æquales rectę lineæ AB CD; Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod ſit E, et ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG; et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quędam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, et bifariam ipſam ſecabit. quare AF eſt 3.huius. æqualis FB, ideoq; AB ipſius AF dupla. Eadem ratione et CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipſi CG. Et quoniam AE eſt æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC ęquale. Sed quadrato 47.primi. quidem ex AE ęqualia ſunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG eſt ęquale, etenim ęqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum æquale eſt reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectę lineę dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ęquales ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt æqualis ſit FE ipſi EG. Dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Iiſdem enim cōſtructis, ſimiliter oſtēdemus AB duplam eſſe ipſius AF, et CD duplā ipſius CG. Et quoniā æqualis eſt AE ipſi EC, erit et ex AE quadratū quadrato ex EC ęquale. Sed quadrato quidē ex AE ęqualia ſunt quadrata ex EF FA: quadrato aūt ex EC æqualia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt. quorum quadratū ex EG ęquale eſt quadrato ex EF; eſt enim EG ipſi EF ęqualis reliquum igitur ex AF quadratū ęquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis, atque eſt AB ipſius AF dupla, et CD dupla ipſius CG. quare AB ipſi CD æqualis erit. In circulo igitur ęquales rectæ lineę æqualiter à centro diſtant, et quę æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

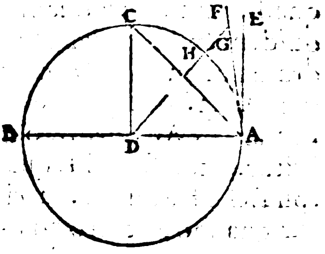
In circulo maxima quidem eſt diameter; aliarum vero ſemper propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore maior eſt.



Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E; et
propinquior quidem diametro AD ſit BC; remotior vero
FG. Dico AD maximam eſſe, et BC maiorem quàm
FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares
EH EK. Et quoniam BC propinquior eſt ei, quæ per
centrum tranſit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH
maior. ponatur ipſi EH æqualis EL, et per L ipſi EK ad rectos
angulos ducta LM in N producatur, et iungantur E
Ex antecedente. M EN EF EG. Quoniam igitur EH eſt æqualis EL, erit
et BC ipſi MN ęqualis. Rurſus quoniam æqualis eſt AE
ipſi EM, et DE ipſi EN, erit et AD ipſis ME EN æqualis.
Sed ME EN maiores ſunt, quàm MN. ergo et AD maior
eſt quàm MN. at MN eſt æqualis BC. eſt igitur AD quàm BC maior. Quòd cũ duæ
24. primi, EM EN duabus FE EG ęquales ſint, anguluſq; MEN maior angulo FEG, et baſis MN
baſi FG maior erit. oſtenſa autem eſt MN æqualis BC. ergo et BC quàm FG eſt maior.
Maxima igitur eſt AD diameter, et BC maior, quàm FG. Quare in circulo maxima
eſt diameter, aliarum vero ſemper propinquior ei, quæ per centrum tranſit remotiore
eſt maior. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quę diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et ſemicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum
AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipſi AB ad
rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non
enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat intus, vt AC, et DC iungatur.
Itaque quoniam æqualis eſt DA ipſi DC,
5. primi, erit et angulus DAC angulo ACD ęqualis. rectus autem
eſt DAC. ergo et ACD eſt rectus; ac propterea
17. primi, anguli DAC ACD duobus rectis ęquales ſunt. quod
fieri non poteſt. Non igitur à puncto A ipſi BA ad rectos
angulos ducta cadet intra circulum. Similiter
oſtendemus neque in circumferentiam cadere. extra
igitur cadat neceſſe eſt. cadat vt AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et
circumferentiam CHA interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri
poteſt, cadat vt FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quoniã
19. primi, rectus eſt angulus AGD, minor autem recto DAG, erit AD quàm DG maior.
æqualis autem eſt DA ipſi DH. maior igitur eſt DH ipſa DG, minor maiore, quod
fieri non poteſt. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam
interiicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum ſemicirculi, qui recta
linea

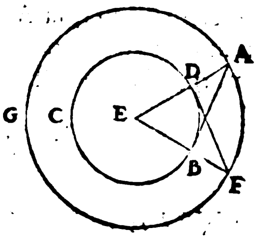
linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem eſſe; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo eſſe minorem. Si enim eſt aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lineam AE interiicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere: et rectam lineam contingere circulum in vno tantum puncto, quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipſũ cadit, vt oſtẽſum eſt.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



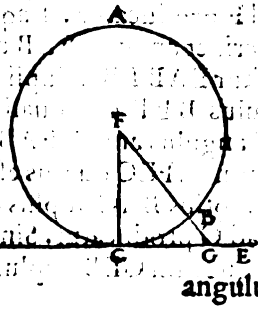
Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, interuallo autem EA circulus AFG deſcribatur: et à puncto D ipſi EA ad rectos angulos ducatur DF: iunganturq; EBF AB. Dico à puncto A ductam eſſe AB, quę circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum eſt circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipſi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales ſunt, et angulum communem continent, qui eſt ad E. ergo baſis DF baſi AB eſt ęqualis; triangulumq; DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis. ęqualis igitur eſt angulus EBA angulo EDF, et EDF rectus eſt. quare et rectus EBA: atque eſt EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta eſt recta linea AB, quæ circulum BCD contingit. quod facere oportebat.

4.primi.

Ex antecedente.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.



Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrũ ſumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipſam DE perpendicularem eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus eſt, erit GCE acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiorem autem angulum

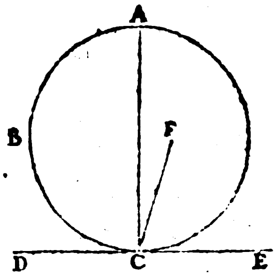
12.primi.

19.primi.

angulum maius latus ſubtendit. maior igitur eſt FC, quàm FG. æqualis autem FC ipſi FB. ergo FB ipſa FC eſt maior, minor maiore, quod fieri non poteſt. non igitur FG eſt perpendicularis ad DE. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe pręter ipſam FC. ergo FC ad DE eſt perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.



Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipſi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipſa AC circuli centrũ eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit F centrum; et cõiungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC contingit quędam recta linea DE, et à centro ad contactum ducta eſt FC; erit FC ad ipſam DE perpendicularis. rectus igitur angulus eſt FCE. eſt autẽ et ACE rectus. ergo FCE angulus eſt æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non poteſt. Non igitur F centrum eſt ABC circuli. Similiter oſtendemus neque aliud aliquod eſſe, præterquàm in ipſa AC. Quare ſi circulum contingat quædam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIUM.

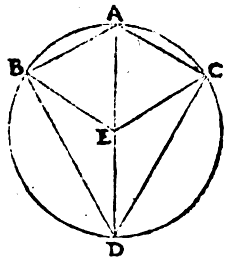
CONVERSVM. Si circulum contingat quadam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur; producta ad eas partes, in quibus eſt circulus in circuli cẽtrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

In circulo angulus, qui ad centrum duplus eſt eius, qui ad circumferentiam, quando circumferẽtiam eandem pro baſi habeãt.

Sit circulus AB C, ad cuius centrum quidem angulus ſit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandẽ circumferentiam BC pro baſi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum eſſe. Iungatur enim AE et ad F producatur. Itaque quoniam EA eſt æqualis EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. (5.primi.) anguli igitur EAB EBA dupli ſunt ipſius anguli EAB. Sed angulus BEF eſt æqualis angulis EAB EBA. (32.primi.) ergo BEF angulus anguli EAB eſt duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus eſt ipſius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rurſus inflectatur, et ſit alter angulus BDC, iũctaq; DE ad G producatur. Similiter oſtendemus angulum GEC anguli EDC duplum eſſe; quorum GEB duplus eſt ipſius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC eſt duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus eſt eius, qui ad circumferẽtiam, quando circumferentiã eandẽ pro baſi habeant.quod oportebat demõſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

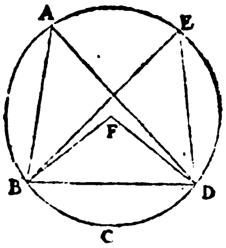


Illud quoque verum eſt,ſpacium quod eſt ad cẽtrum duplum eſſe anguli, qui ad circumferentiam,quando circumferentiam eandem pro b aſi habuerint.

Sit enim circulus ABC , cuius cẽtrum E. Dico ſpacium BEC quod eſt ad centrum duplum eſſe anguli BAC . iuncta enim AE , & ad D producta, iunctisq́; B D DC , ſimiliter demonſtrabitur angulus BED anguli BAE duplus,et angulus CED duplus anguli CAE,totum igitur ſpacium BEC quod eſt ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiã duplum erit. quod oportebat demonſtrare.

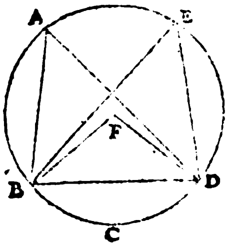
THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

In circulo qui in eadem portione ſunt anguli inter ſe æquales ſunt.



Sit circulus ABCDE, & in eadem portione BAED anguli ſint BAD BED. Dico eos inter ſe ęquales eſſe. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod ſit F: iunganturq́; BF FD. & quoniam angulus quidẽ BFD eſt ad centrum,angulus vero BAD ad circumferentiã, & circumferentiam eandem pro baſi habent BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus.Eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED ęqualis erit. In circulo igitur qui in eadẽ portionẽ ſunt anguli,inter ſe æquales ſunt.quod oportebat demonſtrare.

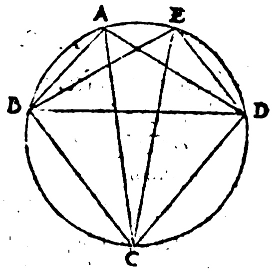
F. C. COMMENTARIVS.



Euclidis demonſtratio congruit in maiore tantum circuli portione, niſi fortaſſe ſpacium quodcũque ad cẽtrum pro angulo accipiatur, ex ijs quę nos proxime demonſtrauimus . poſſumus autem & hoc modo demonſtrare.

Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter ſe ęquales eſſe . Sit enim primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura ſumaturq́; circuli centrum quod ſit F: & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem baſim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus B F D anguli B A D duplus : & eadem ratione duplus quoque anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit. Sit deinde BAED portio minor : & iungantur BC AC EC DC. Itaque quoniam ex ijs , quae proxime demonſtrauimus, angulus BAC eſt aequalis angulo BEC, itemq́; angulus CAD angulo CED; erit et totus angulus BAD toti BED aequalis.

Ex antecedente.



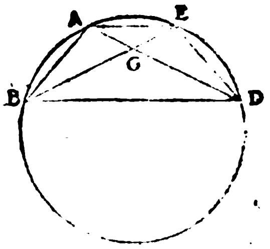
ALITER.

Iungatur AE. erit angulus A B E aequalis angulo ADE. angulus autem A G B ad verticem angulo E G D eſt aequalis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED aequalis erit. In circulo

Ex demonſtratis. 15.primi.

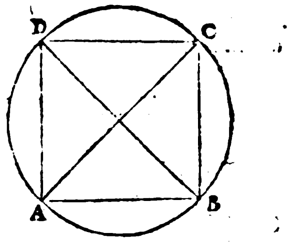
igitur

igitur, qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe aequales ſunt. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XX.
PROPO. XXII.

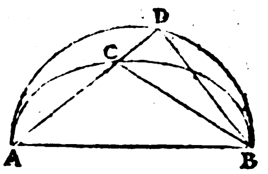
Quadrilaterorum, quę in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ęquales ſunt.



Sit circulus ABGD, et in ipſo quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Iungantur AC BD. 32.primi. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB eſt ęqualis angulo B D C, in eadem enim ſunt portione BADC, et angulus ACB æqualis ipſi ADB, quòd ſint in eadem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB eſt æqualis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui ſunt ad A et C, et ſeorſum vni angulo, qui eſt ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC æquales. Sed ABC BAC ACB ſunt æquales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis ęquales erunt. Similiter oſtendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quę in circulis deſcribũtur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. quod oportebat demonſtrare.

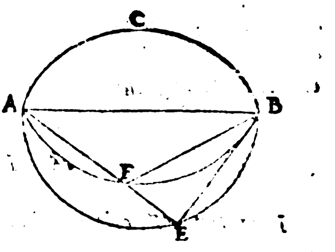
THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles et inæquales ex eadem ✲ parte non conſtituentur.



Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones ſimiles, et ineęquales conſtituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaquè quoniam portio A C B ſimilis eſt portioni A D B, Diff.11. ſimiles autem circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales; erit A C B angulus ęqualis angulo A D B, exterior interiori, quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea, duę circulorum portiones ſimiles, et inæquales ex eadem parte conſtituentur. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



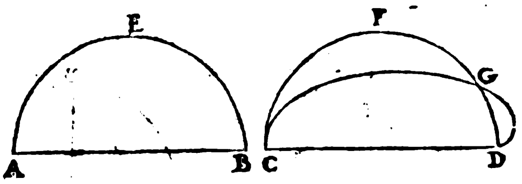
✲ Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

In uetuſto codice hęc non leguntur, quamquam ad demonſtrationem neceſſaria ſint, tamen neutra ex parte ſimiles, & inęquales circulorum portiones conſtitui poſſunt in eadem recta linea. Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB conſtituatur ex altera parte portio A E B ſimilis, & inęqualis portioni A C B. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB ſimilis & aequalis ipſi ACB; & ducta AFE, iunctisq; FB BE, ſimiliter demonſtrabitur angulus AFB aequalis an-

gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea ſimiles & inæquales circulorum portiones conſtituentur. quod demonſtrandum fuerat.

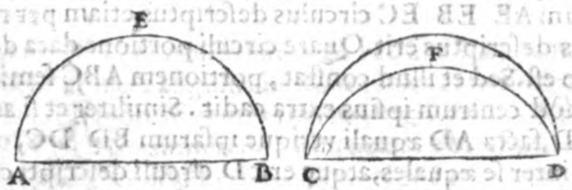
THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones inter ſe æquales ſunt.



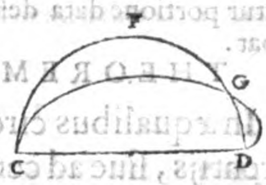
Sint enim in æqualibus rectis lineis AB CD ſimiles circulorum portiones AEB CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem eſſe. congruente enim AEB portioue portioni CFD, et poſito puncto quidem A in C, recta vero linea AB in CD; congruet et B punctum puncto D, propterea quòd AB ipſi CD ſit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet et AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipſi CD, portio autē AEB portioni CFD non congruet, ſed permutabitur, vt CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis ſecabit. etenim circulus CGD circulum CFD ſecat in pluribus pūctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rurſus fieri non poteſt. Non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non congruet et ACB portio portioni CFD. quare congruet et ipſi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis ſimiles circulorū portiones inter ſe æquales ſunt. quod oportebat demonſtrare. *

F. C. COMMENTARIVS.



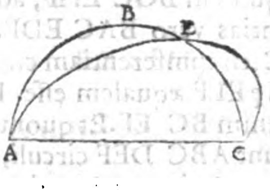
* Si enim AB congruet ipſi CD; portio autem AEB portioni CFD non congruet, ſed permutabitur, vt CGD, et reliqua.

Si enim AB recta linea ipſi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circūferentia eius vel extra ipſam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circulorum portiones ſimiles & inæquales ex eadem parte conſtituentur, quod fieri non poſſe in antecedēte demonſtratum eſt. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis ſecabit. quod itidem fieri nō poteſt, ex decima huius. Euclides autem primum caſum velut nimis perſpicuum omiſiſſe videtur.



Sed & cuiuſque prædictorum cōuerſum etiam verum eſt, quod ita demonſtrari poteſt.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones ſimiles ſunt.

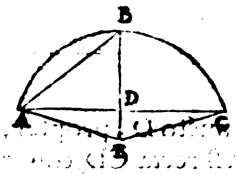


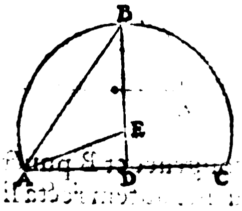
Si enim fieri poteſt, ſint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC aequales, ſed tamen diſſimiles: neceſſe erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiae ABC, alioqui & aequales eſſent & ſimiles; neque extra, vel intra ipſam cadere. aequales enim non eſſent, quare relinquitur vt partim intra, partim ex-

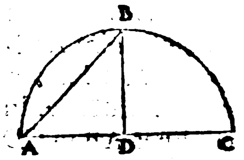
tra cadat. quod ſi ita ſit, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis ſecabit. quod fieri non poteſt. Similiter demonſtrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis conſtitui poſſe aequales & diſſimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; vt ſuperius dictum eſt. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorũ portiones ſimiles ſunt. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data deſcribere circulum, cuius ea portio eſt.





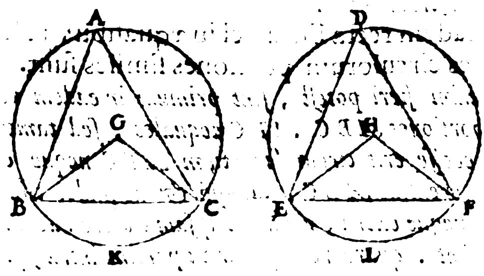


Sit data circuli portio ABC. itaque oportet portionis ABC deſcribere circulũ, cuius eſt portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipſi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior eſt angulo BAD, 23.primi. vel minor, vel ipſi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A conſtituatur angulus BAE æqualis angulo ABD; et DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE eſt ęqualis angulo BA 6.primi. E, erit et BE recta linea ipſi EA æqualis. et quoniam AD eſt æqualis DC, communis autẽ DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales ſunt, altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus.n. vterque eſt. ergo et baſis AE baſi EC eſt ęqualis. Sed oſtenſa eſt AE æqualis EB. quare et BE ipſi EC eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineę AE EB EC inter ſe ęquales ſunt. centro igitur E, interuallo autem vna ipſarum AE EB EC circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et circulus deſcriptus erit. Quare circuli portione data deſcriptus eſt circulus; cuius ea portio eſt. Sed et illud conſtat, portionem ABC ſemicirculo minorem eſſe; propterea quòd centrum ipſius extra cadit. Similiter et ſi angulus ABD ſit ęqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipſarum BD DC, erunt tres rectæ lineę AD DB DC inter ſe æquales, atque erit D circuli deſcripti centrum, et portio ABC ſemicirculus. Si vero angulus ABD minor ſit angulo BAD, conſtituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipſa DB, atque erit ABC portio ſemicirculo maior. Circuli igitur portione data deſcriptus eſt circulus, cuius portio eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli ęqualibus inſiſtunt circũferentijs, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant.

Sint ęquales circuli ABC DEF, & in ipſis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circũferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentię ELF æqualem eſſe. Iungantur enim BC EF. Et quoniã æquales ſunt ABC DEF circuli, erũt et quæ ex cẽtris æquales. duæ igitur



BG GC duabus FH,HF ęquales ſunt:& angulus ad G æqualis angulo ad H. Ergo 4.primi. et baſis BC baſi EF eſt ęqualis.Rurſus quoniã æqualis eſt angulus ad A angulo ad D, portio BAC ſimilis erit portioni EDF.et ſunt in æqualibus rectis lineis BC EF. Diffi.11. quę autem in æqualibus rectis lineis ſimiles ſunt circulorum portiones inter ſe 24.huius. æquales ſunt.portio igitur BAC portioni EDF eſt æqualis.Sed et totus ABC circulus ęqualis eſt toti DEF.ergo et reliqua circumferentia BKC reliquę ELF æqualis erit.In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circũferentiis, ſiue ad centra ſiue ad circumferentias inſiſtãt.quod oportebat demonſtrare.

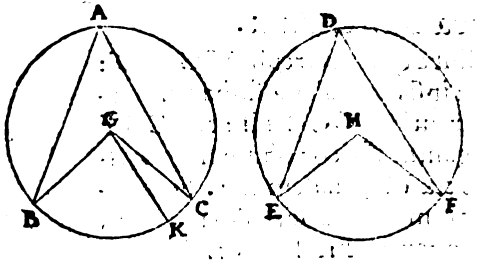
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonſtrabitur in eiſdem circulis, & propoſitio magis vniuerſalis erit hoc modo.

In eiſdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis,ſiue ad centra,ſiue ad circumferentias inſiſtant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui ęqualibus inſiſtunt circumferentijs inter ſe æquales ſunt; ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant.



In æqualibus enim circulis ABC DEF, ęqualibus circumferentiis BC EF inſiſtant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF.Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem eſſe, Si quidem igitur angulus BGC æqualis ſit angulo EHF,manifeſtum eſt angulum quoque BAC angulo EDF eſſe ęqualem.Sin'minus,vnus ipſorum eſt maior.ſit maior BGC,et cõſtituatur ad rectam lineam BG, 23.primi. et ad punctum in ipſa G angulo EHF æqualis angulus BGK. æquales autem anguli Ex antecedente. æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad centra fuerint.Ergo circumferentia BK æqualis eſt circumferentię EF.Sed circumferentia EF ęqualis eſt ipſi BC.ergo et BK ipſi BC eſt ęqualis,minor maiori, quod fieri non põt. Non igitur inæqualis eſt angulus BGC angulo EHF. ergo eſt æqualis. atque eſt anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D eſt æqualis.In ęqualibus igitur circulis anguli, qui ęqualibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe æquales ſunt ſiue ad centra,ſiue ad circumferentias inſiſtant.quod oportebat demonſtrare.

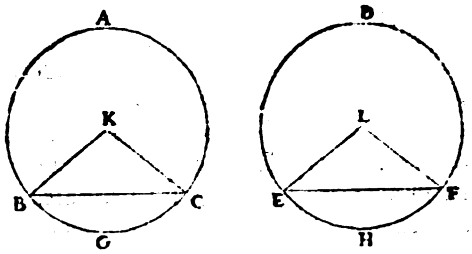
F. C. COMMENTARIVS.

Eadem demonſtratio erit, ſi anguli aequalibus circumferentijs eiuſdem circuli inſiſtant, vt propoſitio magis vniuerſalis fiat,hoc pacto.

In eiſdem vel ęqualibus circulis anguli, qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe æquales ſunt,ſiue ad centra,ſiue ad circumferentias inſiſtant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In ęqualibus circulis ęquales rectę lineę circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

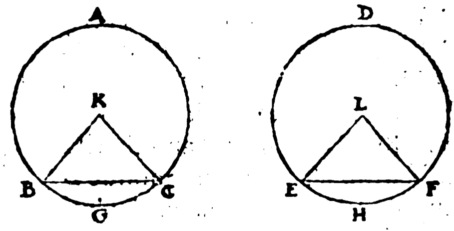


Sint ęquales circuli ABC DEF; et in ipſis æquales rectę lineę BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC maiorem maiori circumferentiæ EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem eſſe. Sumãtur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quoniam circuli ęquales ſunt, erunt et quæ ex centris ęquales. duæ igitur BK KC ſunt ęquales duabus EL LF: et baſis BC æqualis eſt baſi EF. Ergo angulus BKC angulo ELF eſt æqualis: æquales autem anguli ęqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare cirumferentia BGC æqualis eſt circumferentiæ EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF eſt ęqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquae EDF ęqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonſtrare oportebat.

1.huius.
Diffi.1.
8.primi.
26.huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ęquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.



Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipſis æquales aſſumantur circũferentiæ BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF ęqualem eſſe. Sumantur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quoniam igitur circumferentia BGC eſt ęqualis circumferentiæ EHF, erit et angulus BKC angulo ELF ęqualis. Et quoniam circuli ABC DEF ſunt æquales, et quæ ex centris ęquales erunt. duę igitur BK KC ſunt æquales duabus EL LF; et ęquales angulos continent. quare baſis BC baſi EF eſt ęqualis. In ęqualibus igitur circulis æquales circumferentias ęquales rectæ lineę ſubtendunt. quod oportebat demonſtrare.

1 huius.

26.huius.
Diffi.1.
4.primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonſtrationes eędem ſint, propoſitiones magis vniuerſales fieri poterunt, in hunc modum.

In eiſdem vel æqualibus circulis ęquales rectæ lineæ circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

In eiſdem vel ęqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę ſubtendunt.

Sed & harum quoddammodo conuerſas, atque alias his non diſſimiles demonſtrare hoc loco non inutile arbitrati ſumus.

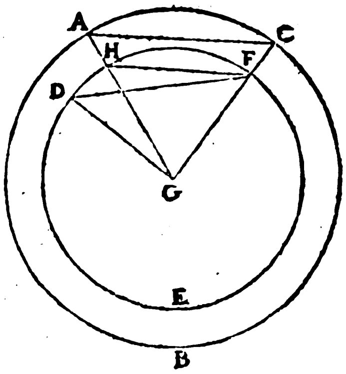
PROPOSITIO I.

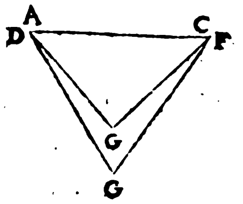
Si æquales rectæ lineæ æquales, et ſimiles circumferentias auferant, circuli ęquales erunt, quorum illæ ſunt circumferentiæ.

Si enim

Si enim fieri poteſt, ſint circuli inęquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G aequalis minori deſcribatur DEF: & iūgātur AG GC DG GF, ita vt punctum F cadat in recta linea GC: & AG ſecet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectae lineae AC DF aequales ſunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps demonſtrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF ſimilis eſt circumferentiae AC, ex 12 diffinitione huius. in ipſis enim idem angulus AGC conſiſtit. ergo circumferentia DF circumferentiae AC non eſt ſimilis. atqui ſimilis ponebatur. quod eſt abſurdum. non igitur circuli in aequales ſunt. ergo aequales eſſe neceſſarium eſt. At vero angulum AGC minorem eſſe angulo DGF, ita demonſtrabimus.

Intelligatur triangulum AGC ſeorſum, & trianguli DGF punctum D in A ſtatuatur; & punctum F in C. ſunt enim AC DF inter ſe aequales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor eſt angulo DGF. quod demonſtrare oportebat.





PROPOSITIO. II.

In circulis inęqualibus ęquales rectę lineę diſsimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex ijs, quae nos proxime demonſtrauimus perſpicue apparet. aequales enim rectae lineae AC DF diſsimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inæqualibus ſimiles circumferentias inæquales rectæ lineæ ſubtẽdũt.

Et hoc ſimiliter apparet ex ante demonſtratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF aequalia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit baſis DF baſi HF maior. Sed recta linea AC eſt aequalis ipſi DF. ergo AC HF inęquales ſunt, & ſimiles circumferentias ſubtendũt. quod oportebat demonſtrare.

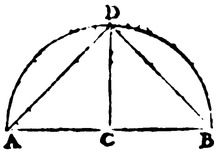
PROPOSITIO IIII.

Similes et inęquales circumferentias inæquales rectę lineę ſubtendunt.

Si enim rectae lineae aequales ſint, & circuli item aequales, erunt circumferentiae, quas ſubtendunt, & aequales & ſimiles. Si vero circuli ſint inęquales, circumferentiae diſsimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur & inęquales circumferentias, inęquales rectae lineae ſubtendunt. quod demonſtrare oportebat.

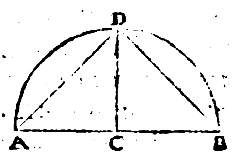
PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.



Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam ſecare. Iungatur AB, & in C bifariam ſecetur: à puncto autem C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC eſt æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus 10.pimi.

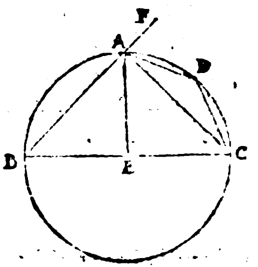
BC,



B C CD æquales ſunt: et angulus ACD æqualis angulo
4.primi. BCD, rectus enim vterque eſt: ergo baſis AD baſi DB eſt
28.huius. ęqualis. ęquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. et eſt vtraque ipſarum AD DB circumferentiarum ſemicirculo minor. quare circumferentia AD circumferentiæ D B ęqualis erit. data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, & qui in minori maior recto; & inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt, minoris vero portionis angulus recto minor.



Sit circulus A B C D cuius diameter B C, centrum autem E; et iungantur BA AC AD DC. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo BAC rectum eſſe; qui vero in portione ABC maiore ſemicirculo, videlicet angulum ABC minorem eſſe recto, et qui in portione ADC minore ſemicirculo, hoc eſt angulũ ADC recto maiorem. iungatur. A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam BE eſt æqualis EA, erit et angu
5.primi. lus EAB, angulo EBA æqualis. Rurſus quoniam AE eſt ęqualis EC, et angulus ACE angulo CAE ęqualis erit. totus igitur angulus BAC eſt æqualis duobus ABC ACB angulis. eſt autem et
32 primi. angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis. angulus igitur
13.primi. BAC eſt ęqualis angulo FAC. ac propterea vterque ipſorum rectus. Quare in ſemi
17.primi. circulo BAC angulus BAC rectus eſt. et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in portione ABC maiore ſemicirculo. Quòd cum in circulo quadri
22.huius. laterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero, qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint ęquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis. et angulus ABC minor eſt recto. reliquus igitur A D C recto maior erit, atque eſt in portione ADC minore ſemicirculo. Dico pręterea maioris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentia et recta linea A C recto maiorem eſſe; angulũ vero minoris portionis contentum circumferentia A D C, et recta linea A C recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA AC continetur rectus eſt, erit et contentus A BC circumferentia, et recta linea AC recto maior. Rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea C A, et A D C circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, et qui in minori maior recto. et inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt: minoris vero recto minor. quod demonſtrare oportebat.

ALITER demõſtrabitur angulũ BAC rectũ eſſe. Quoniã enim angulus AEC duplus eſt anguli BAE, etenim duobus interioribus, et oppoſitis eſt æqualis: eſt autem et AEB duplus ipſius EAC: anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed et AEB AEC anguli duobus rectis ſunt æquales. ergo angulus BAC rectus eſt. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi triãguli vnius angulus ſit ęqualis duobus

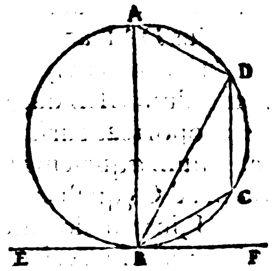
bus, cum rectum eſſe; propterea quòd & qui deinceps eſt, ijſdem eſt ęqualis. quando autem anguli deinceps ſunt ęquales, neceſſario recti ſunt.

SCHOLIVM.

Si ſemicirculi omnes ob ſimilitudinem æquales angulos ſuſcipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones ſuſcipiunt rectis minores; perſpicuum eſt cum ſimiles ſint æquales ſuſcipere angulos: quo enim maiores ſunt ſemicirculis, eo rectum angulũ diminuunt: ſimiliter et minores ſemicirculis rectum proportione augent. Ergo ſimiles portiones æquales ſuſcipiant angulos neceſſe eſt. portionum autem anguli, quòd heterogenei ſint, reſpectu rectilineorum, ſunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, niſi maioritate tantum, vt ſic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipſius maiorem ſimpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata eſt. Videbitur autem hoc admirabile eſſe, nam quæ in contraria tranſmutantur, per media tranſire conſueuerunt. Sed et in alijs inuenire licet hoc modo oppoſita abſque medio. etenim quæ circulum comprehendit linea, cum conuexa ſit, et caua, recta non eſt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta lineã, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt.

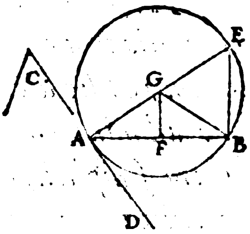


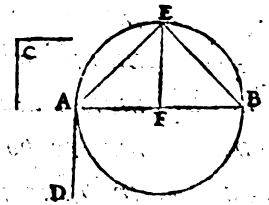
Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, et à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipſum vtcumque ſecans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, ęquales eſſe iis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt, hoc eſt angulum FBD eſſe æqualem angulo, qui cõſtituitur in DAB portione, videlicet ipſi DAB; angulum vero EBD ęqualem angulo DCB, qui in portione DCB conſtituitur. Ducatur enim à puncto B ipſi EF ad rectos angulos BA: 11.primi. et in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C; iunganturq́; AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: et à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA; erit in ipſa BA centrum ABCD circuli, 19.huius. quare BA eiuſdẽ circuli diameter eſt, et angulus ADB in ſemicirculo eſt rectus. Ex antecedente. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto ęquales ſunt. 32.primi. Sed et ABF eſt rectus. ergo angulus ABF æqualis eſt angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione conſiſtit, videlicet angulo BAD eſt ęqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, et anguli eius oppoſiti æquales

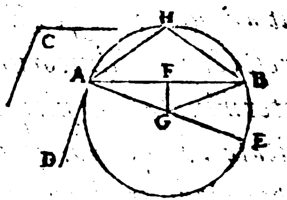
22.huius, ti æquales ſunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales.quorum BAD oſtenſus eſt æqualis ipſi DBF. ergo reliquus DBE ei,qui in alterna circuli portione DCB conſtituitur,videlicet ipſi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea,à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli,quos facit ad contingentem,æquales erunt iis,qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt.quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea deſcribere portionem circuli, quæ ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.





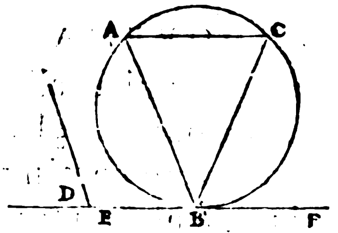


Sit data recta linea AB,datus autem angulus rectilineus , qui ad C.itaque oportet in data recta linea AB deſcribere portionẽ circuli,quæ ſuſcipiat angulum ęqualem angulo,qui eſt ad C. vel igitur angulus ad C acutus eſt , vel rectus,vel obtuſus. Sit primum acutus,vt in prima figura,et ad rectam lineam AB,et ad punctum in ea 23.primi, datum A,conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C æqualis.acutus igitur angulus 11.primi. eſt BAD,et à puncto A ipſi AD ad rectos angulos ducatur AE ;ſecetur autẽ 10.primi. AB bifariam in F;atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipſi AB.et GB iũgatur.Quoniam igitur AF eſt æqualis FB,communis autem FG , duę AF FG duabus 4.primi. BF FG æquales ſunt: et angulus AFG ęqualis angulo GFB. ergo baſis AG baſi GB eſt æqualis.Itaque centro G,interuallo autem AG circulus deſcriptus tranſibit etiam per B:deſcribatur et ſit ABE,iungaturq; EB.Quoniam igitur ab extremitate Corol.16.huius. diametri AE,et à puncto A ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AD;ipſa AD circulum continget.et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et Ex antecedente, à contactu,qui eſt ad A in circulum ABE ducta eſt recta linea AB:erit angulus DAB ęqualis angulo,qui in alterna circuli portione conſtituitur , videlicet ipſi AEB, Sed angulus DAB angulo,qui ad C eſt æqualis . ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit . In data igitur recta linea AB portio circuli deſcripta eſt AEB , ſuſcipiens angulum AEB dato angulo,qui ad C æqualem.Sit deinde angulus , qui ad C rectus.et oporteat rurſus in recta linea AB deſcribere circuli portionem , quę ſuſcipiat 23.primi, angulum æqualem recto angulo,qui eſt ad C.conſtituatur enim rurſus angulo recto,qui ad C ęqualis angulus BAD,vt in ſecũda figura, ſeceturq; AB bifariã in F, et centro F,interuallo autem alterutra ipſarum AF FB circulus deſcribatur AEB. Corol.16.huius. ergo AD recta linea circulum ABE contingit , propterea quòd rectus eſt qui ad A angulus,et angulus BAD æqualis angulo,qui eſt in portione AEB : rectus enim et ipſe eſt,in ſemicirculo conſiſtẽs.ſed BAD æqualis eſt ei qui ad C.Ergo et qui in portione AEB ei , qui ad C eſt æqualis. deſcripta igitur eſt rurſus in AB recta linea, portio circuli AEB,ſuſcipiens angulum angulo recto,qui ad C ęqualem . Denique ſit angulus ad C obtuſus,et ad rectam lineam AB,et ad punctum A conſtituatur ipſi æqualis angulus BAD,vt hēt in tertia figura,et ipſi AD rectę lineę ad rectos angulos ducatur AE:ſeceturq; rurſus AB bifariam in F : ipſi vero AB ducatur ad rectos angulos FG,et GB iungatur.Et quoniam AF eſt ęqualis FB, communis autem FG.duę AF FG duabus BF FG ęquales ſunt,et angulus AFG angulo BFG ęqualis.

lis.baſis igitur AG eſt æqualis baſi GB.Quare centro G, interuallo autem AC circulus 4.primi.
deſcriptus etiam per B tranſibit.tranſeat vt AEB . Et quoniam diametro AE
ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt AD,ipſa AD circulum AEB continget: Corol.16.huius.
et à contactu,qui ad A ducta eſt AB . quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli
portione AHB cõſtituitur eſt ęqualis.Sed BAD angulus æqualis eſt angulo, qui ad
C.angulus igitur,qui in portione AHB angulo,qui ad C æqualis erit.Ergo in data
recta linea AB deſcripta eſt AHB circuli portio,ſuſcipiens angulum æqualẽ ei, qui
eſt ad C. quod facere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

A dato circulo portionem abſcindere, quæ ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

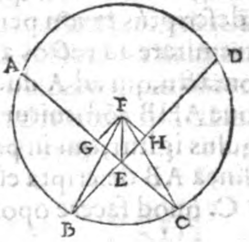


Sit datus circulus ABC : datus autem angulus rectilineus.qui ad D.oportet à circulo ABC portionem abſcindere, quę ſuſcipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: et 17.huius.
ad rectam lineam BF,et ad punctum in ea B cõſtituatur angulus FBC angulo qui eſt ad D æqualis. 23.primi.
Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à cõtactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC ęqualis ei,qui in alterna circuli portione cõſtituitur.Sed FBC angulus angulo qui ad D eſt æqualis.ergo et angulus,qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit.A dato igitur circulo ABC abſciſſa eſt portio, quædam BAC ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo,qui eſt ad D,æqualem.quod facere oportebat.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent rectangulum portionibus vnius contentum ęquale eſt ei, quod alterius portionibus continetur.

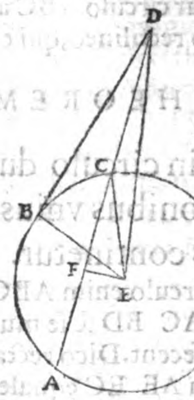
In circulo enim ABCD duæ rectę lineæ AC BD ſe ſe mutuo in puncto E ſecent.Dico rectangulum contentum AE EC ęquale eſſe ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum tranſeant, ita vt E ſit cẽtrum ABCD circuli, manifeſtum eſt æqualibus exiſtentibus AE EC DE EB,et rectangulum contentum AE EC ęquale eſſe ei,quod DE EB continetur.Itaque AC DB non tranſeant per centrum;et ſumatur centrum circuli ABCD quod ſit F:et à F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH:iunganturq; FB FC FE.Quoniam igitur recta quędam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat,et bifariam ipſam ſecabit. quare AG ipſi GC eſt æqualis.Et quoniam recta li- 3.huius.
nea AC ſecta eſt in partes æquales in puncto G, et in partes inęquales in E,erit re- 5.ſecundi.
ctangulum AE EC contentum vna cum ipſius EG quadrato,ęquale quadrato ex
GC.commune addatur ex GF quadratum.ergo rectãgulum AEC vnà cum iis,quæ
ex EG GF quadratis æquale eſt quadratis ex CG GF.Sed quadratis quidem ex EG



47.primi. GF æquale eſt quadratū ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale quod ex FC quadratum. rectangulum igitur AEC vnà cū quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FC. eſt autem CF æqualis F B. Ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex EF æquale eſt ei, quod ex FB quadrato. Eadē ratione et rectangulum DEB vnà cū quadrato ex FE æquale eſt quadrato ex FB. oſtenſum autē eſt et rectāgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectāgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale eſt rectangulo DEB vnà cum quadrato ex FE. commune auferatur quod ex FE quadratum. reliquum igitur rectāgulum AEC reliquo DEB rectāgulo æquale erit. Quare ſi in circulo duę rectę lineę ſe ſe mutuo ſecēt, rectangulū portionibus vnius cōtentū ęquale eſt ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demōſtrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota ſecante, et exterius aſſumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.



Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadāt duæ rectę lineæ DCA DB: et DCA quidem circulum ABC ſecet; DB vero contingat. Dico rectāgulum ADC quadrato, quod fit ex DB æquale eſſe. Vel igitur DCA per centrum tranſit, vel non. tranſeat primum per centrum circuli ABC, quod ſit F: et 18.huius. FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaque quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, et ipſi adiicitur CD; rectangulū ADC vnà cum quadrato, quod 6.ſecundi. ex FC æquale erit ei, quod fit ex FD quadrato. æqualis autem eſt CF ipſi FB. ergo rectangulū ADC vnà cum quadrato quod ex FB æquale eſt quadrato ex FD. Sed quadrarum ex FD eſt ęquale quadratis ipſarum FB BD; rectus enim angulus eſt FBD. rectāgulum igitur ADC vnà cum quadrato ex FB ęquale eſt ipſarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratū, quod ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB ęquale erit. Sed DCA non tranſeat per centrum ABC circuli: ſumaturq; centrū E, et ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF: et iungantur EB EC ED. rectus igitur eſt EFD angulus. Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per 3.huius. centrum ad rectos angulos ſecat, et bifariam ipſam ſecabit. quare AF ipſi FC eſt æqualis. Rurſus quoniam recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adiicitur 6.ſecundi. CD, erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC æquale qundrato, quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà cum

cum quadratis ex CF FE eſt ęquale quadratis ex DF FE. ſed quadratis quidem ex DF FE æquale eſt, quod ex DE quadratũ; etenim rectus eſt angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale eſt quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato, quod ex CE eſt ęquale quadrato ex ED. æqualis autem eſt CE ipſi EB. rectangulum igitur ADC vnà cum quadrato ex EB ęquale eſt ei, quod ex ED quadrato. ſed quadrato ex ED æqualia ſunt quadrata ex EB BD; ſi quidem rectus eſt angulus EBD. ergo rectangulum ADC vnà cũ quadrato ex EB æquale eſt eis, quæ ex EB BD quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur ADC rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, et quę deinceps ſunt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

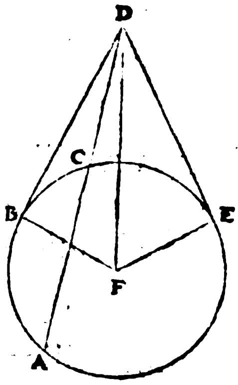
Ex proxime demonſtratis duo corollaria ſequuntur, vt ẽt adnotauit Campanus. nempe hęc.

Si à pũcto extra circulum ſumpto ducãtur in circulum quotcumque rectę lineę, ipſum ſecantes; rectangula quæ totis, et earum portionibus extrinſecis cõtinentur, inter ſe æqualia ſunt; quod ſingula quadrato lineæ contingẽntis ſint æqualia.

A puncto extra citculum ſumpto ductę duæ rectæ lineæ circulum contingentes inter ſe æquales ſunt. etenim vtriuſque ipſarum quadrata ſunt ęqualia rectangulo, quod recta linea ab eodem puncto ducta, quę circulum ſecet, et eius portione extrinſeca continetur. ergo et ipſæ lineę æquales ſint neceſſe eſt. neque vero plures quàm duæ eſſe poſſunt, quod ex demonſtratis in octauo huius perſpicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXVII.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat; ſit autem quod tota ſecante, et exterius aſſumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, ęquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB; et DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat, ſitq; rectangulum ADC ęquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipſam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, et ſumatur circuli ABC centrum quod ſit F, iunganturq; FE FB FD. ergo angulus FED rectus eſt. 18.huius. Et quoniam DE circulum ABC contingit, ſecat autem DCA, rectangulum ADC æquale erit quadrato quod ex DE. ſed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipſi DB æqualis. eſt autem et FE ęqualis FB. duę igitur DE EF duabus DB BF æquales ſunt; et baſis ipſarum communis FD. angulus igitur DEF eſt æqualis angulo DBF. 8.primi. rectus autem DEF. ergo et DBF eſt rectus; atque eſt FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat neceſſe eſt. Similiter demonſtrabitur et ſi centrum ſit in ipſa AC. Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonſtrare oportebat.

TERTII LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

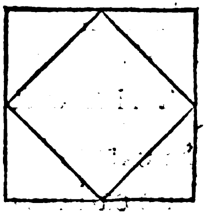
LIBER QVARTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quãdo vnusquiſque figuræ deſcriptæ angulus vnũquodque latus eius, in qua deſcribitur, contingit.

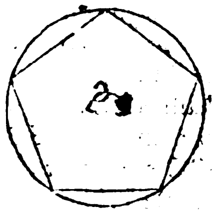


II.

Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur quando vnumquodque latus deſcriptę vnumquemque angulum eius, circa quam deſcribitur, contingit.

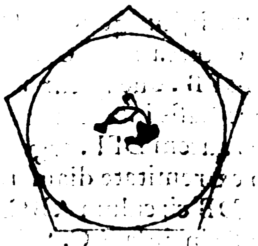
III.

Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando vnuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circũferentiam contingit.



IIII.

Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando vnumquodque latus deſcriptę circuli circumferentiã cõtingit.

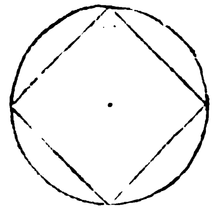


V.

Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua deſcribitur, contingit.

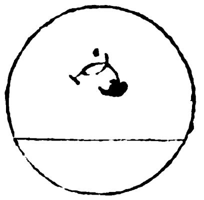
VI.

Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam deſcribitur, contingit.



VII.

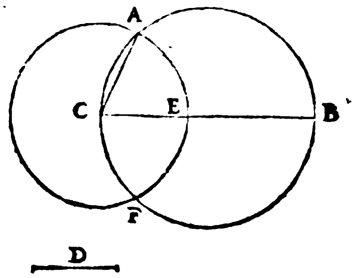
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam ſe applicant.



PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectę lineæ, quæ diametro eius maior nō ſit, æqualem rectam lineam aptare.



Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non maior circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectę lineę D ęqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Si quidem igitur BC ſit ęqualis ipſi D, factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata eſt A C rectæ lineæ D ęqualis. Sin minus, maior eſt BC quàm D, ponaturq; ipſi D æqualis CE: et centro quidem C interuallo autem CE circulus deſcribatur A E F: et CA iungatur. Itaque quoniam punctum C centrum eſt AEF circuli; erit CA ipſi CE æqualis. Sed D eſt æqualis CE. ergo et D ipſi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectę lineæ D, non maiori circuli diametro, æqualis aptata eſt AC. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

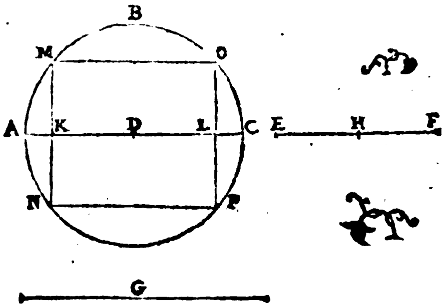
Cum varia ſit circumſcriptionum, et inſcriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progreſſus eſt. nam perueniens ad hexagonum, & poſtremo quindecagoni angulos tradens, qui ad aſtrorum ſciētiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam eſt, pentagoni conſtitutioni inſeruiens: & quæcumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam ſimpliciorem habet conſtructionem, quàm trianguli conſtitutio, iure merito ante alia theoremata poſitum eſt. Sciendum autem ſi quidem data recta linea diametro ſit æqualis, vno tantum modo, vel etiam abſque vlla experientia fieri problema; Si vero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto vt C ad AF ductæ rectæ lineæ inter ſe æquales ſunt.

Problema hoc eſt ex eorum numero, quae determinata appellantur. poſſet enim & hoc modo explicari.

In dato circulo datæ rectę lineæ ęqualem rectam lineam aptare. oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.

Licet etiam problema aliud abſoluere huiuſmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineæ datę, quę diametro maior non ſit, ęqualem, et alteri datæ parallelam aptare.

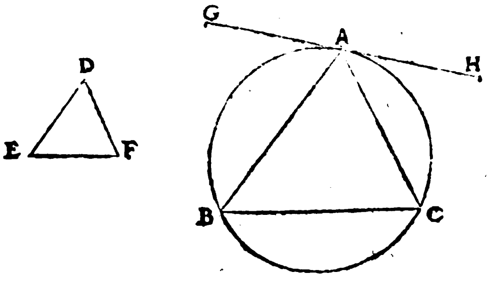


Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea ſit, in qua G. Itaque oportet in circulo ABC aptare rectam lineam aequalem 31.primi. *ipſi EF, & ipſi G parallelam. Ducatur per D recta linea ADC parallela ipſi G, quae circuli diameter erit. & ſi quidem AC ſit ęqualis EF, factũ iã erit quod proponebatur: ſi vero AC ſit maior, quàm EF, ſecetur EF bifariam in H: & ipſi HE aequalis abſcindatur à ſemidiametro circuli* 11.primi. *DA, quae ſit DK. ipſi vero HF aequali. fiat DL; perq; pũcta KL ipſi AC ad rectos angulos ducantur MN OP; & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quędam AC per centrum* 3.tertij. *ducta rectam lineam MN non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat; & bifariam ipſam ſecabit. quare MK eſt aequalis KN. Et ob eandem cauſſam OL eſt aequalis LP. ſunt autem MN OP* 14.tertij. 28.primi. *inter ſe aequales, cum aequaliter à centro diſtẽt: & ſunt parallelae; anguli enim MKL OLK recti ſunt. quare et earum dimidiae KM LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequa-* 33.primi. *les, & parallelas ad eaſdem partes coniungunt, & ipſae aequales, et parallelae ſunt. ergo MO eſt* 30 primi. *aequalis KL, hoc eſt ipſi EF, & parallela ipſi G; ſunt enim vtręque ipſi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonſtrabitur aequalis eidẽ EF, & parallela ipſi G. In circulo igitur ABC aptata eſt MO vel NP aequalis EF, & ipſi G parallela. quod facere oportebat.*

Ex quibus conſtat ſi quidem AC ſit aequalis rectæ lineæ datę, vno dumtaxat modo problema abſolui; ſi vero ſit maior, duobus modis, vt in antecedẽti dictum eſt.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.



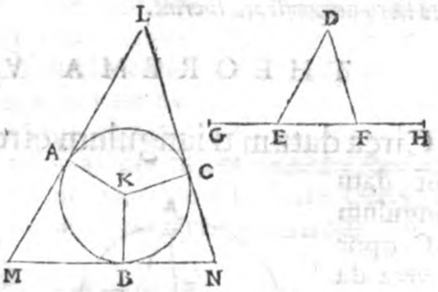
Sit datus circulus A B C, datum autem triangulũ D E F. oportet in ABC circulo deſcribere triangulũ triangulo DEF ęquiangulum. Du- 17.terti. catur recta linea GAH contingens circulum A B C in puucto A: et ad rectam lineam AH, et ad punctum 23.primi. in ea A angulo DEF ęqualis angulus conſtituatur HAC. rurſus ad rectam lineam AG, et ad punctum in ipſa A angulo DFE ęqualis cõſtituatur angulus GAB; et BC iungatur. Quoniã igitur circulũ ABC contingit quædã recta HAG; à contactu aũt in circulũ 32 primi. ducta eſt AC: erit HAC angulus ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cõſiſtit, videlicet ipſi ABC. Sed HAC angulus ęqualis eſt angulo DEF. ergo et angulus ABC

angulo

angulo DEF eſt æqualis. Eadem ratione et angulus ACB eſt æqualis angulo DFE. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis erit. Ergo triangulum A B C triangulo DEF eſt ęquiangulum. et deſcriptum eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulũ triangulũ deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato ęquiangulum triangulum deſcribere.

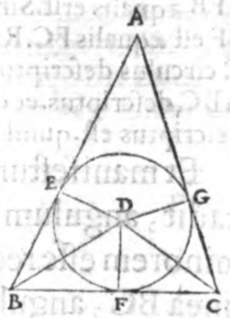


Sit datus circulus A B C: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC deſcribere triãgulum triãgulo D E F æquiangulum. protrahatur ex vtraque parte EF ad puncta H G: et ſumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB vt cumque ducatur: conſtituaturq; ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; 23.primi. angulo aũt DFH æqualis angulus BKC. et per ABC puncta ducantur rectæ lineę L A M M B N N C L circulum A B C, contingentes. 17.tertij. Quoniam igitur circulũ A B C contingunt LM MN NL, in punctis ABC, à centro autem K ad ABC puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta ABC recti. 18.tertij. Et quoniam quadrilateri A M B K anguli quattuor quattuor rectis æquales ſunt; etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF ęquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales ſunt; quorum AKB ipſi DEG eſt æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF ęqualis erit. Similiter demonſtrabitur angulus L N B ipſi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN eſt æqualis reliquo E D F. æquiangulum igitur eſt L M N triangulum triangulo D E F, et deſcriptum eſt circa circulum A B C. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum deſcribere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum deſcribere. ſecentur anguli ABC BCA bifariam 9.primi. rectis lineis BD CD, quæ conueniant inter ſe in D puncto; 12.primi. et à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus A B D eſt æqualis angulo CBD: eſt autem et rectus BED recto BFD ęqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, et vtrique commune BD, quod ſcilicet vni æqualium angulorum ſubtẽditur. 26.primi. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE ęqualis D F. et eadem ratione D G ęqualis D F. ergo et D E ipſi D G eſt ęqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter ſe æquales ſunt; quare centro D interuallo autem vna ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cõtinget; propterea quòd recti ſunt ad EFG anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri



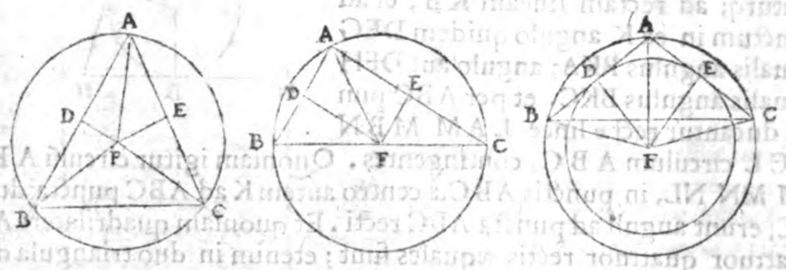
16.tertij, metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulū cadet. quòd eſt abſurdū. nō igitur cētro D, interuallo aūt vna ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas AB BC CA. quare ipſas cōtinget; atque erit circulus deſcriptus in triāgulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quęſitum eſt à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum deſcribi poſſit, quamquam fortaſſe impropriè in eo dicatur deſcribi. Fuerunt qui in triangulo aequilatero tantum peoblema abſoluerunt. Nos autem vniuerſe in omnibus abſoluere aggrediemur, poſtea quàm nonnulla in quinto, ac ſexto libro demonſtrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.



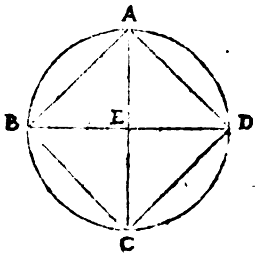
Sit datū triangulum ABC. oportet circa datum triangulū A B C circulū deſcribere. 10.primi. ſecentur A B AC bifariā 11.primi. in D E punctis: et à punctis D E ipſis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF; quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipſam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD eſt æqualis DB, communis autem, et ad rectos angu- 4. primi. los DF; erit baſis AF baſi FB ęqualis. Similiter oſtendetur et CF ęqualis FA. ergo et BF eſt æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter ſe æquales ſunt. quare centro F, interuallo autem vna ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit: atque erit circulus deſcriptus circa triangulum ABC. et deſcribatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in ſecunda figura, & AF iungatur. Similiter demonſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Poſtremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rurſus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rurſus AD eſt æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; baſis AF baſi FB æqualis erit. Similiter demonſtrabimus et CF ipſi FA ęqualem eſſe. quare et BF eſt æqualis FC. Rurſus igitur centro F, interuallo autem vna ipſarum FA FB FC circulus deſcriptus et per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum ABC deſcriptus. et deſcribatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

Et manifeſtum eſt, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC exiſtentem in portione ſemicirculo maiore minorem eſſe recto, quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd ſit in ſemicirculo, rectum eſſe. & quādo extra BC, quòd ſit in portione minore ſemicirculo, recto eſſe maiorem. Quare et quando datus angulus minor ſit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quādo autem rectus in ipſa BC,

& quando maior recto, extra BC. quod oſtendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

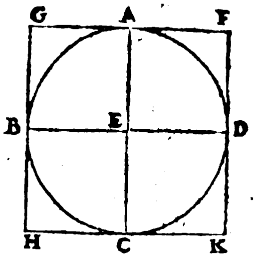
In dato circulo quadratum deſcribere.



Sit datus circulus ABCD.oportet in ABCD circulo quadratum deſcribere.Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC BD:et AB BC CD DA iungantur.Quoniam igitur BE eſt ęqualis ED,etenim centrum eſt E,communis autem et ad rectos angulos EA; erit baſis BA ęqualis baſi AD.Et eadem ratione vtraque ipſarum BC CD vtrique BA AD ęqualis.æquilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum.Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemicirculus.quare angulus BAD rectus eſt. et eadem ratione 31.tertij. vnuſquiſque ipſorum ABC BCD CDA eſt rectus. rectangulum igitur eſt ABCD quadrilaterum.oſtenſum autem eſt, et æquilaterum eſſe. ergo quadratum neceſſario erit,et deſcriptum eſt in circulo ABCD.In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD deſcriptum eſt,quod facere oportebat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

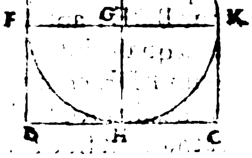
Circa datum circulum quadratnm deſcribere.



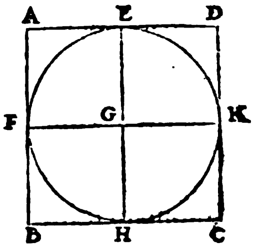
Sit datus circulus ABCD.oportet circa ABCD circulū quadratū deſcribere.ducantur circuli ABCD duę diametri AC BD ad rectos inter ſe angulos, et per pūcta A 17.tertij. BCD ducātur circulū ABCD cōtingentes FG GH HK KF. Quoniā igitur FG contingit circulū ABCD,à centro aūt E ad cōtactū qui eſt ad A ducitur EA; erūt anguli ad 18.tertij. A recti.Eadem ratione et anguli ad puncta B C D recti ſunt. Et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem et rectus EBG; erit GH ipſi AC parallela. Eadē ratione et 28.primi. AC parallela eſt FK.Similiter demonſtrabimus et vtramque ipſarum GF HK ipſi BED parallelam eſſe.quare et GF eſt parallela HK. parallelogramma igitur ſunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem eſt æqua- 34.primi. lis HK, GH vero ipſi FK. Et quoniam AC æqualis eſt BD : Sed AC quidem vtrique ipſarum GH FK eſt æqualis; BD vero æqualis vtrique GF HK. et vtraque GH FK vtrique GF HK æqualis erit. Aequilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum.Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus,et ipſe AGB rectus erit.Similiter demonſtrabimus angulos etiā qui ad puncta HKF rectos eſſe.rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK; demonſtratum autem eſt et æquilaterum.Ergo quadratum ſit neceſſe eſt.et deſcriptū eſt circa circulū ABCD.Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt, quod facere oportebat.

PROBLEMA VIII.
PROPOSITO VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.



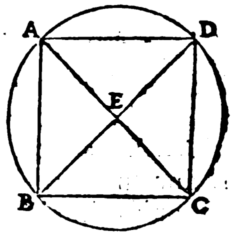
Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulū deſcribere. Secetur vtraque ipſarū AB AD bifariam in punctis F E. et per E quidem alterutri 10.primi. ipſarum AB CD parallela ducatur EH: per F vero duca- 31.primi. tur FK parallela alterutri AD BC.parallelogrammum



igitur eſt vnũquodque ipſorum AK KB AH HD A 34 primi. G GC BG GD : et latera ipſorum quę ex oppoſito ſunt ęqualia. Et quoniam DA eſt æqualis AB: et ipſius quidē AD dimidia eſt AE; ipſius vero AB dimidia AF; erit AE ipſi AF ęqualis. quare et oppoſita latera ęqualia ſunt. ergo FG eſt æqualis GE. Similiter demonſtrabimus et vtramque ipſarum GH HK vtrique FG GE æqualem eſſe. quattuor igitur GE GF GH GK inter ſe ſunt ęquales. Itaque centro quidem G, interuallo autem vna ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas AB BC CD DA continget, propterea quòd anguli ad E F H K recti ſunt. Si enim circulus ſecabit rectas lineas AB BC CD DA, quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet. 16.tertij. quod eſt abſurdum. non igitur centro quidem G, interuallo autem vnà ipſarum GE GF GH GK circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DA ſecabit. quare ipſas neceſſario continget: atque erit deſcriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

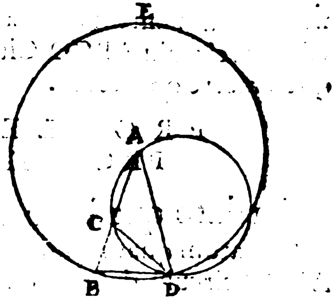
Circa datum quadratum circulum deſcribere.



Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum deſcribere. Iungãtur enim AC BD, quę ſe inuicem in puncto E ſecent. Et quoniam DA eſt æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC ęquales ſunt; et baſis DC æqualis baſi CB; erit angulus DAC angulo BAC æqualis. angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt recta linea AC. Similiter demonſtrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt æqualis. atque eſt anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli vero ABC dimidius EBA; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare et latus EA lateri EB eſt ęquale. Similiter demonſtrabimus, et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem eſſe. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter ſe ſunt æquales. centro igitur E, interuallo autem vna ipſarum EA EB EC ED circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit. atque erit deſcriptus circa ABCD quadratum. deſcribatur vt ABCD. circa datum igitur quadratum circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum cõſtituere, habens vtrumque angulorum, qui ſunt ad baſim duplum reliqui.



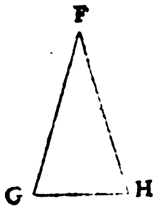
Exponatur recta quędam linea AB, et ſecetur in C puncto, ità vt rectangulum contentum AB BC 11.ſecundi. æquale ſit ei, quod ex CA deſcribitur quadrato: et centro quidem A, interuallo autem AB circulus deſcribatur BDE: apteturq; in BDE circulo recta li- 1.huius. nea BD æqualis ipſi AC, quæ non ſit maior diametro circuli BDE: et iunctis DA DC, circa ADC triãgulum circulus ACD deſcribatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale eſt quadrato, quod ſit ex AC; æqualis autem eſt AC, ipſi BD, erit ABC rectangulum

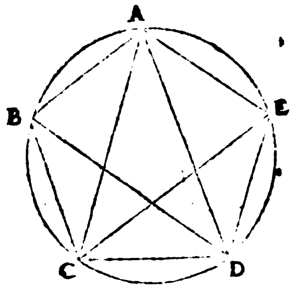
quadrato

quadrato quod ex BD æquale.Et quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt ali-
quod punctum B:et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectæ lineæ BCA B
D, quarum altera quidem ſecat, altera vero incidit, atque eſt rectangulũ ABC æqua
le quadrato, quod ex BD; recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igi- Vlt. tertij.
tur BD contingit, et à contactu, qui ad D ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis 32. tertij.
ei, qui in alterna circuli portione conſtituitur, videlicet angulo DAC. Quòd cum
angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BD
A eſt æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipſis CDA DAC exterior an 32. primi.
gulus BCD eſt ęqualis. ergo et BDA ęqualis eſt ipſi BCD. ſed BDA angulus
eſt æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB eſt ęquale. ergo et DBA
ipſi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter ſe æquales
ſunt. Et quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, et latus BD lateri 6. primi.
DC eſt ęquale. Sed BD ponitur æqualis ipſi CA. ergo et AC eſt æqualis CD. qua-
re et angulus CDA æqualis eſt angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipſius angu
li DAC dupli ſunt. eſt autẽ et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis. ergo et B
CD duplus eſt ipſius DAC. Sed BCD eſt æqualis vtrique ipſorũ BDA DBA. qua-
re et vterque BDA DBA ipſius DAB eſt duplus. Aequicrure igitur triãgulum con
ſtitutum eſt ADB, habens vtrumque eorum angulorum, qui ſunt ad baſim, duplum
reliqui. quod facere oportebat.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

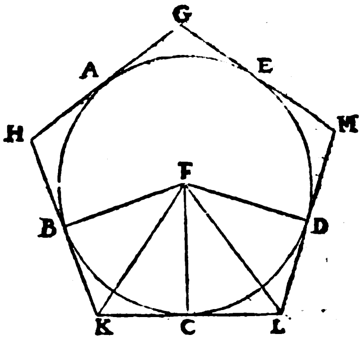




Sit datus circulus ABCDE. opor
tet in ABCDE circulo pentagonũ
æquilaterum, et ęquiãgulum deſcri Ex antecedente.
bere. Exponatur triangulum æqui-
crure FGH, habens vtrumque eorũ
qui ſunt ad G H angulorum duplũ
anguli qui eſt ad F: et deſcribatur 2. huius.
in circulo ABCDE triangulo FGH
æquiangulum triangulum ACD,
ita vt angulo quidem, qui eſt ad F
æqualis ſit angulus CAD: vtrique
vero ipſorum, qui ad GH ſit æqua-
lis vterque ACD CDA. et vterque igitur ACD CDA anguli CAD eſt duplus.
Secetur vterque ipſorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC 9. primi.
CD DE EA iũgãtur. Quoniã igitur vterque ipſorũ ACD CDA duplus eſt ipſius
CAD, et ſecti ſunt bifaria rectis lineis CE DB; quinque anguli DAC ACE ECD
CDB BDA inter ſe ſunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferen- 26. tertij.
tiis inſiſtunt. quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA ęquales ſunt in
ter ſe. Sed ęquales circũferẽtias æquales rectę lineę ſubtendunt. ergo et quinque 29. tertij.
rectę lineę AB BC CD DE EA inter ſe æquales ſunt. æquilaterum igitur eſt AB
CDE pentagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB
æqualis eſt circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE
circumferentia toti circumferentię EDCB eſt æqualis, et in circumferentia quidẽ
ABCD inſiſtit angulus AED, in circũferẽtia vero EDCB inſiſtit BAE. Ergo et BA
E angulus eſt ęqualis angulo AED. Eadem ratione, et vnuſquiſque angulorum AB
C BCD CDE vnicuique ipſorum BAE AED eſt æqualis. ęquiangulum igitur eſt
ABCDE pentagonũ: oſtenſum autem eſt et ęquilaterũ eſſe. Quare in dato circulo
pentagonum ęquilaterum, et æquiangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XII.

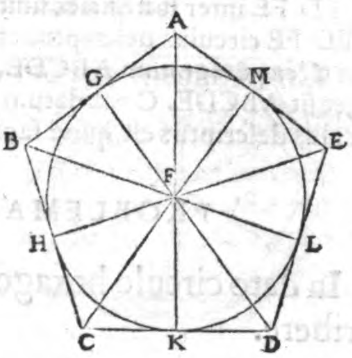
Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et ęquiangulum deſcribere.



Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et
Ex antecedente. æquiangulum deſcribere. intelligantur pentagoni in circulo deſcripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circũferentiæ AB BC CD DE
17.tertij. EA ſint ęquales; et per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG. et ſumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, et à centro F ad contactum, qui eſt ad C du-
18.tertij. cta eſt FC: erit FC ad ipſam KL perpendicularis. rectus igitur eſt vterque angulorum qui ſunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti ſunt. et quoniam rectus angnlus eſt FCK, quadratum quod fit ex FK ęquale eſt quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem cauſſam quadratis ex FB, BK ęquale eſt quod ex FK quadratũ. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia ſunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB eſt ęquale. Ergo reliquũ quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur eſt BK ipſi CK. Et quoniã FB eſt æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK ęquales ſunt: et
8.primi. baſis BK eſt ęqualis baſi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipſius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL eſt duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumfe-
27.tertij. rentię CD eſt æqualis, et angulus BFC angulo CFD ęqualis erit. atque eſt angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipſius LFC. æqualis igitur eſt angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula sũt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, et vnum latus vni lateri æqua-
26.primi. le, quod ipſis commune eſt FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC eſt æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniã KC eſt æqualis CL, erit KL ipſius KC dupla. Eadem ratione et HK ipſius BK dupla oſtendetur. Rurſus quoniam BK oſtenſa eſt ęqualis ipſi KC: atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla: erit HK ipſi KL æqualis. Similiter et vnaquęque ipſarum GH HM ML oſtendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico etiam ęquiangulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt æqualis angulo FLC: et oſtenſus eſt ipſius quidem FKC duplus angulus HKL; ipſius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione oſtendetur et vnuſquiſque ipſorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter ſe ęquales ſunt. ergo ęquiangulum eſt GHKLM pentagonũ. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe: et deſcriptum eſt circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et ęquiangulum ſit, circulum deſcribere.



Sit datum pentagonum ęquilaterum, et ęquiangulum ABCDE. oportet in A B C D E pentagono circulum deſcribere. 9.primi. ſecetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conueniunt inter ſe CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC eſt ęqualis CD, communis autem CF, duæ B C C F duabus D C CF ęquales ſunt, et angulus BCF eſt æqualis angulo DCF. baſis igitur BF baſi FD eſt æqua- 4.primi. lis, et BFC triangulum ęquale triāgulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF eſt duplus, et angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC ęqualis. angulus igitur ABC bifariā ſectus eſt recta linea BF. Similiter demonſtrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam ſectum eſſe. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF eſt ęqualis angulo KCF; eſt autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, commune ſcilicet vtriſque FC, quod vni ęqualium angulorum ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia 26.primi. habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK ęqualis. Similiter oſtēdetur et vnaquæque ipſarum FL F M FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineę FG FH FK FL FM inter ſe æquales ſunt. quare centro F, interuallo autem vna ipſarum FG FH FK FL FM circulus deſcriptus, etiam per reliqua tranſibit pūcta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cōtinget, propterea quòd anguli ad G H K L M recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod abſurdū eſſe oſtenſum eſt. non igitur centro F, et interuallo vno ipſorum punctorum G H 16.tertij. KLM circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DE EA ſecabit. quare ipſas cōtingat neceſſe eſt. deſcribatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod eſt ęquilaterum, et ęquiangulum, circulus deſcriptus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA. XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

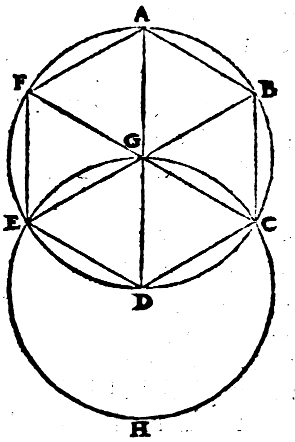
Circa datum pentagonum, quod ęquilaterum, et ęquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum deſcribere, ſecetur vterque ipſorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonſtrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam ſectum eſſe. Et quoniam angulus BCD angulo CDE eſt ęqualis: atque eſt anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD eſt ęquale. Similiter demōſtrabitur et vna quæque ipſarum FB FA FE ęqualis vnicuique FC FD. quinque igitur rectę lineæ FA FB FC FD

FC FD FE inter ſe æquales ſunt.ergo centro F, et interuallo vna ipſarũ FA FB FC FD FE circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pētagonum ABCDE,quod æquilaterum eſt, et æquiangulum.deſcribatur,et ſit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et ęquiangulum circulus deſcriptus eſt.quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum deſcribere.



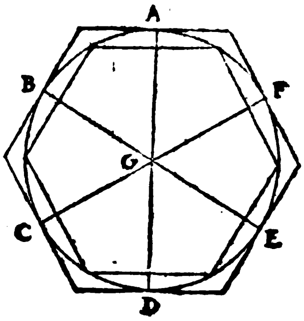
Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, et æquiangulum deſcribere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD,ſumaturq; centrum circuli G; et centro quidem D, interuallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, iunctæq; EG CG ad puncta B F producātur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. Rurſus quoniam D cētrum eſt circuli EGCH, erit DE ęqualis DG. Sed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD
5.primi. triāgulum,ideoq; tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales ſunt,quoniam ęquicruriū triangulorum anguli ad baſim inter ſe ſunt æquales: et
32.primi. ſunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. Similiter oſtendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et
13.primi. quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt ęquales. ergo et qui ipſis ad
26.tertij. verticem ſunt anguli BGA AGF FGE æquales ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed
29.tertij. æquales anguli ęqualibus circumferentiis inſiſtunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt ęquales. æquales autem circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo et ſex rectæ lineę inter ſe æquales ſint neceſſe eſt, ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF circumferentię ED eſt ęqualis; communis apponatur circumferentia ABCD. tota igitur FABCD circumferentia ęqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit; circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt æqualis. Similiter oſtēdetur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales vtrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonū. oſtenſum autem eſt et æquilaterum eſſe,et deſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et ęquiangulum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus ei, quę eſt ex centro circuli æquale eſſe. Et ſi per puncta ABCDEF contingentes circulum

ducamus

ducamus,circa circulũ deſcribetur hexagonum ęquilaterum et ęquiangulum cõſequenter ijs, quæ in pentagono dicta ſunt, & prætereaſimiliter in dato hexagono circulum deſcribemus, et circumſcribemus.quod facere oportebat.

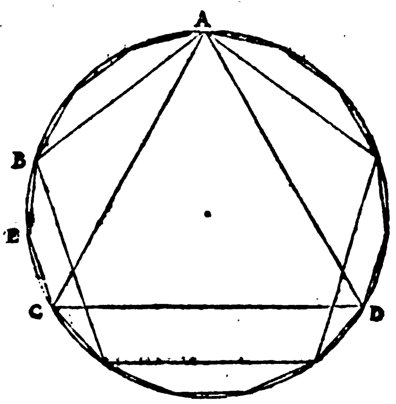


PROBLEMA XVI.

PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et ęquiangulum deſcribere.Deſcribatur in circulo ABCD trianguli quidẽ æquilateri in ipſo deſcripti latus AC;pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarũ igitur partium eſt ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia exiſtens circuli,erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta eſt circuli; erit triũ.ergo reliqua BC eſt duarum.ſecetur BC bifariã in puncto E.quare vtraque ipſarum BE EC circumferentiarum,quintadecima pars eſt ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipſis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipſo quindecagonum æquilaterum, et ęquiangulum deſcriptum erit.quod facere oportebat.



Similiter autem iis,quæ dicta ſunt in pentagono,ſi per circuli diuiſiones contingentes circulum ducamus,circa ipſum deſcribetur quindecagonum ęquilaterum, et ęquiangulum. Et inſuper in dato quindecagono æquilatero, et ęquiangulo circulum deſcribemus, et circumſcribemus.

QVARTI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

In quinto libro propoſitum eſt de analogijs tractare; hic enim liber communis est geometriæ, arithmeticæ, muſicæ, & omni ſimpliciter mathematicæ diſciplinæ: nam quæ in ipſo demonſtrantur non ſolum geometricis theorematibus congruunt, ſed & omnibus, quæ ad mathematicas, vt dictum eſt, diſciplinas referuntur. propoſitum igitur huiuſmodi est. librum autem dicunt eſſe Eudoxi cuiuſdam, qui Platonis magiſter fuit. Itaque quoniam propoſitum eſt de analogijs tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; neceſſe eſt prius cognoſcere, quænam ſint hæ proportiones: ſimplicium enim cognitio cognitionem compoſitorum præcedere debet. ſi igitur quædam inter ſe comparẽtur, verbi gratia duæ magnitudines, ipſæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram tranſitus, diſtantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta ſimilitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim vt magnitudo comparatur, ſed vt proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; vt ſi ſint duæ rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine ſunt dupla potentia quadrupla ſunt. quadratorum igitur proportio cum ſit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio; quæ quidem ſub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æſtimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æſtimatione nulla ſpecies eſt, quæ ad præſentem contemplationem vtilis ſit; eius vero, quæ in quantitate ſpecies ſunt quinque, alia enim est multiplex vt ſex trium, alia ſuperparticularis vt quattuor trium, & alia ſuperpartiens, vt quinque trium, & hæ quidem ſimplices ſunt, quarum adhuc ſimplicior eſt multiplex, aliæ uero duæ ex harum compoſitione naſcuntur, videlicet multiplex ſuperparticularis, vt eſt ſeptem triũ, & multiplex ſuperpartiens, vt octo trium. ſub proportionales vero ſunt minores maiorum, vt ſub multiplex, ſubparticularis, & ſimiliter reliqua. ſciendum autem eſt hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars ſimpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. ſecunda vero vniuerſe de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omni re, vt dictum eſt, ſimplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aũt liber ipſe, ita & diffinitiones diuiduntur; primę enim ſunt de partibus, et multiplicibus, deinde ſequuntur vniuerſaliores de oĩbus proportionibus.

Analogia.

Simplicium cognitio cognitionẽ cõpoſitorũ præcedere debet

Termini.

Comparatio eſt habitudo, quã antiqui proportionem appellarunt

Analogia.

Proportio proportionis

Proportionis in quantitate ſpecies sũt quinque.

Quintus liber in duas partes diuiditur.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVINTVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, eſt minor eo, quod eſt eiuſdē ſpeciei, vt 3 eſt pars 5. apud geometram vero eſt, quæ metitur maius, quando reliquum æquale ſit ei, quod metitur: quando autem non ſit æquale, non eſt pars, vt 3. 5; reliquuntur enim 2, quæ non ſunt æqualia 3. quare 3 non ſunt pars 5, ſed partes, videlicet tres quintę $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram ſumitur pro ea, quæ ſimpliciter minor eſt maiore eiuſdem ſpeciei, vt enim dicitur, omne totum eſt maius ſua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipſum multiplex, quae alio nomine ſub multiplex, & a nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla eſt neceſſitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex eſt maior minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem *dicit, vt ſignificet habitudinem* duarum magnitudinum] *vt ſeparet ab alijs ſpeciebus quantitatis.* eiuſdem generis] *vt nequis lineam cum ſuperficie comparet. hæc enim inter ſe proportionem nullam habent.* quatenus ad quantitatem pertinet] *vt ſeparet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua eſt terminus continui nõ infiniti, & quantitas diſcreta eſt diſcreti non infiniti. ſed diſcretum nõ eſt magnitudo, multitudo enim eſt.* quædã habitudo] *quòd quinque ſint habitudinum ſpecies, vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] *videtur hoc potius dictum ſit, vt intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aeſtimatione conſiſtit.*

IIII.

Portionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare poſſunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem eſt quædam proportio, quæ numero exprimi non poteſt; ſunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoſcitur exceſſus, quo alterũ ſuperat alterũ; quantitas aũt exceſſus cognoſci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe exceſſus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc eſt rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum appoſuit, quatenus ad quãtitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem diſcretam, & rationalem. vniuerſalius igitur diffiniens, quæ nam ſint proportionem habentia dixit,* quæ multiplicatę ſe inuicem ſuperare poſſunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in exceſſu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & poteſt latus multiplicatum aliquando diametrum ſuperare.*

F. C. COMMENTARIVS.

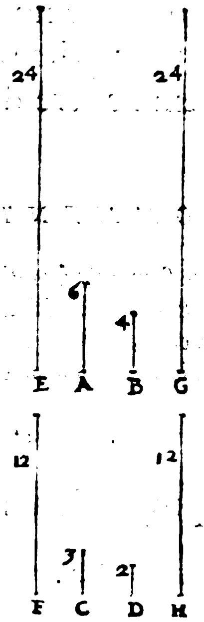
Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitae magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abeſt, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne aequare quidem poſſit vnquam.

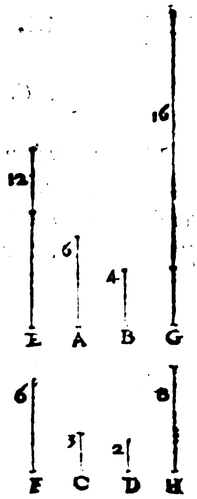
V.

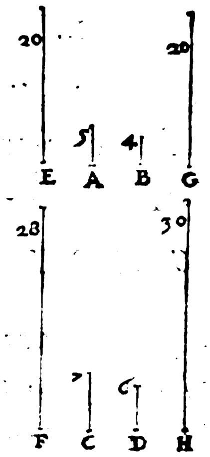
In eadem proportione magnitudines eſſe dicuntur prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

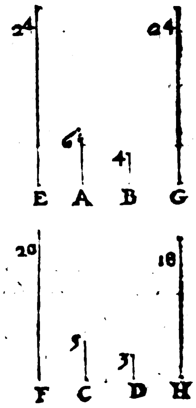
tiplices, ſecundæ, et quartę æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà ſuperant, vel vnà ęquales ſunt, vel vnà deficiunt inter ſe comparatæ.

F. C. COMMENTARIVS.







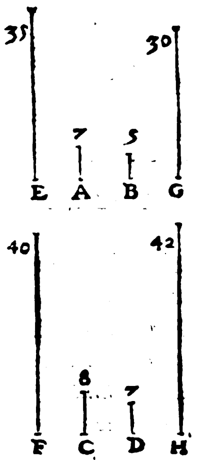


Sit prima magnitudo A, ſecunda B, tertia C, & quarta D: ſumanturq́; primae, ac tertiae, videlicet ipſarum A C aeque multiplices E F, vt ſit E aeque multiplex A, atque F ipſius C. rurſus ſumantur ipſarum B D, ſecundae ſcilicet, & quartae aeque multiplices GH; & ſiquidem maiori exiſtente E quàm G, etiam F ſit maior quàm H, vel ſi E aequali exiſtente ipſi G, ſit F aequalis H. vel ſi minori exiſtente, ſit minor iuxta quamuis multiplicationẽ, tunc dicetur A ad B eandem habere proportionem, quam C ad D. exceſſum autem, ac defectum ſimpliciter intelligere oportet, non ſecundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod eſt abſurdum. Propoſitis igitur quattuor magnitudinibus commenſurabilibus, ſi velimus ſtatim dignoſcere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primae multiplici ſecundae fiat aequalis; & ſi quidem multiplex tertiae ſit aequalis multiplici quartae, tunc prima ad ſecundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiae ſit minor multiplici quartę, prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. quòd ſi multiplex tertiae ſit maior multiplici quartae, habebit prima ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

V I.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

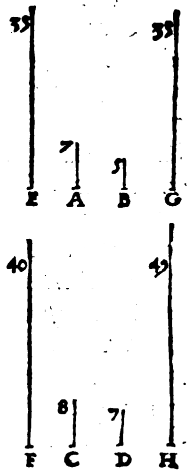


Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperauerit multiplicem ſecundę, multiplex vero tertiæ non ſuperauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quae ſupra: & ſumptis ipſarum AC aeque multiplicibus EF; itemq́; ipſarum BD aeque multiplicibus GH, ſi quidem E ſuperet G, F vero non ſuperet H, vel ſi E ſit aequalis ipſi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionē habere dicitur, quàm C ad D.

VIII.



Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

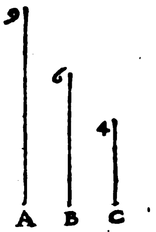
IX.

Analogia vero in tribus minimis terminis conſiſtit.

X.

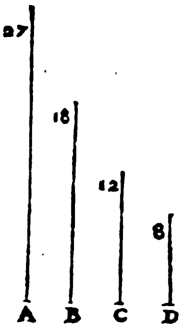
Quando tres magnitudines proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundam.

SCHOLIVM.



Non dicit duas proportiones vnius duplas eſſe, quod etiam eſt verum; ſed proportionem, quæ ex duabus conſtat, eſſe duplam, vt 8.4.2, & rurſus 9 3 1. proportio igitur, quæ ex duabus conſtat dupla eſt. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla eſt, in triplis vero nonupla, & in quadruplis ſexdecupla. demonſtrabitur enim deinceps quæ longitudine ſunt dupla, potentia quadrupla eſſe: & quę longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla ſit, dupla eſt proportionis laterum, quę eſt dupla, etenim dupli duplus quadruplus eſt.

XI.



Quando autem quattuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps vna plus, quo ad analogia proceſſerit.

F. C. COMMENTARIVS.

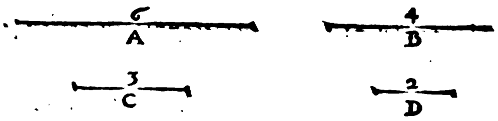
Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt neceſſario inæquales, & primum ipſorũ maiorem. nam ſi aequales ſint eadem eſt primi ad ſecundum, & ad tertium proportio. Si vero primus ſit minor, non poteſt primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad ſecundum, cum primi ad ſecundum maior ſit proportio, quàm ad tertium ex 8. *huius.*

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

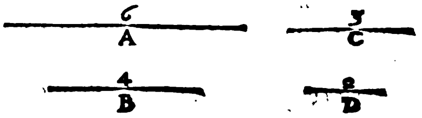
XIII.

Permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.



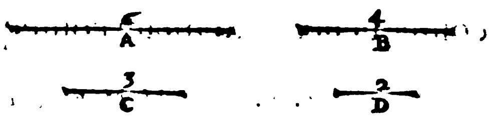
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita eſſe demonſtrabitur in 16 *propoſitione huius libri.*



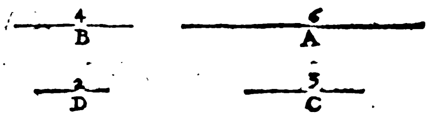
XIIII.

Conuerſa ratio eſt ſumptio conſequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad conſequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rurſus A ad B, vt C ad D. erit conuertendo B ad A, vt D ad C. quod demonſtratur in corollario quartae huius.



Compoſitio

XV.

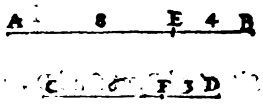
Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis vnà cum conſequente tamquàm vnius ad ipſam conſequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem appoſuerunt. neque enim compoſitio magnitudinum eadem eſt, quę compoſitio proportionum. hic autem antecedens vnà cum conſequente ſumptum totam magnitudinem efficit, quę ex magnitudinibus componitur: atque hęc eſt magnitudinum compoſitio. compoſitio enim proportionum aliam proportionẽ efficit, vt ipſe deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter ſe multiplicatę aliquam efficiunt proportionem. ipſe autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compoſitionem hanc συνθέντι, *hoc eſt componenti, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dicit, quàm componendo; ſimiliter autem & diuiſio, vna enim proportio diuiditur. at diuiſio de qua hoc loco ſermo fit, magnitudinum eſt, exceſſus namque antecedentium ab antecedentibus diſſecatur. ipſe vero etiam in hoc dicit* διελόντι *videlicet diuidenti, vel diuidendo. & ſimiliter quę hoc loco appellatur conuerſio rationis ipſe* ἀναστρέψαντι *dicit, conuertitur enim ad antecedentia.*

F. C. COMMENTARIVS.

Compoſitio rationis eſt proportio, quae oritur ex compoſitione terminorum ipſius proportionis, videlicet ex compoſitione antecedentis cum conſequente, cum totum conſequenti comparatur, quamquam improprie à iunioribus compoſitio proportionis, vel rationis appellata ſit; compoſitio enim proportionis longe alia eſt, vt in pręcedenti ſcholio adnotatur. ſit AE ad EB, vt CF ad FD. erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18 huius demonſtratur.

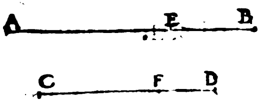


XVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

F. C. COMMENTARIVS.

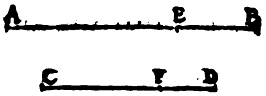
Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17 huius demonſtrabitur.



XVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

F. C. COMMENTARIVS.

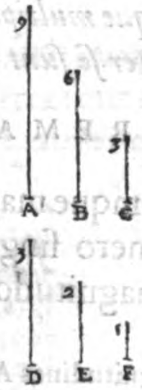


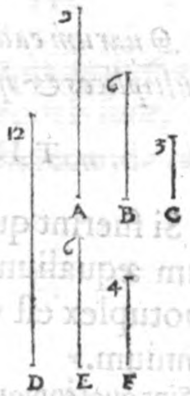
Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuerſionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF. hoc autem conſtat ex corollario 19 huius.

XVIII.

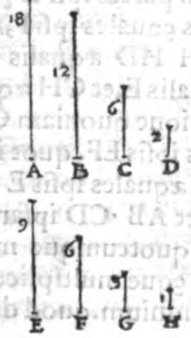
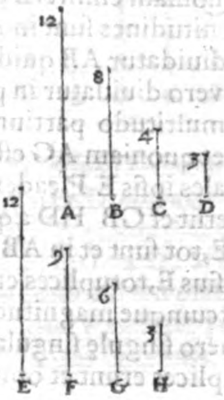
Aequa ratio, ſiue ex ęquali eſt, cum plures magnitudines extiterint, et alię ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, et in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in ſecũdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIVS.





Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. ſint tres magnitudines ABC, & aliae ipſis mumero aequales DEF, ſitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita D ad F. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. quod demonſtrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. ſint rurſus tres magnitudines ABC, itemq; aliae tres DEF, & ſit vt A ad B, ita E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. hoc autem in 23. huius oſtendetur. Idem ſequitur etiam ſi plures ſint, quàm tres magnitudines. ſint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipſis numero aequales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita ſit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, ſit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita ſit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. & ſimiliter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.



XIX.

Ordinata analogia eſt quãdo fuerit vt antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; vt autem conſequens ad aliã quãpiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus

gnitudinibus, & alij ipſis numero æqualibus; fuerit vt in primis magnitudinibus antecędens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem. vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam; ita in ſecundis alia quępiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla ſuperius poſita ſunt, ſed preter diffinitiones ſunt etiam communes quędam notiones, quae in hoc libro ſumuntur nempe hae.

I.

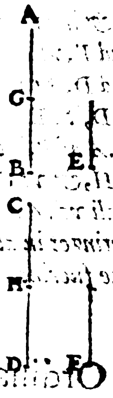
Eiuſdem ſiue ęqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.

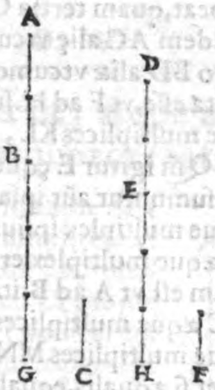


Sint quotcumque magnitudines AB CD quotcumque magnitudinum EF æqualium numero, ſingulæ ſingularum ęque multiplices. Dico quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices eſſe & AB CD ipſarum E F. Quoniam enim AB ęque multiplex eſt ipſius E, et CD ipſius F, quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi E, tot erunt et in CD æquales ipſi F. diuidatur AB quidem in partes ipſi E ęquales, quæ ſint AG GB: CD vero diuidatur in partes ęquales ipſi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipſarum AG GB. et quoniam AG eſt æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipſis E F. eadem ratione quoniam GB eſt æqualis E, et HD ipſi F, erũt et GB HD æquales ipſis EF. quot igitur ſunt in AB æquales ipſi E, tot ſunt et in AB CD æquales ipſis E F. ergo quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices erunt et AB CD ipſarum E F; ſi igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulę ſingularum ęque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius; totuplices erunt et omnes omnium. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta ſecundæ ęque multiplex, ac ſexta quartæ: erit etiam compoſita prima, et quinta ſecundę æque multiplex, ac tertia, et ſexta quartæ.

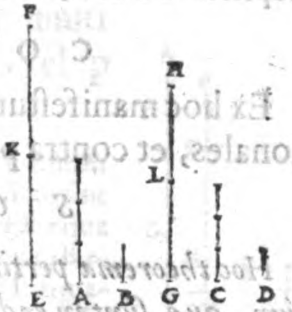
Prima enim AB ſecundæ C æque multiplex ſit, ac tertia DE quartæ F. ſit autem et quinta BG ſecundæ C ęque multiplex, ac ſex ta EH quartę F. Dico et compoſitam primam, et quintam AG ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam et ſextã DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex eſt C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales C, tot erunt et in DE ęquales F. eadem ratione et quot ſunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur ſunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex eſt AG ipſius C, totuplex eſt et DH ipſius F. et compoſita igitur prima et quinta AG ſecundæ C æque multiplex erit, ac tertia et ſexta DH quartæ F: quare ſi prima ſecundæ: æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem et quinta ſecundę æque multiplex, ac ſexta quartę: erit compoſita quoque prima et quinta æque multiplex ſecundæ, ac tertia, et ſexta quartę. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima ſecundę ęque multiplex fuerit, ac tertia quartę; ſumantur aũt ęque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex ęquali ſumptarum vtraque vtriuſque ęque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A ſecundæ B æque multiplex ſit, ac tertia C quartę D: et ſumantur ipſarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniã enim EF ęque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipſi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines ęquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipſarum EK KF multitudo ęqualis multitudini ipſarum GL LH. et quoniam æque multiplex eſt A ipſius B, ac C ipſius D; æqualis autem EK ipſi A, et GL ipſi C; erit EK æque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione ęque multiplex erit KF ipſius B, et LH ipſius D. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL quartæ D; eſt autem et quinta KF ſecundæ B ęque multiplex, ac ſexta LH quartę D: erit et compoſita prima et quinta EF ſecundæ B ęque multiplex, ac tertia, et ſexta GH quartæ D. Si igitur prima ſecũdæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; ſumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali ſumptarum vtraque vtriuſque ęque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod oſtendiſſe oportuit.



Ex antecedente.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si prima ad ſecundã eandem hẽt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primę, & tertię ad ęque multiplices ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatę.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: et ſumantur ipſarũ quidem AC aliç vtcumque ęque multiplices E F; ipſarũ vero BD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Dico E ad G ita eſſe, vt F ad H. ſumantur enim rurſus ipſarum EF æque multiplices KL, et ipſarum GH æque multiplices M N. Qm̃ igitur E ęque multiplex eſt ipſius A, atq; F ipſius C; ſumuntur aũt ipſarum EF ęque multiplices KL: erit K æque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. Eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. et quoniam eſt vt A ad B. ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarũ AC æque multiplices KL; et ipſarum BD aliç vtcumque ęque multiplices MN: ſi K ſuperat M, ſuperabit et L ipſam N; et ſi æqualis, ęqualis; et ſi minor, minor. ſuntq́; KL quidem ipſarum EF æque multiplices; MN vero ipſarum GH aliæ vtcumque ęque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et æque multiplices primæ ac tertiæ ad ęque multiplices ſecundę, ac quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter ſe comparatæ. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Per conuerſam quintæ diffinitionis.

5. diffinit.

Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, et L ipſam N ſuperare; et ſi ęqualis, ęqualem eſſe, et ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, et N ſuperare ipſam L; et ſi ęqualis, ęqualem eſſe; et ſi minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita eſſe H ad F.

5. diffinit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi quattuor magnitudines ſint proportionales, et contra proportionales eſſe.

SCHOLIVM.

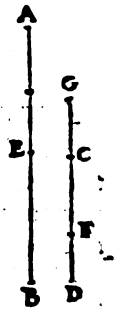
Hoc theorema pertinet ad demonſtrationem diffinitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, vt eſt quando æque multiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque multiplices ſecundæ, & quartæ, hoc eſt conſequentium, vel vnà ſuperant, vel vnà æquales ſunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonſtrat & ipſas eandem inter ſe proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione eſſe, quorum multiplicia ſunt in eadem proportione, quando nos idipſum quæreremus, quænam eſſent in eadem proportione. cum igitur dixiſſet in principio eas ſimul ſuperare, vel ſimul æquales eſſe, vel ſimul deficere; hic oſtendit & in eadem eſſe proportione, ſi inter ſe comparentur, vt appareat diffinitio earum, quæ ſunt in eadẽ proportione, quando ſcilicet æque multiplices primæ, & tertię ad ſecũdæ, & quartę æque multiplices eandẽ proportionem habeant. oſtendit aũt ipſas in eadẽ proportione per hoc, & per cõuerſionẽ;

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

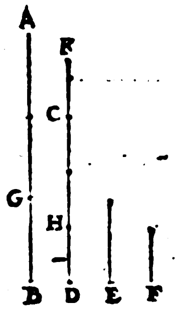
Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atque ablata ablatę; et reliqua reliquę ęque multiplex erit, atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD ęque multiplex ſit, atque abla
ta AE ablatę CF. Dico et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem eſ
ſe, atque totam AB totius CD. quotuplex enim eſt AE ipſius CF, totu-
plex fiat et EB ipſius CG. et quoniam AE æque multiplex eſt CF, atque
EB ipſius CG; erit AE ęque multiplex CF, et AB ipſius GF. ponitur au 1.huius.
tem ęque multiplex AE ipſius CF, et AB ipſius CD. æque multiplex igi
tur eſt AB vtriuſque GF CD; ac propterea CF ipſi CD eſt æqualis. com- 3.Com. not.
munis auferatur CF. reliqua igitur GC ęqualis eſt reliquę D F. Itaque
quoniam AE æque multiplex eſt CF, et EB ipſius CG, eſtq; CG ęqualis
DF; erit AE æque multiplex CF, et EB ipſius FD. æque multiplex autē
ponitur AE ipſius C F, et A B ipſius C D. ergo E B eſt ęque multiplex
FD, et A B ipſius C D. et reliqua igitur E B reliquę F D æque multiplex
eſt, atq; tota A B totius CD. quare ſi magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit,
atque ablata ablatæ; et reliqua reliquę ęque erit multiplex, atque tota totius. quod
oportebat demonſtrare.

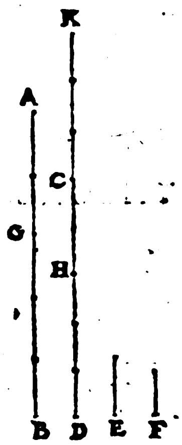


THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, et ablatæ quędam ſint earumdem æque multiplices; erunt et reliquæ uel eiſdem æquales, vel ipſarum ęque multiplices.



Duæ enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum
EF ęque multiplices ſint, et ablatæ A G C H earumdem ſint
æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipſis EF æqua
les eſſe, vel ipſarum æque multiplices. ſit enim primum GB ę-
qualis E. Dico et HD ipſi F eſſe æqualem. ponatur ipſi F æqua-
lis CK. et quoniam AG æque multiplex eſt E, et CH ipſius F;
eſtq; GB quidem ęqualis E; CK vero æqualis F: erit AB ęque 1.huius.
multiplex E, et KH ipſius F. ęque autem multiplex ponitur A
B ipſius E, et CD ipſius F. ergo KH ęque multiplex eſt F, et C
D ipſius F. quoniam igitur vtraque ipſarum KH CD eſt ęque
multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur C H. er 1.Com. not.
go reliqua KC reliquę HD eſt ęqualis. Sed KC eſt ęqualis F. et
HD igitur ipſi F eſt æqualis; ideoq; GB ipſi E, et HD ipſi F æ-
quais erit. Similiter demonſtrabimus ſi G B multiplex fuerit
ipſius E, et H D ipſius F ęque multiplicem eſſe. Si igitur duæ
magnitudines duarum magnitudinum æquę multiplices ſint,
et ablatę quædam ſint earumdem æque multiplices, erunt et re
liquæ vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices.
quod demonſtrare oportebat.



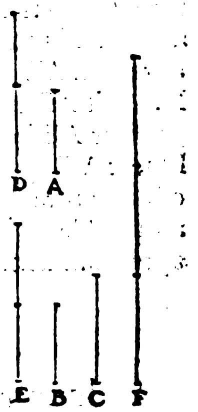
SCHOLIVM.

Non propoſitum eſt oſtendere ſi à multiplici multiplex auferatur reli-

quum, vel equale eſſe, vel multiplex; hoc enim manifeſtum eſt: ſed duabus magnitudinibus ad duas magnitudines ita ſe habentibus, vt dictum eſt, ſi reliqua prioris ſit multiplex, & reliquam alterius multiplicem eſſe; & ſi equalis ſit, eſſe equalem, veluti ſi quadrupla exiſtente tripla auferatur, reliqua equalis erit, & in altera eodem modo.

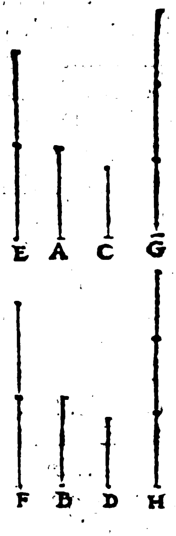
THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Aequales ad eādē, eādē habēt proportionē, & eadē ad æquales.



Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramque ipſarum A B ad C eandem proportionem habere: et C ad vtramque A B ſimiliter eandem habere proportionem. ſumantur enim ipſarum A B æque multiplices DE, et ipſius C alia vtcumque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex eſt D ipſius A, et E ipſius B, eſtq́; A ipſi B æqua-
1.Com.not. lis; erit et D æqualis E; alia autem vtcumque eſt F. ergo ſi D ſuperat F, et E ipſam F ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. et ſunt DE quidem ipſarum A B æqui multiplices: F ve-
5.diffi. ro alia vtcumque multiplex ipſius C. erit igitur vt A ad C, ita B ad C. dico inſuper C ad vtramque ipſarum A B eandem habere proportionem. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus D ipſi E æqualem eſſe, aliam vero quandam F. ſi igitur F ſuperat D, ipſam quoque E ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. atque eſt F quidē ipſius C multiplex; DE vero aliȩ vtcum-
5.diffi. que ȩque multiplices ipſarum A B. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. ȩquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem; et eadem ad æquales. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



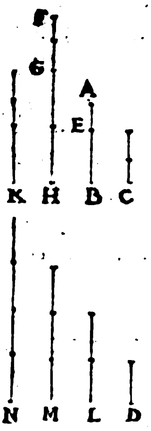
Eodem modo demonſtrabimus, et æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines aequales A B; ſintq́; aliae magnitudines inter ſe aequales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. ſumantur ipſarum A B aeque multiplices E F; & ipſarum C D aliae vtcumque aeque multiplices GH. Itaq; quoniam aeque multiplex eſt E ipſius A,
1.Com.not. *& F ipſius B; eſt autem A aequalis B: erit & E ipſi F aequalis. rurſus quoniam aeque multiplex eſt G ipſius C, & H ipſius D; eſtq́; C ipſi D aequalis: & G ipſi H aequalis erit. Si igitur E ſuperat G, & F ipſam H ſuperabit; et*
5.diffi. *ſi aequalis, aequalis; & ſi minor, minor. ergo A ad C eandem proportionē habet, quam B ad D. quod oportebat demonſtrare.*

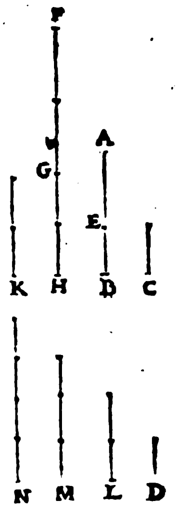
THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorē maiorem proportionē habet, quàm ad maiorē.

Sint inȩquales magnitudines AB C: et ſit AB maior; alia vero vtcumque D. dico AB ad D maiorē habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere, quàm ad AB. quoniam enim AB maior eſt, quàm C, ponatur ipſi C ȩqualis BE.
4.diffin. Itaque minor ipſarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit primum



mum A E minor, quàm E B: et multiplicetur A E, quo ad fiat maior, quàm D: ſitq́; ipſius multiplex FG, quæ ipſa D ſit maior: quotuplex autem eſt FG ipſius AE, totuplex fiat et GH ipſius EB, et K ipſius C. ſumaturq́; ipſius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ ſumitur, multiplex fiat ipſius D, et primo maior, quàm K. ſumatur, ſitq́; N ipſius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor eſt, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum ęque multiplex ſit FG ipſius AE, et GH ipſius EB; erit et FG ęque multiplex AE, et FH 1.huius. ipſius AB. æque autem multiplex eſt FG ipſius AE, et K ipſius C. ergo FH æque multiplex eſt AB, et K ipſius C; ac propterea FH K 1.huius. ipſarũ AB C ęque multiplices erũt. rurſus quoniã GH æque multiplex eſt EB, et K ipſius C; eſtq́; EB æqualis C: erit et GH ipſi K 1.com.not. æqualis. Sed K non eſt minor, quàm M. non igitur GH minor eſt, quàm M. maior autem F G quàm D. ergo tota F H vtriſque DM maior erit. Sed vtræque DM ſunt ęquales N; eſt enim M tripla ipſius D, et vtręque M D ipſius D quadruplæ. eſt autem et N quadrupla D. vtręque igitur M D ipſi N ęquales ſunt. ſed FH maior eſt, quàm MD. quare FH ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat. et ſunt FH K æque multiplices ipſarum AB C: et N ipſius D alia vtcũque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm 7.diffin. C ad D. * dico præterea et D ad C maiorem habere proportionẽ, quàm D ad AB. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare: atque eſt N multiplex ipſius D; et FH K aliæ vtcumque ipſarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionẽ habet, quàm D ad AB. Sed ſit AE maior, quàm EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et ſit GH multiplex quidẽ ipſius EB, maior vero, quã D. et quotuplex eſt GH ipſius EB, totuplex fiat et FG ipſius AE, et K ipſius C. ſimili rõne oſtendemus FH K ipſarũ AB C æq; multiplices eſſe. ſumatur deinde N multiplex D, primo aũt maior, quàm FG. ergo rurſus FG nõ eſt minor, quàm M; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH ſuperat DM, hoc eſt N; et K ipſam N non ſuperat: quoniam FG maior exiſtens, quàm GH, hoc eſt quàm K, non ſuperat N. et ſimiliter vt in iis, quæ ſuperius dicta ſũt, demõſtrationẽ abſoluemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionẽ, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ. quod oſtẽdere oportebat.



SCHOLIVM.

* Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D] *quattuor ſunt magnitudines, prima quidem AB, ſecunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim ſumitur D, & vt ſecunda & vt quarta. atque eſt primae quidem AB multiplex FH: ſecundae vero D multiplex N, & tertiae C multiplex K. eſt igitur FH maior, quàm N; quae quidem N multiplex eſt ſecundae D: K vero multiplex tertiae C, minor eſt, quàm N, quae eſt multiplex quartae D. Itaque quoniã multiplex primae maior eſt multiplici ſecundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quae dicit, quando aeque multiplicium multiplex quidem primae ſuperauerit multiplicem ſecundae, multiplex autem tertiae non ſuperauerit multiplicem quartae, tunc prima ad ſecundam maiorem proportionem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ habent, inter ſe ęquales ſunt; et ad quas eadẽ, eãdẽ hẽt proportionẽ, ipſæ inter ſe ſunt æquales.

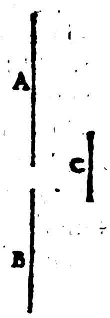
Habeat

Habeat enim vtraque ipſatum A B ad C eandem proportionē. Ex anteceдente. Dico A ipſi B ęqualem eſſe. nam ſi non eſſet ęqualis, non haberet vtraque ipſarum A B ad C eādem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad vtramque ipſarum AB eandem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita Ex antecedente. ſit, non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: et ad quas eadem eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eādē ꝑportionē habētiū quę maiorē ꝑportionē hēt, illa maior eſt; ad quā vero eadē maiorē habet proportionem, illa minor eſt.

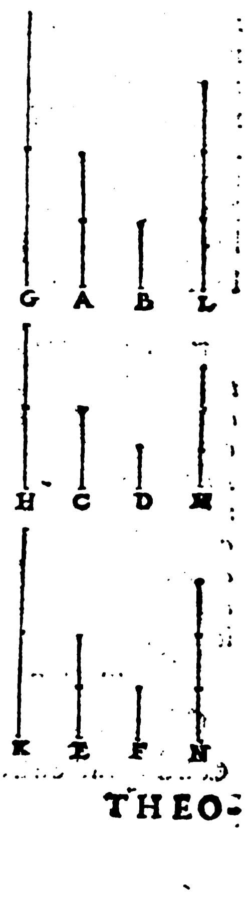
Habeat enim A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C. Dico A, quàm B maiorem eſſe. ſi enim non eſt maior, vel æqualis eſt, vel mi- 7.huius. nor. ęqualis autem non eſt A ipſi B, vtraque enim ipſarum AB ad C eādem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipſi 8.huius. B eſt ęqualis. Sed neque minor eſt A quàm B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quàm B. atqui non habet minorem. non igitur A minor eſt, quàm B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualē. ergo A quàm B maior erit. Habeat rurſus C ad B maiorem proportionem, quàm C ad A. Dico B minorem eſſe, quàm A. ſi enim non eſt minor, vel æqualis eſt, 7.huius. vel maior. ęqualis vtique non eſt B ipſi A; etenim C ad vtramque ipſarū A B eandē proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipſi B 8.huius. non eſt ęqualis. Sed neque maior eſt B, quàm A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quàm A eſt maior, Oſtēſum aūt eſt neque ęqualę eſſe. ergo B minor erit, quàm A. Ad eandem igitur proportionē habētiū quæ maiorē proportionē hēt, illa maior eſt: et ad quam eadem maiorē habet proportionem, illa minor eſt. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eędem ſunt proportiones, et inter ſe eędem ſunt.

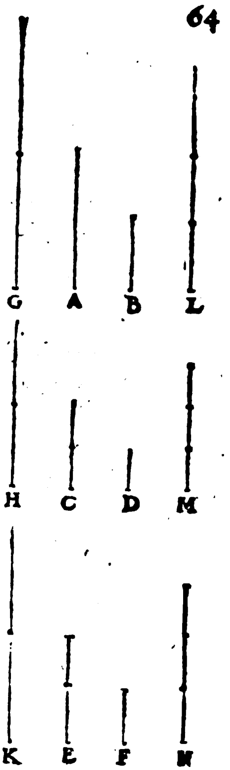
Sit enim vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipſarum vero B D F alię vtcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita C ad D, et ſumptæ ſunt ipſarum A C ęque multiplices G H, et ipſarum BD aliæ vtcumque æquæ Ex cōuerſa 5.diffi. multiplices LM; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit; et ſi æqualis, ęqualis; et ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt vt C ad D, ita E ad F, et ſumptę ſunt ipſarū CE ęque multiplices HK; ipſarū vero DF aliæ vtcūque ęque multiplices MN, ſi H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit; et ſi ęqualis, æqualis; et ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, et G ſuperabit L; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quare ſi G ſuperat L, et K ipsā N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. et ſunt GK quidem ipſarum AE æque multiplices; LN vero 5.diffin. ipſarum B F aliæ vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad B, ita erit E ad F. quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, et inter ſe eædem ſunt. quod oſtendiſſę oportuit.



THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedẽtiũ ad vnã cõſequẽtiũ, ita erũt antecedẽtes oẽs ad omnes cõſequẽtes.

Sint quotcũque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita ſit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe ACE ad BDF. ſumantur enim ipſarum A C E ęque multiplices GHK, et ipſarũ BDF aliæ vtcumque æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita eſt C ad D, et E ad F: et ſumptę ſunt ipſarum quidem ACE æque multiplices GHK, ipſarum vero BDF aliæ vtcumque ęque multiplices LMN; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit, et K ipſam N; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quare et ſi G ſuperat L, ſuperabunt et GHK ipſas LMN; et ſi ęqualis, ęquales; et ſi minor, minores. ſuntq; G, et GHK ipſarũ A, et ACE æque multiplices: quoniã ſi fuerint quotcũque magnitudines quotcũque magnitudinũ æqualiũ numero, ſingulæ ſingularũ æque multiplices; quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erũt et oẽs omniũ. eadẽ ratione et L et LMN ipſarum B, et BDF ſunt æque multiplices. eſt igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare ſi quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentiũ ad vnã conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes. quod demonſtrare oportebat.



Per conuerſam.5. diffi.

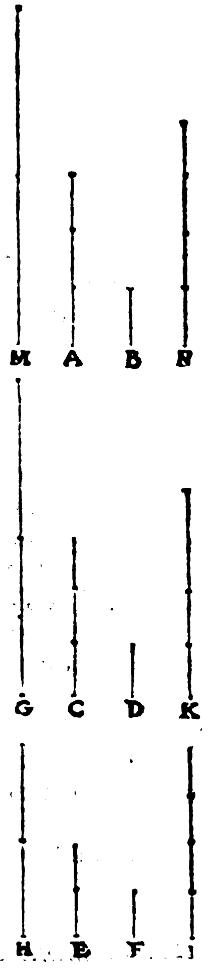
1.huius.

5.diffi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quàm quinta ad ſextã: et prima ad ſecundã maiorẽ habebit proportionẽ, quàm quinta ad ſextã.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quàm quinta E ad ſextã F. Dico et primam A ad ſecundam B maiorem proportionẽ habere, quàm quintam E ad ſextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quàm E ad F, ſunt quædã ipſarum CE æque multiplices, et ipſarum D F aliæ vtcumque æque multiplices: et multiplex quidem C ſuperat multiplicẽ D; multiplex vero E non ſuperat multiplicem F. Sumantur, et ſint ipſarum CE æquemultiplices GH, et ipſarum DF aliæ vtcumque æquemultiplices KL, ita vt G quidem ſuperet K; H vero ipſam L non ſuperet: et quotuplex eſt G ipſius C, totuplex ſit et M ipſius A; quotuplex autem K ipſius D, totuplex ſit et N ipſius B. et quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, et ſumptæ ſunt ipſarum AC æquemultiplices MG, et ipſarum BD aliæ vtcumque æque multiplices NK: ſi M ſuperat N, et G ipſam K ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Sed G ſuperat K. ergo & M ipſam N ſuperabit. H vero non



Per conuerſam.7. diffi.

Per cõuerſã 5.diffi.

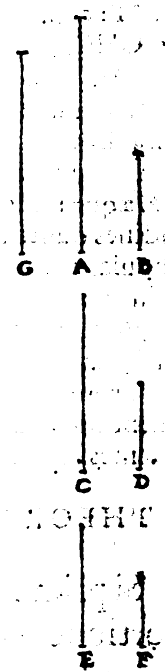
ſuperat

ſuperat L. ſuntq; MH ipſarum AE æque multiplices; et NL ipſarum B F aliæ vt cum que æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. ſi igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionē habeat, quàm quinta ad ſextam: et prima ad ſecundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad ſextam. quod oſtendere oportebat. 7. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonſtrabitur ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad ſextam: et primam ad ſecundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad ſextam.

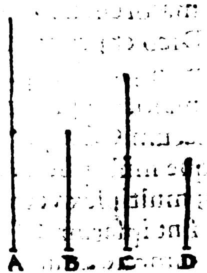
Quòd ſi prima ad ſecundam maiorem habeat proportionē, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad ſextam: et prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad ſextam.



Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem, quàm E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quàm A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D, & C ad D maiorem habet proportionem, quam E ad F: habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. & ſimiliter demonſtrabitur ſi prima ad ſecundam minorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartā habeat minorem, quàm quinta ad ſextam: & primam ad ſecundam minorem habere proportionem, quàm quintam ad ſextam. 8. huius.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior ſit, quàm tertia: & ſecunda quàm quarta maior erit; & ſi æqualis, æqualis; et minor, minor.



Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: maior autem ſit A quàm C. dico et B quàm D maiorem eſſe. quoniam enim A maior eſt quā C, et alia vtcūque magnitudo B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. ſed vt A ad B, ita C ad D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C ad B. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor eſt. quare D eſt minor, quàm B: ac propterea B quā D maior erit. Similiter demonſtrabimus et ſi A æqualis ſit ipſi C; et B ipſi D eſſe æqualem: et ſi A ſit minor, quàm C; et B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior ſit, quàm tertia: & ſecunda, quàm quarta maior erit; & ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quod demonſtrare oportebat. 8. huius. Ex antecedente. 10. huius.

SCHOLIVM.

Hoc lemma eſt ſextidecimi theorematis, quemadmodum vigeſi-

mum

mum eſt lemma vigeſimi ſecundi, & vigeſimum primum vigeſimi tertij.

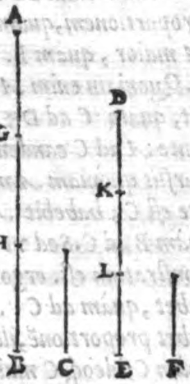
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonſtrabimus et ſi A æqualis ſit ipſi C, et B ipſi D eſſe ęqualem] A
Quoniam enim A eſt aequalis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem 11.huius.
habet proportionem ipſae aequales ſunt. ergo B ipſi C eſt aequalis. 9.huius.

Et ſi A ſit minor, quàm C, et B quàm D minorem eſſe,] *nam cum A minor ſit, quàm C;* 8.huius.
habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. ſed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecedente B
& C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quàm D minor erit. 10.huius.

TEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter ſe cōparatę eandem habent proportionem.



Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipſius F. Dico vt C ad F, ita eſſe AB ad DE; Quoniam enim ęque multiplex eſt AB ipſius C, et DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipſi C ęquales, quæ ſint AG GH HB. et DE diuidatur in magnitudines ęquales F, videlicet in DK KL LE. erit igitur ipſarum AG GH HB multitudo ęqualis multitudini DK KL LE. et quoniam æquales ſunt AG GH HB, ſuntq; DK KL LE inter ſe æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. eſt igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipſi C eſt æqualis, et DK ipſi F. ergo vt C ad F, ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter ſe comparatæ eandem habent proportionem. quod oſtendendum fuit.

* 11.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] *Ex ea, quam nos ad ſeptimam huius, addidimus.* *

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, ſitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales eſſe, videlicet vt A ad C, ita eſſe B ad D. ſumantur enim ipſarũ quidem AB æque multiplices EF; ipſarum vero CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. et quoniam æque multiplex eſt E ipſius A, et F ipſius B; partes autem eodem modo multiplicium inter ſe comparatæ eãdem habent proportionem: erit vt A ad B, ita E ad F: vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rurſus quoniam GH ſunt ipſarum CD æque multiplices; partes autem eodem modo multiplicium

Ex antecedente. 11.huius.

eandem proportionem habent inter ſe comparatæ, erit vt C ad D, ita G ad H. ſed
14.huius. vt C ad D, ita E ad F. ergo et vt E ad F, ita G ad H. Quòd ſi quattuor magnitudines
proportionales ſint, prima autem maior ſit, quàm tertia; et ſecunda quàm quarta
maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Si igitur E ſuperat G, et F ipſam
H ſuperabit, et ſi ęqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq́; EF ipſarũ AB æque mul-
5.diffi. tiplices, et CH ipſarũ CD alię vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad C, ita erit B
ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatę pro-
portionales erunt. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae demonſtrata ſunt, illud quoque demonſtrabitur.

Si prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; ſitq; prima maior, quàm ſecunda: et tertia, quàm quarta maior erit; et ſi æqualis, ęqualis; et ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem habeat proportionem, quàm tertia C ad quartam D: & ſit A maior, quàm B. Dico & C quàm D maiorem eſſe. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quam B ad D. Rurſus quoniam A maior eſt quam B, alia vero vtcũ-
8.huius. que eſt C; habebit A ad C maiorem proportionem,
quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita eſt B ad D, quod de-
monſtratum eſt. ergo B ad D maiorem proportionem
10.huius. habet, quàm ad C. Ad quam vero eadem maiorem
habet proportionẽ, illa minor eſt. quare D minor eſt,
quàm C; ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A aequa-
lis ipſi B. dico & C ipſi D aequalem eſſe. nam cum A
7.huius. & B ſint aequales. habebit A ad C proportionem eã-
dem, quam B ad C. vt autem A ad C, ita B ad D. ergo
B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad
9.huius. quas vero eadem proportionem eãdem habet, illae aequales ſunt. ergo C ipſi D eſt aequalis. Sit po-
ſtremo A minor, quàm B. Dico & C, quàm D minorem eſſe. quoniam enim A minor eſt quàm B,
8.huius. habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B
ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad C maiorem proportionem habebit, quàm ad
10.huius. D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor eſt. ergo C quàm D minor
erit. ſi igitur prima ad ſecundam eandem proportioaem habeat, quam tertia ad quartam: ſitq; pri-
ma maior, quàm ſecunda, & tertia, quàm quarta maior erit; & ſi aequalis, aequalis; & ſi
minor, minor.

ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: ſitq; A maior, quàm B. Dico & C, quã D maiorẽ eſſe. Quoniã enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D. ſed A maior eſt quàm B. ergo ex 14 huius & C, quàm D. maior erit. Eodem modo demonſtrabimus ſi A ſit aequalis B, & C ipſi D eſſe aequalem. & ſi A ſit minor, quàm. B, & C quàm D minorem eſſe. quod demonſtrare oportebat.

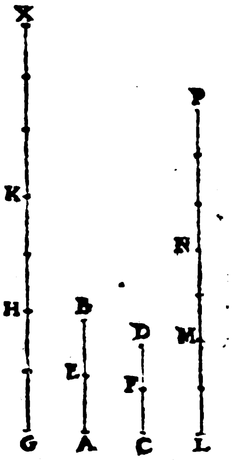
THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XVII.

Si compoſitę magnitudines ſint proportionales, et diuiſæ proportionales erunt.

Sint compoſitę magnitudines proportionales AB BE CD DF. ſitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuiſas proportionales eſſe, videlicet vt AE ad EB,

ita

ita eſſe CF ad FD. ſumantur enim ipſarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipſarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. et quoniā æque multiplex eſt GH ipſius AE, et HK ipſius EB; erit GH ipſius AE æque multiplex, et GK ipſius AB. æque autem multiplex eſt GH ipſius AE, et LM ipſius CF. ergo GK æque multiplex eſt AB, et LM ipſius CF. rurſus quoniam æque multiplex eſt LM ipſius CF, et MN ipſius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipſius CD. Sed æque multiplex erat LM ipſius CF, & GK ipſius AB. æq; igitur multiplex eſt GK ipſius AB, et LN ipſius CD. quare GK LN ipſarum AB CD æque multiplices erunt. rurſus quoniam æque multiplex eſt HK ipſius EB, et MN ipſius FD; eſt autem et KX ipſius EB æque multiplex, & NP ipſius FD: & compoſita HX ipſius EB æque multiplex eſt, et MP ipſius FD. quòd cum ſit vt AB ad BE, ita CD ad DF, et ſumptæ ſint ipſarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipſarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices HX MP; ſi GK ſuperat HX, & LN ſuperabit MP; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet igitur GK ipſam HX, communiq́; ablata HK, et GH ipſam KX ſuperabit. ſed ſi GK ſuperat HX, & LN ſuperat MP. itaque ſuperet LN ipſam MP, cōmuniq́; MN ablata, & LM ſuperabit NP. quare ſi GH ſuperat KX, & LM ipſam NP ſuperabit. Similiter demonſtrabimus & ſi GH ſit æqualis KX, & LM ipſi NP eſſe æqualem, & ſi minor, minorem. ſunt autem GH LM ipſarum AE CF ęque multiplices, & ipſarum EB FD aliæ vtcumque ęque multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diuiſæ proportionales erunt. quod demonſtrare oportebat.

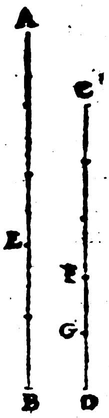


1.huius.
11.huius.
1.huius.
11.huius.
2.huius.
ex conuerſa. 5.diffi.
5.diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

Sint diuiſę magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam cōpoſitas proportionales eſſe, videlicet vt AB ad BE, ita eſſe CD ad DF. Si enim non eſt vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quàm DF, vel ad maiorē. ſit primū ad minorē, nēpe ad DG. & qm̄ eſt vt AB ad BE, ita CD ad DG, cōpoſitę magnitudines ſunt proportionales. ergo et diuiſæ proportionales erūt. eſt igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur aūt & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior eſt, quā tertia CF. ergo & ſecūda DG, quàm quarta DF maior erit. ſed & minor, quod fieri non poteſt. non igitur eſt vt AB ad BE, ita CD ad DG. ſimiliter oſtendemus neque eſſe ad maiorem, quàm DF. ad ipſam igitur DF ſit neceſſe eſt. quare ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitę proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

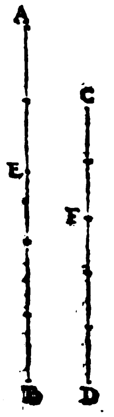


Ex antecedente.
11.huius.
14.huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquā



EB ad reliquam FD ita eſſe, vt totam AB ad totam CD. quoniã enim
16.huius. eſt vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & permutando erit vt B
A ad AE, ita DC ad CF. et quoniam compoſitæ magnitudines ſunt
17.huius. proportionales, & diuiſæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA,
ita DF ad FC, rurſusq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. ſed
11.huius. vt AE ad CF, ita poſita eſt AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare ſi fuerit vt tota ad totã, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam, erit vt tota ad totam. quod demonſtrare oportebat.

Et quoniam oſtenſum eſt vt AB ad CD, ita eſſe EB ad FD, erit permutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compoſitæ magnitudines proportionales ſunt. oſtẽſum autem eſt vt BA ad AE, ita DC ad CF, quod eſt per conuerſionem rationis.

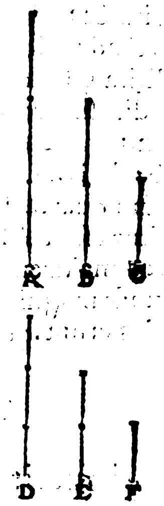
COROLLARIVM.

Ex hoc igitur perſpicuum eſt ſi compoſitæ magnitudines ſint propottionales; & per cõuerſionem rationis proportionales eſſe.

Factę autem ſunt proportiones et in æque multiplicibus, et in analogijs. nam ſi prima ſecundæ æque multiplex ſit, atque tertia quartę; erit et vt prima ad ſecundã, ita tertia ad quartam. ſed non item ex contrario cõuertitur. Si enim ſit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam; nõ omnino erit prima quidem ſecundę ęque multiplex, tertia vero quartæ, velut in ſeſquialteris, vel in ſeſquitertijs proportionibus, vel alijs ciuſmodi. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA. XX. PROPOSITIO. XX.

Si ſint tres magnitudines, et alię ipſis numero æquales, quæ binę ſumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior ſit, quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit; & ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.



Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipſis numero æquales
D E F binæ ſumptę, et in eadem proportione, ſitq; vt A ad B, ita
D ad E; et vt B ad C, ita E ad F; ex ęquali autem maior ſit A, quã
C. Dico et D quàm F maiorem eſſe; et ſi æqualis, ęqualem; et ſi minor, minorem. Quoniam enim A maior eſt, quàm C, alia vero vtcumque B, et maior ad eandem maiorem habet proportionem,
8.huius. A quàm minor: habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C
ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F
ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad
10.huius. E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem
B habet proportionem, illa maior eſt. maior igitur eſt D quàm F. ſimiliter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F ęqualem eſſe; et ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipſis numero ęquales, quæ binę ſumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior ſit, quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit; et ſi ęqualis, ęqualis; et ſi minor, minor. quod oſtendere oportebat.

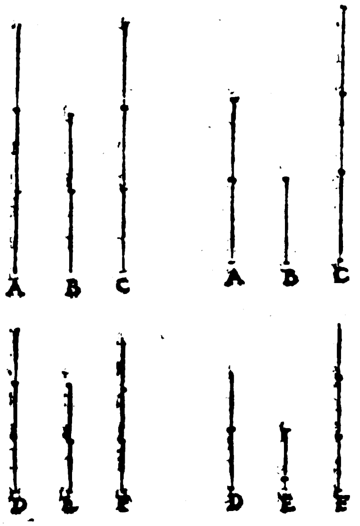
F. C. COMMENTARIVS.

A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quàm C ad B. ſed vt A ad B, ita D ad E]

Ex his ſequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quàm C ad B. vt autem C ad B; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad E.

Similiter oſtendemus et ſi A ſit ęqualis C, et D ipſi F æqualem eſſe; et ſi minor, minorem.

Si enim A ſit aequalis C, habebit A ad B proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quae vero ad eandē, eandem habent proportionem, inter ſe aequales ſunt. ergo D ipſi F eſt aequalis. Quòd ſi A ponatur minor quàm C, habebit A ad B proportionem minorem, quàm C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quàm C ad B. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorē proportionē, quàm F ad E; ac propterea D quàm F, minor erit.



B

7. huius.

11. huius.

9. huius.

8. huius.

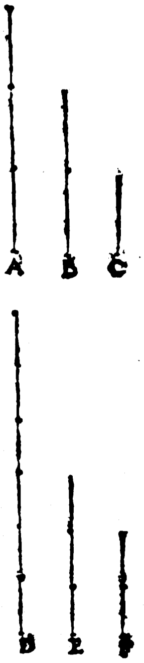
13. huius.

10. huius.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quę binę ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior ſit quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales ABC, et alię ipſis numero æquales D E F, binæ ſumptæ, et in eadem proportione. ſit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidem ad B, ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; et ex ęquali A maior ſit, quàm C. Dico et D quàm F maiorem eſſe; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Quoniam enim maior eſt A, quàm C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, et conuertendo vt C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quàm E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor eſt. minor igitur eſt F, quàm D; ac propterea D quàm F maior erit. Similiter oſtendemus et ſi A ſit æqualis C, et D ipſi F eſſe æqualem; et ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata earū analogia, et ex æquali prima maior ſit, quàm tertia: et quarta quàm ſexta maior erit, et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. quod demonſtrare oportebat.



8. huius.

10. huius.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXII.

Si ſint quotcumque magnitudines; et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt.

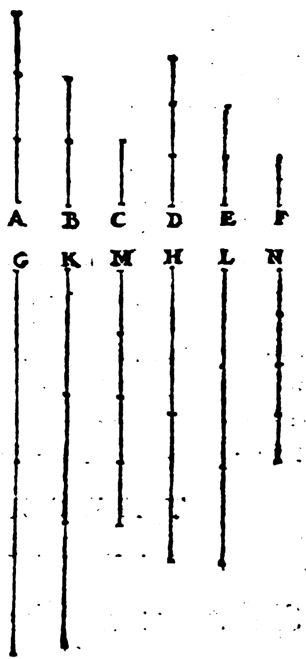
Sint

Sint quotcumque magnitudines A B C, et aliæ ipſis numero ęquales DEF binę ſumptæ in eadem proportione, ſitq; ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eadem proportione ęſſe vt A ad C, ita D ad F. ſumantur enim ipſarum quidem A D æque multiplices G H; ipſarum vero BE alię vtcumque æque multiplices KL, et ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices MN. Quoniã igitur eſt vt A ad B, ita D ad E, et ſumptę ſunt ipſarum AD ęque multiplices GH, et ipſarum BE alię vtcumque æque multiplices K L; erit vt G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit vt K ad M, ita L ad N. et cũ ſint tres magnitudines GKM, et alię ipſis numero ęquales H L N, binæ ſumptæ, et in eadem proportione; ex æquali ſi G ſuperat M, et H ipsã N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq; GH ipſarũ AD æq; multiplices, et MN ipſarum CF aliæ utcumque æque multiplices. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare ſi ſint quotcumque magnitudines, et aliæ ipſis numero ęquales, quæ binę ſumantur, in eadem proportione; et ex ęquali in eadem proportione erunt. quod demonſtrare oportebat.

4. huius.

20. huius.

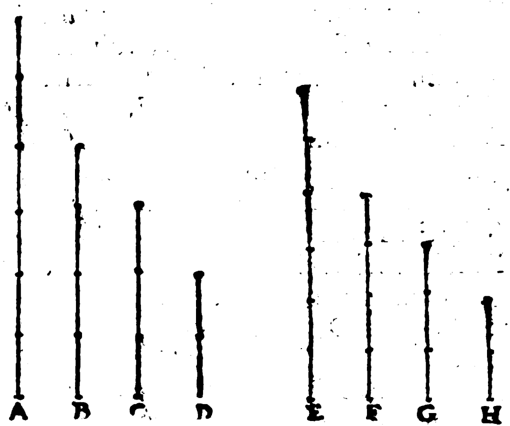
5. diffi.



F. C. COMMENTARIVS.

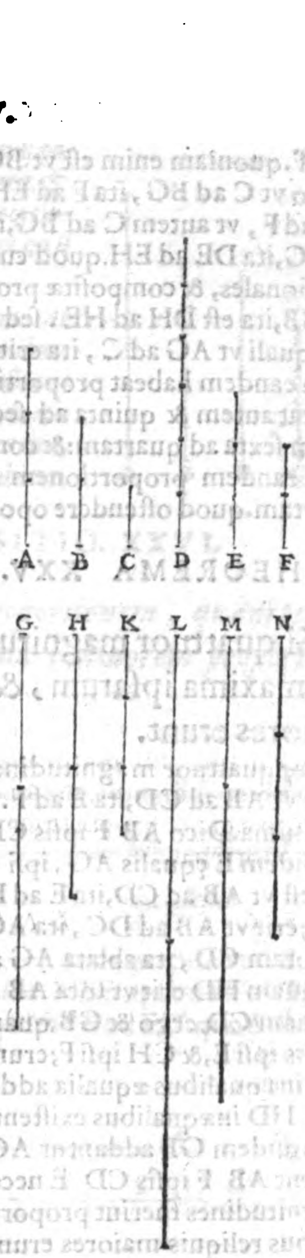
Idem demonſtrabitur etiam ſi plures ſint, quàm tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipſis numero ęquales E F G H binae ſumptae in eadem proportione, ſitq; vt A ad B, ita E ad F, ut aũt B ad C, ita F ad G, et vt C ad D, ita G ad H. Dico ex aequali ut A ad D, ita eſſe E ad H. Quoniam enim eſt vt A ad B, ita E ad F, et vt B ad C, ita F ad G; & ex aequali per ea, quae proxime oſtenſa ſunt, vt A ad C, ita erit F *ad G. eſtq; vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rurſus tres magnitudines ſint ACD, et aliae ipſis numero aequales EGH binae ſumptae in eadem proportione; erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. quod demonſtrare oportebat. & eodẽ modo demonſtrabitur in alijs eiuſmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non ſolum in ordinata analogia, ſed et in perturbata. ſemper enim ad tres magnitudines eiuſdem ordinis ſimiliter reducentur.*



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, et aliȩ ipſis
numero æquales binæ ſumptæ in eadem propor-
tione D E F; ſit autem perturbata earum analo-
gia, et ſit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D
ad E. Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F. ſumantur ip
ſarum quidem A B D ęque multiplices GHK; A
ipſarum vero CEF aliȩ vtcumque ęque multipli-
ces L M N. & quoniam GH æque multiplices
ſunt ipſarum A B, partes autem eodem modo
multiplicium eãdem habent proportionem; erit 15.huius.
vt A ad B; ita G ad H. & ſimili ratione vt E ad F,
ita M ad N. atque eſt vt A ad B, ita E ad F. vt igi-
tur G ad H, ita M ad N. rurſus quoniam eſt vt B 11.huius.
ad C, ita D ad E, & ſumptę ſunt ipſarũ B D ęque
multiplices H K; ipſarum vero C E aliæ vtcum-
que æque multiplices L M; erit vt H ad L, ita K B
ad M. oſtenſum autem eſt et vt G ad H, ita eſſe M 4.huius.
ad N. Quoniam igitur tres magnitudines propor
tionales ſunt G H L, & aliæ ipſis numero ęqua-
les K M N binę ſumptæ in eadem proportione,
eſtq; ipſarum perturbata analogia; ex æquali ſi G 21.huius.
ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æ-
qualis; & ſi minor, minor. ſunt autem GK ipſarũ
A D æque multiplices: & LN ęque multiplices
ipſarum CF. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. qua
re ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis nume 5.diff.
ro æquales, quæ binę ſumantur in eadem propor
tione, ſit aũt perturbata earum analogia; & ex æ-
quali in eadem proportione erunt. quod demon
ſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F] *in gręco codice impreſſo hęc deſiderantur.* λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ζ A

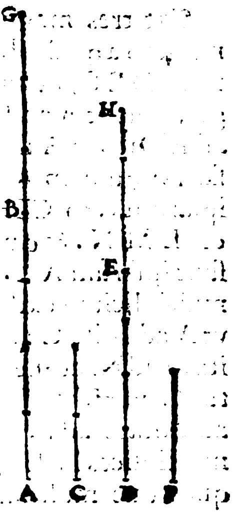
Erit vt H ad L, ita K ad M. oſtenſum autem eſt vt G ad H, ita eſſe M ad N] *hoc loco in gręco codice impeſſo, & in zamberti verſione multa inſeruntur ſuperuacanea, quae à nobis conſulto omiſſa ſunt.* B

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & ſexta ad quartam.

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem & quinta BG ad ſecundam C proportionem eandem, quam ſexta EH ad quartam F. dico & compoſitam primam, & quintam AG ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam DH ad quar tam

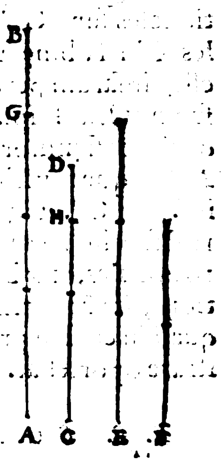
tam



tam F.quoniam enim eſt vt BG ad C, ita EH ad F;erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C,ita eſt DE ad F, vt autem C ad BG,ita F ad EH; erit ex ęquali vt AB ad BG,ita DE ad EH.quòd cum diuiſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt. vt igitur AG ad GB,ita eſt DH ad HE. ſed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F.ſi igitur prima ad ſecūdam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam:& compoſita prima & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia & ſexta ad quartam.quod oſtendere oportebat. 22.huius.

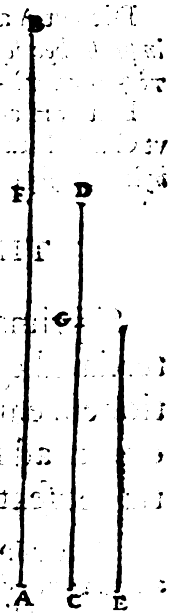
THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales,maxima ipſarum, & minima duabus reliquis maiores erunt.



Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F; & ſit vt AB ad CD,ita E ad F.ſit autem maxima ipſarum AB & F minima.Dico AB F ipſis CD E maiores eſſe.ponatur enim ipſi quidem E ęqualis AG, ipſi vero F ęqualis CH. Quoniam igitur eſt vt AB ad CD,ita E ad F;eſtq; AG æqualis E, & CH ęqualis F;erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem eſt AB,quàm CD.ergo & GB,quàm HD maior.quòd cum AG ſit ęqualis ipſi E,& CH ipſi F;erunt AG F ipſis CH E æquales.ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus exiſtentibus,quippe cum GB ſit maior, ſi ipſi quidem GB addantur AG F, ipſi vero HD addantur CH E,fient AB F ipſis CD E neceſſario maiores.Si igitur quattuor magnitudines fuerint proportionales,maxima ipſarum & minima duabus reliquis maiores erunt.quod demonſtrare oportebat. 19.huius.

F. C. COMMENTARIVS.



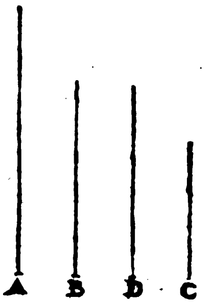
Ex ijs, quae proxime demonſtrata ſunt, poſſumus etiam illud theorema demonſtrare.

Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

Sint tres magnitudines propartionales AB CD E, quarum maxima AB, ſitq; vt AB ad CD,ita CD ad E. Dico AB E maiores eſſe, quàm duplam ipſius CD.ponatur AF aequalis ipſi CD,& CG ipſi E. Quoniam igitur vt AB ad CD,ita CD ad E;erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad totam,& ablata ad ablatam. quare & reliqua FB ad reliquam GD eſt,vt AB ad CD.ſed AB ponitur maior,quàm CD.ergo & FB, quàm GD eſt maior.aequalis autem eſt AF ipſi CD,& CG ipſi E. Sunt igitur AF E ipſis CD CG aequales.quòd ſi inęqualibus aequalia addantur, tota inaequalia erunt.itaque additis AF E ipſi FB,quę maior eſt,quàm GD, & additis CD CG ipſis GD, fient AB E maxima ſcilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipſarum & minima,quam dupla reliquae maiores erunt.quod demonſtrare oportebat. 19.huius.

Aliter.

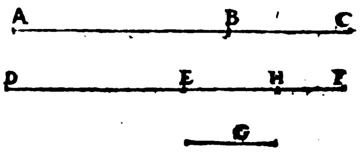
Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC, & ipſi B ponatur aequalis D. Itaque quoniam eſt vt A ad B, ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. ſunt igitur quattuor magnitudines proportionales ABDC. quare ex iam demonſtratis AC maiores erunt, quàm BD, hoc eſt quàm ipſius AB dupla.



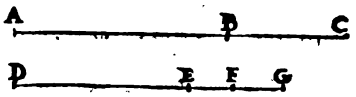
Hęc Euclides de proportionibus ſcripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apolloniusq́;, & alij poſteriores nonnullis theorematibus, quae ad huiuſmodi tractationem pertinent, tamquam demonſtratis vtuntur; optimum fore iudicauimus, ſi ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibuſdam additis, detractiſue, prout res ipſa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

Si prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; & conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionē habebit, quàm quarta ad tertiam.



Habeat AB ad BC maiorem proportionē, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita ſit DE ad aliam aliquā, vt ad G. ergo DE ad G maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF: ac propterea G minor erit, quàm EF. ponatur ipſi G æqualis EH. Quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita DE ad EH; erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. ſed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED. quod demonſtrare oportebat. 8.huius. 8.huius.



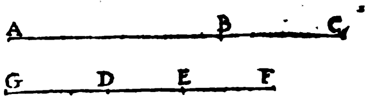
Similiter autem & ſi AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; demonſtrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. ſed vt AB ad BC, ita ſit DE ad aliam, vt ad EG, quæ maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED. 8.huius.

COROLLARIUM.

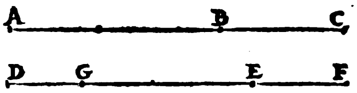
Ex his conſtat, ſi AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad BA. & ſi AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm ſecunda ad quartam.



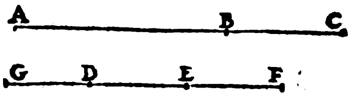
Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE ſit ad EF. manifeſtum eſt eam maiorem eſſe, quàm DE. quare permutãdo vt AB ad GE, ita eſt BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc eſt quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonſtrare. 8.huius. 8.huius.



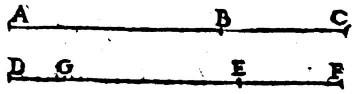
Eadem ratione & ſi AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ãd EF; ſequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quędam GE ad EF, quę minor ſit, quam DE. Sed AB ad DE minorẽ habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem, proportionem, quàm BC ad EF.

THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & ſecunda ad ſecundam maiorẽ proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.



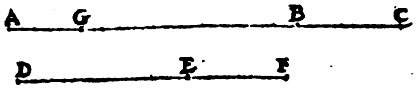
Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE. vt enim AB ad BC, ita ſit alia quędam GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniã igitur eſt vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componẽdo vt AC ad CB, ita GF ad FE. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonſtrare oportebat. 8.huius. 18.huius. 8.huius. 13 huius.



Quòd ſi AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componẽdo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rurſus enim quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, ſi vt AB ad BC, ita ſit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE. 8.huius.

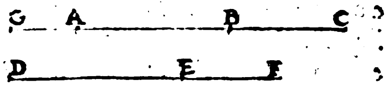
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & ſecunda ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportiouem habebit, quàm tertia ad quartam.



Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF, ad FE, ita ſit alia quędam GC ad CB. erit vtique GC minor, 8 huius.

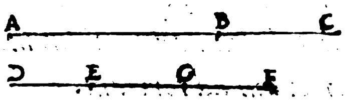
quàm AC: & diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. 17.huius. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 13.huius.



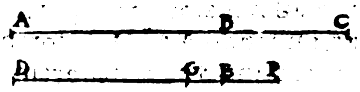
Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. ſi enim rurſus ſit vt DF ad FE, ita alia quędam GC ad CB; erit GC quàm AC maior: 8.huius. atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. 17.huius. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima & ſecunda ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuerſionem rationis prima & ſecunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam.



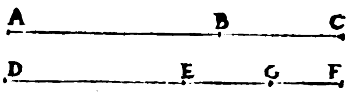
Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ab AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. ſit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quādam, erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuerſionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. Corol.19.huius. ſed FD ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE.



Similiter autem & ſi AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per conuerſionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifeſta erunt.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm ſecunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & ſecunda ad tertiam & quartam.

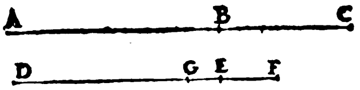


Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportionē habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. 12.huius. tota igitur AC ad totam DG eſt; vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. 8.huius. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifeſtum eſt totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & ſi minor ſit proportio partis, totius maior erit.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad abla *tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.*

Habeat AC ad DF maiorem proportionẽ, quàm AB ad DE. Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG. ergo et reliqua BC ad reliquam GF eſt vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.



19.huius.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo ſupra, modo oſtendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, habeatque prima priorum ad ſecundam maiorem proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam; ſecunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima poſteriorum ad tertiam.

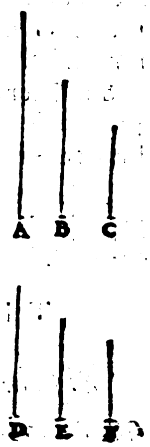
Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad. F. Dico ex ęquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniã enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habebit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. et rurſus permutando A ad C maiorẽ habebit, quàm D ad F. quod oportebat demõſtrare.

27.huius.

Ex demonſtratis ad 23.huius.

27.huius.

Quòd ſi prima priorum ad ſecundam minorem habeat proportionem, quàm prima poſteriorum ad ſecundam; ſecũda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm ſecũda poſteriorum ad tertiam: ſimiliter demõſtrabitur etiam ex ęquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam poſteriorum ad tertiam.

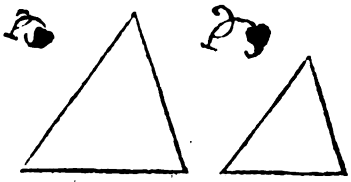


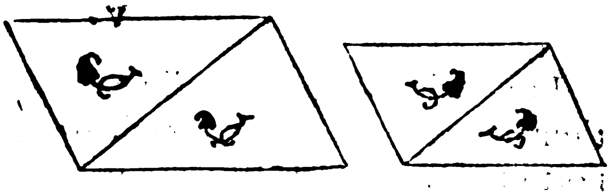
QVINTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER SEXTVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.
I.

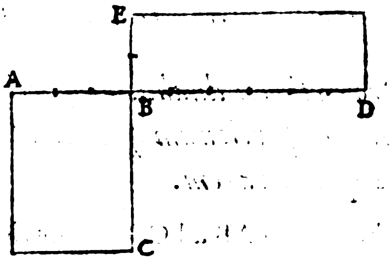
SIMILES figurę rectilineæ ſunt, quę et ſingulos angulos æquales habent, et circa ęquales angulos latera proportionalia.





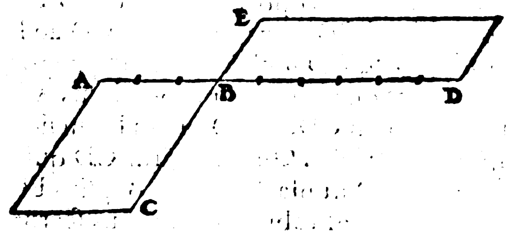
II.

Reciprocę figuræ ſunt, quãdo in vtraque figura antecedẽtes, et conſequentes rationes fuerint.



F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & conſequentes rationes intellige antecedentes, & conſequentes proportionis terminos: vt ſi ſint duo rectangula ABC DBE, ſitq́; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hae figurae reciprocae, ſeu ex contraria parte ſibi ipſis reſpondentes: quoniã in altera quidem eſt terminus antecedens primae proportionis, videlicet AB, et conſequens ſecundae BC; in altera vero eſt conſequens primae BD &, antecedens ſecundae EB. ſunt autem dictae figurae etiam inter ſe aequales, ut deinceps oſtendetur.

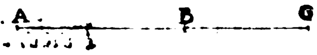


III.

Extrema ac media ratione ſecari recta linea dicitur, quando ſit vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

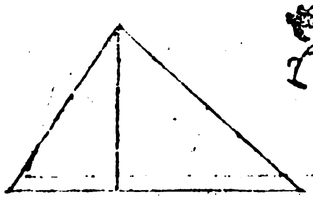
F. C. COMMENTARIVS.

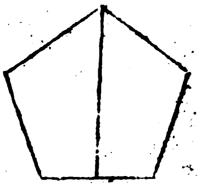
Extrema ac media ratione ſecari recta linea idcirco dicitur, quòd ſecetur in duas partes, quae proportionis termini ſunt, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita diuiſa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et BC extremus.



IIII.

Altitudo cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis, quæ à vertice ad baſim ducitur.





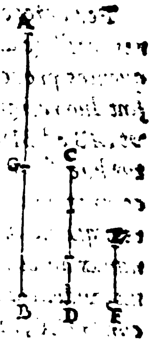
V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quãdo proportionum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

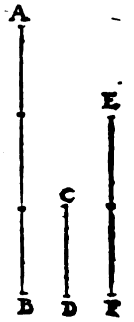
SCHOLIVM.

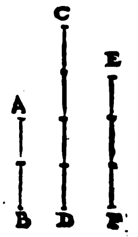
Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

Habeat enim AB ad CD proportionem datam, vt duplam, vel triplam, vel aliam aliquam: CD vero ad EF ſimiliter datam proportionem habeat. Dico proportionem AB ad EF compoſitam eſſe ex proportione AB ad CD, et proportione CD ad EF; vel ſi quantitas proportionis AB ad CD multiplicetur in proportionis CD ad EF quantitatem, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primũ AB maior, quàm CD, et CD quàm EF maior; Sitq; AB dupla CD, et CD ipſius EF tripla. Quoniã igitur CD quidem ipſius EF tripla eſt, ipſius autem CD dupla AB; erit AB ipſius EF ſextupla: quoniã ſi triplum alicuius duplicabimus, fiet ipſius ſextuplum. hoc enim proprie eſt compoſitio, vel hoc modo. Quoniam AB ipſius CD eſt dupla, diuidatur AB in partes æquales ipſi CD, quæ ſint AG GB. et quoniam CD eſt tripla EF, ęqualis autẽ AG ipſi CD, erit AG ipſius EF tripla.



tripla.ideoq; tota AB ipſius EF ſextupla eſt. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminũ CD;compoſita ex proportione AB ad CD,& proportione CD ad EF.Similiter autem & ſi CD ſit vtriſque AB EF minor,idẽ concludetur.Sit enim rurſus AB quidem tripla ipſius CD, CD vero ipſius EF dimidia.& quoniam CD dimidia eſt ipſius EF,& ipſius CD tripla AB;erit AB ſeſquialtera ipſius EF. ſi enim dimidium alicuius triplicabimus,habebit ipſum ſemel, & eius dimidium. Et quoniã AB ipſius CD eſt tripla, CD vero dimidia EF;quarum partium ipſi CD æqualium AB eſt trium, earum eſt EF duarum.ergo AB ſeſquialtera eſt ipſius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum,cõpoſita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rurſus ſit CD vtriſque AB EF maior:& ſit AB quidem ipſius CD dimidia, CD vero ſeſquitertia ipſius EF.Quoniã igitur quarum partium eſt AB duarum,earum CD eſt quattuor:quarum autem CD eſt quattuor,earum EF eſt trium:& quarum AB duarum,earumdem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rurſus connectitur per CD medium terminum;quę eſt duorum ad tria. Similiter et in pluribus,& in reliquis caſibus.Et manifeſtum eſt,ſi à compoſita proportione vnus quiuis componentium auferatur, vno ſimplicium eiecto, reliquos componentium aſſumi.



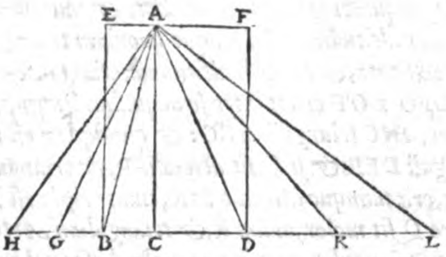


FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium incommentarijs in quartam propoſitionem ſecundi libri Archimedis de ſphęra & Cylindro, & in commentarijs in vndecimam propoſitionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem,inter ſe ſunt,vt baſes.



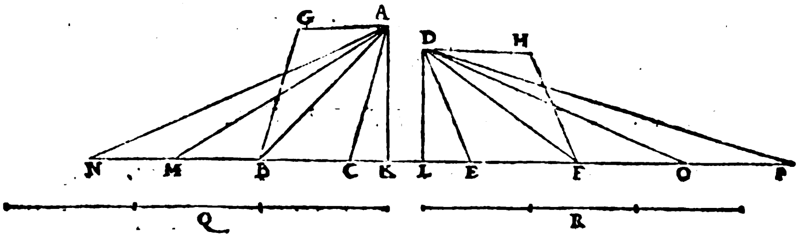
Sint triangula quidẽ ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico vt baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur enim BD ex vtraque parte ad puncta H L,& ipſi quidum BC baſi æquales quotcumque ponantur BG GH, ipſi vero baſi CD ponãtur quotcũq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iũgãtur. 38.huius. Quoniam igitur CB BG GH inter ſe æquales ſunt;erunt & triãgula AHG AGB ABC inter ſe ęqualia.ergo quotuplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, totuplex eſt AHC triangulum trianguli ABC.Eadem ratione quotuplex eſt LC baſis, ipſius baſis CD,totuplex eſt & triangulum ALC ipſius ACD trianguli:et ſi æqualis eſt HC baſis baſi CL,& triangulum AHC triangulo ALC eſt æquale:& ſi baſis HC baſim CL ſuperat,& triangulum AHC ſuperabit triangulum ALC:& ſi minor,minus. Quattuor igitur magnitudinibus exiſtentibus,videlicet duabus baſibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD,ſumpta ſunt ęquemultiplicia,baſis quidem BC,& ABC trianguli,videlicet baſis HC,& AHC triãgulum: baſis vero CD,& trianguli ACD, alia vtcunque æque multiplicia,nempe CL baſis, & ALC triangulum:atque oſtenſum

ſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat,& triangulũ AHC ſuperare triangulũ ALC; 5.diffi. quinti. & ſi ęqualis,ęquale;& ſi minor,minus.eſt igitur vt BC baſis ad baſim CD , ita triangulũ ABC ad ACD triãgulũ . 41.primi. Et qm̃ triãguli ABC duplũ eſt parallelogrãmũ EC, 15.quinti. & triãguli ACD parallelogrammũ FC duplum ; partes autem eodem modo multiplicium eandem inter ſe proportionem habent: erit vt AB C triangulum ad triangulum ACD,ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur oſtenſum eſt,vt baſis BC ad CD baſim,ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD;vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD,ita parallelogrammum EC 11 quinti. ad CF parallelogrammum:erit vt BC baſis ad baſim CD,ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum . Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt,vt baſes.quod demonſtrare oportebat,

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum eſt,quod demonſtrare hoc loco non putaui eſſe alienum.

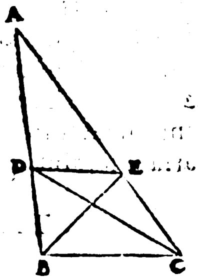
Triangula & parallelogramma in æqualibus baſibus conſtituta, eandem inter ſe proportionem habent,quam eorum altitudines.



Sint duo triangula ABC DEF,& duo parallelogramma CG EH, quae aequales baſes habeãt BC EF:trianguli autem ABC,& parallelogrammi CG altitudo ſit AK:& trianguli DEF,& parallelogrammi EH altitudo DL.Dico vt AK ad DL , ita eſſe & triangulum ABC ad triangulum DEF , & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF,& ponantur baſi BC aequales quotcumque BM MN : & baſi EF aequales quotcumque FO OP, iunganturq́; AM AN DO DP: quot vero magnitudines ſunt in CN aequales baſi CB , tota ſumantur in linea Q aequales ipſi AK altitudini; & quot ſunt in EP aequales baſi EF,tot ſumantur in linea R aequales altitudini DL . Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC ſunt in aequalibus baſi- Ex antecedente. *bus conſtituta,& aequali altitudine;etiam inter ſe aequalia erunt. & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter ſe aequalia.Quotuplex igitur eſt linea Q ipſius AK,totuplex eſt triãgulum ANC trianguli ABC : & quotuplex eſt linea R ipſius DL, totuplex eſt triangulum DPE trianguli DEF:& ſi Q ſit aequalis R,& triangulum ANC triangulo DPE aequale erit, ex premiſſa;erit namque altitudo AK,cuius tripla eſt Q aequalis altitudini DL, cuius ipſa R eſt tripla: ſi vero Q ſit maior,quàm R,& triangulum ANC maius erit,quàm triangulum DPE; et ſi minor, minus . triangulorum enim aequales baſes habentium,quae maiori ſunt altitudine , etiam maiora ſunt,alioqui ſequeretur totum parti aequale eſſe . Cum igitur quattuor ſint magnitudines, videlicet duae altitudines AK DL,& duo triangula ABC DEF:& ſumpta ſint aeque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL,& trianguli DEF; alia vtcumque multiplicia : & oſtenſum ſit ſi linea Q ſuperat R,& triangulum ANC ſuperare triangulum DP*5.dif.quinti. *E,& ſi aequalis, aequale;& ſi minor,minus:erit vt altitudo HA ad altitudinẽ DL,ita triangulũ* 41.primi. *ABC ad triangulum DEF . Sed trianguli ABC duplum eſt CG parallelogrammum, & trianguli* 15.quinti. *DEF duplum parallelogrammum EH ; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem:erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH , vt ABC triangulum ad triangulum DEF . Sed oſtenſum eſt vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum DEF.Vt igitur AK ad DL,ita eſt paralelogrammum CG ad EH parallelogrammum.Quare triangula,& parallelogramma in aequalibus baſibus conſtituta eandem inter ſe proportionem habent,quam eorum altitudines.quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

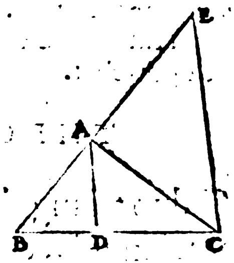


Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita eſſe CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi DE, & in eiſdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum eſt ADE: ſed ęqualia ad idem eandem habẽt proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triã gulum ADE, ita eſt CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter ſe ſunt vti baſes. & ob eandem cauſſam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita eſt CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter ſecta ſint, & vt BD ad DA, ita ſit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipſi BC parallelam eſſe. iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autẽ BD ad DA, ita eſt BDE triangulum ad triangulũ ADE; et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. Quòd cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE ęquale; & ſunt in eadem baſi DE. ęqualia autem triangula, & in eadem baſi conſtituta, etiã in eiſdem ſunt parallelis. ergo DE ipſi BC parallela eſt. Si igitur vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius triãguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones coniũgit recta linea reliquo triãguli lateri parallela erit. quod oportebat demonſtrare.

37. primi.
7. quinti.
Ex antecedente.
11. quinti.
11. quinti.
9. quinti.
40. primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea, ſecet etiam baſim; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.



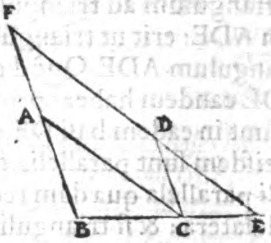
Sit triangulum ABC, & ſecetur angulus BAC bifariam recta linea AD. Dico vt BD ad DC, ita eſſe BA ad AC. ducatur enim per C ipſi DA parallella CE, & producta BA conueniat cum ipſa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædã AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipſi ACE angulo æqualis erit. Rurſus quoniam in parallelas AD EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis eſt interiori AEC. oſtenſus aũt eſt & angulus ACE angulo BAD ęqualis. ergo & ACE ipſi AEC

9. primi.
31. primi.
29. primi.

6.primi. ęqualis erit:ac propterea latus AE æquale lateri AC.Et quoniam vni laterum trianguli
Ex antecedente. BCE,videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD ; erit vt BD ad DC, ita BA ad AE:
æqualis aũt eſt AE ipſi AC. eſt igitur vt BD a d DC,ita BA ad AC. Sed ſit vt BD
7.quinti. ad DC,ita B A ad AC:& AD iungatur . Dico angulũ BAC bifariã ſectũ eſſe recta linea
Ex antecedente. AD.ijſdem enim conſtructis quoniam eſt vt BD ad DC , ita BA ad AC ; Sed &
vt BD ad DC,ita BA ad AE,etenim vni laterum trianguli BCE , videlicet ipſi EC
9.quinti. parallela ducta eſt AD:erit & vt BA ad AC,ita BA ad AE. ergo AC eſt ęqualis AE,
29.primi. ac propterea & angulus AEC angulo ECA ęqualis. Sed angulus quidem AEC eſt
ęqualis angulo exteriori BAD ; angulus vero ACE æqualis alterno CAD.quare &
BAD angulus ipſi C AD ęqualis erit. angulus igitur BAC bifariam ſectus eſt recta
linea AD.Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur , ſecans autem angulum recta
linea,etiam baſim ſecet ; baſis partes eandem proportionem habebunt , quam reliqua
trianguli latera : & ſi baſis partes eãdem proportionem habeant,quam reliqua
trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum
bifariam ſecabit.quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

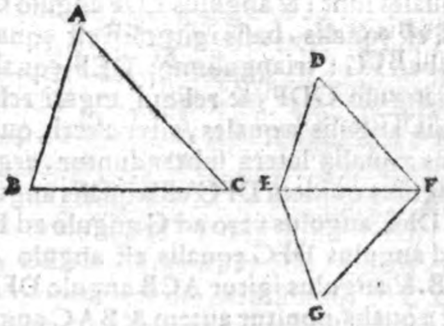
Aequiangulorum triangulorum latera,quæ circum æquales angulos,proportionalia ſunt : et homologa ſiue eiuſdẽ rationis ſunt latera,quę æqualibus angulis ſubtenduntur.



Sint ęquiangula triangula ABC DCE, quæ angulũ
quidem ABC angulo DCE, angulum vero A C B angulo
DEC ęqualem habeant:et pręterea angulũ BAC
angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE proportionalia
eſſe latera, quæ ſunt circa ęquales angulos , et
homologa,ſiue eiuſdem rationis latera eſſe, quæ æqualibus
angulis ſubtenduntur. Ponatur enim B C in directum
ipſi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus
17.primi. rectis minores ſunt:ęqualis aũt eſt angulus ACB angulo
DEC;erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ
inter ſe conuenient. producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus
28.primi. DCE eſt æqualis angulo ABC; erit BF ipſi D C parallela . Rurſus quoniam æqualis
eſt angulus ACB angulo DEC, parallela erit A C ipſi F E. parallelogrammum igitur
34.primi. eſt FACD; ac propterea F A quidem ipſi C D, A C vero ipſi F D eſt ęqualis.Et
2.huius. quoniam vni laterũ trianguli F B E, videlicet ipſi FE parallela ducta eſt A C; erit
7. quinti. vt BA ad A F, ita BC ad CE. æqualis autem eſt AF ipſi CD. Vt igitur BA ad CD,
ita B C ad C E: et permutando vt A B ad B C, ita DC ad CE. Rurſus quoniam CD
2.huius. parallela eſt BF, erit vt BC ad CE, ita F D ad DE. Sed D F eſt ęqualis A C. ergo vt
BC ad CE, ita AC ad E D. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE ad ED.Itaque
quoniam oſtenſum eſt, vt AB ad BC, ita D C ad CE, ut autem B C ad C A, ita C E
ad ED; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. æquiangulorum igitur triangulorum
proportionalia ſunt latera, quę circum ęquales angulos : et homologa , ſiue
eiuſdem rationis latera ſunt , quę æqualibus angulis ſubtenduntur . quod demonſtrare
oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos , quibus homologa latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, ſitq́; ut AB quidem ad BC, ita DE ad E F; vt autem BC ad CA, ita EF ad FD: et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triāgulum ABC triangulo DEF æquiangulũ eſſe, et æquales habere angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. conſtituatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC ęqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt æqualis. Ideoq́; æquiangulum eſt triangulum A B C triangulo EGF. triāgulorum igitur ABC EGF proportionalia ſunt latera, quæ circum ęquales angulos, et homologa latera ſunt, quę æqualibus angulis ſubtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt A B ad B C, ita D E ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quòd cum vtraque ipſarum D E EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipſi EG æqualis. Eadem ratione et D F æqualis F G. Itaque quoniam DE eſt æqualis EG, cõmunis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales ſunt, et baſis DF baſi F G æqualis. angulus igitur DEF eſt æqualis angulo GEF, et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem DFE eſt ęqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EG F. Et quoniam angulus FED eſt ęqualis angnlo G EF, et angulus G E F angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis eſt angulo DFE: et adhuc augulus ad A angulo ad D. ergo ABC triāgulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et ęquales habebũt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. quod oportebat demonſtrare.

23. primi.

Ex antecedente.

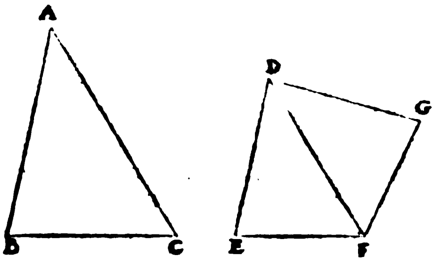
11. quinti.

9. quinti.

8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et ęquales habebunt angulos, quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æqualẽ habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ſitq́; ut BA ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo D EF; angulum uero ACB angulo DFE. conſtituatur enim ad rectã lineam DF, et ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus F D G: angulo autem A C B æqualis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G eſt æqualis. ergo triangulum A BC triangulo DGF æquiangulum eſt, ac propterea vt BA ad AC, ita eſt GD ad DF. ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED ęqualis eſt ipſi DG: & communis DF. ergo duę ED DF duabus GD DF

23. primi.

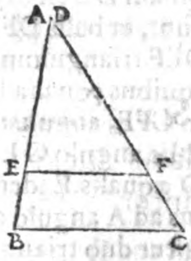
4. huius.

11. quinti.

9. quinti.

æquales ſunt : & angulus EDF angulo G
4.primi. DF eſt ęqualis . baſis igitur EF eſt ęqua-
lis baſi FG : triangulumq́; DEF ęquale
triangulo GDF , & reliqui anguli reli-
quis angulis æquales , alter alteri , qui-
bus æqualia latera ſubtenduntur . ergo
angulus quidem DFG eſt æqualis angu-
lo DFE; angulus vero ad G angulo ad E.
ſed angulus DFG ęqualis eſt angulo A
CB.& angulus igitur ACB angulo DFE
eſt æqualis.ponitur autem & BAC angulus ęqualis angulo EDF . ergo & reliquus
qui ad B æqualis reliquo qui ad E.ęquiangulum igitur eſt triangulum ABC trian-
gulo DEF . Quare ſi duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant,
circa ęquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula,&
æquales habebunt angulos,quibus homologa latera ſubtenduntur.quod oſtendere
oportebat.

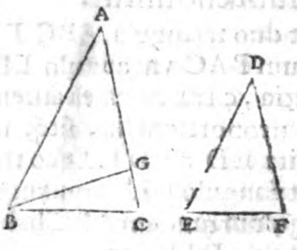
F. C. COMMENTARIVS.



Sunt qui hoc etiam aliter demonſtrẽt. Nam impoſito latere DE la-
teri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angu-
lo ad A eſt aequalis . Vel igitur DE eſt aequale ipſi AB, vel inę-
4.primi. *quale.& ſi quidem aequale , erit & DF aequale AC. ergo & baſis*
EF baſi BC,& reliqui anguli reliquis angulis acquales.Si vero DE ſit
inęquale ipſi AB,ſit vtrumuis ipſorum maius; verbi cauſſa AB. tunc
vt BA ad AC,ſic ED ad DF . ergo permutando vt BA ad AE; ſic C
2.huius. *A ad AF:& diuidendo vt BE ad EA,ſic CF ad FA.quare latus EF*
29.primi. *parallelum eſt lateri BC , & idcirco angulus AEF angulo ABC , &*
angulus AFE angulo ACB eſt aequalis.quod oſtenſum oportuit.

THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proporrionalia , & reliquorum vtrumque ſimul , vel minorem , vel non minorem recto : æquiangula erunt triangula ; & ęquales habebunt angulos , circa quos latera ſunt proportionalia.



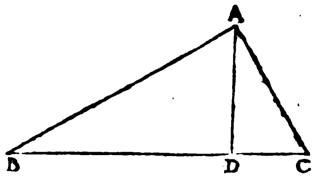
Sint duo triangula ABC DEF , vnum angulũ
vni angulo æqualem habentia , videlicet angulũ
BAC angulo EDF æqualem,circa alios autem an
gulos ABC DEF latera proportionalia,vt ſit DE
ad EF,ſicut AB ad BC: & reliquornm qui ad CF.
primum vtrumque ſimul minorem recto . Dico
triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum
eſſe ; angulumq́ue ABC æqualem angulo DEF,
& reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F ę-
qualem.Si enim inæqualis eſt angulus ABC angu
23.primi. lo DEF,vnus ipſorum maior erit.Sit maior ABC:& conſtituatur ad rectam lineam
AB,& ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG.Et quoniam angu
lus quidem A eſt æqualis angulo D,angulus vero ABG angulo DEF : erit reliquus
AGB reliquo DFE æqualis.æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo D
4.huius. EF.quare vt AB ad BG , ſic DE ad EF : vtq́; DE ad EF,ſic ponitur AB ad BC . & vt
igitur AB ad BC,ſic AB ad BG. Quòd cum AB ad vtramque BC BG eandem ha-

beat

beat proportionem,erit BC ipſi BG æqualis:ac propterea angulus ad C eſt ęqualis 9.quinti.
angulo BGC.minor aũt recto ponitur angulus, qui ad C.ergo & BGC minor eſt recto, 5.primi.
& ob id qui ei deinceps eſt AGB maior recto. atque oſtenſus eſt angulus AGB 13.primi.
æqualis angulo,qui ad F.angulus igitur qui ad F recto maior eſt. atqui ponitur minor
recto,quod eſt abſurdũ.nõ igitur inęqualis eſt angulus ABC angulo DEF.ergo
ipſi eſt æqualis.eſt autẽ & angulus ad A ęqualis ei, qui ad D. quare & reliquus qui
ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo
DEF.Sed rurſus ponatur vterque angulorum,qui ad C F non minor recto. Dico
rurſus & ſic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe. ijſdem enim
conſtructis ſimiliter demonſtrabimus BC æqualem ipſi BG,angulumq; ad C angulo
BGC æqualem.ſed angulus qui ad C non eſt minor recto. nõ minor igitur recto
eſt BGC .quare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis minores. quod 17.primi.
fieri nõ poteſt.nõ igitur rurſus inæqualis eſt ABC angulus angulo DEF.ergo æqualis
neceſſario erit.eſt autẽ & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F eſt ęqualis.ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſt. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque ſimul, vel minorem,vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula,& æquales habebunt angulos,circa quos proportionalia ſunt latera. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula & toti & inter ſe ſimilia ſunt.



Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C: et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur A D. Dico triangula ABD A D C toti triangulo A B C, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B A C eſt ęqualis angulo A D B, rectus enim vterque eſt: et angulus qui ad B communis duobus triã-
gulis ABC ABD: erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. ęquiangulum igitur 4.huius.
eſt triangulum ABC triangulo ABD. quare vt BC, quæ ſubtendit angulum rectum
trianguli ABC,ad BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa
AB ſubtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD ſubtendentem angulũ
ęqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli: et adhuc AC ad
AD ſubtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis. ergo triangulum
ABC triangulo ABD ęquiangulum eſt; et circa æquales angulos latera habet 1.diffi.huius
proportionalia. Simile igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonſtrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC ſimile eſſe. Quare vtrumque ipſorum ABD ADC toti ABC triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula ABD ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B D A rectus, eſt æqualis recto ADC. Sed et BAD oſtenſus eſt æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC.ergo vt B D trianguli ABD ſubtendens B A D angulum ad D A trianguli ADC ſubtendentem angulum,qui ad C,æqualem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD ſubtendens angulum, qui ad B, ad D C ſubtendentem angulum D A C ei, qui ad B,æqualem: et adhuc BA ad A C ſubtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur eſt A B D triangulum triangulo A D C. Quare ſi in triangulo rectãgulo ab angulo recto ad baſim perpeudicularis ducatur; quę ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe, ſimilia ſunt. quod oportebat demonſtrare.

CORO-

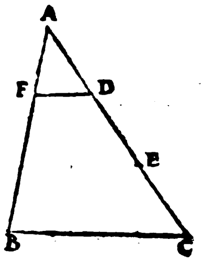
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; ductam baſis partium mediam proportionalem eſſe: et adhuc baſis et vniuſcuiuſque partium, latus quod ad partem, medium eſſe proportionale. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

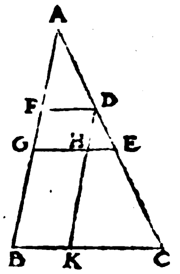
Sit data recta linea AB. oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere. Imperetur pars tertia: et ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipſa A B angulum quemlibet contineat; ſumaturq; in A C quod vis punctum D, et ipſi AD ęquales ponantur DE EC. deinde iungatur BC; et per D ipſi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniā vni laterum triā-
2.huius. guli A B C, videlicet ipſi B C parallela ducta eſt F D; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem eſt CD ipſius DA. ergo et BF ipſius FA dupla erit. tripla igitur eſt BA ipſius AF. Quare à data recta linea A B imperata tertia pars A F abſciſſa eſt. quod facere oportebat.



PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam inſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.

Sit data quidem recta linea inſecta AB, ſecta vero AC. oportet rectam lineam AB inſectam ipſi AC ſectæ ſimiliter ſecare. Sit ſecta AC in punctis D E, & ponantur ita, ut angulū quem vis contineant, iunctaq; BC per puncta quidem DE ipſi BC parallelæ ducātur DF EG: per D vero ipſi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur eſt vtrumque ipſorum F
34 primi. H HB: ac propterea DH quidem eſt æqualis FG, HK vero ipſi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipſi ſcilicet
2.huius. KC parallela ducta eſt HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad KD. ęqualis autem eſt KH quidē ipſi BG, HD vero ipſi GF. eſt igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rurſus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipſi EG parallela ducta eſt F D, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed oſtenſum eſt ut CE ad ED, ita eſſe BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita eſt BG ad GF: & vt ED ad DA, ita G F ad FA. Ergo data recta linea inſecta AB datę rectæ lineę ſectæ A C ſimiliter ſecta eſt. quod facere opottebat.



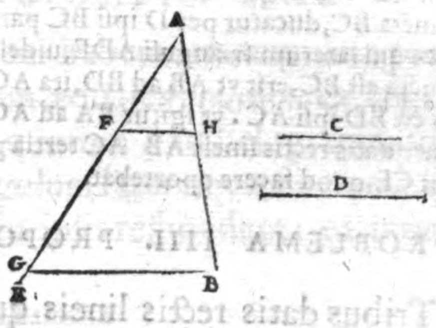
F. C. COMMENTARIVS.

Huic non diſſimile eſt, quod docuit Pappus in ſeptimo libro mathematicorum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem ſecare.

Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat ſecare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE: & ipſi quidem C ęqualis abſcindatur AF; ipſi vero D æqualis FG: &

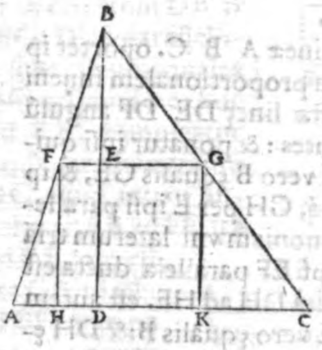
iuncta



iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita eſt AF ad FG: eſt aũt AF ęqualis C, & FG ipſi D: erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB ſecta eſt ad punctum H in proportionem C ad D. quod facere oportebat. 2.huius.

Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita ſunt, licebit problema abſoluere, quod ad quartam propoſitionẽ quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triãgulo quadratũ deſcribere.



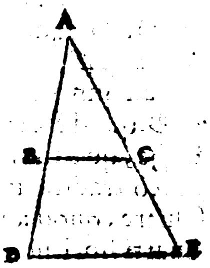
Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum deſcribere. vel igitur datũ triangulum acutiangulum eſt, vel rectangulum, vel obtuſiangulum. Sit primũ acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatnr BD: & ex pręmiſſa diuidatur BD in puncto E, ita vt DE ad EB eandẽ proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipſi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH GK parallelae ipſi BD. Quoniam igitur in triangulo ABD ducta eſt FE
ipſi AD parallela. erit angulus BEF angulo BDA aequalis; & angulus BFE aequalis 29.pιimi.
angulo BAD: atque eſt angulus FBE vtrique communis. ergo FBE triangulum triangulo
ABD aequiangulum eſt. Similiter demonſtrabimus triangulum EBG aequiangulum ipſi 4.huius.
DBC. Vt igitur AD ad DB, ita eſt FE ad EB, & vt BD ad DC, ita BE ad EG. quare 22.quinti.
ex aequali vt AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo vt AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendoq; 18.quinti.
vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC, ita eſt BE ad EG. ergo ex aequali, vt BD 4.quinti.
ad AC, ita BE ad FG. Itaque cũ ſit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rurſus ex aequali vt AC ad
ſe ipſam, ita DE, hoc eſt HF ad FG. ergo HF ipſi FG eſt aequalis; ac propterea omnes HF FG 34 primi.
GK KH inter ſe aequles ſuut. Et quoniam FH eſt parallela ipſi BD: eſtq; angulus BDA rectus;
& ipſe KHF rectus erit. eadem ratione cum FG ſit parallela AC, erit & HFG angulus rectus. 29.primi.
Ergo & ipſis oppoſiti FGK GKH recti ſint neceſſe eſt. quadratum igitur eſt ipſum FGKH: & deſcriptum
eſt in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtuſiangulo quadratum 34.primi.
deſcribemus, ab angulo recto, vel obtuſo ad latus oppoſitum perpendicularem ducentes. Quòd ſi
in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus
trianguli nitantur; vt in ſubiecta figura, vtemur altera perpendiculari, quae eſt trianguli latus, videlicet
BA, & ſimiliter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quã
CA ad AB; ducaturq; FG parallela ipſi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC 2.huius.
ducta eſt FG ipſi AC parallela; ſimiliter demonſtrabimus triangulum BFG triangulo BAC aequiangulum
eſſe. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG. eſt autem vt CA ad AB, ita AF ad FB. ex 4.huius.
aequali igitur, vt CA ad ſe ipſam, ita AF ad FG; ideoq; AF FG inter ſe aequales ſunt. Et ex ijs,
quae proxime diximus, ſequetur AFGK quadratum eſſe, quod deſcriptum eſt in triangulo ABC,
atque illud eſt. quod feciſſe oportuit.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

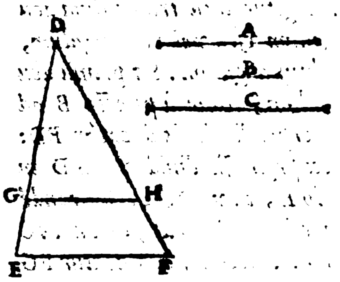
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita, vt angulum quem uis contineant. oportet ipſarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur enim

enim AB AC ad pũcta DE:ponaturq; ipſi AC æqualis BD & iuncta BC,ducatur per D ipſi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE,uidelicet ipſi DE parallela ducta eſt BC,erit vt AB ad BD,ita AC ad CE. æqualis autem eſt BD ipſi AC. vt igitur BA ad AC, ita eſt AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuẽta eſt CE. quod facere oportebat.



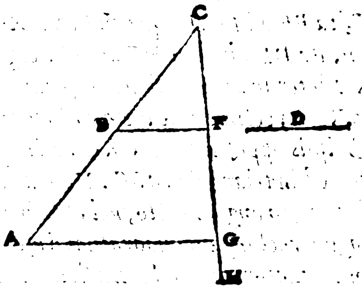
PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.



Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipſarum A B C quartam proportionalem inuenire. Exponãtur duæ rectæ lineę DE DF angulũ quemuis EDF continentes: & ponatur ipſi quidem A ęqualis DG, ipſi vero B ęqualis GE, & ipſi C æqualis DH: iunctaq; GH per E ipſi parallela ducatur EF. Itaque quoniam vni laterum triãguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt 2.huius. GH, erit vt DG ad GE, ita DH ad HF. eſt autem DG ipſi A aequalis; GE vero ęqualis B: & DH ęqualis C. Vt igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inuẽta eſt HF. quod facere oportebat.

FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

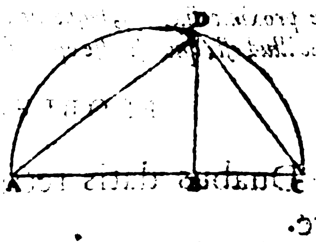


Tribus datis rectis lineis AB BC & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipſam D.

Rurſus inclinetur recta linea CH in quouis angulo & abſcindatur CF aequalis D: iunctaque BF, ipſi parallela ducatur AG. ergo rurſus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC, hoc eſt ad D. Inuẽta igitur eſt FG. quod facere oportebat.

PROBLEMA. V.
PROPOSITIO. XIII.

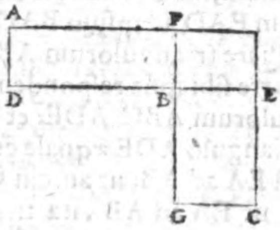
Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.



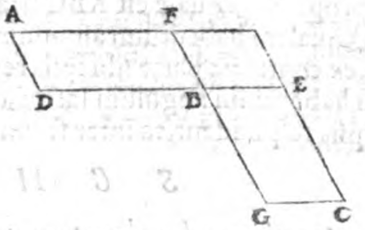
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ipſarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum, & in ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipſi AC ad rectos angulos BD, & AD DC iungatur. 31.tertij. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus ADC, is rectus eſt: & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta Cor.8.huius eſt DB, erit DB baſis partium AB BC media proportionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta eſt DB. quod facere oportebat.

THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIIII.

Aequalium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia.



Sint æqualia parallelogrãma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantnr in directum DB BE. ergo et indirectnm erunt FB BG. * Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ ſunt circumęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere: hoc eſt ut D B ad B E, ita eſſe G B ad B F. compleatur enim parallelogrammum FE. et qm̃ parallelogrãmũ A B æquale eſt parallelogrãmo B C, aliud autem aliquod eſt FE parallelogrammum; erit vt AB ad FE, ita 7.quinti. BC ad F E. Sed vt AB quidem ad F E, ita eſt 1.huius. DB ad BE; vt autem BC ad FE, ita GB ad BF. 11.quinti. et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circũ ęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera, quæ circũ æquales angulos: ſitq; vt D B ad BE, ita G B ad BF. Dico parallelogrãmum AB parallelogrãmo BC æquale eſſe. Qm̃ enim eſt vt DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad B E, ita A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E: et 1.huius. ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit et vt AB 11.quinti. ad F E, ita BC ad F E. 9.quinti. ęquale igitur eſt A B parallelogramnium parallelogrammo BC. ergo ęqualium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrãmorũ latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia. quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

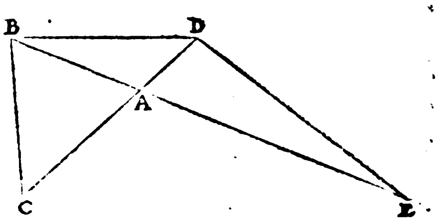
Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FEE aequales duobus rectis; ſed angulus EBG ponitur aequalis angulo FBD anguli igitur FBE, EBG duobus rectis ſunt ęquales, ac propterea rectae lineę FB BG in directum ſibi ipſis erunt.* * 14.primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

Aequalium, et vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia.

Sint triangula ABC ADE vnum angulum vni angulo ęqualem habentia, angu-

lum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quę circum
ęquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere, hoc eſt vt CA ad AD, ita
eſſe EA ad A B. ponantur enim ita vt in directum
14.primi. ſit CA ipſi AD. ergo et EA ipſi AB
in directum erit; et iungatur B D. Quoniã
igitur triangulum A B C æquale eſt triangulo
7.quinti. ADE, aliud autẽ eſt ABD; erit vt CAB
triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum
ADE ad triangulum B A D. Sed vt
triangulum quidem CAB ad BAD triangulum,
1.huius. ita C A ad A D: ut autem triangulum
11.quinti. EAD ad ipſum BAD, ita E A ad A B. et ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB.
Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum ęquales angulos ex contraria
parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera triãgulorum
ABC ADE: et ſit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC
triangulo ADE æquale eſſe. Iuncta enim rurſus BD, quoniam vt C A ad A D, ita
1.huius. eſt EA ad AB; ut autem C A ad A D, ita ABC triangulum ad triangulum B A D;
11.quinti. et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum: erit ut ABC triangulum
ad triangulum B AD, ita triangulum EAD ad BAD triãgulum. Vtrumque
igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionẽ;
9.quinti. ac propterea æquale eſt ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur et vnũ
vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos,
ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: et quorum triangulorum vnũ vni æqualem
habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi
ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia. quod demonſtrare oportebat.

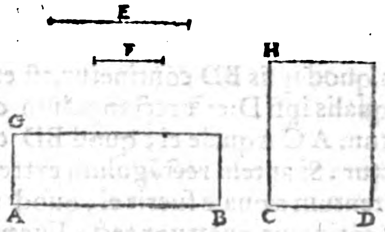


SCHOLIVM.

Aequiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera habere, non etiam latera ex contraria parte ſibi ipſis proportione reſpondentia. Aequalibus autem, et æquiangulis latera quoque ex cõtraria parte reſpondentia habere contingit; ęqualia enim ſunt & latera: æqualitatis autem proportio ad ſe ipſam conuertitur, hoc eſt ex antecedente ſumpto & conſequente eadem eſt, & differens. At æqualibus quidem, & vnum angulum ęqualem habentibus contingit ſolum latera habere ex cõtraria parte reſpondentia, non tamen omnia, ſed quæ circum æquales angulos conſiſtunt. Quare alia quidem ſolum proportionalia habent latera, alia vero & proportionalia, & ex contraria parte reſpondentia. & ſunt prima quidem ęquiangula & non æqualia: ſecunda vero æqualia, & vnum angulum habentia æqualem, non tamen æquiangula: reliqua autem & æqualia, & æquiangula ſunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XVI.

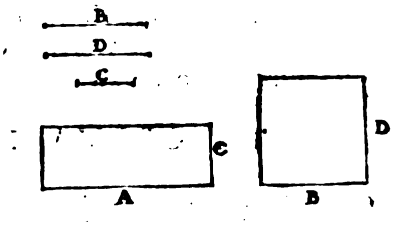
Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale eſt ei rectangulo, quod medijs continetur: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectę lineæ proportionales erũt.



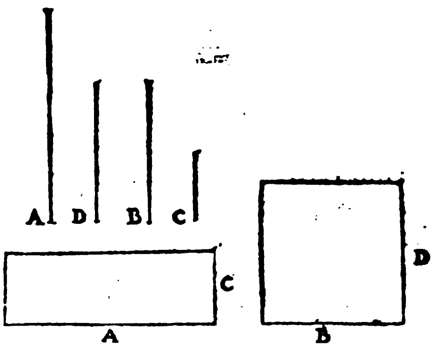
Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, ſitque vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F ęquale eſſe ei, quod ipſis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipſis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipſi quidem F æqualis AG: ipſi vero E æqualis CH: & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur eſt vt AB ad CD, ita E ad F; eſt autem E ęqualis CH, & F ipſi AG: erit vt AC ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, 14.huius. quę circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale eſt parallelogrammo DH. atque eſt parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur; eſt enim AG ęqualis F: parallelogramũ vero DH quod cõtinetur ipſis CD E; cum CH ipſi E ſit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F eſt æquale ei, quod ipſis C D E continetur. Sed rectangulum contentum AB F ſit ęquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. iiſdem enim conſtructis quoniam rectangulum contentum AB F eſt ęquale ei, quod CD E continetur: atque eſt contentum quidem AB F rectangulum B G; etenim AG eſt æqualis F: contentum vero CD E eſt rectangulum DH, quod CH ipſi E ſit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH: & ſunt æquiangula. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, 14.huius. quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad A G: æqualis autem eſt CH ipſi E, & AG ipſi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo ſi quattuor rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum ęquale eſt ei, quod medijs continetur: & ſi rectangulum extremis contentum ęquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale eſt ei, quod à media fit, quadrato: & ſi rectangulum extremis contentum ęquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectę lineæ proportionales erunt.



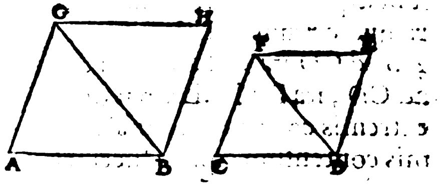
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & ſit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectãgulum cõtentũ A C ęquale eſſe ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipſi D; erit vt A ad B, ita D ad C. 7.quinti. Si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint rectangulum extremis cõtentum eſt æquale ei, quod medijs continetur. Ex antecedente. ergo rectangulum AC contentum eſt æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD eſt ęquale quadrato, quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis D. rectangulum igitur contentum A C eſt æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale ſit quadrato, quod fit ex B. Dico vt A ad B, ita eſſe B ad C. iiſdem enim conſtructis



quoniam rectangulum contentum AC æquale eſt quadrato; quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B eſt rectangulum, quod ipſis BD continetur, eſt enim B ęqualis ipſi D: erit rectangulum contentum A C æquale ei, quod BD continetur. Ex antecedente. Si autem rectãgulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. eſt igitur vt A ad B, ita C ad D. ęqualis autem B ipſi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum eſt æquale ei, quod à media fit, quadrato: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

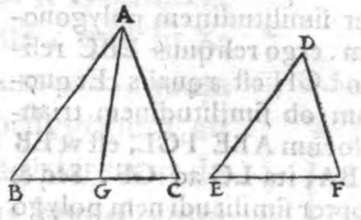


Sit data recta linea AB; datum autem rectilineũ CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitũ rectilineũ deſcribere. 23. primi. Iungatur DF, & ad rectam lineã AB, & ad pũcta in ipſa AB, angulo quidẽ C ęqualis angulus conſtituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB eſt æqualis. 4. huius. ergo æquiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rurſus cõſtituatur ad rectã lineam BG, & ad puncta in ipſa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis GBH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt 4 huius. triangulum FDE triangulo GBH. quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. 11. quinti. oſtenſum autem eſt & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE eſt æqualis ipſi ABH: & præterea angulus quidem ad C angulo ad A ęqualis, angulus vero ad E angulo ad H. ęquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſi angulos habet Diffi. 1. huius. proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE ſimile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptũ eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter ſe ſunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualẽ angulo ad E; & ſit vt AB ad BC, ita DE ad EF; ita vt latus BC homologũ ſit lateri F. Dico ABC triãgulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad EF.



EF.Sumatur enim ipſarum BC EF tertia proportionalis BG,vt ſit,ſicut BC ad EF,ita EF ad BG:& iũgatur GA. Quoniã igitur vt AB ad BC,ita eſt DE ad EF; erit permutando vt AB ad DE,ita BC ad EF.Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG.& vt igitur AB ad DE,ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera,quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent . quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera,quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent,ea inter ſe ęqualia ſunt.æquale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF.Et quoniam eſt vt BC ad EF,ita EF ad BG; ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint,prima ad tertiam duplam proportionem habet eius,quam habet ab ſecundam:habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF.Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF . eſt autem ABG triangulum triangulo DEF ęquale.& triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula inter ſe in dupla ſunt proportione laterum homologorum . quod oſtendere oportebat.

11.huius.

11.quinti.

15.huius.

Diffinit. 10. quinti.

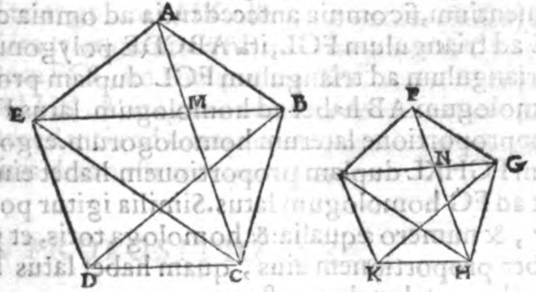
1 huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum: quoniam oſtenſum eſt vt CB ad BG,ita ABC triangulum ad triangulũ ABG,hoc eſt ad triangulũ DEF. quod oſtendere oportebat.

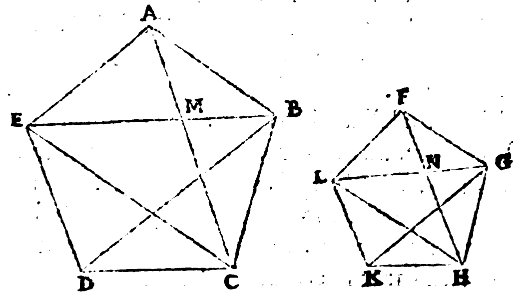
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XX.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis : & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius , quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint ſimilia polygona ABCDE FGHKL,& ſit AB homologum ipſi FG . Dico polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula diuidi,& numero æqualia, & homologa totis : & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EG GL LH. & quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL,angulus BAE angulo GFL eſt æqualis:atque eſt vt BA ad AE,ita GF ad FL . Quoniam igitur duo triangula ſunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia ; circum æquales autem angulos latera proportionalia:erit triangulum ABE triangulo FGL æquiãgulum . ergo & ſimile.angulus igitur ABE ęqualis eſt angulo FGL . eſt autem & totus ABC angulus

6.huius.



gulus æqualis toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE FGL, eſt vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter ſimilitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH latera ſunt proportionalia. ęquiangulum igitur eſt EBC triangulũ triangulo LGH. quare & ſimile. Eadem ratione & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triãgula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc eſt vt proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem eſſe ABE EBC ECD, conſequentia aũt ipſorum FGL LGH LHK: & ABCDE polygonũ ad polygonũ FGHKL duplã proportionẽ habere eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt AB ad FG. Iungantur enim AC FH. Et quoniam propter ſimilitudinem polygonorum angulus ABC eſt ęqualis angulo FGH; 6.huius. atque eſt vt AB ad BC, ita FG ad GH: erit triangulum ABC triangulo FGH ęquiangulum: æqualis igitur eſt angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. pręterea qm̃ ęqualis eſt BAM angulus angulo GFN, oſtenſus autem eſt & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG æqualis. ergo ęquiangulum eſt ABM triangulum triangulo FGN. Similiter oſtendemus & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum eſſe. Vt igitur AM ad MB, ita eſt FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex æquali vt 1.huius. AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triãgulũ ad triãgulũ MBC, & triãgulũ AME ad ipſũ EMC, inter ſe enim ſunt vt baſes. & vt vnũ antecedẽtiũ ad vnũ 12.quinti. conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequẽtia. Vt igitur AMB triãgulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipſum CBE. Sed vt AMB ad BMC, 1.huius. ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triãgulũ ad triangulũ EBC. Eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triãgulũ ad triãgulũ GLH. atq; eſt vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triãgulũ ABE ad triãgulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triãgulum EBC ad triangulum GHL. Similiter oſtendemus iunctis BD GK, & vt BEC triangulum ad triangulum LGH, ita eſſe triangulum ECD ad triangulum LHK. Et qm̃ eſt vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH, & adhuc triangulum ECD ad ipſum LHK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum con 12.quinti. ſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia; ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus Ex antecedente. homologum AB habet ad homologum latus FG; ſimilia enim triangula in dupla ſunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus; quod oportebat demonſtrare.

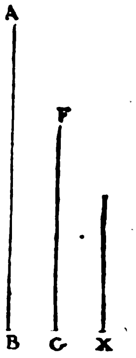
Eodem modo & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in dupla proportione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt & in triangulis.

COROLLARIVM PRIMVM.

Ergo vniuerſe ſimiles rectilineę figurę inter ſe ſunt in dupla

propor-

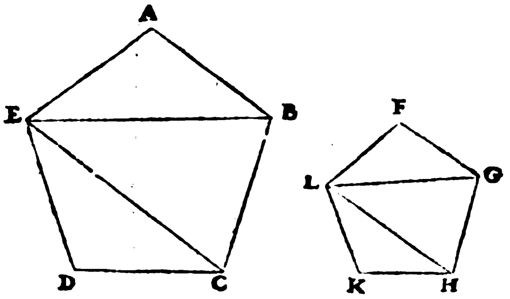
proportione homologorum laterum. & ſi ipſarum A B FG tertiam proportionalem ſumamus, quę ſit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.



COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam. quod oſtendere oportebat.

Oſtẽdemus etiam aliter & expeditius homologa eſſe triãgula.



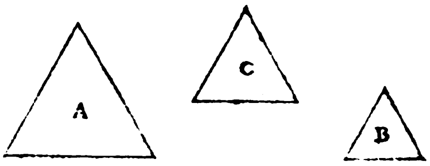
Exponãtur enim rurſus polygona ABCDE FGHKL, & iũgatur BE EC GL LH. Dico vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita eſſe triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH; & triãgulũ CDE ad ipſum HKL. Qm̃ enim ſimile eſt ABE triãgulũ triãgulo FGL; habebit ABE triangulũ ad triangulũ FGL duplã proportionẽ eius, quam habet BE ad GL. (Ex antecedente.) Eadẽ ratione & triãgulũ BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL. eſt igitur vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulũ. (11. quinti.) Rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. eſt igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, (12. quinti.) & reliqua vt in priori demonſtratione. quod ipſum demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

Sit enim vtrumque rectilineorum A B ſimile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe. Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo C, & ipſi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rurſus quoniam ſimile eſt rectilineum B rectilineo C, ęquiangulum ipſi erit, & circum

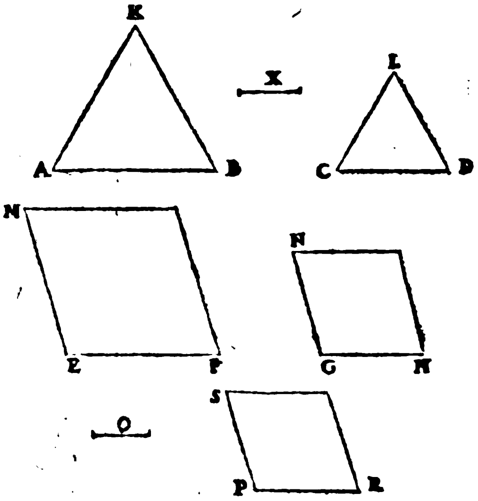
cum



cum æquales angulos latera pruportionalia habebit. Vtrumque igiiur rectilineorum A B ipſi C æquiangulum eſt, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipſi B eſt æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipſi B eſt ſimile. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. Et ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH; & vt AB ad CD, ita ſit EF ad GH. deſcribanturq; ab ipſis quidem AB CD ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea KAB LCD: ab ipſis verò EF GH deſcribantur rectilinea ſimilia, & ſimiliter poſita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſſe rectilineũ MF ad ipſum NH rectilineũ. Sumatur enim ipſarum quidẽ AB CD tertia proportionalis X; ipſarum vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam eſt vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex ęquali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita eſt rectilineum KAB ad LCD rectilineum: vt autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſt rectilineum MF ad NH rectilineum. Sed ſit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ MF ad rectilineũ NH. Dico vt AB ad CD, ita eſſe EF ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR. & deſcribatur ab ipſa PR alterutri rectilineorum MF NH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum SR. Quoniam igitur eſt vt AB ad CD, ita EF ad PR: & deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB CD ſimilia & ſimiliter poſita KAB LCD rectilinea, ab ipſis vero EF PR ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum. ponitur autem & vt rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo vt rectilineũ MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quod cum rectilineum MF ad vtrumque ipſorum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipſi SR ęquale. eſt autem ipſi ſimile, & ſimiliter poſitum. Ergo GH eſt æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita eſt EF ad PR, æqualis autem PR ipſi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectę lineę proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. & ſi rectilinea, quæ ab ipſis

18. huius.

11. huius.

Coro. 20. huius.

11. quinti.

12. huius.

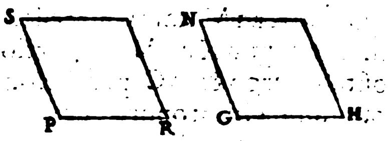
9. quinti.

*

ab ipſis fiunt, ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonſtrare.

LEMMA.

At vero ſi rectilinea æqualia & ſimilia ſint, homologa ipſorũ latera inter ſe ęqualia eſſe, hoc modo demonſtrabimus.

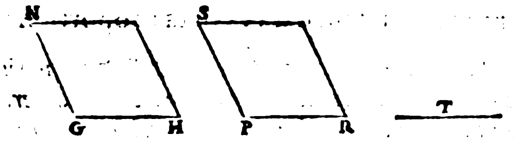


Sint æqualia & ſimilia rectilinea NH, SR: & ſit vt HG ad GN, ita RP ad PS, Dico RP ipſi HG eſſe ęqualem. Si enim inæquales ſint, vna ipſarum maior erit. Sit RP maior, quàm HG. Et quoniam eſt vt RP ad PS, ita HG ad GN; & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN. maior autem eſt PR, quàm HG. ergo & PS quàm GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN eſt maius. Sed & æquale, quod fieri non poteſt. non igitur inæqualis eſt PR ipſi GH. ergo æqualis ſit neceſſe eſt. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH eſt æqualis PR] *Demonſtrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non poteſt. Sed tamen licet etiam recta demonſtratione vti, in hunc modum.* *

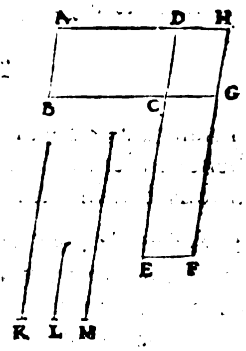
LEMMA.



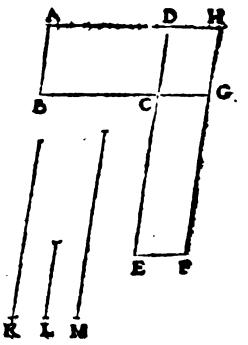
Sint æqualia & ſimilia rectilinea NH SR: ſitq́; latus GH homologũ ipſi PR: Dico GH ipſi PR æqualẽ eſſe. *Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliã quae ſit T, erit GH ad T, vt rectilineũ NH ad rectilineũ SR. ergo GH eſt aequalis ipſi T. Sed cũ tres rctae linae GH PR T ſint proportionales, erit rectangulũ contentum GH T, hoc eſt quadratum GH aequale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipſi PR eſt aequalis. quod oportebat demonſtrare.* 21 huius. Corol. 20 huius. 17. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.



Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrãmum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE. ponatur enim vt BC ſit in directum ipſi CG. ergo & DC ipſi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq́, recta linea quędã K: & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L; vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipſius K ad L: & L ad M eędem ſunt, quę proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt vt BC ad CG, ita 14. primi. 12 huius. 1. huius.



AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ſed vt BC ad CG, ita K ad L: erit & vt K ad L, ita parallelogrāmum AC ad CH parallelogrammum. Rurſus quoniam eſt ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad paralellogrammum CF: vt autem DC ad CE, ita L ad M, & vt L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrāmū. Itaque cū oſtenſum ſit, vt K quidē ad L, ita AC parallelogrāmū ad parallelogrāmū CH: vt aūt L ad M, ita parallelogrammū CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum GF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compoſitam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. quod oportebat demonſtrare.

11. quinti.

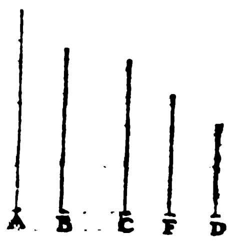
11. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demōſtratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compoſitam; ſunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio compoſita eſt K ad M. Quòd ſi ex tribus componenda ſit proportio, rurſus ex ea, quę ex duabus conſtat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quę quidem ex tribus compoſita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.



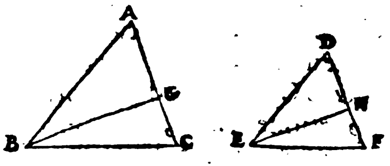
Sint datae proportiones A ad B, & C ad D, quarū proportio C ad D ſit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionem A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quae inter C & D media ſtatuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatā eſſe à proportione C ad D, & proportionem, quę relinquitur eſſe eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, ſi auferatur vna dictarum proportionum, videlicet C ad F, quae eſt A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud eſt. quod facere oportebat.

12. huius.

Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur & auferantur ex iam dictis facile conſtare poteſt, & ex ijs, quae tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnae conſtructionis Ptolemęi propoſitione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quae ab his non multum abhorrent; & elementorum loco eſſe poſſunt.

THEOREMA. I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo eſt æqualis, inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus ęqualem angulum comprehendentibus, continentur.



Sint triangula ABC DEF, ſitq́; angulus A angulo D aequalis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH ſimile; eſt enim angulus ad A aequalis angulo ad D, & angulus BGA rectus aequalis recto EHD. ergo & reliquus reliquo aequalis. Vt igitur GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod ſit ex BG & AC ad rectangulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC. & ſimiliter vt HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igitur ex BG & AC ad rectangulum BAC eſt vt rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF; & permutando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF, vt BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Sed rectanguli ex BG & AC dimidium eſt ABC triangulum ex 41 primi; habent enim eandem baſim AC, & altitudinem eandem BG: & rectaaguli ex EH & DF dimidium triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habet, quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF. Quare triangula quorum vnus angulus vni angulo eſt aequalis inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. quod demonſtrare oportebat.

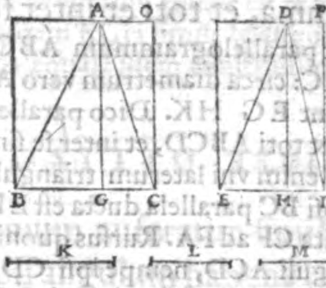
4.huius. 1.huius. 11.quinti. 15.quinti.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur parallelogramma etiam ęquiangula inter ſe proportionem habere eandem, quam rectangula, quæ ipſorum lateribus continentur, cum ſint eiuſmodi triangulorum dupla. 15.quinti.

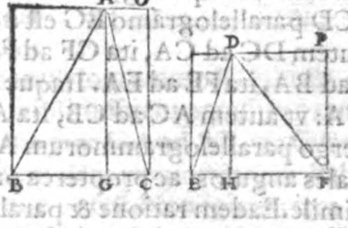
THEOREMA II.

Triangula et parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitā ex proportione baſium, et proportione altitudinum.

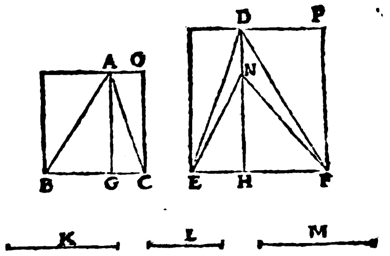


Sint triangula ABC DEF: & ducantur perpendiculares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habere compoſitam ex proportione baſis BC ad baſim EF; & ex proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG eſt aequalis DH, vel inęqualis, & rurſus vel BC eſt aequalis EF vel inęqualis. Sit primum AG aequalis DH, & BC inęqualis ipſi EF, fiatq; vt BC ad EF, ita recta linea quędam K ad L: & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad triangulum DEF eſt, vt baſis BC ad EF baſim ex prima huius, hoc eſt vt K ad L. & cum DH ſit aequalis AG, erit M ipſi L aequalis: triangulumq; ABC ad ipſum DEF, vt K ad M: proportio autem K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, & proportione L ad M, hoc eſt ex proportione baſis BC ad baſim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demonſtrabitur, ſi baſis BC ſit aequalis baſi EF, cum inęquales ſint altitudines AG DH: erunt enim KL inter ſe aequales, & ex ijs, quae demonſtrauimus ad primam huius, triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M, hoc eſt quam K ad M. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF proportionem habet compoſitam ex proportione K ad L, hoc eſt baſis BC ad baſim EF. & ex proportione L ad M, hoc eſt altitudinis AG ad DH altitudinem. Quod ſi baſes BC EF aequales ſint, itemq; altitudines aequales AG DH, nihilominus idem ſequetur, nam KLM inter ſe aequales erunt, & triangulū ad triangulū proportionem habebit compoſitam ex proportione K ad L. & L ad M. hoc eſt ex proportione baſium & proportione altitudinū. Demq; ſi baſes BC EF inaequales ſint, & ſimiliter inęquales altitudines AG DH. Ponatur AG minor, quam

11.huius. 7.quinti.



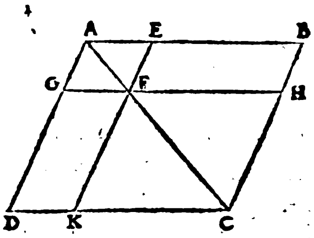
DH,



DH. & ab ipſa D H abſcindatur H N aequalis AG: iunganturq; EN NF; & rurſus fiat vt baſis B C ad baſim E F, ita K ad L: vt autem N H ad HD, hoc eſt vt AG ad H D, ita L ad M. Quoniam igitur triangula ABC NEF eandem habent 1.huius. *altitudinem, inter ſe erunt vt baſes. quare triangulum A B C ad triangulum N E F eſt vt B C ad EF, hoc eſt vt K ad L. Sed triangulum N E F ad* Ex demonſtratis 1. huius. *triangulnm DEF eſt vt altitudo NH, vel A G ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex aequali igitur triangulum A B C ad triangulum D E F, eſt vt K ad M. habet aūt K ad M proportionē compoſitā ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulū ABC ad triangulū DEF proportionē habet compoſitā ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc eſt ex proportione baſis BC ad baſim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinē DH. Sed cum trianguli ABC duplū ſit parallelogrāmū B O, & trianguli* 15.quinti. *DEF duplum parallelogrammum E P; habebit parallelogrammum B O ad parallelogrammum EP proportionem compoſitam ex proportione baſis BC ad baſim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. triangula igitur & parallelogramma inter ſe proportionem habent cōpoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, et toti et inter ſe ſimilia ſunt.

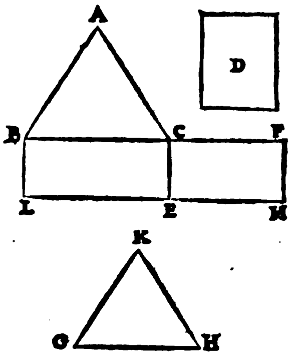


Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC: circa diametrum vero A C parallelogrāma ſint E G H K. Dico parallelogramma E G HK, et toti ABCD, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim vni laterum trianguli A B C, videli- 2.huius. cet ipſi BC parallela ducta eſt E F, erit vt B E ad EA, ita CF ad FA. Rurſus quoniam vni laterum triangulI ACD, nempe ipſi CD ducta eſt parallela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. Sed vt 11.quinti. C F ad F A; ita oſtenſa eſt et B E ad E A. ergo et vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendoq; vt BA ad AE, ita DA ad AG, et permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallegrammorum igitur ABCD EG latera, quę circa communem angulum BAD proportionalia ſunt. Et quoniam parallela 29.primi. eſt GF ipſi DC, angulus quidem AGF eſt æqualis angulo A D C; angulus uero GFA ęqualis angulo DCA; et angulus DAC eſt communis duobus triāgulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione et triāgulum A C B æquiangulum eſt triangulo A F E. totum igitur parallelogrammum 4.huius. ABCD parallelogrāmo EG eſt æquiangulum. ergo ut AD ad D C, ita AG ad GF: vt autem DC ad CA, ita GF ad FA: et vt A C ad C B, ita A F ad F E; et præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam oſtenſum eſt vt D C ad C A, ita eſſe G F ad FA: vt autem AC ad CB, ita AF ad F E; erit ex æquali vt D C ad C B, ita G F ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia ſunt latera, quę circum æquales angulos; ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogremmo EG eſt ſimile. Eadem ratione & parallelogrammum ABCD ſimile eſt parallelogrammo KH. Vtrumque igitur ipſorum EG HK parallelogrammorum parallelogram- 21.huius. mo ABCD eſt ſimile. quæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt. parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia. quod oſtendere oportebat.

PRO-

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXV.

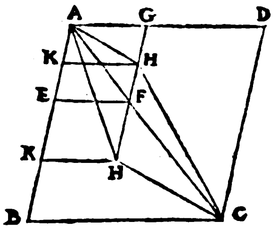
Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.



Sit datum quidem rectilineum, cui oportet ſimile
conſtituere ABC,cui autem æquale ſit D.oportet
ipſi ABC ſimile, & ipſi D æquale idem conſtituere.
applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triã-
gulo ABC æquale parallelogrammum B E; ad re- 44.primi.
ctam vero CE applicetur parallelogrammum C M
æquale ipſi D, in angulo FCE, qui CBL angulo eſt
æqualis.in directum igitur eſt BC ipſi CF,& LE ipſi
EM.Sumatur ipſarum BC CF media proportiona- 14.primi.
lis GH.& ab ipſa GH deſcribatur triangulum KGH 13.huius.
ſimile & ſimiliter poſitum triangulo ABC. Et quo- 18.huius.
niam eſt vt B C ad G H, ita G H ad C F, ſi autem
tres rectę lineæ proportionales ſint, vt prima ad Cor.20. huius.
tertiam, ita eſt figura, quæ fit à prima,ad eam,quæ
à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam:erit vt B C ad C F, ita A B C triangu-
lum ad triangulum K G H. Sed & ut B C ad C F, ita parallelogrammum B E ad
EF parallelogrammum. & vt igitur triangulum A B C ad triangulum K G H, Ita 11.quinti.
BE parallelogrammum ad parallelogrammum E F. quare permutando vt A B C
triangulum ad parallelogrammum BE,ita triangulum KGH ad EF parallelogram-
mum. eſt autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur eſt
& KGH triangulũ parallelogrãmo EF.Sed EF parallelogrãmũ ęquale eſt rectilineo
D. ergo & triangulum KGH ipſi D eſt ęquale.eſt autem KGH ſimile triangulo AB
C.Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt K
GH. quod facere oportebat.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

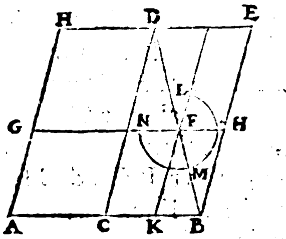
Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti.



A parallelogrammo enim ABCD parallelogram-
mum AF auferatur,ſimile ipſi ABCD,& ſimiliter po-
ſitum,communemq; ipſi angulum habens DAB. Di-
co parallelogrammum ABDD circa eãdem eſſe dia-
metrum parallelogrammo AF. non enim,ſed ſi fieri
poteſt,ſit ipſorum diameter AHC & producatur G
F vſque ad H;ducaturq; per H alterutri ipſarum AD
BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem dia-
metrum eſt ABCD parallelogrammum parallelo-
grammo KG;& erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG ſimile.ergo 24.huius.
vt DA ad AB,ita GA ad AK.eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammo- 1.diff.huius.
rum ABCD EG,vt DA ad AB,ita GA ad AE. et vt igitur GA ad AE, ita GA ad A 11.quinti.
K. Quòd cum GA ad utramque ipſarum AK AE eandem proportionem habeat,
erit AE ipſi AK ęqualis, minor maiori,quod fieri non poteſt.Non igitur circa ean- 9.quinti.
dem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH.Quare cir-
ca eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogram-
mum auferatur ſimile toti, et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens,
circa eandem diametrum eſt toti. quod demonſtrare oportebat.

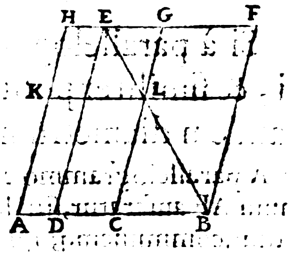
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur; maximũ eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.



A Sit recta linea AB; ſeceturq; bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammũ AD deficiens figura parallelogramma DB, ſimili & ſimiliter poſita ei, quæ a dimidia ipſius AB deſcripta eſt, hoc eſt à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ipſi DB, maximum eſſe AD. applicetur enim ad re- B ctam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB ſimili et ſimiliter poſita ipſi DB. Dico AD parallelogrãmum parallelogrammo AF maius eſſe. Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eãdem diametrum ſunt. Ducatur eorum diameter DB, et deſcribatur figura. Quoniam igitur CF eſt æquale ipſi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE eſt ęquale. Sed CH eſt æquale CG, quoniam et recta linea AC ipſi CB, ergo et GC ipſi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF eſt æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc eſt AD parallelogrammum, parallelogrammo AF eſt maius. omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ei, quæ à dimidia deſcribitur; maximum eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.
43. primi.
36. primi.



C ALITER. Sit enim rurſus AB ſecta bifariã in pũcto C, et applicatum ſit AL. deficiens figura LB. et rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrãmum AE deficiens figura EB ſimili, et ſimiliter poſita ei, quæ à dimidia AB deſcribitur, videlicet ipſi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiã eſt applicatum maius eſſe parallelogrammo AE. Quoniam enim ſimile eſt EB ipſi LB, circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter EB, et deſcribatur figura. Et quoniã LF ęquale eſt LH, etenim FG ipſi GH eſt æqualis: erit LF ipſo EK maius. eſt aũt LF æquale DL. maius igitur eſt et DL ipſo EK. commune apponatur KD. ergo totum AL toto AE eſt maius. quod oportebat demonſtrare.

36. primi.
43. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

A **Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]**

Deſcribatur à recta linea CB parallelogrammum quodcumque libuerit DB, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, ſimili & ſimiliter poſita ei, quae à dimidia ipſius AB deſcripta eſt.

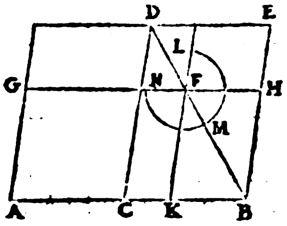
Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF deficiens figura B parallelogramma FB, ſimili et ſimiliter poſita ipſi DB.

Sumatur in recta linea AB inter CB quodvis punctum K, & ab ipſa KB deſcribatur parallelogrammum ſimile & ſimiliter poſitum ipſi DB parallelogrammo, quod ſit KBHF, et HF ad G

producatur

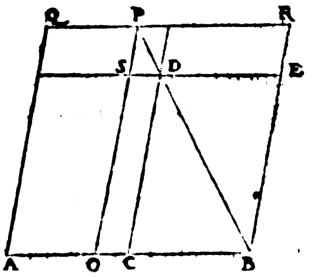
producatur. erit rurſus ad rectam lineam A B applicatum parallelogrammum A F deficiens figura parallelogramma FB, ſimili & ſimiliter poſita ipſi DB.

C



Sit enim rurſus ab ſecta bifariam in puncto C. Nō *videtur hęc alia demonſtratio, ſed alius caſus. quare theorema fortaſſe in hunc modū aptius, et manifeſtius explicabitur.*

Sit recta linea AB, ſeceturq́; bifariam in C, et ab ipſa CB deſcribatur parallelogrammum vtcumque DB, et totum parallelogrammum A B E compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD, deficiens figura parallelogramma DB ſimili & ſimiliter poſita ei, quę deſcripta eſt à dimidia ipſius A B, hoc eſt à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris ſimilibus et ſimiliter poſitis ipſi DB, maximum eſſe AD. Iugatur enim DB parallelogrammi DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda ſunt, vel maior quàm dimidia ipſius AC vel minor. Sumatur primo maior, & ſit A K; atque à puncto K ipſi BE parallela ducatur K F, quae diametro D B in F occurrat; & per F ducatur G F H parallela ipſi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, ſimili & ſimiliter poſita ipſi D B; quippe quae circa eandem diametrum conſiſtat. Dico igitur AD maius eſſe quàm AF. Quoniam enim ſuplementum CF eſt aequale ipſi FE; communi appoſito FB, erit totum CH toti KE aequale. at CH eſt aequale GC, quoniam & AC ipſi CB. ergo & GC aequale eſt KE. apponatur vtrique commune CF. totum igitur AF gnomoni LMN eſt aequale. quare & DB parallelogrammum, hoc eſt AD maius erit quàm A F. 43.primi.



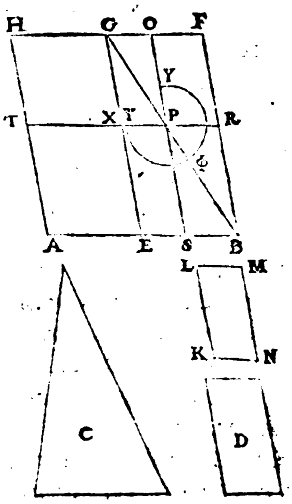
Sumatur deinde A O minor, quàm dimidia AC, & per O ipſi BE parallela ducatur O P, quae cum diametro B D producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipſi AB, & ſecunda figura compleatur. Erit rurſus ad AB applicatum aliud parallelogrammum A P deficiēs figura parallelogramma PB ipſi D B ſimili & ſimiliter poſita. Dico rurſus AD quàm AP maius eſſe. Quoniam enim parallelogrāmum D R eſt aequale parallelogrammo D Q, 36.primi. *erit DR maius quàm SQ. Sed OD eſt aequale D R. ergo et* 43.primi. *OD ipſo SQ eſt maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum A P maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris ſimilibus, & reliqua, quae ſequuntur. quod oportebat demonſtrare.*

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet ſimile deficere.

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, ſit C, non maius exiſtens eo, quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtētibus defectibus: cui autem oportet ſimile deficere ſit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit ipſi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipſa EB deſcribatur ſimile, & ſimiliter poſitum ipſi D; quod ſit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel ęquale 18.huius.

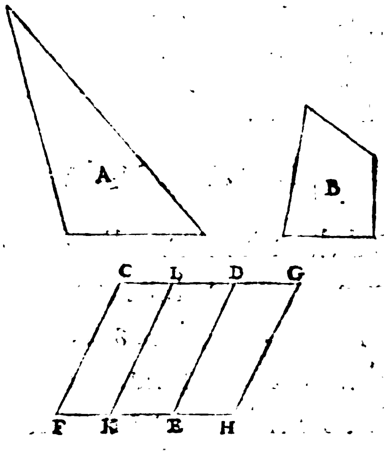
eſt ipſi



eſt ipſi C, vel eo maius, ob determinationem. & ſi quidem AG ſit ęquale C, factum iam erit, quod pro ponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma GB, ipſi D ſimili. Si autem non eſt ęquale, erit H E maius quàm C; atque eſt H E æquale G B. ergo & G B quàm C eſt maius. quo autem G B ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile & ſimiliter poſitum idem conſtituatur KLMN. Sed D eſt ſimile GB. qua re & K M ipſi G B ſimile erit. Sit igitur recta linea quidem KL homologa ipſi GE, LM vero ipſi GF. & quoniã æquale eſt GB ipſis C KM, erit GB ipſo KM maius. maior igitur eſt recta linea G E ipſa K L; et GF ipſa LM. ponatur GX æqualis KL, & G O æqualis LM, & compleatur X G O P parallelogrammum. ęquale igitur eſt & ſimile GP ipſi KM. Sed KM ſimile eſt GB. ergo & GP ipſi GB eſt ſimile. circa eandẽ igitur eſt diametrũ GP ipſi GB. Sit ipſorum diameter GPB, & figura deſcribatur. Itaque qm̃ GB eſt æquale ipſis C KM, quorũ GP eſt æquale KM, erit reliquus Υφϒ gnomon æqualis reliquo C. Et qm̃ OR eſt æquale XS, commune apponatur PB. totum igitur OB toti XB eſt ęquale. Sed XB eſt æquale T E, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipſi OB ęquale. cõmune apponatur XS. ergo totum TS eſt æquale toti gnomoni Υφϒ. At Υφϒ gnomon ipſi C oſtenſus eſt ęqualis. & TS igitur ipſi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogrãma PB ipſi D ſimili, quoniã & PB ſimile eſt ipſi GP. quod facere oportebat.

25.huius. (beside "idem conſtituatur KLMN")
21.huius.
26.huius.
43.primi.
36.primi.

F. C. COMMENTARIVS.



Quo autem GB ſuperat C, ei exceſſui ęquale, ipſi vero D ſimile, & ſimiliter poſitum idem conſtituatur] *Vt autem exceſſus, quo alterum rectilineum alterum ſuperat, facile inueniatur libuit, ſequens problema apponere.*

Duorum rectilineorũ inæqualiũ exceſſum, quo maius ſuperat minus, inuenire.

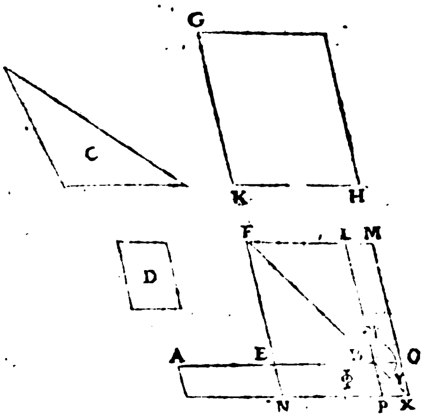
Sint duo rectilinea inęqualia A B, quorum maius ſit A. oportet inuenire exceſſum, quo rectilineum A ipſum B ſuperat. Dato enim recti lineo A in quouis angulo aequale parallelogrãmum conſtituatur CDEF: & ad rectam lineam DE in angulo aequali ipſi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE aequale rectilineo B. erit recta linea DG in directum ipſi CD, & EH in directum FE. eſt igitur vt parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc eſt vt rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH. atq; eſt rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur eſt recta linea FE ipſa EH. Itaq; à recta linea FE abſcindatur EK ipſi EH aequalis, & à puncto K alterutri ipſarum FC ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammo DH aequale, & ob id parallelogrammum FL eſt exceſſus, quo parallelogrammum FD ſuperat parallelogrammum DH, hoc eſt quo rectilineum A ipſum B rectilineum ſuperat. Duorum igitur rectilineorum inęqualium A B exceſſus inuentus eſt. quod feciſſe oportuit.

54.primi.
14.primi.

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXIX.

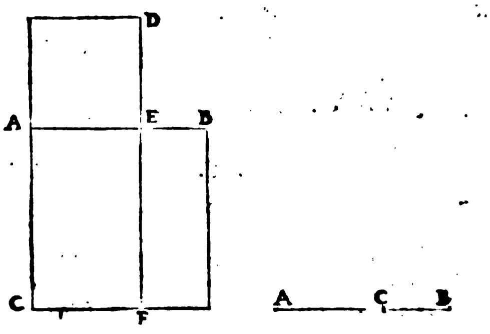
Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datę.



Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipſam AB applicare, ſit C; cui autem oportet ſimile excedere D. Itaq; oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogrãma ſimili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipſi D ſimile, & ſimili- 18. huius. ter poſitum parallelogrammum deſcribatur BF. & vtriſque quidem BF, C ęquale, ipſi vero D ſimile, & ſimiliter poſitum idem conſtituatur GH. 25. huius. Simile igitur eſt GH ipſi FB. ſitq; KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipſi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius eſt ipſo FB, erit recta linea KH maior quàm FL, & KG maior quàm FE. producantur FL FE: & ipſi quidẽ KH æqualis ſit FLM; ipſi vero KG æqualis FEN: & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale eſt & ſimile ipſi GH. Sed GH eſt ſimile EL. & MN igitur ip- 21. huius. ſi EL ſimile erit; ac propterea circa eandem diametrum eſt EL ipſi MN. 26. huius. Ducatur ipſorum diameter FX, & figura deſcribatur. Itaque quoniam GH ipſis EL C eſt ęquale, ſed GH eſt æquale MN; erit & MN ęquale ipſis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur τΥφ gnomon ipſi C eſt æqualis. Et quoniam AE eſt æqualis EB, ęquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc eſt ipſi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale eſt gnomoni φΥτ. Sed φΥτ gnomon eſt æqualis C. ergo & AX ipſi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicatum eſt AX, excedens figura parallelogrãma PO ipſi D ſimili; quoniã & ipſi EL ſimile eſt OP. quod fecisſe oportebat. 24. huius.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione ſecare.



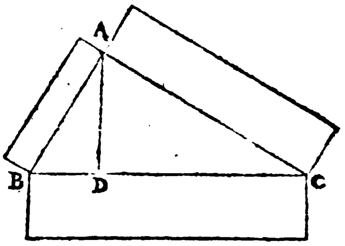
Sit data recta linea terminata AB. oportet ipſam AB extrema, ac media ratione ſecare. Deſcribatur enim ex A B quadratum BC, & ad AC ipſi BC 46. primi. æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipſi BC Ex antecedente. ſimili. quadratum autem eſt BC. ergo & AD, quadratum erit. Et quoniã BC eſt ęquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD eſt æquale. eſt autem & ipſi ęquiãgulũ. ergo ipſorum BF AD latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. 14. huius. vt igitur FE ad ED, ita eſt AE ad EB. eſt autem FE æqualis 34. primi. AC, hoc eſt ipſi AB. & ED ipſi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB: Sed AB maior

14. quint. eſt quàm AE. ergo AE quàm EB eſt maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in E, & maior ipſius portio eſt AE. quod facere oportebat.

ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipsā AB extrema ac media rōne ſecare.
11. ſecundi. Secetur enim AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC æquale ſit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale eſt quadrato ex AC,
17. huius. erit vt BA ad AC, ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione ſecta eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quę fit ex BC æqualem eſſe eis, quæ ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectāgulo ABC ab angulo recto, qui eſt ad A ad BC
8. huius. baſim perpendicularis ducta eſt AD; erunt triāgula ABD ADC, quæ ſunt ad perpendicularē ſimilia toti ABC, & inter ſe ſe. Et quoniam ſimile eſt ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. Quòd cū
Coro. 20. huius. tres rectæ lineę proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quę ex ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. Vt igitur CB ad BD, ita figura, quę fit ex CB ad eam, quæ ex BA, ſimilem, et ſimiliter deſcriptam. Eadem
A ratione et vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex CA. quare et vt BC ad ipſas BD DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas. æqualis autem BC ipſis BD DC. ergo figura, quę fit ex BC æqualis eſt eis, quę ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. quod oſtendere oportebat.

ALITER. Quoniam ſimiles figuræ ſunt in dupla proportione laterum homo
20. huius. logorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad BA. habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex
11. quinti. BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura, quæ ex BC ad eam, quę ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione & vt figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum. & vt igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ita quod
47. primi. ex BC quadratum ad quadrata, quę ex BA AC. quadratum autem, quod ex BC æquale eſt eis, quæ ex BA AC quadratis. ergo & figura, quæ fit ex BC eſt æqualis eis, quę ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. quod oſtēdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare & vt BC ad ipſas BD DC, ita figura, quę ex fit BC ad eas, quæ ex BA AC ſimiles, & ſimiliter deſcriptas.] *Quoniā enim eſt vt CB ad BD, ita figura, quae fit à CB ad eam, quae à BA ſimilem, & ſimiliter deſcriptam; erit & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quae fit à BA ad eam, quae à BC ſimilem & ſimiliter deſcriptam. prętera cum ſit vt BC ad CD, ita figura, quae fit à BC ad eam, quae à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quae fit ab AC ad eam, quae à CB. Sit igitur figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC magnitudo ſecunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quae fit ab*

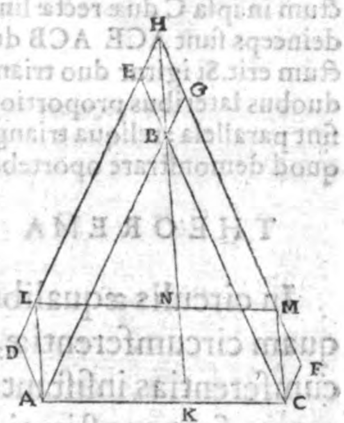
AC

AC magnitudo quinta & recta linea DC ſexta. Itaque prima magnitudo ad ſecundam, eſt vt tertia ad quartam; quinta vero ad ſecundam, vt ſexta ad quartam. ergo ex vigeſimaquarta quinti libri compoſita prima & quinta ad ſecundam erit, vt compoſita tertia & ſexta ad quartam, hoc eſt figurae quae ſiunt à BA AC ad eam, quae à BC erunt vt rectae lineae BD DC ad rectam BC & rurſus conuertendo figura, quae ſit à BC ad eas, quae à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quę à BC ad eas, quę à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. **B**

Hoc ſimiliter concludemus, vt proxime dictum eſt, ex vigeſima quarta quinti. erit enim figura, quae ſit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC ſecunda; quadratum ex BA tertia; & quadratum ex BC quarta; figura vero, quae ſit ab AC quinta; & quadratum ex AC ſexta. Hoc theoremate multo vniuerſalius eſt illud, quod à Pappo demonſtratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

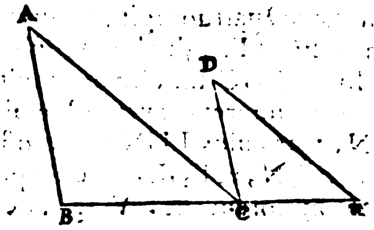
Si ſit triangulum ABC, & ab ipſis AB BC deſcribantur quæuis parallelogramma ABED BCFG; & lineæ DE FG producantur ad H, iungaturque HB: fient parallelogramma ABED BCFG æqualia parallelogrammo contento AC HB, in angulo qui vtriſque BAC DHB ſit æqualis.



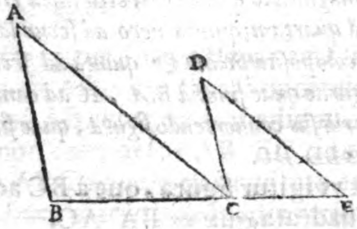
Producatur enim HB ad K, & per A C ipſi KH parallelæ ducantur AL CM; & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum eſt ALHB; erunt AL BH ę-
quales, & parallelæ. Similiter æquales & parallelę MC HB. ergo & LA MC æquales & parallelæ ſint neceſſe 34.primi. 30.primi.
eſt; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur eſt ALMC in angulo LAC, hoc eſt in angulo æquali vtriſque BAC DHB. eſt enim angulus DHB ipſi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammum ęquale eſt parallelogrammo LABH, etenim in eadem baſi AB, & in eiſdem parallelis AB DH conſiſtit: parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN eſt ęquale, cum ſit in eadem baſi LA, & in eiſdem parallelis LA HK: erit parallelogrammũ ADEB ęquale parallelogrammo LAKN. et ob eãdem cauſſam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogramma igitur DABE BGFC parallelogrammo LACM æqualia ſunt, hoc eſt ei, quod AC HB continetur, in angulo LAC, qui eſt æqualis vtriſque BAC BHL. Atque hoc multo vniuerſalius eſt, quàm quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonſtratur. 33 primi. 34.primi. 35.primi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipſorum etiam ſint parallela, reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt.



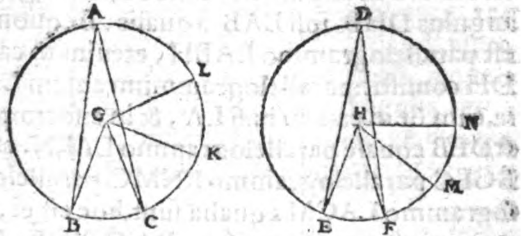
Sint duo triangula ABC DCE, quę duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt ſit ſicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC, et AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directũ eſſe. Quoniam enim AB parallela eſt DC, et in ipſas incidit recta linea AC; erunt anguli 29.primi.



alterni BAC ACD æquales inter ſe ſe. Eadẽ ratione et angulus CDE æqualis eſt angulo ACD. Quare et BAC ipſi CDE eſt ęqualis. Et quoniam duo triãgula ſunt ABC DCE, vnũ angulũ, qui ad A, vni angulo qui ad D æqualem habentia, circum ęquales autem angulos latera proportionalia, quòd ſit vt BA ad AC,
6.huius. ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE. oſtenſus autem eſt et angulus ACD ęqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC eſt æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales ſunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis ſunt ęquales. et anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui
4.primi. deinceps ſunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipſi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta eruut. quod demonſtrare oportebat.

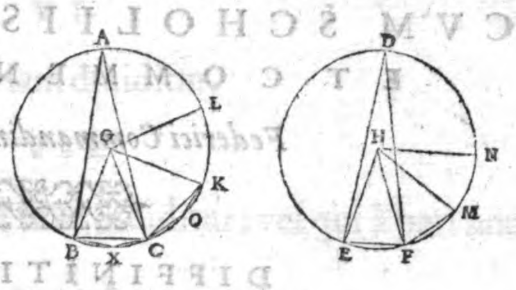
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant. Adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.



Sint ęquales circuli ABC DEF; et ad centra quidem ipſorum GH ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico vt circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF: et adhuc ſectorẽ BGC ad EHF ſectorem. Ponantur enim circumferentię quidem BC ęquales quotcumque deinceps CK KL; circumferentię vero EF, rurſus ęquales quotcumque FM MN: et iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circumferentiæ
27.tertij. BC GK KL inter ſe ſunt ęquales, et anguli BGC CGK KGL inter ſe æquales erũt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumfrentiæ BC, totuplex eſt et BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione et quotuplex eſt circũferentia NE circũferentię EF, totuplex et EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN, et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et ſi circumferentia BL maior eſt circumferentia EN, maior erit et BGL angulus angulo EHN: et ſi minor, minor. Quattuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circũferentijs BC EF: et duobus angulis BGC EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem BC, et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, et BGL angulus; circumferentiæ vero EF, et EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferẽtia EN, et angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferẽtia BL ſuperat circumferentiam EN, et BGL angulũ ſuperare angulum EHN, et ſi æqualis, ęqualem, et
Diffi.5 quinti. ſi minor, minorem eſſe. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus

angulus BGC ad angulum EHF. Sed vt BGC angulus ad angulum EHF, ita 15.quinti. angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriuſque eſt duplus. et vt igitur 20.tertij. BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis ęqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtũt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentiam inſiſtant. Dico inſuper, et vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita eſſe ſectorem GBC ad HFE ſectorem. Iũgantur enim BC CK, et ſumptis in circumferentijs BC CK: punctis X O, iungantur et BX XC CO OK. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales ſunt, et angulos ęquales continẽt; erit et baſis BC baſi CK æqualis. 4.primi. æquale igitur eſt et GBC triãgulum triangulo GCK. Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK eſt æqualis, et reliqua circũferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis eſt reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare et angulus BXC 27.tertij. angulo COK eſt ęqualis. ſimilis igitur eſt BXC portio portioni COK: et ſunt in 11.dif. tertij. ęqualibus rectis lineis BC CK. quę autem in æqualibus rectis lineis ſimiles circulorũ 24.tertij. portiones, et inter ſe ęquales ſunt. ergo portio BXC eſt æqualis portioni COK. eſt autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur ſector BGC toti ſectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL ſector vtrique ipſorum GKC GCB eſt æqualis. Tres igitur ſectores BGC CGK KGL æquales ſunt inter ſe. Similiter et ſectores HEF HFM HMN inter ſe ſunt æquales. quotuplex igitur eſt LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex eſt et GBL ſector ſectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex eſt circumferentia NE circũferentiæ EF, totuplex eſt et HEN ſector ſectoris HEF. quare ſi circumferentia BL circumferentię EN eſt ęqualis, et ſector BGL ęqualis eſt ſectori EHN. et ſi circumferentiæ BL ſuperat circumferentiã EN, ſuperat et BGL ſector ſectorem EHN, et ſi minor minor. Quattuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentijs, duobus uero ſectoribus GBC EHF, ſumpta ſunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC et GBC ſectoris circumferentia BL et GBL ſector. circumferentię vero EF, et ſectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN ſector. atque oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, et ſectorem BGL ſuperare ſectorem EHN. et ſi æqualis ęqualem eſſe; et ſi minor, minorem. eſt igitur vt BC circumferentia 5.diffi.quinti. ad circumferentiam EF, ita ſector GBC ad HEF ſectorem. quod oſtendere oportebat.



COROLLARIVM

Perſpicuum etiam eſt, et vt ſector ad ſectorem, ita eſſe angulum ad angulum. 11.quinti.

SEXTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER SEPTIMVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, qua vnumquodque corũ, quæ ſunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus conſtans multitudo.

III.

Pars eſt numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, ſi ter dicetur tertia, ſi quater quarta. & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumque ipſorum metitur. nam ſi communis eorum menſura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; ſi vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicentur tres quartae. Quòd ſi maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis menſura minorem metitur, numerantem, uel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis menſura maiorem metitur, denominantem, ſeu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex eſt maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; ſi ter, triplus; ſi quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

V I.

Par numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

V I I.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

V I I I.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

SCHOLIVM.

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagoreorum pariter parem, qui ad vnitatem vſque bifariam diuiditur; vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi eſt pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim ſex ſunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam ſi quattuor ter ſumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. At περισσάρτιος, *hoc eſt impariter par eſt duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & ſimpliciter quod perfectum nomen eſt in compoſitione, per illud dicimus numerū metiri alium numerum. Itaque ſciendum eſt* περισσάρτιον, *hoc eſt impariter parem à pythagoreis ſic dictum, plures diuiſiones ſuſcipere, quæ in partes æquales fiunt, nō tamē ad vnitatē vſq; diuiſionē procedere. Nouit autem hunc & in ipſe Euclides; cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipſum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum ſignificauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina impoſita non ſunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.*

I X.

Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C. COMMENTARIVS

Ex diffinitione octaua,& nona,& ex ijs,quae in nono libro traduntur,apparet Euclidem pariter parem numerū appellare eū,quē par numerus per numerum parem metitur,ſiue ſit ex numeris à binario duplatis,ſiue non: & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur,ſiue dimidium habeat imparem,ſiue parem.numeros enim à binario duplatos ipſe pariter pares tantum appellat,& eos,qui dimidium imparem habent vocat pariter impares tantum.eos vero,qui neque à binario duplati ſunt,neque dimidium habent imparem,& pariter pares,& pariter impares dicit.At Nicomacho,Boetioq; paris numeri ſpecies tres ſunt;Vnà quae dicitur pariter par,alia quae pariter impar,& tertia, quae impariter par. Pariter par numerus eſt,qui pōt in duo paria diuidi,eiusq; pars in alia duo paria,& rurſus partis pars in alia duo paria;& hoc ſemper,quoad diuiſio partium ad vnitatem perueniat ,vt 64.Pariter impar numerus eſt,qui quoniam par eſt,in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuiſibiles ſunt,vt 6.10.14.18.22.Impariter par numerus eſt,qui inter duos iam dictos quodammodo medius eſt,diuiditur enim in partes aequales,eiusq; pars rurſus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi poſſunt; ſed diuiſio ad vnitatem vſque non perducitur.Qui igitur his eſt pariter par,Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero his pariter impar eſt,Euclides pariter imparem tantum.& qui his impariter par Euclides & pariter parem,& impariter parem appellat.Quare illud,quod in extrema parte antecedentis ſcholij additur,verum non videtur,niſi fortaſſe intelligamus eum, qui pariter par eſt, & pariter impar eo modo,quo ſumit Euclides,neque pariter parem eſſe tantum,neque pariter imparem tantum.

X.

Impariter vero impar numerus eſt, quē impar numerus per numerum imparem metitur.

X I.

Primus numerus eſt,quem vnitas ſola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus,preterquàm quòd ipſe ſe ipſum metitur.

X II.

Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas communis menſura metitur.

X I I I.

Compoſitus numerus eſt,quem numerus aliquis metitur.

X I I I I.

Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.

X V.

Numerus numerū multiplicare dicitur,quando quot vnitates ſunt in ipſo,toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

XVI.

Quando duo numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt planus appellatur: latera vero ipſius ſunt numeri ſe ſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius ſe ſe multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter eſt æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter eſt æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecũdi, & tertius quarti ęque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes. 1

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus eſt maior ſecundo, vel minor. & ſi quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur. & ſi metitur erit primus ſecundi aeque multiplex, atque tertius quarti: ſi vero non metitur, quae partes eſt ſecundus primi, ęedem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo. ſi primus eſt maior ſecundo, quae pars, vel partes eſt ſecundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. ſed ſi primus ſit minor, quae pars, vel quae partes eſt primus ſecundi, eadem pars, vel ęedem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem eſſe, vel partes, quod poſtea in quarto theoremate huius demonſtratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt ęqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui ſuis ipſius partibus minor eſt abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus. ſed & petitiones quaſdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris vti viſus eſt.

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in alijs.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet ſumi poſſe æquales, vel multiplices.*

2 *Quolibet numero ſumi poſſe maiorem.*

3 *Numerus infinite augetur, ſed non infinite diminuitur.*

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiuſdem, vel ęqualium æque multiplices fuerint, & ipſi inter ſe ſunt æquales.*

2 *Quorum idem numerus æque multiplex fuerit, vel quorũ ęque multiplices fuerint æquales, & ipſi inter ſe æquales ſunt.*

3 *Quicumque eiuſdem numeri, vel æqualium eadem pars, vel eædem partes fuerint, & ipſi inter ſe ſunt æquales.*

4 *Quorum idem, vel æquales numeri eadem pars, vel eędem partes fuerint, inter ſe ſunt æquales.*

5 *Omnis numeri pars eſt vnitas ab eo denominata, binarij enim numeri vnitas pars eſt ab ipſo binario denominata, quæ dimidia dicitur, ternarij vero vnitas eſt pars, quæ à ternario denominata tertia dicitur, quaternarij quarta, & ita in alijs.*

6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quę in ipſo ſunt.*

7 *Omnis numerus ſe ipſum metitur.*

8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę ſunt in metiente, vnitates.*

9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipſum producit.*

10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates, quæ ſunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quæ ſunt in multiplicante.*

11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eũ, qui ex illis componitur.*

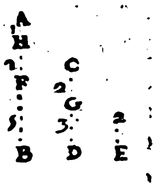
12 *Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipſe metietur.*

13 *Quicũque numerus metitur totũ & ablatum, etiã reliquũ metietur.*

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expoſitis, detracto ſemper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad aſsũpta fuerit vnitas; numeri à principio poſiti primi inter ſe erũt.

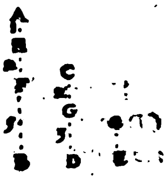


Duobus enim inæqualibus numeris expoſitis AB CD, detracto ſemper minore de maiore reliquus minime metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter ſe primos eſſe, hoc eſt ipſos AB CD vnitatẽ ſolã metiri. Si enim AB CD nõ ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; E: & CD quidem ipſum AB metiens relinquat ſe ipſo minorẽ F A, AF vero metiens DC relinquat ſe ipſo minorem GC; & GC metiẽs FH vnitatẽ HA relinquat. quoniam igitur numerus E ipſum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipſum BF metitur; metitur aũt & totũ BA. ergo & reliquũ AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipſum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipſum FH metietur. ſed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus exiſtens. quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare. Per 12. cõem notionem. 13. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius conuerſam hoc modo demonſtrabimus.

Expoſitis duobus numeris inter ſe primis; ſi de maiori ſemper minor detrahatur, non ceſſabit huiuſmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.



Sint enim numeri inter ſe primi AB CD; & ſi fieri poteſt iiſdem manentibus, & detracto ſẽper minore de maiore deuentũ ſit ad numerũ HA, qui præcedẽtẽ GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipſũ FH metietur. metitur aũt & ſe ipſũ, ergo & FA metietur; ac propterea ipſũ DG. ſed & metiebatur GC. quare & totũ DC metietur. atq; ob id ipſum BF metitur. metitur aũt & FA, vt oſtenſum eſt. ergo & totũ BA metietur. Itaque quoniã HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter ſe compoſiti. Sed & inter ſe primi ponuntur. quod fieri non poteſt. nõ igitur expoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, ceſſabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit. quod oportebat demonſtrare. Sed & illud conſtat. 12. com. not. 11. com. not. Diffi. 14.

Expoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, ſi de maiori ſemper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vſque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter ſe primi, ſed & compoſiti. quod eſt abſurdum. 1. huius.

Ex iam demonſtratis problema quoque illud perſpicue apparere poteſt.

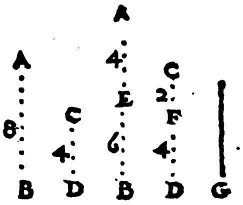
Duobus numeris expoſitis comperire an inter ſe primi ſint, an compoſiti.

Facta namque detractione, vt dictum eſt, ſi deueniet ad vnitatem vſque, dicemus eos inter ſe primos eſſe, ſin minus, compoſitos,

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram inuenire.

Sint dati duo numeri non primi inter ſe AB CD; quorũ minor ſit CD. oportet ipſorum AB CD maximam communem menſuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam ſe ipſum metiatur, erit CD ipſorum AB CD communis menſura. & perſpicuum eſt eam maximam eſſe. nullus enim maior CD ipſum CD metietur.



ſi vero CD non metitur AB, ipſorum AB CD detracto ſemper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem non relinquetur; eſſent enim AB CD primi inter ſe. quod nõ ponitur. & CD quidem ipſum AB metiens relinquat ſe ipſo minorem AE; AE vero metiens CD relinquat ſe ipſo minorem CF: & CF ipſum AE metiatur. Itaque quoniã CF ipſum AE metitur, AE vero ipſum DF; & CF ipſum DF metietur. ſed & metitur ſe ipſum. & totũ igitur metietur CD. At CD ipſum BE metitur. ergo & CF metitur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. ſed & metitur CD. ergo CF ipſos AB CD metitur; ac propterea CF ipſorum AB CD eſt cõmunis mẽſura. dico etiam maximam eſſe. Si enim non eſt maxima, ipſos AB CD metietur aliquis numerus maior ipſo CF. metiatur, ſitq; G. & quoniam G ipſum CD metitur; CD vero ipſum BE: & G ipſum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipſum DF metitur. metitur autem & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipſo CF. ergo CF ipſorum AB CD maxima erit communis menſura. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenta eſt. quod facere oportebat.

Ex antecedente.

12.com.not.

11.com.not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem menſuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

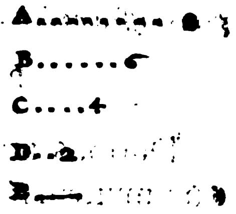
Hoc corollarium apparet ex poſtrema parte demonſtrationis. ſit enim duorum numerorum AB CD communis menſura CF: & ſit numerus aliquis G, qui ipſos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem menſuram CF metiri. Quoniam enim G ipſum CD metitur: CD vero metitur BE: et G ipſum BE metitur. ſed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metietur: metitur autem AE ipſum DF. ergo G ipſum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam ſcilicet eorum communem menſuram metietur. quod demonſtrare oportebat.

12.com.not.

13.com.not.

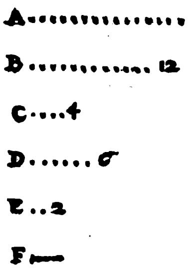
PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam ipſorũ cõmunem menſuram inuenire.



Sint dati tres numeri non primi inter ſe, ABC. oportet ipſorum ABC maximam communem menſuram inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cõmunis mẽſura D. itaque D vel ipſum C metitur, vel non metitur. metiatur primũ: metitur autem et ipſos A B. ergo D numeros A B C metitur: et ob id ipſorum eſt communis menſura. dico et maximam eſſe. ſi enim D non eſt ipſorum A B C maxima communis menſura, metietur eos aliquis numerus maior ipſo D. metiatur, et ſit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipſos AB metietur, et ipſorũ AB maximam communẽ mẽſuram, quæ eſt D. ergo E ipſum D metitur, maior minorem. quod fieri non põt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo D metietur. ergo D ipſorum ABC maxima eſt cõis menſura.

Non



Non metiatur autē D ipſum C. Dico primum numeros D C non eſſe primos inter ſe. Quoniam enim ABC non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipſos ABC, & ipſos AB metietur, et ipſorum AB maximam communem menſurā, videlicet D. metitur autem et ipſum C. ergo ipſos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non ſunt inter ſe primi. Sumatur ipſorum maxima communis menſura E. et quoniam E ipſum D metitur, et D metitur ipſos AB; et E ipſos AB metitur. metitur autē et C. ergo et ipſos ABC metietur; eritq; E ipſorum ABC communis menſura. Dico et maximam eſſe. ſi enim E non eſt ipſorum ABC maxima communis menſura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E. metiatur, ſitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipſos AB, et ipſorum AB maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum D. ergo F ipſum D metitur. metitur autem et ipſum C. quare F et ipſos DC, et ipſorum DC maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum E. ergo F ipſum E metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E metietur. ergo ipſorum ABC maxima eſt communis mēſura. Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inuēta eſt. quod facere oportebat.

Ex corol. antecced.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri. A

Eodem modo et pluribus numeris datis maximā communem menſuram inueniemus. B

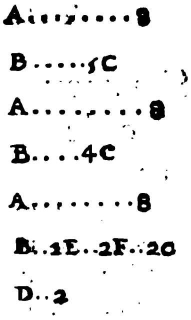
F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifeſtum eſt &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonſtrauimus.* A

Eodem modo &c.] *Sed & illud conſtat, ſi numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars eſt, vel partes.



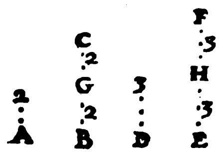
Sint duo numeri A BC, quorum BC ſit minor. Dico BC ipſius A vel partem eſſe, vel partes. Numeri enim A BC vel primi ſunt inter ſe, vel non. ſint prius inter ſe primi, & diuiſo BC in vnitates, quæ in ipſo ſunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in BC, pars aliqua ipſius A. ergo BC ipſius A partes eſt. ſed non ſint A BC inter ſe primi. Itaque BC vel ipſum A metitur, vel non. et ſiquidem metitur, erit BC pars ipſius A: ſin minus, ſumatur ipſorum A BC maxima communis menſura D; et diuidatur BC in numeros ipſi D ęquales BE EF FC. Quoniā igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. æqualis autem eſt D vnicuique ipſorum BE EF FC. ergo et vnuſquiſque ipſorum BE EF FC pars eſt ipſius A: ac propterea BC ipſius A partes eſt.

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars eſt, vel partes. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriuſque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

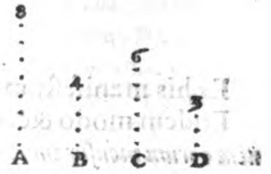


Numerus A numeri BC pars ſit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ eſt A ipſius BC. Dico et vtrumque AD vtriuſque BC EF eãdem partem eſſe, quæ eſt A ipſius BC. Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius BC, eadem eſt et D ipſius EF; quot numeri ſunt in BC æquales ipſi A, tot erũt et in EF numeri æquales ipſi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales, hoc eſt EH HF. erit vtique æqualis multitudo numerorũ BG GC multitudini ipſorum EH HF. & quoniam æqualis eſt BG ipſi A,& EH ipſi D,erunt BG EH ipſis A D æquales. Et eadem ratione cum GC ſit ęqualis ipſi A,& HF ipſi D;& GC HF ipſis A D æquales erunt. quot igitur numeri ſunt in BC,æquales ipſi A,tot ſunt & in BC EF æquales ipſis A D.ergo quotuplex eſt BC ipſius A,totuplex erit et vterque BC EF vtriuſque A D.quę igitur pars eſt A ipſius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriuſque BC EF.quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonſtrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit,et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriuſque æque multiplex erit,atque vnus vnius.

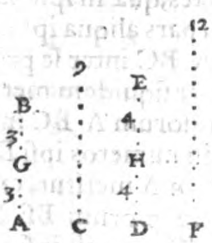


Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aeque multiplex. Dico vtrumque AC vtriuſque BD aeque multiplicem eſſe, atque A ipſius B. quoniam enim A ipſius B multiplex eſt, & C ipſius D aeque multiplex; erit B ipſius A pars aliqua, & D ipſius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita ſunt & vterque BD vtriuſque AC eadem pars erit, quae eſt B ipſius A. Vterque igitur AC vtriuſque BD aeque multiplex eſt, atque A ipſius B. quod demonſtrare oportebat.

Sed quod de duobus dicitur, poſſumus etiam ad quotcumque numeros amplificare. vt] Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, ſinguli ſingulorum æque multiplices, quotuplex eſt vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium [*quod eodem modo demonſtrabimus. Hoc autem reſpondebit ei, quod in prima propoſitione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonſtratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriuſque eædem partes erit, quę vnus vnius.



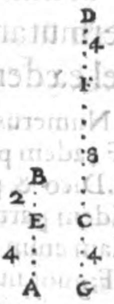
Numerus enim AB numeri C partes ſit, & alter D alterius F eędem partes, quæ AB ipſius C. Dico & vtrumque AB DE vtriuſque C F eaſdẽ partes eſſe, quæ AB ipſius C. quoniam enim quę partes eſt AB ipſius C, eædem eſt DE ipſius F; quot partes ſunt in AB ipſius C, tot erunt & in DE partes ipſius F.Diuidatur AB quidem in partes ipſius C, videlicet AG GB;DE vero diuidatur in partes ipſius F,hoc eſt DH HE.erit ipſorum AG GB multitudo ęqualis multitudini ipſorũ DH HE.& qm̃ quæ pars eſt AG ipſius C, eadem eſt pars & DH ipſius F:quę pars eſt AG ipſius C,eadem pars erit & vterque AG DH vtriuſque C F.Simili ratione & quæ pars eſt GB ipſius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriuſque C F.Quę igitur partes eſt AB ipſius C,eędem partes eſt & vterque AB DE vtriuſque C F.quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc,& antecedentem poſſumus ad quotcumque numeros transferre;ut Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, ſintq; ſinguli ſingulorum vel eadem pars,vel eædem partes;quę pars,vel partes eſt vnus vnius, eadem pars,vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit , quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit,quæ totus totius.

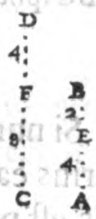


Numerus enim AB numeri CD pars ſit,quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem eſſe, quę eſt totus AB totius CD.quæ enim pars eſt AE ipſius CF,eadem pars ſit & EB ipſius CG.ergo quæ pars eſt AE ipſius CF , eadem pars eſt & AB ipſius GF. 5.huius. quæ autẽ pars eſt AE ipſius CF , eadem pars ponitur & AB ipſius CD.quæ igitur pars eſt AB ipſius GF, eadem eſt & AB ipſius CD.quare AB vtriuſque GF CD eadem eſt pars.ęqualis igitur eſt GF ipſi CD. 4.com. not. communis auferatur CF.ergo reliquus GC reliquo FD eſt æqualis. & quoniam quæ pars eſt AE ipſius CF , eadem eſt & EB ipſius GC. æqualis autem eſt GC ipſi FD: quę pars eſt AE ipſius CF , eadem erit & EB ipſius FD.ſed quæ pars eſt AE ipſius CF, eadem eſt & AB ipſius CD.ergo quæ pars eſt EB ipſius FD,eadem eſt & AB ipſius CD, & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit,quæ totus AB totius CD . quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonſtrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit , atque ablatus ablati, & reliquus reliqui ęque multiplex erit,atque totus totius.

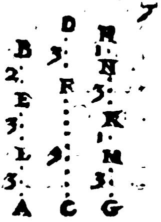


Iiſdem enim,quae ſupra,manentibus . ſit numerus CD aeque multiplex numeri AB,atque ablatus CF ablati AE,Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem eſſe,atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipſius AB aeque multiplex eſt,atque ablatus CF ablati AE ; erit AB ipſius CD eadem pars,quae eſt AE ipſius CF. ergo ex iam demonſtratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars eſt,quae totus AB totius CD.reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB.quod demonſtrandum fuerat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit , quæ ablatus ablati ; & reliquus reliqui eædem partes erit,quę totus totius.

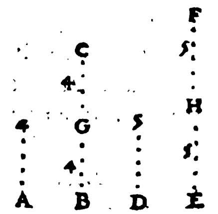
Numerus enim AB numeri CD partes ſit , quę ablatus AE ablati CF,Dico & reliquum EB reliqui FD eaſdem partes eſſe,quæ totus AB totius CD . ponatur enim



ipſi AB ęqualis GH.quæ igitur partes eſt GH ipſius CD,eędē eſt & AE ipſius CF.Diuidatur GH quidē in partes ipſius CD,videlicet GK KH:AE vero diuidatur in partes ipſius CF,videlicet AL LE.erit igitur ipſarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipſarum AL LE.Et quoniā quæ pars eſt GK ipſius GD, eadem eſt & AL ipſius CF:maior aūt CD,quā CF.ergo & GK,quā AL eſt maior.ponatur ipſi AL ęqualis GM.quę igitur pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt et GM
7.huius. ipſius CF.quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars eſt, quę totus GK totius CD.Rurſus quoniā quæ pars KH ipſius CD, eadē eſt et EL ipſius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipſi EL ęqualis KN.quę igitur pars eſt KH ipſius CD, eadē eſt & KN ipſius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars eſt, quæ totus KH totius CD. oſtēſum autem eſt & reliquum MK reliqui FD eandem partem eſſe; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipſius DF eædem partes eſt, quę totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipſi EB; HG vero ipſi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes eſt, quæ totus AB totius CD.quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

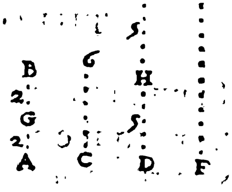
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars eſt, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & ſecundus quarti.



Numerus enim A numeri BC pars ſit, & alter D alterius EF eadem pars, quę A ipſius BC.minor autem ſit A, quàm D.Dico & permutādo quę pars eſt A ipſius D, vel partes, eādem partem eſſe & BC ipſius EF, vel eaſdem partes. Quoniam enim quę pars eſt A ipſius BC, eadem eſt & D ipſius EF; quot numeri ſunt in BC ęquales ipſi A, tot ſunt et in EF æquales ipſi D.diuidatur BC quidem in numeros ipſi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D ęquales, EH HF.erit ipſorū BG GC multitudo ęqualis multitudini ipſorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter ſe ſunt ęquales; ſunt autem et ęquales EH HF; atque eſt ipſorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF: quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipſius HF, vel eædem partes. ergo quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes,
5.huius. eadem pars erit et vterque BC vtriuſquē EF, vel eædem partes. æqualis autem eſt
6.huius. BG ipſi A, et EH ipſi D.quæ igitur pars eſt A ipſius D, vel partes, ęadem pars erit et BC ipſius EF, vel eædm partes.quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes eſt primus tertij, vel pars, eędem partes erit & ſecundus quarti, vel eadem pars.



Numerus enim AB numeri C partes ſit, et alter DE alterius F eędem partes: ſit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes eſt AB ipſius DE, vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F, vel eandem partem. quoniam enim quæ partes eſt AB ipſius C, eædem partes eſt et DE ipſius F; quot ſunt in AB partes ipſius C, tot erunt et

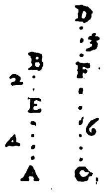
in

in DE partes ipſius F. diuidatur. AB quidem in partes ipſius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipſius F, hoc eſt DH HE. erit vtique ipſarum AG GB multitudo multitudini ipſarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars eſt AG ipſius C, eadem eſt pars et DH ipſius F. et permutando quæ pars eſt AG ipſius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipſius F, vel eędẽ partes. ſimili ratione et quæ pars eſt GB ipſius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipſius F, vel eadem partes. ergo quę pars eſt AG ipſius DH, vel partes; eadem pars erit et AB ipſius DE, vel eædem partes. ſed quæ pars eſt AG ipſius DH, vel partes, eadem pars eſt et C ipſius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes eſt AB ipſius DE, vel pars, eædem partes eſt et C ipſius F, vel eadem pars. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

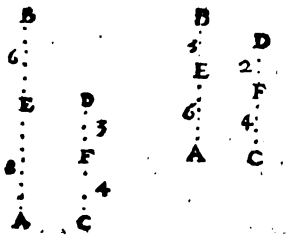
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita eſſe, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim eſt vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars eſt AB ipſius CD, vel partes, eadẽ pars erit et AE ipſius CF, vel eædem partes. ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipſius CD. eſt igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonſtrare oportebat.



Diffi. 20.
7.8. huius.
Per cõuerſ.
Diffi. 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonſtratio congruit, cum AB fuerit minor, quàm CD. ſed ſi AB maior ſit, quàm CD, nihilominus idem demonſtrabitur. nam vel CD metitur ipſum AB, vel non metitur. & ſi quidẽ metitur, quoniam eſt vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipſius CD aeque multiplex, atque AE ipſius CF. quare ex ijs, quae nos demõſtrauimus ad ſeptimã huius; & reliquus EB reliqui FD reliqui FD aeque multiplex eſt, atq; totus AB totius CD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. ſi vero CD non metitur ipſum AB, rurſus quoniam vt AB ad CD, ita eſt AE ad CF, quae partes eſt CD ipſius AB, eędem partes erit CF ipſius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes eſt, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonſtrare.

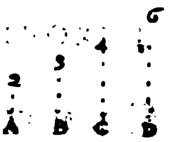


Diffi. 20.
Per cõuerſ.
Diffi. 20.
Diffi. 20.
8. huius.
Per cõuerſ.
Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; ſitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B, ita eſſe AC ad BD. Quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, quæ pars eſt A ipſius B, uel partes, eadem pars erit et C ipſius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriuſque BD eadem pars eſt, uel partes, quæ A ipſius B. ergo ut A ad B, ita eſt AC ad BD. quod demonſtrare oportebat.

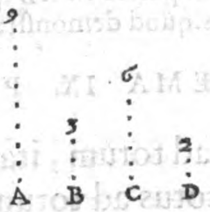


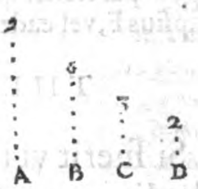
Diffi. 20.
5.6. huius.
Per conuerſ.
Diffi. 20.

SCHOLIVM.

Hoc quinto, & ſexto vniuerſalius eſt. quæ enim illic ſeorſum in parte, & partibus, eadem hoc loco vnà demonſtrantur.

F. C. COMMENTARIVS.



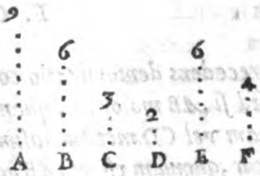


Et hęc demonſtratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint conſequentibus. quòd ſi maiores ſint, rurſus vel B metitur ipſum A, vel non metitur. ſi metitur, ita dicemus. Quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipſius B, atque C ipſius D. ergo ex ijs, quae demonſtrauimus ad quintam huius, & vterque A C vtriuſq; BD aeque multiplex eſt, atque A ipſius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrũq; B D. Conuer. 20. diffi.

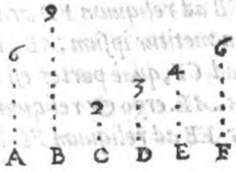
Quòd ſi B non metitur ipſum A, ita argumentabimur. quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae partes eſt B ipſius A, eędem partes erit D ipſius C. ergo & uterq; A C vtriuſque B D eędem partes eſt; 6.huius. *quae A ipſius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.*

Conuer. 20. diffi. *Idem demonſtrabimus etiam ſi plures ſint numeri proportionales, hoc, quod ſequitur, pręmiſſo.*

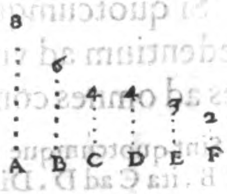
Quæ eidem eædem ſunt numerorum proportiones, et inter ſe eædem erunt.



Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita eſſe E ad F. Si enim numerus A ſit maior, quàm B, quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes eſt B ipſius A, eadem pars erit, vel partes D ipſius C. Rurſus quoniam vt C ad D, ita eſt E ad F, quae pars eſt, vel partes D ipſius C, eadem pars, vel partes erit F ipſius E. quae igitur pars, vel partes eſt B ipſius A, eadem pars erit, vel partes F ipſius E. ergo vt A ad B, ita eſt E ad F. Conuer. 20. diffi.



Si vero A ſit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita eſt C ad D, quae pars eſt, vel partes A ipſius B, eadem pars, vel partes erit C ipſius D. Rurſus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes eſt C ipſius D, eadem pars, vel partes erit E ipſius F. ergo quae pars, vel partes eſt A ipſius B, eadem eſt pars, vel partes E ipſius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonſtrandum Conuer. 20. diffi. *propoſuimus.*

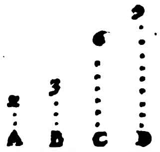


Hoc demõſtrato ſint numeri proportionales A B C, D E F; ſitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadẽ ratione demonſtrabimus vt A ad D, ita eſſe A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita eſt C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõſtrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter oſtendemus vt A B ad D E, ita eſſe A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erũt A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem reſpondet ei, quod in 12 quinti vniuerſe de magnitudinibus demonſtratur.

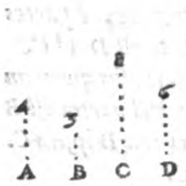
THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

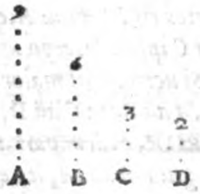
Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; ſitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-et permutãdo proportionales eſſe, videlicet vt A ad C, ita eſſe B ad D. quoniã enim eſt vt A ad B, ita C ad D, quę pars eſt A ipſius B, vel partes, eadē pars erit et C ipſius D, vel eædem partes. permutãdo igitur quæ pars eſt A ipſius C, vel partes, eadē pars eſt & B ipſius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita eſt B ad D. quod demonſtrare oportebat. Diffi.10. 9.10. huius.

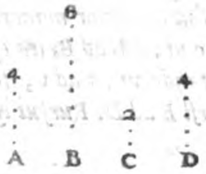


F. C. COMMENTARIVS.





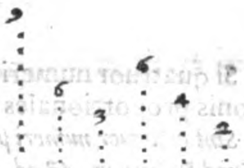
Hęc demonſtratio congruit, vbi antecedentes numeri minores ſint conſequentibus, ſitq́; A minor, quàm C. ſi vero ſint maiores, & A maior ſit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D; quae pars eſt, vel partes B ipſius A, eadem pars, vel partes erit D ipſius C. ergo permutando quae pars eſt, vel partes B ipſius D, eadem pars, vel partes erit A ipſius C. vt igitur A ad C, ita eſt B ad D. Diffi.10. 9. 10. huius. Cōu.dif.10.



Quòd ſi A ſit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumētabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes eſt D ipſius C, eadē pars, vel partes erit B ipſius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes eſt D ipſius B, eadem pars, vel partes erit C ipſius A. eſt igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique ſi A ſit minor, quàm B, & maior, quàm C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes eſt C ipſius D, eadem pars, vel partes eſt A ipſius B. permutando igitur quae pars eſt, vel partes C ipſius A, eadem pars, vel partes eſt D ipſius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. 9.10.huius. Cōu.dif.10.

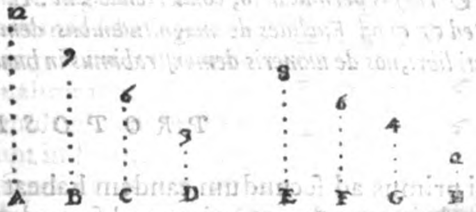
THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, et in eadem proportione; etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.



Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipſis multitudine ęquales, qui bini ſumantur, & in eadem proportione DEF; ſitq́; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex ęquali vt A ad C, ita eſſe D ad F. Quoniam enim eſt vt A ad B, ita D ad E; erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Ex antecedente. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonſtrare. Ex demonſtratis ad 12 huius.

F. C. COMMENTARIVS.



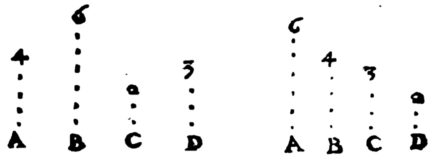
Quòd ſi plures, quàm tres numeri prportionales fuerint ABCD EFGH; ſitq́; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: ſimiliter demonſtrabimus ut A ad C, ita eſſe E ad G. et quoniã eſt vt C ad

D, ita G ad H, rurſus demonſtrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in aliјs.

Sed quoniam Euclides conuerſam rationem, compoſitam, & diuiſam, conuerſionemq́ rationis in numeris omiſit; nos eas, ne quid deſideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt.

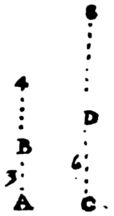


Sint quattuor numeri proportionales ABCD;
ſitq́ ut A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita
eſſe D ad C. Si enim A ſit minor, quàm B, quo-
Diffi.10. *niam eſt vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel*
partes eſt A ipſius B, eadē pars, vel eędē partes
Cõu.dif.20. *erit C ipſius D. ergo ut B ad A, ita eſt D ad C.*
Si uero A ſit maior, quàm B, rurſus quoniam
vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes eſt B
ipſius A, eadem pars, uel partes erit D ipſius C.
Vt igitur B ad A, ita eſt D ad C.

PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & componendo proportionales erunt.

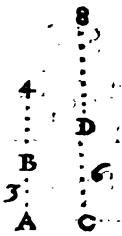
Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & ſit vt A ad B, ita C ad D. Dico ut A B ad B, ita eſſe C D ad D. nam cum ſit ut A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita eſt B ad D. Rurſus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.



PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales ſint, & diuidendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; ſitq́ vt numerus AB,
qui ex duobus numeris conſtat ad numerum B, ita C D ex duobus C D conſtans
ad ipſum D. Dico vt A ad B, ita eſſe C ad D. Quoniam enim eſt vt AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. ſi autem fuerit ut totus*
11.huius. *ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad to-*
tum. ergo A ad C eſt vt AB ad CD. ſed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo
igitur, quod demonſtrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rur-
ſus permutando ut A ad B, ita C ad D.

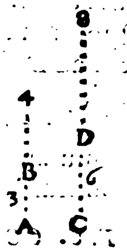


PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales ſint, et per conuerſionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; ſitq́ vt A B ad B, ita
CD ad D. Dico ut AB ad A, ita eſſe CD ad C. Quoniam enim eſt ut AB ad B, ita
13.huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum ſit vt totus ad*
11.huius. *totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt A B ad*
CD: & rurſus permutando, conuertendoq́ ut AB ad A, ita CD ad C.

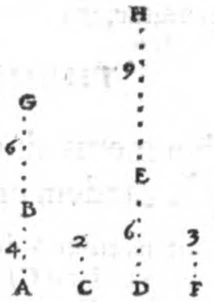
Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonſtrauit in vigeſima quarta quinti libri, nos de numeris demonſtrabimus in hunc modum.



PROPOSITIO V.

Si primus ad ſecundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad ſecundum proportionem eandem, quam ſextus ad quartum; et compoſitus primus et quintus ad ſecundum eandem proportionem

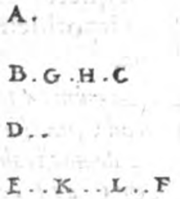
nem habebit, quam tertius et ſextus ad quartum.



Primus enim numerus A B ad ſecundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq́; quintus B G ad ſecundum C eandem proportionem, quam ſextus E H ad quartum F. Dico primum & quintum A G ad ſecundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & ſextus DH ad quartum F. Quoniam enim eſt vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad E H. 1. Additarũ. *et quoniam vt A B ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH.* 14.huius. *quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad H E. Sed vt G B ad C, ita eſt EH ad F. rurſus igitur ex aequali vt AG ad C, ita eſt DH ad F.* 2. Additarũ.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

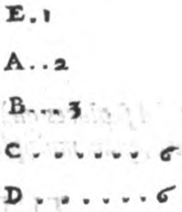
Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque ſecundus quartum.



Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot vnitates ſunt in BC, tot ſunt et in EF numeri ęquales ipſi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales EK KL LF. erit igitur ipſorum BG GH HC multitudo ęqualis multitudini ipſorum EK KL LF. & quoniã BG GH HC vnitates inter ſe ęquales ſunt: ſuntq́; numeri EK KL LF inter ſe æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum; & vt vnus antecedentium ad 12.huius: vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cõſequentes. eſt igitur vt BG ad numerum E K, ita BC ad EF. æqualis autem eſt BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita eſt BC ad EF. ęqualiter Diff.20. igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipſum EF. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis inter ſe ęquales erunt.



Sint duo numeri A B, & A quidem ipſum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipſi D ęqualem eſſe. Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit C, metietur B ipſum C per vnitates, quæ ſunt in A. 10.com. not. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipſo ſunt. 6.com.not. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipſum C. quare permutando vnitas E numerum B ęqualiter metitur, Ex antecedente. atq; A ipſum C. Rurſus quoniam B ipſum A multiplicans fecit D; A metietur ipſum D per vnitates, quæ ſunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipſo ſunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipſum D. ſed E unitas numerũ

B æqualiter

B æqualiter metitur, atque A ipſum C. Cum igitur A vtrũque ipſorum C D æqualiter metiatur, erit C ipſi D æqualis. quod demonſtrare oportebat. 4.com. not.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipſos D E. Dico, ut B ad C, ita eſſe D ad E. quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit D, metietur B ipſum D per unitates, quæ ſunt in A. (10.com. not.) metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipſo ſunt. (6.com. not.) æqualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipſum D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita eſt B ad D. (Conuerſ. 20. Diffi.) eadem ratione et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demõſtrare oportebat.

F . 1
A . . 2
B . . . 3
C 4
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

Idem ſequetur etiam ſi numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipſos EFG. Dico vt B ad C, ita eſſe E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt ſupra, demonſtrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita eſſe B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam eſt vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rurſus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita eſt E ad F: & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonſtrare.

H . 1
A . . 2
B . . . 3
C 4
D 5
E 6
F 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipſos D E. Dico vt A ad B, ita eſſe D ad E. Quoniam enim A (16. huius.) ipſum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipſum D fecit. Eadem ratione & C ipſum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C (Ex antecedente.) duos numeros A B multiplicans ipſos D E fecit, eſt igitur ut A ad B, ita D ad E. quod demonſtrare oportebat.

A . . . 3
B 4
C . . 2
D 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd ſi plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti ſimiliter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonſtrabimus.

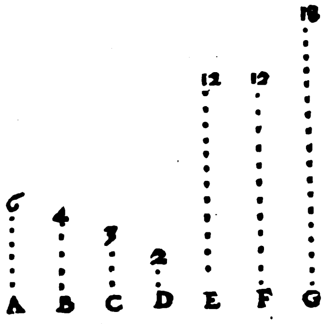
THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, &

quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex ſecundo, & tertio. & ſi numerus, qui fit ex primo, & quarto ęqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; ſitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipſū D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipſi F ęqualem eſſe. multiplicās enim A ipſum C faciat G. & quoniam A ipſum quidem C multiplicans fecit G; ipſum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipſos G E. eſt igitur ut C ad D, ita G ad E. 17.huius. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rurſus quoniam A ipſum C multiplicans G fecit; ſed & B ipſum C multiplicās fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipſos G F. vt igitur A ad B, ita eſt G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. Ex antecedente. ergo & ut G ad E, ita eſt G ad F. quòd cum G ad utrumque ipſorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipſi F æqualis. Sed ſit E ęqualis ipſi F. A Dico ut A ad B, ita eſſe C ad D. ijſdem enim conſtructis quoniam A ipſos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. 17.huius. eſt autem E ipſi F ęqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. B C ſed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B: & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

A Quòd cum G ad utrumque ipſorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipſi F æqualis] *Hoc patet ex vigeſima diffinitione. Si enim G ſit maior, quàm E, vel F; erit vterque ipſorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipſius G ſi vero G; ſit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriuſque ipſorum E F. quare E F inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.* 3.4.co.not.

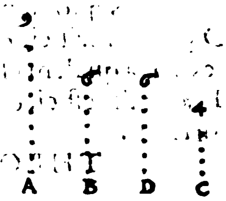
B Eſt autem E ipſi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuerſam vigeſimae diffinitionis. nam ſiue vterque ipſorum E F eadem pars, vel eędem partes ſit ipſius G, ſiue G eadem pars ſit, vel eędem partes vtriuſque ipſorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.*

C Vt autem G ad F, ita A ad B.] *cum enim duo numeri A B ipſum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.*

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

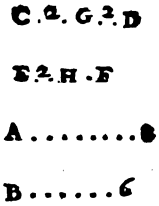
Sint tres numeri proportionales ABC; ſitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC æqualem eſſe ei, qui fit ex B. ponatur enim ipſi B æqualis D. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis eſt ei, qui ex B D. Ex antecedente. qui autem fit ex BD eſt æqualis ei, qui fit ex B; ęqualis etenim eſt B ipſi D. qui igitur fit ex AC ipſi B eſt æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis ſit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita eſſe B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit ęqualis eſt ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B eſt æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. Ex antecedente. ſed B ipſi D eſt ęqualis. ut igitur A ad B, ita eſt B ad C. quod demonſtrare oportebat.



THEO-

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.



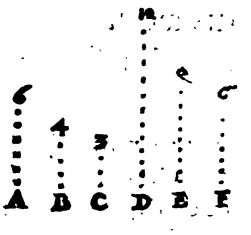
Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipſum A, atque EF ipſum B. numerus enim CD ipſius A non eſt partes. Si 10.diffi. enim fieri poteſt, ſit CD partes ipſius A. ergo EF ipſius B eædem partes erit, quæ CD ipſius A. quot igitur in CD partes ſunt ipſius A, tot erunt & in EF partes ipſius B. Diuidatur CD quidem in ipſius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipſius B, EH HF. erit igitur ipſarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipſarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter ſe ſunt; ſunt autem & EH HF inter ſe ęquales, atque eſt ipſarum CG GD multitudo * multitudini ipſarum EH HF ęqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad om- 12.huius. nes conſequentes. quare ut CG ad EH, ita eſt CD ad EF; ac propterea CG EH in eadē ſunt proportione, in qua CD EF, minores ipſis exiſtentes. quod fieri non poteſt: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium. non igitur CD ipſius A partes eſt. ergo eſt pars. et EF ipſius B pars eadem eſt quę CD ipſius A. ęqualiter igitur CD ipſum A, atque EF ipſum B metitur. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Erit vt CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuerſam vigeſimae diffinitionis. nam cum CG GD inter ſe aequales ſint, itemq; aequales inter ſe EH HF, ſi CG ſit minor, quàm EH, quae pars, uel partes eſt CG ipſius EH, eadem pars, vel partes erit GD ipſius HF. ſi vero ſit maior, quae pars, vel partes EH ipſius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipſius GD. ergo vt CG ad EH, ita GD ad HF.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine ęquales, qui bini ſumantur, et in eadem proportione; ſit autem perturbata eorum analogia: etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.

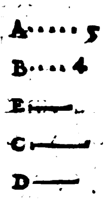


Sint tres numeri A B C, et alij ipſis multitudine ęquales qui bini ſumantur, et in eadem proportione D E F; ſitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita ſit E ad F; vt autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita eſſe D ad F. Quoniam enim eſt 19.huius. ut A ad B, ita E ad F; qui ſit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita D ad E; qui ſit ex CD ęqualis erit ei, qui ex BE. oſtenſum autem eſt et qui 19.huius. ſit ex AF æqualem eſſe ei, qui ex BE. ergo et qui ſit ex AF æqualis eſt ei, qui ſit ex CD. vt igitur A ad C, ita D ad F. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter ſe numeri minimi ſunt eorum, qui eādem, quam ipſi proportionem habent.

Sunt



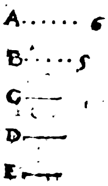
Sint primi inter ſe numeri A B. Dico eos minimos eſſe eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent. ſi enim non ita ſit, erunt aliqui numeri minores ipſis A B, qui eandẽ, quam A B proportionem habebunt. ſint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipſi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, et conſequens cõſequentem; numerus C ipſum A ęqualiter metietur, atque D ipſum B. quoties autem C metitur ipſum A, tot vnitates ſint in E. ergo et D ipſum B metitur per vnitates, quę ſunt in E. et quoniam C metitur ipſum A per vnitates quę ſunt in E, numerus E ipſum A per vnitates, quæ ſunt in C, metietur. et eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ ſunt in D. ergo E ipſos A B metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis A B, qui eandẽ habeant proportionem. ergo A B minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. quod oportebat demonſtrare.

21.huius.

8.com.not.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipſi proportionem habent, primi inter ſe ſunt.



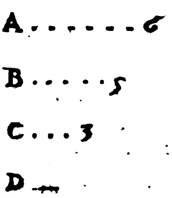
Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipſi proportionẽ habent A B. Dico A B primos inter ſe eſſe. ſi enim nõ ſunt A B inter ſe primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur; ſitq; C. et quoties C ipſum quidem A metitur, tot vnitates ſint in D. quoties vero C metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. et quoniam C ipſum A metitur per vnitates, quę ſunt in D, multiplicans C ipſum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans E ipſum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros D E multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo D E in eadem ſunt proportione, in qua A B, minores ipſis exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.

9.com.not.

17.huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXV.

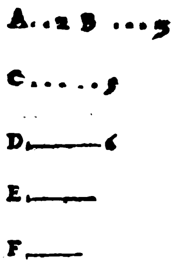
Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui vnum ipſorum metitur numerus ad reliquum primus erit.



Sint duo numeri primi inter ſe A B, et aliquis numerus C ipſum A metiatur. Dico et B C inter ſe primos eſſe. Si enim B C nõ ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; D. et quoniam D ipſum C metitur, et C ipſum A; et D ipſum A metietur; metitur autem et ipſum B. ergo D numeros A B metitur primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur B C numeros numerus aliquis metietur. ideoq; B C inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XX VI.

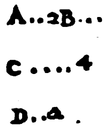
Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui fit ex ipſis ad eum primus erit.



Duo enim numeri A B ad aliquem numerũ C primi ſint:
et A ipſum B multiplicaus faciat D.Dico CD inter ſe primos
eſſe. ſi enim C D non ſint inter ſe primi,metietur eos aliquis
numerus.metiatur; ſitq; E.et quoniã C A primi inter ſe ſunt,
et ipſum C metitur aliquis numerus E; erunt E A inter ſe pri
Ex antecedente. mi. quoties autem E ipſum D metitur, tot vnitates ſint in F.
quare et F metitur ipſum D per vnitates,quæ ſunt in E. ergo
8.com.not. E ipſum F multiplicans fecit D.ſed et A multiplicas B ipſum
9.com.not. D fecit. qui igitur fit ex E F eſt æqualis ei,qui ex A B.ſi uero
qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor
19.huius. numeri proportionales erunt.eſt igitur ut E ad A,ita B ad F.
23.huius. ſunt autem A E inter ſe primi,et qui primi etiam minimi ſunt. minimi vero eãdẽ,
21.huius. quam ipſi, proportionem habentium,eos,qui eandem habẽt proportionem, æqualiter metiuntur,maior maiorem,et minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem,et conſequens conſequentem. ergo E ipſum B metitur.metitur autẽ et ipſum C.quare E ipſos B C metitur,primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt.non igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

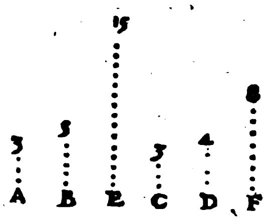
Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui fit ab vno ipſorum ad reliquum primus erit.



Sint duo numeri inter ſe primi AB;& A ſe ipſum multiplicans fa
ciat C.Dico B C inter ſe primos eſſe.ponatur enim ipſi A ęqualis D
& quoniam AB ſunt primi inter ſe,æqualis autem A ipſi D;& DB in
ter ſe primi erunt.vterque igitur ipſorum A D ad B primus eſt. er-
Ex antecedente. go & qui ex AD fit primus erit ad B. ſed qui fit ex AD eſt numerus
C.quare C B inter ſe primi ſunt.quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint,& qui fiunt ex ipſis inter ſe primi erunt.



Duo enim numeri A B ad duos uumeros C D
vterque ad vtrumque primi ſint:& A quidem ipſum
B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D fa-
ciat F.Dico EF inter ſe primos eſſe. Quouiam enim
26.huius. vterque ipſorum A B ad C primus eſt, & qui fit ex
A B ad C primus erit.qui autem fit ex A B eſt E. er
go E C primi inter ſe ſunt.Eadẽ ratione & E D pri-
mi ſunt inter ſe. vterque igitur ipſorum C D ad E
primus eſt:ac propterea qui fit ex C D primus erit
ad E qui uero ex CD fit eſt numerus F.ergo E F primi inter ſe erunt.quod demonſtrare oportebat.

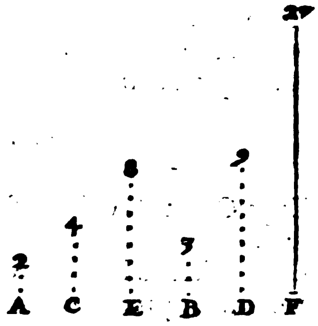
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & vterque ſeipſum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipſis primi erunt inter ſe. & ſi numeri à principio poſiti eos, qui facti ſunt, multiplicantes aliquos

faciant

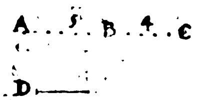
faciant, & ipſi inter ſe primi erunt: & ſemper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter ſe primi A B: & A ſe ipſum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E: & B ſe ipſũ multiplicãs D faciat; multiplicans autem D faciat ipſum F. Dico C D, & E F inter ſe primos eſſe. Quoniam enim A B primi inter ſe ſunt; & A ſe ipſum multiplicans fecit C; erunt C B primi inter ſe. & quoniam C B inter ſe primi ſunt, & B ſe ipſum multiplicans fecit D; erũt C D inter ſe primi. 27.huius. Rurſus quoniam A B primi ſunt inter ſe, & B ſe ipſum multiplicans D fecit; A D inter ſe primi erunt. Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D vterque ad vtrumque primi ſint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit. Ex antecedente. ſed qui fit ex AC eſt numerus E, qui vero ex BD fit eſt F. ergo E F primi inter ſe ſunt. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & vterque ſimul ad vtrũque ipſorum primus erit: quòd ſi vterque ſimul ad vnum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri à principio poſiti inter ſe primi erunt.



Componantur enim duo numeri inter ſe primi AB BC. Dico & vtrumque ſimul, videlicet A C ad vtrumque ipſorum AB BC primum eſſe. Si enim non ſint CA AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & ſit D. Quoniam igitur D metitur ipſos CA AB; & reliquum BC metietur. 13.com. not. metitur autem & BA. ergo D ipſos AB BC metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB AC inter ſe primi ſunt. ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus. A Sint rurſus CA AB primi inter ſe. Dico & ipſos AB BC inter ſe primos eſſe. Si enim AB BC non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitq; D. & quoniam D metitur vtrumque ipſorum AB BC, & totum CA metietur; 11.com. not. metitur autem & AB. ergo D ipſos CA AB metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB BC numeros numerus aliquis metietur. ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare. B

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo CA ad vtrumque ipſorum eſt primus] *eodem enim modo demonſtrabitur & A C CB inter ſe primos eſſe.* A

Ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt] *idem etiam ſequetur ſi AC CB inter ſe primi ſint. quod eodem modo demonſtrabimus.* B

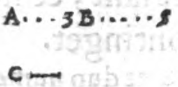
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

Sit primus numerus A, qui numerum B non metiatur. Dico B A inter ſe primos

eſſe

eſſe, ſi enim non ſint B A inter ſe primi, metietur eos aliquis nu-
A merus. metiatur, et ſit C. ergo C non eſt vnitas. et quoniam C ip-
ſum B metitur, A vero non metitur ipſum B; non erit C idem
B qui A. et quoniam C ipſos B A metitur, et metietur ipſum A pri-
mum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt.
non igitur ipſos B A numeros numerus aliquis metietur. quare A B inter ſe pri-
mi ſunt. quod demonſtrare oportebat.



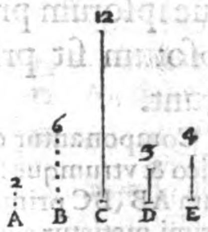
F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non eſt vnitas] *ſi enim eos vnitas ſola metiretur, primi eſſent inter ſe. quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipſos B A metitur, et metietur ipſum A primum exiſtentem, cum
7. com. not. non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt] *omnis enim numerus ſe ipſum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

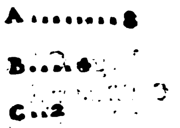
Si duo numeri ſe ſe multiplicantes aliquem faciāt, eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipſorum, qui à principio poſiti ſunt, metietur.



Duo enim numeri A B ſe inuicem multiplicantes faciāt
C, ipſum uero C metiatur aliquis numerus primus, qui ſit
D. Dico D vnū ipſorum A B metiri. ipſum enim A non me-
Ex antecedente. tiatur; atque eſt D numerus primus. ergo A D primi inter
ſe ſunt. et quoties D ipſum C metitur, tot unitates ſint in
E. Quoniam igitur D metitur ipſum C per eas, quæ ſunt in
Com. not. 9. E unitates; numerus D ipſum E multiplicans fecit C. ſed et
A multiplicans B ipſum C fecit. ergo qui fit ex D E æqua-
19. huius. lis eſt ei, qui ex A B. eſt igitur ut D ad A, ita B ad E. et ſunt
23. huius. A D primi inter ſe, primi vero et minimi. ſed minimi eos,
21. huius. qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et mi-
nor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, et conſequens conſequentem. er-
go D ipſum B metitur. ſimiliter demonſtrabimus, ſi D non metiatur B ipſum A me-
tiri. quare D metitur vnum ipſorum A B. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

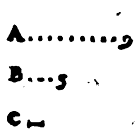
Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.



Sit compoſitus numerus A. Dico primum aliquem numerum
Diff. 13. ipſum A metiri. Quoniam enim compoſitus numerus eſt A, me-
tietur ipſum aliquis numerus. metiatur; et ſit B. & ſi quidem pri-
mus eſt B, manifeſtum eſt, quod quæritur. ſi vero compoſitus, ip-
ſum aliquis numerus metietur. metiatur; ſitq; C. Et quoniam C
metitur ipſum B, B uero ipſum A; & C ipſum A metitur. & ſi qui-
12. co. not. dem primus eſt C, manifeſtum eſt quod quęritur. Si vero compoſitus eum aliquis
numerus metitur. & hac conſideratione facta, relinquetur tandem aliquis nume-
rus primus, qui præcedentem & ipſum A metietur. ſi enim nō relinquitur primus,
3. poſtul. metientur ipſum A infiniti numeri, quornm alter altero eſt minor. quod in nume-
ris fieri non poteſt. ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ip-
ſum A. omnem igitur numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur,
quod demonſtrare oportebat.

ALITER

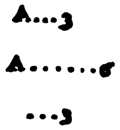
ALITER. Sit compoſitus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipſum A metiri. Quoniam enim A compoſitus eſt, metietur ipſum aliquis numerus. & ſit B minimus eorum, qui ipſum A metiuntur. Dico B primum eſſe. ſi enim non ſit primus, compoſitus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; ſitq; C. erit C minor, quàm B. & quoniam C ipſum B metitur, ſed & B ipſum A; & C ipſum A metietur, minor exiſtens ipſo B, qui eſt minimus omnium, qui metiuntur. quod eſt abſurdū. non igitur B compoſitus numerus eſt. ergo eſt primus. quod demonſtrandū fuit.



THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum eſſe, vel primum aliquem numerum ipſum A metiri. ſi quidem igitur primus eſt A, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus ipſum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonſtrare oportebat.



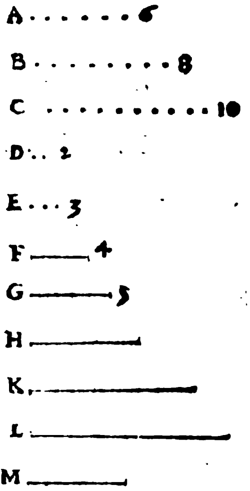
Ex antecedente

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habeant.

Sint dati quotcũque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipſi A B C, proportionem habeãt. vel igitur A B C primi inter ſe ſunt, vel non. ſi quidem primi, et minimi erunt eandem, quã ipſi proportionem habentium. ſi vero non primi, ſumatur ipſorum A B C maxima communis menſura D, et quoties D vnumquemque ipſorum A B C metitur, tot vnitates ſint in vnoquoque horum E F G. et vnuſquiſque igitur ipſorum E F G vnumquemque ipſorum A B C metitur per eas, quæ ſunt in D vnitates. ergo E F G ipſos A B C equaliter metiuntur, ac propterea E F G in eadem ſunt proportione, in qua ipſi A B C. Dico eos etiã minimos eſſe. ſi enim E F G non ſint minimi, eandem, quam ipſi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipſis E F G minores in eadem proportione, in qua A B C. ſint H K L, æqualiter igitur H metitur ipſum A, ac vterque ipſorum K L vtrũque BC metitur. quoties autem H metitur ipſum A, tot vnitates ſint in M. et vterque igitur K L vrrumque BC metitur per eas, quæ ſunt in M vnitates. et quoniã H ipſum A metitur per vnitates, quæ ſunt in M, et M ipſum A per vnitates, quæ ſunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipſorũ BC metietur per vnitates, quę ſunt in utroque K L. ergo M ipſos A B C metitur. Rurſus quoniam H ipſum A metitur per vnitates, quæ ſunt in M; H ipſum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipſum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex HM eſt æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem eſt E, quàm H. ergo et M quàm D eſt maior, et ipſos ABC metitur. quod fieri nō poteſt. ponitur enim D ipſorum A B C maxima communis menſura. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis E F G, in eadem proportione, in qua A B C. ergo E F G minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi A B C proportionē habent. quod oportebat demodſtrare.

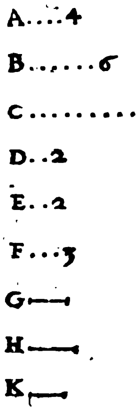
23. huius.
2. huius.
18. huius.
21. huius.
8. com. not.
9. com. not.
19. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam ſępe vſu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi ſint, libuit hoc loco ſequens problema adnectere.

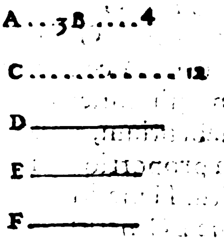
Numeris quotcũque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habeant.



Sint dati quotcumqne numeri deinceps proportionales ABC. oportet inuenire
duos minimos numeros, qui eandem, quam ipſi A B C proportionem
habeant. Itaque vel A B primi ſunt inter ſe, vel non primi: et ſi quidem
23.huius. *primi, & minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent; ſin minus, ſumatur*
2.huius. *ipſorum AB maxima communis menſura D: & quoties D metitur A,*
tot vnitates ſint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates ſint in F.
18.huius. *ergo & E F ipſos A B aequaliter metiuntur: ideoq; E F in eadem ſunt proportione,*
in qua ipſi A B. Dico E F etiam minimos eſſe. ſi enim non ſint minimi,
erunt aliqui numeri minores ipſis E F, qui eandem, quam A B proportionem
21.huius. *habeant. ſint GH. ergo G aequaliter metitur A, atque H ipſum B. &*
quoties G metitur A, tot vnitates ſint in K. quare & H metietur B per eas,
quae ſunt in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quae ſunt in G,
metieturq; B per vnitates, quae ſunt in H. ergo K ipſos A B metitur. & quoniam
8. com. not. *G ipſum A metitur per eas, quae ſunt in K vnitates, G multiplicans K*
fecit A. Rurſus quoniam E metitur A per vnitates, quae ſunt in D; & E multiplicans
19.huius. *D fecit A. qui igitur ſit ex E D eſt aequalis ei, qui ex GK; ac propterea vt E ad G, ita*
erit K ad D. eſt autem E maior, quàm C. ergo & K maior quàm D, & ipſos A B metitur. quod
fieri non poteſt. erat enim D ipſorum AB maxima communis menſura. non igitur ſunt aliqui numeri
minores ipſis E F, qui eandem, quam ipſi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B,
ita eſt B ad C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur ſunt
minimi numeri E F, qui eandem, quam ipſi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.

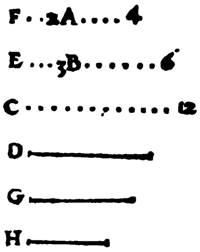
PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.



Sint dati duo numeri A B. oportet inuenire quem
minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel
primi inter ſe ſunt, vel non. ſint primum A B inter ſe
16.huius. primi: & A ipſum B multiplicãs faciat C. ergo & B multiplicans
A ipſum C fecit. ac propterea numeri A B ipſum
C metiuntur. Dico etiam C minimum eſſe. ſi enim
non ita ſit, metientur A B numernm aliquem minorẽ,
quàm C. metiantur ipſum D. & quoties A ipſum D metitur,
tot vnitates ſint in E; quoties autem B metitur D,
tot unitates ſint in F. ergo A quidem ipſum E multiplicans
fecit D; B uero multiplicans F ipſum D fecit. quare
19.huius. numerus, qui ex AE fit eſt ęqualis ei, qui fit ex BF. vt igitur A ad B, ita eſt F ad E.
23 huius. & ſunt A B primi. primi autem & minimi. ſed minimi eos, qui eandem habent proportionem
21,huius. æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipſum
E metitur, & conſequens conſequentem. & quoniam A numeros B E multiplicans
18.huius: fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipſum E. ergo & C ipſum
D metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur A B metiuntur aliquem
numerum minorem ipſo C, quando A B primi inter ſe fuerint. ergo A B ipſum
C minimum exiſtentem metiuntur. Sed non ſint A B primi inter ſe: & ſumãtur
19.huius: minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui ſint F E. æqualis
igitur eſt, qui ex A E fit ei, qui ex BF. & A ipſum E multiplicãs faciat C. ergo & B
multi-

multiplicans F ipſum C fecit.quare A B ipſum C metiũtur.



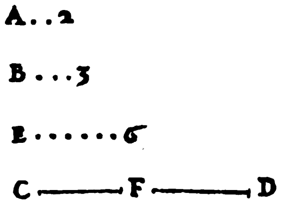
Dico & minimum eſſe. niſi enim ita ſit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipſum D. & quoties A ipſum D metitur, tot vnitates ſint in G. quoties autem B metitur D, tot vnitates ſint in H. ergo A quidem 9. com. not. ipſum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsũ D fecit. qui igitur ex A G fit eſt ęqualis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. ſed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt 19. huius. F ad E, ita H ad G: & ſunt F E minimi; minimi vero eos, qui 21. huius. eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. quare E ipſum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipſos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipſum 18. huius. G. ergo & C ipſum D metitur, maior minorem. quod fieri nõ poteſt. non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. ergo A B ipſum C minimum exiſtentem metientur. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIUM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non poſſunt. vt eſt 15. eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

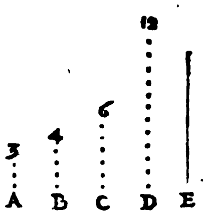
Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.



Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipſum E. Dico & E ipſum C D metiri. ſi enim E non metitur C D, E, metiens F D relinquat ſe ipſo minorem CF. & quoniam A B ipſum E metiuntur, E vero ipſum DF: & A B metientur 11. com. not. D F. ſed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C 13. com. not. F minorem ipſo E metientur. quod fieri non poteſt. non igitur E ipſum CD non metitur. quare ipſum metiatur neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

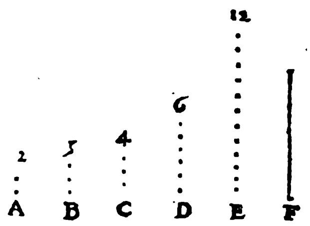
Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.



Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. ſumatur enim D, quem minimum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non metitur. metiatur primum. ſed & A B metiuntur ipſum D. ergo A B C ipſum D metientur. Dico & miuimum. ſi enim non, metientur A B C quendam numerum minorem ipſo D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipſum E, & A B ipſum E metiuntur. ergo & minimus, Ex antecedente. quem metiuntur A B ipſum E metietur. minimus autem, quem metiuntur A B, eſt D. quare D metitur ipſum E, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipſo D minorem. ergo A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipſum D: & ſumatur mi- 36. huius.

nimus

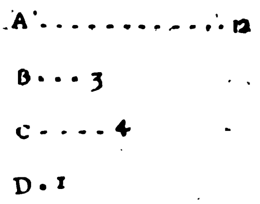
nimus numerus E, quē C D metiuntur. Itaque qm̄ A B metiuntur ipſum D, D vero 12.co.not. ipſum E; & A B ipſū E; metientur. metitur aūt & C ipſum E. ergo A B C ipſum E metiuntur. Dico & minimum. ſi enim non, metientur A B C numerum minorem ipſo E. metiantur F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipſum Ex antecedente, F metientur. ergo & minimus, quem A B metiuntur, metietur ipſum F: minimus autem, quem A B metiuntur, eſt D. quare D ipſum F metitur, & metitur C ipſum F. ergo D C ipſum F metientur; ac propterea minimus, quem metiuntur D C, metietur & F. ſed minimus, quem metiuntur D C, eſt E ergo E ipſum F metitur, maior minorē. quod fieri non poteſt. non igitur A B C metiuntur aliquē numerum minorem ipſo E. ergo numerum E minimum exiſtentem ipſi A B C metiuntur. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, menſus partem habebit à metiente denominatam.

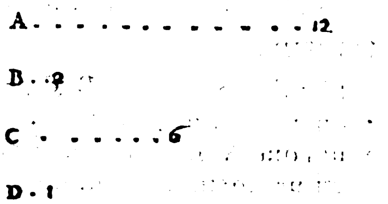
Numerum enim A numerus aliquis B metiatur. Dico A partem habere ab ipſo B denominatam. quoties enim B ipſum A metitur, tot vnitates ſint in C. Quoniam igitur B metitur ipſum A per eas, quę ſunt in C, vnitates; metitur autem & D unitas ipſorum C per vnitates, quæ in ipſo ſunt: & D vnitas ipſum C numerum æqualiter metie 15.huius. tur, atque B ipſum A. quare permutando unitas D ipſum B numerum ęqualiter metietur, atque C ipſum A. quæ igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem eſt pars 5. com. not. & C ipſius A. ſed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata. ergo & C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. quare A partem habet C ab ipſo B denominatam. quod oſtendere oportebat.



THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

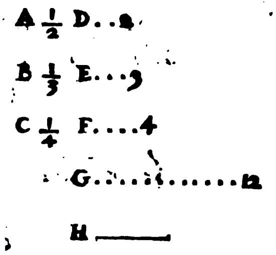
Numerus enim A partem habeat quamcumque B; & ab ipſo B denominatus ſit numerus C. Dico C ipſum A metiri. Quoniam enim B ipſius 5. com. not. A pars eſt denominata ab ipſo C. eſt autem & D vnitas ipſius C numeri pars ab eo denominata. quæ igitur pars eſt vnitas D ipſius C numeri, eadem pars eſt & B ipſius A. ergo vnitas D æqualiter metitur ipſum B numerum, atque B ipſum 15.huius. A. & permutando unitas D ipſum B numerum æqualiter metitur, atque C ipſum A. ergo C ipſum A metitur. quod oportebat demonſtrare.



PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus exiſtens datas partes habeat.

Sint



Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus ſit, habeat partes A B C. ſint ab ipſis A B C partibus denominati numeri D E F. & ſumatur minimus numerus G, quem ipſi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipſum 58.huius. G, habebit G partes ab ipſis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipſis D E F ſunt A B C. 59.huius. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum eſſe. ſi enim G non exiſtens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipſo G, qui eaſdem partes habeat. ſit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, eum metientur numeri ab ipſis A B C partibus denominati; ſunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipſum H metietur; atque eſt H minor ipſo G. quod fieri non poteſt. non igitur erit aliquis numerus minor ipſo H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonſtrare.

SEPTIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER OCTAVVS

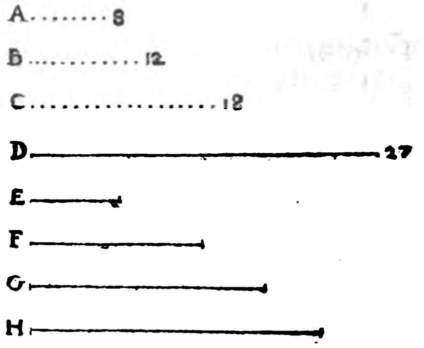
CVM COMMENTARIIS,

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

SI ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipſi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, quorũ extremi A D primi inter ſe ſint. Dico A B C D minimos eſſe omnium, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. ſi enim non, ſint minores ipſis A B C D numeri E F G H, & in eadem proportione. Et quoniam A B C D ſunt in eadem proportione, in qua E F G H; atque eſt ipſorũ A B C D multitudo æqualis
14.ſeptimi. multitudini ipſorum E F G H: erit ex æquali ut A ad D, ita E ad H: et ſunt A D
21.ſeptimi. primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo A ipſum E metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur E F G H minores ipſis A B C D exiſtentes in eadẽ ſunt, in qua ipſi, proportione; ac propterea A B C D minimi ſunt omnium, qui eandẽ, quam ipſi proportionem habent. quod demonſtrare oportebat.

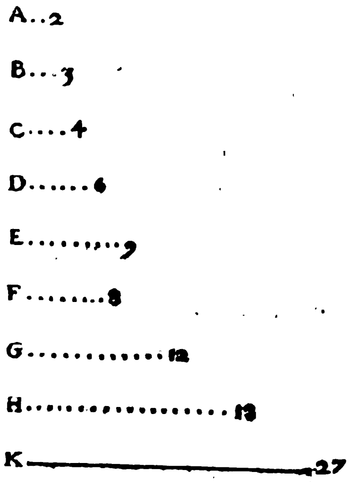


PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B. imperentur quattuor: et A ſe ipſum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D, et B ſe ipſum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans C D E ipſos F G H faciat, B vero multiplicans E faciat K. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit C, multiplicãs vero B ipſum D fecit; numerus A duos nu
17. ſeptimi. meros A B multiplicans fecit C D. eſt igitur ut A ad B, ita C ad D. rurſus quoniam

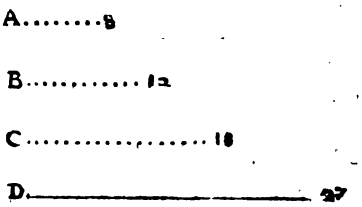
niam A ipſum B multiplicans fecit D, & B ſeipsũ multiplicans fecit E; vterque ipſorum A B multiplicans B vtrumque ipſorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. ſed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros CD multiplicans ipſos F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad C. rurſus quoniam A numeros D E multiplicans fecit GH, erit vt D ad E, ita G ad H. ſed vt D ad E, ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipſum E multiplicantes faciant H K; erit vt A ad B, ita H ad K. oſtenſum autem eſt & ut A ad B, ita eſſe & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales ſunt in proportione, quã habet A ad B. Dico ẽt minimos eſſe. Quoniam enim A B minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent; minimi vero, & primi ſunt inter ſe: erunt ipſi A B inter ſe primi. et vterque quidem ipſorum A B ſeipſum multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter ſe ſunt. ſi autem ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipſi proportionem habentium. ergo C D E, & FG H K minimi ſuut omnium, qui eandem quam A B proportionẽ habẽt. quod oportebat demonſtrare.



18.ſeptimi.
18.ſeptimi.
23.ſeptimi.
29.ſeptimi.
Ex antecedente.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipſi proportionem habentium; extremos eorũ quadratos eſſe: ſi vero quattuor eſſe cubos.

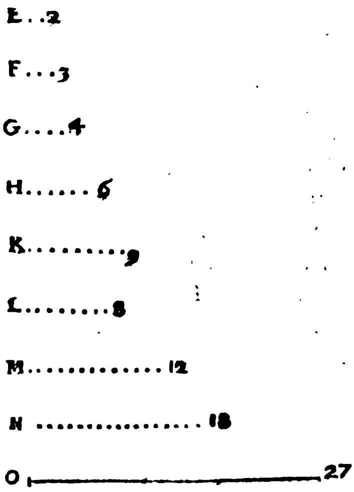


THEOREMA II.

PROPOSITIO. III.

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, minimi omniũ, qui eãdem, quam ipſi, proportionem habent; eorum extremi primi inter ſe erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quã ipſi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter ſe primos eſſe. ſumãtur enim duo numeri minimi in proportione ipſorum ABCD, qui ſint E F, tres vero GHK, & ſemper deinceps vno plures, quo ad aſſumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipſorum ABCD. ſumantur, & ſint LMMX. extremi igitur ipſorum LX primi in-



*
Ex antecedente:
29.ſeptimi.

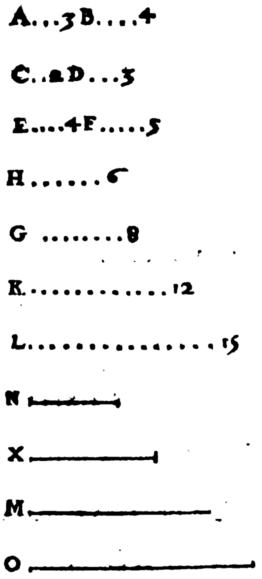
ter ſe ſunt. Quouiam enim EF primi ſunt,& vterque ipſorum ſe ipſum multiplicãs vtrumque GK fecit;vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK,& LX primi.& quoniam ABCD minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent;ſunt autem & LMNX minimi in eadẽ proportione,in qua A BCD;eſtq́; ipſorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipſorum LMNX: erit vnuſquiſque ipſorum ABCD vnicuique ipſorum LMNX æqualis. Ergo A quidem eſt ęqualis L, B vero ipſi M, C ipſi N,& D ipſi X.quòd cum LX primi ſint inter ſe,& L ipſi A æqualis,& X ipſi D;& AD inter ſe primi erũt.quod oportebat demõſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Sumãtur enim duo minimi numeri in proportione ipſorum ABCD] *ex eo, quod ad 35 huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris,numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

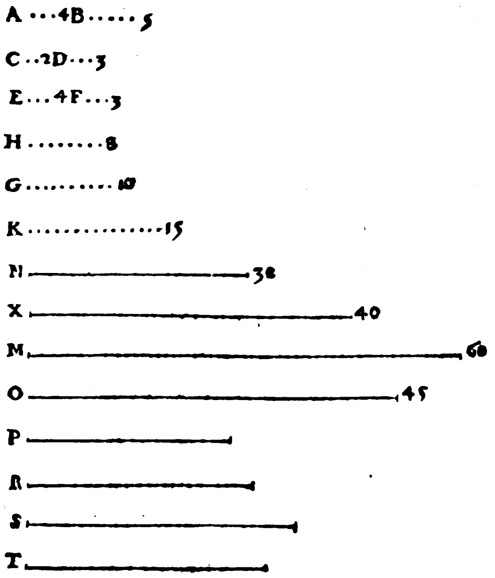


Sint datæ proporriones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B,& in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F.Sumatur enim minimus numerus, 36. ſeptimi. quem BC metiuntur; ſitq́; G.& quoties B metitur G,toties A ipſum H metiatur;quoties vero C ipſum G metitur,toties & D metiatur K, itaque E ipſum K vel metitur,vel non metitur.metiatur primum. & quoties E metitur K,toties F ipſum L metiatur.& quoniam A æqualiter metitur H,atque B ipſum G;erit vt A ad B, ita H ad 17. ſeptimi. G.Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K;& adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales ſunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F.Dico etiam minimos eſſe.Si enim non ſint HGKL deinceps minimi in proportionibus A ad B,C ad D,& E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis HGKL deinceps minimi in eiſdem proportionibus.ſint N X M O. & quoniam eſt vt A ad B, ita N ad X;& ſunt A B minimi; minimi autem eos, qui 21. ſeptimi. eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem,& minor minorem,hoc eſt antecedens antecedẽtem, & conſequẽs A conſequentem:metietur B ipſum X. Eadem ratione & C ipſum X metietur.quare B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipſum X me- 37. ſeptimi. tietur. minimus autem, quem metiuntur B C, eſt G. ergo G metietur X,maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis HGKL deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F.Sed non metiatur E ipſum K;& ſumatur minimus numerus, quem ipſi E K metiuntur; 36. ſeptimi. ſitq́; M.quoties autem K metitur M, toties & vterque ipſorum HG vtrumque N X metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipſũ 7. ſeptimi. N æqualiter metitur,atque G ipſum X;erit vt H ad G,ita N ad X.vt autem H ad G, ita A ad B.& vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rurſus quoniã E ipſum M æqualiter metitur,atque F ipſum O; erit vt E ad F, ita M ad O.quare NXMO deinceps proportionales ſunt in proportionibus A ad B, C ad D,& E ad F.Dico minimos quoque eſſe.Si enim non ſint NXMO deinceps minimi

in

in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erũt aliqui numeri minores ipſis N X M O deinceps minimi in eiſdem proportionibus. ſint P R S T. & cum ſit vt P ad R, ita A ad B; ſintq; A B minimi; minimi vero eos, qui eãdẽ habẽt proportionẽ, ęqualiter metiũtur, antecedẽs antecedẽtẽ, & cõſequẽs cõſequẽtẽ: numerus B ipsũ R metietur 21. ſeptimi.

B Eadem ratione & C metietur ipsũ R. ergo B C ipſum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiũtur B C, ipſum R metietur. 37. ſeptimi. minimus aũt, quẽ metiũtur B C, eſt G. ergo G metitur ipſum R. atque eſt vt G ad R, ita K ad S. C quare & K ipſum S metitur: metitur autem & E ipſum S; ideoq; E K ipſum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipſum S. Sed minimus, quem metiũtur E K, eſt M. ergo M ipſum S metietur, maior minorem. quòd fieri non poteſt. non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi ſunt in eiſdem proportionibus. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

A Eadem ratione & C ipſum X metitur.] *Quoniam enim eſt vt C ad D, ita X ad M; & ſunt C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, aequaliter metiuntur: numerus C ipſum X metietur.*

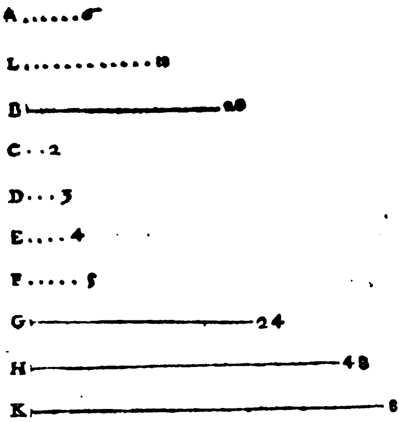
B Eadem ratione & C metietur ipſum R] *eſt enim vt C ad D, ita R ad S: ſuntq; C D minimi. ergo ob iam dictam cauſſam C ipſum R metietur.*

C Atque ut G ad R, ita K ad S] *eſt enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.*

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri intér ſe proportionẽ habẽt ex lateribus cõpoſitã.

Sint plani numeri A B, et ipſius quidem A latera ſint C D numeri; ipſius vero B latera ſint E F. Dico A ad B proportionẽ habere ex lateribus cõpoſitã. proportionibus enim datis, videlicet quã hẽt C ad E, & quã D ad F, ſumãtur numeri deinceps minimi G H K in proportionibus C ad E, & D ad F, ſitq; vt C ad E ita G ad H: vt aũt D ad F, ita H ad K. ergo G H K inter ſe proportiones habẽt laterũ. Ex antecedente. Sed proportio G ad K compoſita eſt ex proportione G ad H, et proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compoſitam. Dico igitur vt A ad B, ita eſſe G ad K; numerus enim D ipſum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipſum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad

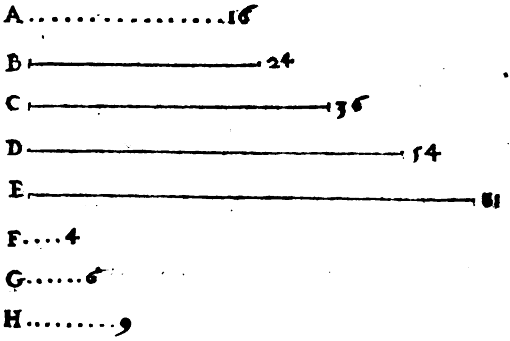


E, ita

E, ita A ad L. ut autem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rurſus quoniam E ipſum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipſum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. ſed vt D ad F, ita eſt H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Oſtenſum autem eſt & vt G ad H, ita A ad L. quare ex ęquali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compoſitam ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compoſitam. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

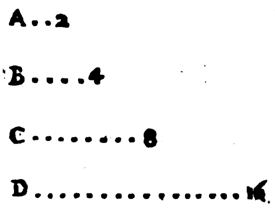
Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.



Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipſum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps ſeſe nõ metiri, perſpicuum eſt; neque enim A ipſum B metitur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipſum C. nam quot ſunt A B C, tot ſumantur minimi numeri eandem, quam ipſi A B C proportionem habentes. & ſint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem ſunt proportione, in qua A B C, atque eſt ipſorum A B C multitudo æqualis multitudini ipſorum F G H; erit ex æquali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam eſt vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipſum B; neque F ipſum G metietur. non igitur F vnitas eſt; vnitas enim omnem 3.huius. numerum metitur. & ſunt F H primi inter ſe. ergo neque F metitur ipſum H. atque eſt vt F ad H, ita A ad C. neq; igitur A ipſum C metietur. ſimiliter demonſtrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & ſecundum metietur.



Sint quotcumque numeri deinceps proportionales ABCD; & A ipſum D metiatur. Dico A ipſum quoque B metiri. ſi enim A non metitur ipſum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod eſt abſurdũ. ponitur enim A ipſum D metiri. metitur autem A ipſum D. ergo & A ipſum B metietur. quod demonſtraſſe oportuit.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

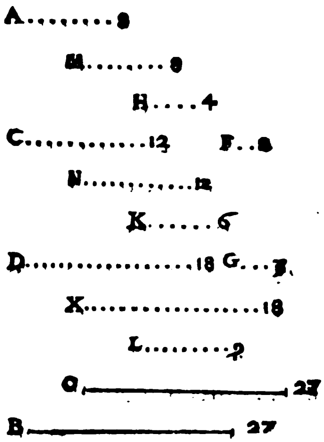
Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alius eandem, quam ipſi, proportionem habentes, cadent.

Inter duos enim numeros A B cadant numeri
C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita
E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales
cadunt inter A B, totidem & inter E F deinceps
proportionales cadere. quot enim numeri ſunt A C
D B, totidem ſumantur minimi numeri eandem, 35.septimi.
quam ipſi A C D B proportionem habentium G H
K L. ergo extremi ipſorum G L primi inter ſe ſunt. 3.huius.
& quoniam A C D B ad ipſos G H K L in eadem ſunt
proportione; atque eſt ipſorum A C D B multitudo
æqualis multitudini ipſorum G H K L; erit ex æqua- 14.septimi.
li vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F.
& vt igitur G ad L, ita E ad F; & ſunt G L primi. ſed
primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem pro 33.septimi.
portionem habent, æqualiter metiuntur, maior ma- 21.septimi.
iorem, & minor minorem. ergo G æqualiter meti-
tur ipſum E, atque L ipſum F. quoties autem G me
titur ipſum E, toties & vterque ipſorum H K vtrũ-
que M N metiatur. numeri igitur G H K L ipſos E M N F æqualiter metiuntur. ideoq; 18.septimi.
G H K L in eadem ſunt proportione, in qua ipſi E M N F. at G H K L ſimiliter in eadem
ſunt proportione, in qua A C D B. ergo A C D B in eadem proportione erunt, in qua
E M N F. Sed A C D B ſunt deinceps proportionales. ergo & E M N F deinceps propor
tionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidẽ dein
ceps proportionales & inter E F cadent. quod demonſtrare oportebat.

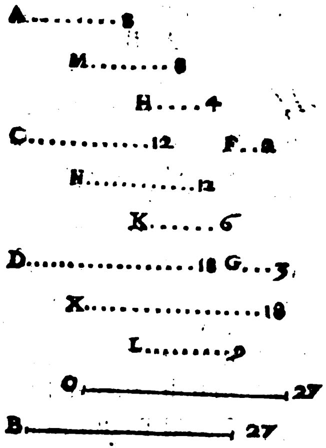
THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

Si duo numeri inter ſe primi fuerint, & inter ipſos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipſos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter ſe primi A B: & inter
ipſos deinceps proportionales cadant C D; ex-
ponaturq; vnitas E. Dico quot numeri deinceps
proportionales cadunt inter ipſos A B, totidem
& inter vtrumque ipſorum A B, & vnitatem E A
numeros deinceps proportionales cadere. ſuman
tur enim duo quidem numeri minimi F G in ea
dem proportione, in qua ſunt A C D B; tres ve 2.huius.
ro H K L, & ſemper deinceps vno plures, quo ad
fiat ipſorum multitudo æqualis multitudini ipſo
rum A C D B. ſumantur, & ſint M N X O. itaque
manifeſtum eſt F ſe ipſum quidem multiplican-
tem feciſſe H, multiplicantem vero H feciſſe M: &
G ſe ipſum quidẽ multiplicantem feciſſe L; mul-
tiplicantem vero L feciſſe O. & quoniam M N X
O minimi ſunt qui eãdem, quam ipſi F G propor-
tionem habent; ſunt autem & A C D B minimi
eandem, quam F G proportionem habentium; atque eſt ipſorum M N X O multi
tudo æqualis multitudini ipſorum A C D B: erit vnuſquiſque ipſorum M N X O
vnicuique ipſorum A C D B æqualis. æqualis igitur eſt M ipſi A, & O ipſi B. & quo-
niã F ſe ipſum multiplicans fecit H, metitur F ipſum H per vnitates, quæ ſunt in F. 10.com.not.
metitur



6.com. not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque F ipſum H, Conuers.20 diffi. eſt igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rurſus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipſum M per vnitates, quæ ſunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quę in ipſo ſunt, æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipſum M. ergo Conuer. 20 diffi. vt E unitas ad numerum F, ita H ad M. oſtenſum eſt autem & ut E unitas ad numerum F, ita eſſe F ad H. & ut igitur E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. ſed M eſt ęqualis ipſi A. quare vt B E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & ut E unitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipſorum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod oportebat demonſtrare.



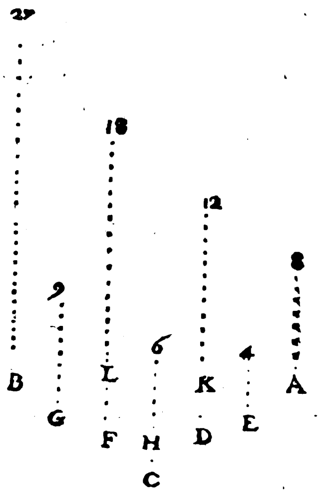
F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportione, in qua ſunt A C D B] *ex problemate, quod nos ad 35 ſeptimi conſcripſimus.*

B Eadem ratione, & vt E unitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] *quoniam enim G ſe ipſum multiplicans fecit L, metitur G ipſum L per vnitates, quae ſunt in ipſo G: metitur autem & E vnitas ipſum G per vnitates, quae in ipſo ſunt. ergo E vnitas aequaliter metitur numerum G, atque G ipſum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rurſus quoniam G multiplicans L fecit O, numerus L ipſum O metietur per vnitates, quae ſunt in G. ſed E vnitas metitur ipſum G per vnitates, quae in ipſo ſunt. aequaliter igitur E vnitas metitur G, atque L ipſum O. ergo vt E vnitas ad G, ita eſt L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc eſt ad B, qui ipſi O eſt aequalis. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipſos numeri deinceps proportionales cadent.



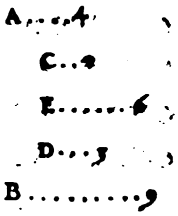
Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadant D E, & FG. Dico quot inter vtrumque ipſorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipſos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipſum F multipiicans faciat H: vterque autem ipſorum D F ipſum H multiplicans faciat vtrumque 20.diffi. K L. & quoniam eſt ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipſum D nume

rum

rum ęqualiter metietur, atque D ipſum E. Sed unitas C numerum D metitur per 6. com. not.
vnitates, quæ ſunt in D. ergo & numerus D ipſum E per vnitates, quæ ſunt in D metitur:
ac propterea numerus D ſeipſum multiplicans fecit E. rurſus quoniam vt vnitas 9. com. not.
C ad D numerum, ita eſt E ad A; vnitas C ipſum D numerum æqualiter metitur, 20. diffi.
atque E ipſum A. ſed vnitas C ipſum D numerum metitur per vnitates, quæ
ſunt in D. quare et E ipſum A per unitates, quæ ſunt in D metietur: ideoq; D ipſũ 9. com. not.
E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F ſe ipſum multiplicans fecit G, multiplicans
vero G ipſum B fecit. et quoniam D ſe ipſum multiplicans fecit E, multiplicans
vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem cauſſam ut D ad F, ita 17. ſeptimi.
H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rurſus quoniam D vtrumque ipſorum E H
multiplicans fecit vtrumque A K, erit ut E ad H, ita A ad K. ſed vt E ad H, ita D 17. ſeptimi.
ad F. & ut igitur D ad F, ita A ad K. Rurſus quoniam vterque D F ipſum H multiplicans
vtrumque K L fecit, vt D ad F, ita eſt K ad L. vt autem D ad F, ita erat A 18. ſeptimi.
ad K. & ut igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H G multiplicans
vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. ſed vt H ad G, ita D ab F. ergo & 17. ſeptimi.
vt D ad F, ita L ad B. oſtenſum autem eſt & vt D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L
ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales ſunt. quot igitur inter vtrũque
ipſorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem
& inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demõſtrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionẽ habet eius, quam latus habet latus.



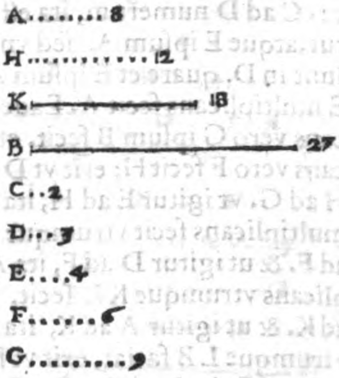
Sint quadrati numeri A B; et ipſius quidem A latus ſit C, ipſius
vero B latus D. Dico inter ipſos A B vnum medium proportionalem
cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius,
quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E.
et quoniam A numerus quadratus eſt, cuius latus C; numerus C 18. diffin.
ſeipſum multiplicans fecit A. eadem ratione et D ſe ipſum multiplicans
fecit B. Quoniam igitur C utrumque ipſorum C D multiplicans 17. ſeptimi.
vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rurſus
quoniam C multiplicans D ipſum E fecit, et D ſe ipſum multiplicans fecit B; duo
numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipſos E B fecerunt. eſt
igitur vt C ad D, ita E ad B. ſed ut C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E 18. ſeptimi.
ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad
B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri
proportionales ſunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quã Diffi. 13.
habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet
eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A B; & ipſius quidem A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico inter ipſos A B duos medios proportionales cadere; et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C ſe ipſum multiplicans faciat E; multiplicans vero D ipſum F faciat, et D ſe ipſum multiplicans faciat

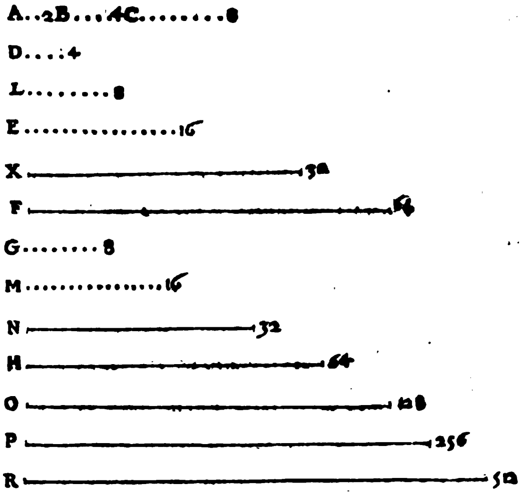
ciat G: et vterq; ipſorum C D multiplicās F vtrumque H K faciat. Quoniam igitur cubus eſt A, & eius latus C, numerus C ſe ipſum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipſum A fecit. ſimiliter & D ſe ipſum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipſum B. & quoniam C vtrūque ipſorum G D multiplicans vtrumque E F fecit, vt C ad D, ita eſt E ad F. 17.septimi. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rurſus quoniam C vtrumque ipſorum E F multiplicans fecit vtrumque A H, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rurſus quoniam vterque ipſorum C D multiplicans F vtrumque H K fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. 18. ſeptimi. rurſus quoniam D vtrumque F G multiplicans fecit vtrumque K B, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. oſtenſum autem eſt vt C ad D, ita eſſe A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipſos A B duo H K medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales ſunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quā habet A ad H. 25.diffin. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnuſquiſque ſe ipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis proportionales erunt. et ſi poſiti à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipſi proportionales erunt. et ſemper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; ſitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipſi A B C ſe ipſos multlplicantes faciant D E F: ipſos uero D E F multidlicantes faciant G H K. Dico nnmeros DEF & G H K deinceps proportionales eſſe. numerus enim A ipſum B multiplicans faciat L; vterque autem ipſorum A B multiplicans L faciat vtrumque M N. et rurſus B quidem multiplicans C ipſum X faciat; vterque vero ipſorum B C multiplicans X faciat vtrumque OP. A ſimiliter ijs, quę dicta ſunt, oſtendemus DLE, & G M N H deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ B eſt A ad B: & adhuc E X F, & H O P K deinceps eſſe proportionales in proportione B ad C. atque eſt vt A ad B, ita B ad C. ergo & D L E in eadem ſunt proportione, in qua E X F: & præterea G M N H in eadem proportione, in qua H O P K. eſtq; ipſorum quidem D L E multitudo



multitudo multitudini ipſorum E X F æqualis. multitudo autẽ ipſorum G M N H æqualis multitudini ipſorum H O P K. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. vt autem G ad H, ita H ad K. quod demonſtrare oportebat. 14. ſeptimi.

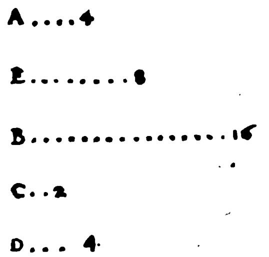
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta ſunt, oſtendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ eſt A ad B] *quoniam enim A duos numeros A B multiplicãs fecit D L, erit vt A ad B, ita D ad L. rurſus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipſos L E fecit; vt A ad B, ita erit L ad E. ſed vt A ad B, ita eſt D ad L. vt igitur A ad B, ita eſt & D ad L, & L ad E. quare ſequitur D L E deinceps proportionales eſſe in eadem proportione, in qua eſt A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipſos G M, erit vt D ad L, hoc eſt vt A ad B, ita G ad M. rurſus quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipſos M N fecerunt, vt A ad B, ita erit M ad N. Prẹterea cũ E duos numeros L E multiplicans faciat N H, erit vt L ad E, videlicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat & G ad M, & M ad N. vt igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo C M N H deinceps proportionales ſunt in eadẽ proportione, in qua eſt A ad B.* A 17. ſeptimi. 18. ſeptimi.

Et adhuc E X F, & H O P K deinceps eſſe proportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo ſupra, modo oſtendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipſos N X, & numerus C duos numeros B C multiplicans ipſos X F fecit. ergo vt B ad C, ita eſt & E ad X, & X ad F. Prẹterea B duos numeros E X multiplicans fecit H O. & duo numeri B C multiplicantes X fecerunt ipſos O P. rurſus C duos numeros X F multiplicans ipſos P K fecit. quare vt E ad X, hoc eſt vt C ad B, ita H ad O: & rurſus vt C ad B, ita O ad P. prẹterea vt X ad F, hoc eſt vt B ad C, ita eſt P ad K. vt igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus conſtat E X F, & H O P K deinceps proportionales eſſe in ea proportione, in qua eſt B ad C.* B C

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.



Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D, & A ipſum B metiatur. Dico & latus C ipſum D metiri. numerus enim C multiplicans D ipſum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales ſunt in proportione, quæ eſt C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps ſunt proportionales, metiturq; A ipſum B; & A ipſum E metietur. atque eſt vt A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipſum D. ſed C metiatur ipſum D. Dico & A ipſum B metiri. Ijſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus A E B deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniam eſt vt C ad D, ita A ad E. metitur autem C ipſum D. & A ipſum E metietur. & ſunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipſum B, ſi igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonſtrare. Ex demõſtratis in huius. 7. huius. *

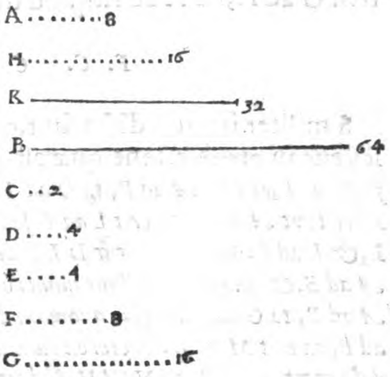
F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur & A ipſum B] *quoniam enim A E B deinceps proportionales ſunt; metiturq; A ipſum E; & E ipſum B metietur. quare A ipſum B metiatur neceſſe eſt ex duodecima communi notione.* * 20 diff.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus me tietur: & ſi latus metiatur latus,& cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum
B metiatur: & ipſius quidem A latus ſit C, ip-
ſius vero B latus D. Dico C ipſum D metiri. nu
merus enim C ſe ipſum multiplicans faciat E,
& multiplicãs D faciat F: D vero ſe ipſum mul
tiplicãs faciat G, & vterque ipſorum C D mul
A tiplicans F vtrumque H K faciat. manifeſtum
eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales
eſſe in proportione, quę eſt C ad D. & quoniã
A H K B deinceps proportionales ſunt, meti-
7.huius. turq; A ipſum B; & A ipſum H metietur. eſt aũt
vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipſũ D metietur.
ſed C metiatur D. Dico & A ipſum B metiri. iiſ-
dẽ enim cõſtructis ſimiliter oſtẽdemus A H K B
deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniã C ipſum D metitur,
B eſtq; vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur. quod
demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

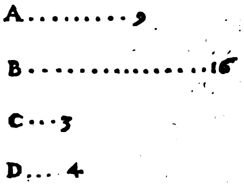
A Manifeſtum eſt E F G, & A H K B deinceps proportionales eſſe in proportione, quæ eſt C ad D] *hoc ſimiliter vt in 13 demonſtrabimus.*

B Et A metitur ipſum H. quare & ipſum B metietur] *quoniam enim eſt vt A ad H, ita*
20.diffi. *H ad K; meti turq; A ipſum H; & H metietur ipſum K. quare & A ipſum K metietur. rurſus quo*
11.com.not. *niam vt A ad H, ita eſt K ad B, & K ipſum B metietur. ergo & A ipſum B metiatur neceſſe eſt.*

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

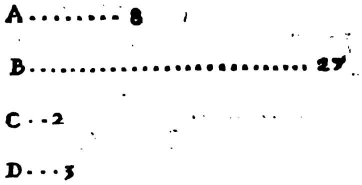
Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D. & A
non metiatur ipſum B. Dico neque C ipſum D metiri. ſi
14.huius. enim metitur C ipſum D, & A ipſum B metietur. nõ me-
titur autem A ipſum B. non igitur C ipſum D metietur.
ſed C non metiatur D. Dico neque A ipſum B metiri. Si
enim A metitur ipſum B, & C ipſum D metietur: atqui
C nõ metitur D; neque igitur A ipſum B metietur. quod
demonſtrare oportebat.



THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipſius quidẽ A latus ſit C, ipſius vero B latus D. Dico C ipſum D nõ metiri.



ſi enim C metitur ipſum D, & A ipſum B metietur. atqui non metitur A ipſum B. non igitur C ipſum D metietur. Sed non metiatur C ipſum D. Dico neque A ipſum B metiri. ſi enim A ipſum B metitur, & C metietur ipſum D. non metitur autem C ipſum D. neque igitur A ipſum B metietur. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos ſimiles planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

A...... 6
C 12
B 24
C .. 2
D ... 3
E 4
F 6

Sint duo numeri plani inter ſe ſimiles A B; & ipſius quidem A latera ſint C D; ipſius vero B latera E F. & quoniam ſimiles plani ſunt, qui latera habent proportionalia; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico inter ipſos A B vnnm medium proportionalem cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim eſt vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F. & quoniam planus numerus eſt A, cuius latera C D, numerus D ipſum C multiplicans fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipſum B fecit. numerus autem D ipſum E multiplicans faciat G. & cum D ipſum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. ſed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rurſus quoniam E ipſum D multiplicans fecit G, multiplicãs vero F ipſum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. oſtenſum eſt aũt & vt D ad F, ita eſſe A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales ſunt; ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales ſunt, A ad B duplam proportionem habebit eius, quam habet ad G. atque eſt vt A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demóſtrare.

21.diffi.

17. ſeptimi.

Diffi.3.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Inter duos ſimiles ſolidos numeros duo medij proportionales cadunt; & ſolidus ad ſolidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

A........ 8
N............ 12
X 18
B 27
C .. 2
D .. 2
E .. 2
F ... 3
G ... 3
H ... 3
K.... 4
M 6
L 9

Sint duo numeri ſolidi inter ſe ſimiles A B, & ipſius quidem A latera ſint C D E; ipſius uero B latera F G H, & quoniam ſimiles ſolidi ſunt, qui latera habent proportionalia, erit vt C ad D, ita F ad G. vt autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipſos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipſum D multiplicans faciat K, F uero multiplicans G ipſum L faciat. & quoniam C D in eadem ſunt proportione, in qua F G: & ex ipſis C D

21.diffi.

fit

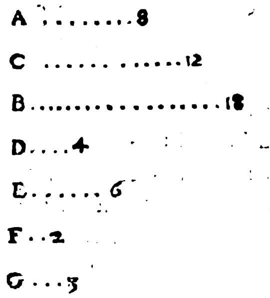
ſit K; ex ipſis vero F G ſit L, erunt K L ſimiles plani Ex antecedente. numeri. quare inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. ſit is numerus M. ergo M ſit ex D F, vt in precedenti theoremate. eſt igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipſum C multiplicans fecit K, multipli- 17. ſeptimi. cans vero F fecit M; erit vt C ad F, ita K ad M. ſed vt K ad M, ita M ad L. ergo K M L deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F. & quoniā vt C ad D, ita F ad G, erit permutando vt C ad F, ita D ad G. rurſus quoniam vt D ad E, ita G ad H, & permutādo erit vt D ad G, ita E ad H. ergo K M L deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F, & D ad G, & E ad H. vterque autem ipſorum E H multiplicans M faciat vtrumq; N X. & quoniam ſolidus eſt A, latera autem ipſius C D E, numerus E eum, qui ſit ex C D multiplicans fecit A: qui vero ſit ex C D eſt K. ergo E multiplicans K ipſum A fecit. Eadem ratione & H multi- A plicans L, qui ſit ex F G, fecit ipſum B. & quoniam E ipſum K multiplicans fecit A. ſed & multiplicans M fecit N; erit vt K ad M, ita A ad N. vt autem K ad M, ita C ad F, & D ad G, & adhuc E ad H. ergo vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita A ad N. rurſus quoniam vterque ipſorum E H multiplicans M fecit vtrumque N X, erit vt E ad H, ita N ad X. ſed vt E ad H, ita C ad F, & D ad B G. eſt igitur vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita & A ad N, & N ad X. rurſus quoniam H multiplicans M fecit ipſum X; ſed & multiplicans L fecit B: erit vt M ad L, ita X ad B. ſed vt M ad L, ita C ad F, & D ad G, & E ad H. & vt igitur C ad F, & D ad G, & E ad H, ita non ſolum X ad B, ſed & A ad N, & N ad X. ergo A N X B deinceps proportionales ſunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam habet numerus C ad F, vel D ad G, & E ad H. Quoniam enim quattuor nume- Diffi. 24. ri proportionales ſunt A N X B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N. ſed vt A ad N, ita oſtenſus eſt & C ad F, & D ad G, & E ad H. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quā C habet ad F, & D ad G, & E ad H. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipſum K multiplicans fecit A] *eſt enim K, qui ſit ex C D, & E multiplicans eum, qui ſit ex C D ipſum A fecit.*

B Rurſus quoniam H multiplicans M fecit ipſum X, ſed & multiplicans L fecit B] *eſt enim L, qui ſit ex F G, & H eum, qui ſit ex F G multiplicans ipſum B fecit.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.



Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri ſimiles plani erūt.

Inter duos enim numeros A B vnus medius proportionalis cadat C. Dico numeros A B ſimiles planos eſſe. A Sumantur enim minimi numeri D E, eandem, quam ipſi A C B proportionem habentium. eſt igitur vt D ad E, ita A ad C. vt autem A ad C, ita C ad B. ergo & vt D ad E 10. diffi. ita C ad B. ęqualiter igitur D ipſum A metitur, atque E ipſum C. ergo quoties D metitur A, tot vnitates ſint in

F; propterea q; F multiplicans D ipſum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare 9. com: not.
A planus numerus eſt,cuius latera D F.rurſus qm̄ D E minimi numeri ſunt, eandē
quā C B proportionē habētiū;æqualiter D ipſum C metitur,& E ipſum B. quoties 21.ſeptimi.
aũt E ipsũ B metitur, tot vnitates ſint in G. ergo E ipsũ B metitur per eas,quæ ſunt
in G vnitates.quare G ipſum E multiplicās fecit B:ideoq; B numerus planus eſt, cu 9. com. not.
ius latera E G.ergo numeri A B ſunt plani. Dico & ſimiles eſſe. Quoniam enim uter A
que ipſorum F G multiplicans E vtrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut 18.ſeptimi.
aũt C ad B.ita D ad E.& ut igitur D ad E,ita F ad G. quare A B ſimiles plani ſunt; B
cum ipſorum latera ſint proportionalia.id quod demonſtrare oportebat.

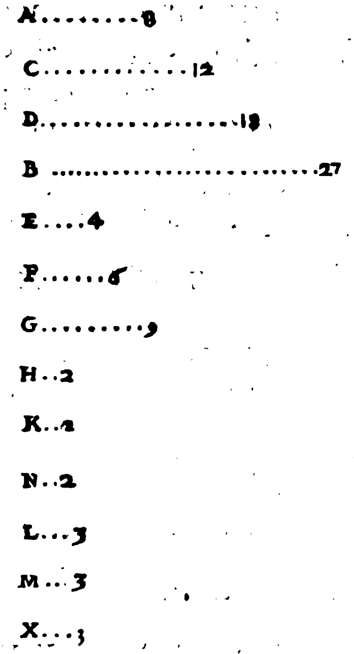
F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim minimi numeri D E, eandem, quam ipſi A C B proportionem A
habentium] *ex eo, quod additum eſt ad 35 ſeptimi.*

Quare A B ſimiles plani ſunt, cum ipſorum latera ſint proportionalia] *quoniam* B
enim eſt vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & ſunt D F latera ipſius A, & E G latera ipſius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, ſimiles inter ſe erunt.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri ſimiles ſolidi erunt.



Inter duos enim numeros A D duo medij pro
portionales cadant C D. Dico ipſos A B ſimiles
ſolidos eſſe. ſumantur enim minimi numeri tres,
eandem quā A C D B proportionē habentiũ, qui A
ſint E F G. extremi igitur ipſorum E G primi inter
ſe ſunt.& quoniam inter E G unus medius propor 3.huius.
tionalis cecidit F, erunt numeri E G ſimiles plani. Ex antecedenti.
ſint ipſius quidem E latera H K; ipſius uero G late
ra L M. manifeſtum eſt ex antecedente E F G dein B
ceps proportionales eſſe in proportione H ad L,
& in proportione K ad M. & quoniam E F G mini
mi ſunt, eandem, quam A C D proportionem ha-
bentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: & 23 ſeptimi.
ſunt E G primi,ſed primi & minimi. minimi ue- 21.ſeptimi.
ro eos,qui eandem habent proportionem æquali-
ter metiuntur, maior maiorem,& minor minorē,
hoc eſt antecedens antecedentem, & conſequens
conſequentem. ergo E ipſum A æqualiter meti-
tur,atque G ipſum D.quoties autem E metitur A,
tot unitates ſint in N. ergo N ipſum E multiplicās 9.com. not.
fecit A.ſed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui
fit ex H K multiplicās ipſum A fecit.ſolidus igitur
eſt A,cuius latera H K N. Rurſus quoniam E F G
minimi ſunt,eandem quam ipſi C D B proportio
nem habentium, E ipſum C æqualiter metitur,atque G ipſum B.& quoties G me-
titur B, tot unitates ſint in X.ergo G ipſum B metitur per eas,quę ſunt in X unita-
tis;ideoq; X multiplicans G ipſum B fecit.at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L
M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipſum C fecit.ſolidus igitur eſt B, &
eius latera L M X.quare A B ſolidi ſunt.Dico etiam ſimiles eſſe.quoniam enim N X C
multiplicantes E ipſos A C fecerunt,ut N ad X,ita erit A ad C, hoc eſt E ad F.ſed vt
E ad F, ita H ad L, & K ad M.& vt igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. ſunt autem

HKN latera ipſius A, & L M X latera ipſius B. ergo A B ſimiles ſolidi erunt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium] *inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam A C D B proportionem habẽtium ex iis, quae nos ad 35 ſeptimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 ſeptimi ſumantur tres minimi numeri eandem, quam ACD proportionem habentium.*

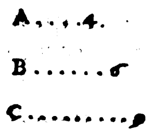
B Manifeſtum eſt ex antecedente E F G deinceps proportionales eſſe in proportione H ad L, & in proportione K ad M] *quoniam enim E G ſimiles plani ſunt, ipſorum latera eandem habent proportionem. eſt igitur vt H ad K, ita L ad M: & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaque quoniam K ipſum H multiplicans fecit E; multiplicans vero L ipſum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rurſus quoniam L ipſum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipſum G fecit, vt K ad M, ita eſt F ad G. oſtenſum eſt autem vt H ad L, ita eſſe K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea E F G deinceps proportionales ſunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.* 17. ſeptimi.

C Quoniam enim N X multiplicantes E ipſos A C fecerunt, vt N ad X, ita erit A ad C] *etenim E ipſum C aequaliter metitur, atque G ipſum B, vt oſtenſum eſt. quoties autem G metitur B, tot vnitates ſunt in X. ergo X multiplicans E ipſum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

A. Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit quadratus, & tertius quadratus erit.

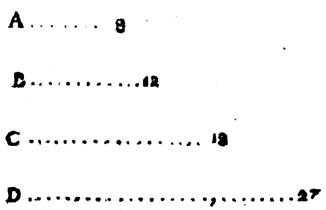
Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; ſitq; primus A quadratus. Dico & tertium C quadratum eſſe. Quoniã enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erũt A C ſimiles plani. ſed A eſt quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonſtrare. 20. huius.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A ſit cubus. Dico & D cubum eſſe. Quoniam enim inter A D duo medij proportionales cadunt B C, erunt A D ſimiles ſolidi. eſt autem A cubus; ergo et D cubus erit. quod demonſtrare oportebat. 21. huius.



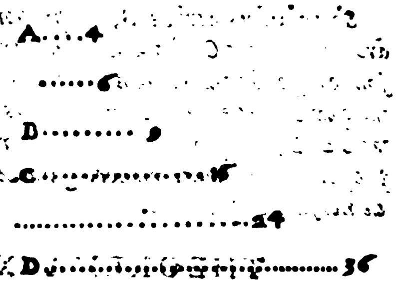
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Si duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter ſe proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D: ſitq; A quadratus. Dico & B quadratum eſſe.

quoniam

quoniam enim CD quadrati ſunt, erunt C D ſimiles plani; ideoq; inter ipſos CD vnus medius proportionalis cadit. eſt autem vt C ad D, ita A ad B: quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. eſtq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.



18. huius.

8. huius.

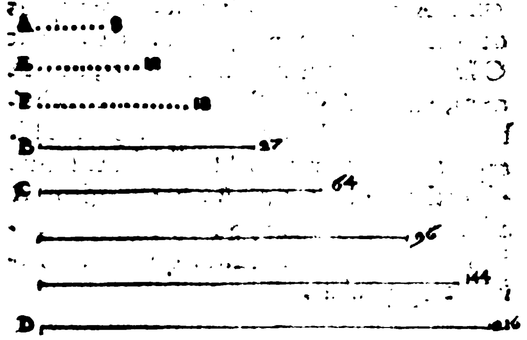
22. huius.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

Duo enim numeri A B inter ſe proportionem habeant, quam cubus numerus C ad numerũ cubum D; ſitq; A cubus. Dico & B cubum eſſe. Quoniam enim CD cubi ſunt, erunt CD ſimiles ſolidi. idcircoq; inter ipſos duo medij proportionales cadent: quot autem inter C D cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. ergo inter A B duo medij cadent proportionales. cadant E F. quoniam igitur quattuor numeri A E F B deinceps proportionales ſunt, eſtq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonſtrare.



19. huius.

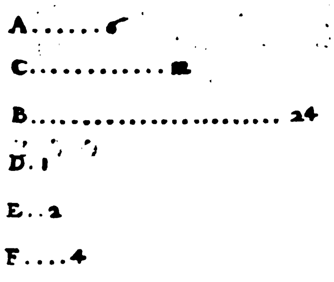
8. huius.

23. huius.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint ſimiles plani numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim A B ſimiles plani ſunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, ſitq; C: & ſumantur minimi numeri, eandem, quam A B C proportionẽ habentiũ D E F, ergo ipſorum extremi D F quadrati ſunt. & quoniam eſt vt D ad F, ita A ad B; et ſunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod demonſtrare oportebat.



18. huius.

35. ſeptimi.

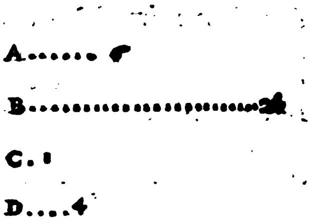
Cor. 2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & huius conuerſum verum eſt. quod hoc modo demonſtrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter ſe ſimiles ſunt.

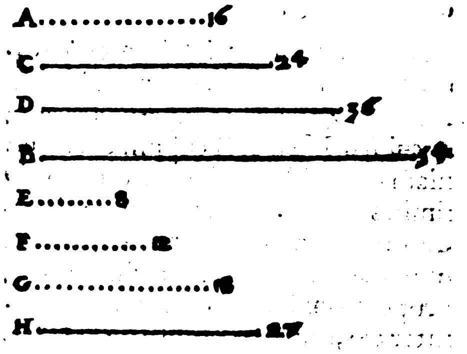
Sint plani numeri A B, qui proportionem habeant, quã qua-
dratus numerus C ad quadratum numerum D. Dico eos inter ſe
ſimiles eſſe. Quoniam enim CD quadrati ſunt, erunt ſimiles pla-
18. huius. *ni. quare inter eos cadit vnus medius proportionalis: atque eſt*
8. huius. *vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipſos A B vnus medius*
20. huius. *proportionalis cadit. numeri igitur A B ſimiles plani ſunt. quod*
demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi numeri inter ſe proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint ſimiles ſolidi numeri A B. Dico A
ad B proportionem habere, quam nume-
rus cubus ad cubum numerum. Quoniã
19. huius. enim A B ſimiles ſolidi ſunt, inter ipſos
duo medij cadent proportionales. cadãt
35. ſeptimi. C D; & ſumantur minimi numeri, qui eã-
dem, quam A C D B proportionem ha-
beant, ipſis multitudine æquales EFGH.
Corol. 2. huius. ergo eorum extremi EH cubi ſunt. atque
eſt vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A
ad B proportionem, quam numerus cu-
bus ad cubum numerum. quod demon-
ſtrare oportebat.

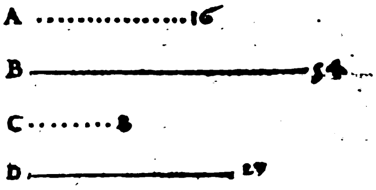


F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuerſum verum eſt. quod ita demonſtratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter ſe ſimiles ſunt.

Sint ſolidi numeri A B proportionem habentes, quam
numerus cubus C ad numerum cubum D. Dico eos inter
ſe ſimiles eſſe. Quoniã enim C D cubi ſunt, erũt ſimiles ſo-
19. huius. *lidi; ac propterea inter eos cadũt duo medij proportiona-*
8. huius. *les. eſt autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter*
21. huius. *ipſos A B duo medij proportionales cadent. ſimiles igi-*
tur ſolidi ſunt numeri A B. quod demonſtrare oportebat



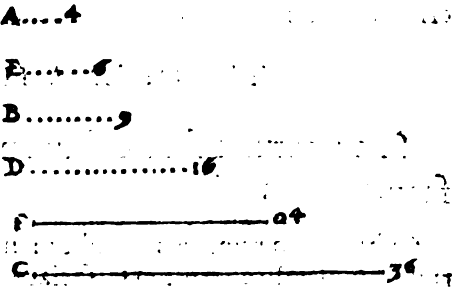
OCTAVI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER NONVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

SI DVO ſimiles plani numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

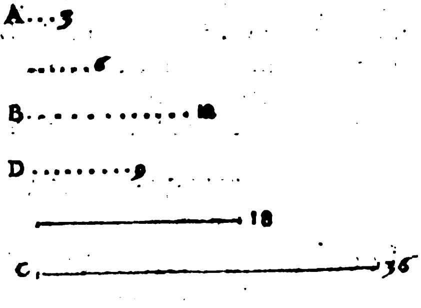
Sint duo ſimiles plani numeri A B, & A ipſum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. 17. ſeptimi. Et quoniam A B ſimiles plani ſunt, inter ipſos vnus medius proportionalis 18. octaui. cadet. ſi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipſos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. 8. octaui. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque eſt D quadratus. 11. octaui. ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri ſe multiplicantes quadratum numerum efficiant, ſimiles plani erunt.

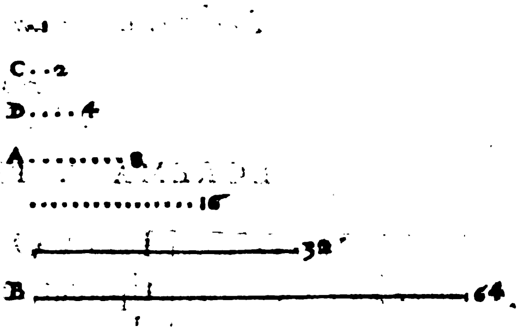
Duo enim numeri A B ſeſe multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B ſimiles planos eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicans faciat D. ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; 17. ſeptimi vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus eſt, ſed & C; erũt D C ſimiles plani. quare 18. octaui.



8.octaui. inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. atque eſt vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B cadet vnus medius proportionalis. ſi autem inter duos numeros vnus 10. octaui. medius proportionalis cadat. erunt ſimiles plani. ergo A B ſimiles plani ſunt. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

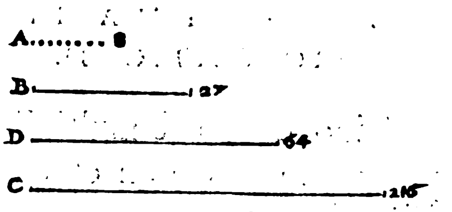
Si cubus numerus ſe ipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.



Cubus enim numerus A ſe ipſum multiplicans faciat B. Dico B cubum eſſe. ſumatur enim ipſius A latus C, & C ſe ipſum multiplicans faciat D. manifeſtū eſt C multiplicantem D facere ipſum A. & quoniam C ſe ipſum multiplicans fecit 10.com.not. D, metitur C ipſum D per vnitates, quæ in ipſo ſunt. 6. com. not. ſed & vnitas metitur C per eas, quę in ipſo ſunt Conuer. 20. diffi. vnitates. eſt igitur vt vnitas ad C, ita C ad D. rurſus quoniam C multiplicans D ipſum A fecit, metitur D ipſum A per vnitates, quæ ſunt in C. metitur autem & vnitas ipſum C per vnitates, quæ in ipſo ſunt. ergo vt unitas ad C, ita D ad A. ſed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq; inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rurſus quoniā A ſe ipſum multiplicans fecit B & A ipſum B metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt. metitur autem & vnitas ipſum A per vnitates, quæ ſunt in ipſo. eſt igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. ſed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportionales. 8.octaui. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd ſi inter dnos numeros 23. octaui. cadant duo medij proportionales, primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit. atque eſt A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonſtrarę oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicās faciat aliquē, factus cubus erit.

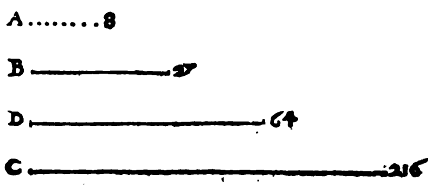


Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipſum C faciat. Dico C cubum eſſe. numerus enim A ſe ipſum Ex antecedente. multiplicans faciat D. ergo D cubus eſt. & quoniam A ſe ipſum multiplicans fecit D; 17.ſeptimi. multiplicans vero B ipſum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi ſunt, erunt ſimiles ſolidi; ac propterea in- 8.octaui. ter ipſos cadent duo medij proportionales. quare & inter D C duo medij propor- 23. octaui. tionales cadent. eſtq; D cubus. ergo & C cubus erit.

THEOREMA. V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus



Cubus enim A numerũ aliquem B multiplicans faciat cubum C. Dico B cubum eſſe. numerus enim A ſe ipſum multiplicãs faciat D. ergo D cubus eſt. & quoniam A ſe ipſum quidem multiplicans fecit D; mul- Ex antecedente. tiplicans vero B ipſum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi ſunt, 17. ſeptimi. ſimiles ſunt ſolidi; ac propterea inter ipſos cadunt duo medij proportionales: atque eſt vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A 8. octaui. B duo medij proportionales cadent eſtq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod 23. octaui. oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus præcedentibus & illa ſequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nõ erit cubus.

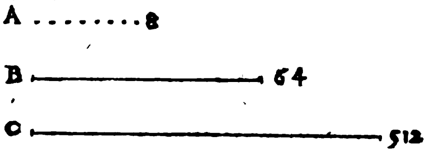
Si enim factus ſit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

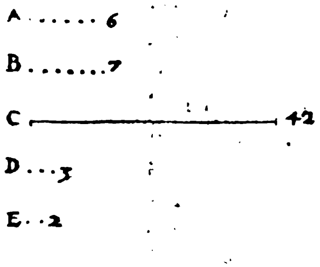
Si numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit.



Numerus enim A ſe ipſum multiplicãs cubum B faciat. Dico & A cubum eſſe. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipſum C fe- Diffi.19. cit, erit C cubus. & quoniam A ſe ipſum quidem multiplicans fecit B; multiplicãs uero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C. quòd cum B C cubi ſint, ſimiles ſolidi erũt: 17. ſeptimi. ideoq; inter ipſos cadent duo medij proportionales. & eſt ut B ad C, ita A ad B. 19. octaui. quare & inter A B duo medij proportionales caduntatque eſt B cubus, ergo & A 23. octaui. cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicãs, quempiam faciat, factus ſolidus erit.



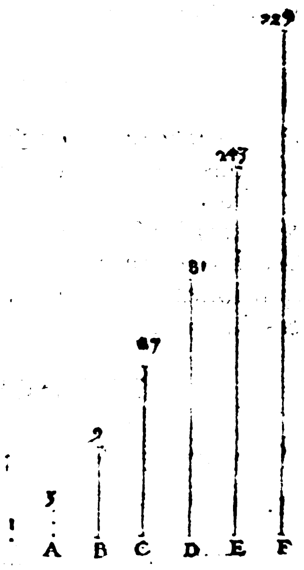
Cõpoſitus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipſum C faciat. Dico C ſolidũ eſſe. Quoniã enim A cõpoſitus eſt, eũ numerus aliquis 13. diffi. metietur. metiatur D. & quoties D ipſum A metitur, tot unitates ſint in E. ergo E multiplicans D 9. com. not: fecit A. & quoniam A ipſum B multiplicans fecit C; eſtq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipſum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans 16. ſeptimi Diffi.17. eum, qui fit ex D E, ipſum C fecit. ac propterea C ſolidus eſt, cuius latera D E. quod oportebat demonſtrare.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

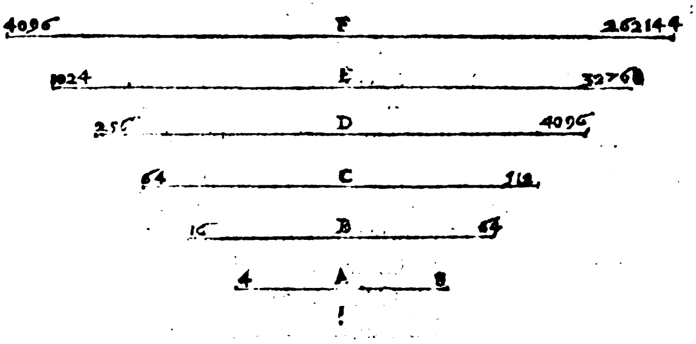
Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes: quartus aũt eſt cubus, & duos intermittẽtes omnes: ſeptimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab vnitate quotcumque numeri deinceps
proportionales A B C D E F. Dico tertium quidẽ
ab vnitate B quadratum eſſe, & vnum intermittentes
omnes: quartum autem C cubum, & duos intemittentes
omnes; ſeptimum vero F cubum ſimul,
& quadratum, & quinque intermittentes omnes.
Diffin. 20. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æqualiter
6. com. not. metitur numerum A, atque A ipſum B. ſed
vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipſo ſunt. Ergo
& A ipſumB per vnitates, quę ſunt in A metitur.
quare A ſe ipſum multiplicans fecit B. quadratus
igitur eſt B. & quoniam B C D deinceps proportionales
22. octaui. ſunt; eſtq; B quadratus; & D quadratus erit.
Eadem ratione erit & F quadratus. ſimiliter demonſtrabimus
& vnum intermittentes omnes quadratos
eſſe. Dico & quartum ab vnitate videlicet C
eſſe cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam
enim eſt vt vnitas ad A, ita B ad C; vnitas
20. diffin. numerum A æqualiter metitur, atque B ipſum
6. com. not. C. ſed vnitas numerum A metitur per vnitates, quę
9. com. not. in A ſunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quę ſunt in A; & ob id A multiplicans
B ipſum C fecit. Quoniam igitur A ſe ipſum multiplicans fecit B; multiplicans vero
19. diffi. B fecit C; erit C cubus. quòd cum C D E F deinceps proportionales ſint; ſitq; C
23. octaui. cubus; & F cubus erit. oſteſũ aũt eſt & quadratũ eſſe. ſeptimus igitur ab vnitate F, &
cubus eſt, & quadratus. Similiter quoque demonſtrabimus quinque intermittentes
omnes & cubos, & quadratos eſſe. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt vnitatem ſit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem ſit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.



Sint ab vnitate numeri quotcumque deinceps proportionales A B C D E F, & qui poſt vnitatem A ſit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe: tertiũ quidem ab vnitate

B eſſe

B eſſe quadratum, & vnum intermittentes omnes, demonſtratum iam eſt. ſed & reliqui
omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps ſunt proportionales;
eſtq; A quadratus: & C quadratus erit. rurſus quoniam B C D deinceps proportionales A
ſunt; eſt autem B quadratus: & D quadratus erit. ſimiliter oſtendemus &
reliquos omnes quadratos eſſe. ſit autem A cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. quartum
quidem ab vnitate C eſſe cubum, & duos intermittentes omnes, iam demonſtratum
eſt. ſed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim eſt vt vnitas ad A, ita
A ad B, vnitas numerum A ęqualiter metitur, atque A ipſum B. ſed vnitas metitur 20.diffin.
numerum A per vnitates, quæ ſunt in ipſo. quare & A numerum B metitur per vnitates,
quæ in ipſo ſunt. ergo A ſeipſum multiplicans fecit B, atque eſt A cubus. ſi autem
cubus numerus ſe ipſum multiplicans fecerit aliquem, factus cubus erit. Ergo 2 huius.
B eſt cubus. & quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales ſunt,
eſtq; A cubus; & D cubus erit. Eadem ratione & E eſt cubus, & ſimiliter reliqui omnes B
cubi ſunt. quod demonſtrare oportebat.

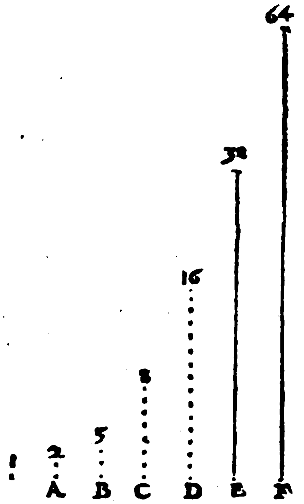
F. C. COMMENTARIVS.

Rurſus quoniam BCD deinceps proportionales ſunt, eſt autem B quadratus; et A
D quadratus erit] *videntur hęc ſuperuacanea eſſe, cum ſuperius demonſtratum ſit tertium ab
vnitate quadratum eſſe, & vnum intermittentes omnes.*

Eadem ratione & E eſt cubus] *quattuor enim numeri* B C D E *deinceps proportionales* A
ſunt; atque eſt B *cubus. ergo &* E *cubus ſit neceſſe eſt.* 23.octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt unitatem non ſit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & unum intermittentes omnes. At ſi qui poſt vnitatem non ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes oẽs.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri
A B C D E F, & qui poſt vnitatem A non ſit quadratus.
Dico neque alium vllum quadratum eſſe, pręter
tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes.
ſi enim fieri poteſt, ſit C quadratus; eſt autem & quadratus
B. ergo B C inter ſe proportionem habent,
quam numerus quadratus ad quadratum numerũ:
atque eſt vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B inter
ſe proportionem eam, quam numerus quadratus
ad quadratum numerum: ideoq; AB ſimiles plani 26.octaui.
ſunt. & eſt B quadratus. ergo & A quadratus eſt. A
quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. ſimiliter
oſtendemus neque alium ullum quadratum
eſſe, pręter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes
omnes. ſed non ſit A cubus. Dico neque alium
vllum cubum eſſe, pręter quartũ ab vnitate, & duos
intermittentes omnes. ſi enim fieri poteſt, ſit D cubus.
eſt autem & cubus C; quartus enim eſt ab vnitate.
& vt C ad D, ita eſt B ad C. ergo & B ad C proportionem habet, quam cubus ad
cubum; ac propterea B C ſimiles ſolidi ſunt. atque eſt C cubus. ergo & B cubus 27.octaui.
erit. & quoniam eſt vt unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autem numerum B
A metitur per unitates, quæ ſunt in ipſo: & A metietur B per vnitates, quæ in ipſo
ſunt.

ſunt. quare A ſe ipſum multiplicans cubum B fecit. ſi autẽ numerus ſe ipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit. cubus igitur eſt A. quod non ponitur. ergo neque D eſt cubus. ſimiliter demonſtrabimus neque alium vllũ cubũ eſſe, præter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. quod demõſtrare oportebat. 6.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

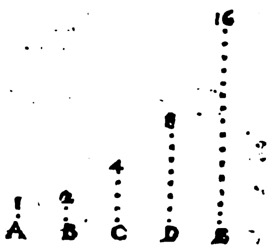
A Ideoq; A B ſimiles plani ſunt. & eſt B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quoniam enim A B ſimiles plani ſunt, inter eos unus medius proportionalis cadit. ſunt igitur tres numeri deinceps proportionales; eſtq; primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.* 18 octaui: 22 octaui.

B Ac propterea B C ſimiles ſolidi ſunt; atque eſt C cubus; ergo & B cubus erit] *quoniam enim ſimiles ſolidi ſunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quòd cum primus ſit cubus, & quartus cubus ſit neceſſe eſt.* 19.octaui. 23.octaui.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui ſunt in numeris proportionalibus.

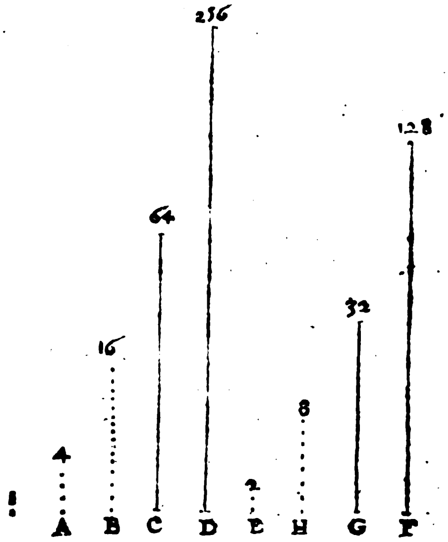
Sint ab vnitate A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipſorum C D. Qm̃ enim eſt vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numerũ B æqualiter metitur, atque D ipſum E. quare permutãdo A vnitas numerum æqualiter D metitur, atque B ipſum E. ſed A vnitas metitur D per eas, quę ſunt in ipſo D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ ſunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorũ, qui ſunt in numeris proportionalibus. quod demonſtrare oportebat. 15. ſeptimi.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumque primorum numerorum metiuntur vltimum, ijdẽ & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eoſdem & ipsũ A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipſum D. Dico E ipſum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipſum A, atq; E eſt primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem nõ metitur, primus eſt. ergo E A numeri inter ſe primi ſunt. et quoniam E metitur ipſum D, metiatur per vnitates, quę 31.ſeptimi. 9. com. not.



ſunt

ſunt in F. ergo E multiplicans F ipſũ D fecit. Rurſus quoniam A metitur ipſum D 19.com.not.
per eas, quæ ſunt in C vnitates, A multiplicans C ipſum D fecit. Sed & E multipli A
cans F fecit D. qui igitur fit ex A C ei, qui fit ex E F eſt æqualis. ergo vt A ad E, ita 19. ſeptimi.
F ad C. ſuntq; A E primi: primi aũt, & minimi; minimi vero eos, qui eandẽ habẽt pro 23. ſeptimi.
portionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſe- 21. ſeptimi.
quentem. metitur igitur E ipſum C. metiatur per G. ergo E ipſum G multiplicans
fecit C. ſed ex antecedente & A multiplicans B ipſum C fecit. qui igitur fit ex A B B
æqualis eſt ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & ſunt A E primi: ſed primi, & 19. ſeptimi.
minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, 23. ſeptimi.
antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. quare & E ipſum B meti- 21. ſeptimi.
tur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipſum H fecit B. ſed & A ſe ipſum multi
plicans fecit B. ergo qui fit ex H E eſt æqualis ei, qui fit ab ipſo A. eſt igitur vt E ad 20. ſeptimi.
A, ita A ad H. ſuntq; A E primi: ſed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiũ
tur eos, qui eandem, quam ipſi proportionem habent, maior maiorem, & minor
minorem, hoc eſt antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo E
metitur ipſum A. ſed & non metitur. quod fieri non poteſt. non igitur A E ſunt in-
ter ſe primi. ergo compoſiti erunt. compoſitos vero primus aliquis numerus meti 14. diff.
tur. quare ipſos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus poni-
tur: primum autem non metitur alius numerus pręter ſe ipſum. metitur igitur E
ipſos A E: ideoq; E ipſum A metitur. metitur autem & ipſum D. ergo E ipſos A D
metietur. ſimiliter demonſtrabimus quicumque primorum numerorum metiun-
tur ipſum D, eoſdem & ipſum A metiri. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

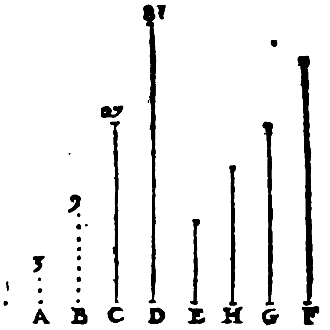
Rurſus quoniam A metitur ipſum D per eas, quæ ſunt in C vnitates] *hoc enim in antecedente demonſtratum fuit.* A

Sed ex antecedente & A multiplicans B ipſum C fecit] *quoniam enim, vt in antecedente demonſtratum eſt, A metitur ipſum C per B; & A multiplicans B fecit C.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero poſt vnitatem primus ſit: maximum nullus alius metietur pręter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcũque numeri ab vnitate deinceps pro-
portionales A B C D, & qui poſt vnitatem, videlicet
A ſit primus. Dico maximum D nullum alium nu-
merum metiri, præter ipſos A B C. ſi enim fieri po-
teſt, metiatur E ipſum D, & non ſit E idem, qui ali-
quis ipſorum A B C; manifeſtum eſt E primum non
eſſe. Si enim primus ſit, & metiatur D, ipſum quo- Ex antecedente.
que A metietur primum exiſtentem, cum non ſit
idem, qui A. quod fieri non poteſt. non igitur E pri-
mus eſt. ergo compoſitus: omnem autem compoſi-
tum numerum primus aliquis numerus metitur. Di 13. diff.
co nullum alium primum metiri ipſum E præter-
quam A. ſi enim alius metitur E, & E metitur D, & il
le ipſum D metietur. quare & ipſum A primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui 12. com. not.
A. quod fieri non poteſt. ergo A ipſum E metitur. & quoniam E metitur D, metia- Ex antecedente.
tur ipſum per F. non erit F idem, qui aliquis ipſorum A B C. ſi enim eſt idem, meti
turq; ipſum D per E; & vnus ipſorũ A B C ipſum D per E metietur. ſed vnus ipſo 11 huius.



rum A B C metitur D per aliquem ipſorũ A B C. quare & E idem erit, qui vnus ipſorũ A B C. quod non ponitur. non igitur F eſt idem, qui vnus ipſorum A B C. ſimiliter oſtendemus A metiri ipſum F, rurſus oſtendentes non eſſe F primum numerũ. ſi enim eſt primus, & metitur ipſum D, ipſum quoque A metietur, primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt. non igitur F primus eſt. ergo cõpoſitus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipſum F præterquàm A. ſi enim alius metitur F, & F metitur D; & ille ipſum D metietur. quare & ipſum A, primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod fieri non poteſt. ergo A ipſum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipſum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex A C eſt æqualis ei, qui ex E F. ergo vt A ad E, ita eſt F ad C. ſed A metitur E. quare & F ipſum C metietur. metiatur per G. ſimiliter demonſtrabimus G non eſſe eundem, qui vnus ipſorum A B, & A ipſum G metiri. & quoniam F ipſum C metitur per G, multiplicãs F ipſum G fecit C. ſed & A multiplicans B ipſum C fecit. ergo qui fit ex A B ei, qui ex F G eſt ęqualis. vt igitur A ad F, ita eſt G ad B. metitur autem A ipſum F. ergo & G ipſum B metietur. metiatur per H. ſimiliter demonſtrabimus H non eſſe eundẽ, qui A. & quoniam G ipſum B per H metitur, G multiplicans H ipſum B fecit. ſed & A ſe ipſum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex H G eſt æqualis quadrato, qui ex A. ergo ut H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipſum G. quare & H ipſum A metietur, primum exiſtentem, cum non ſit idem, qui A. quod eſt abſurdum. non igitur aliquis alius metietur ipſum D maximum, præter ipſos A B C. quod demonſtrandum fuerat.

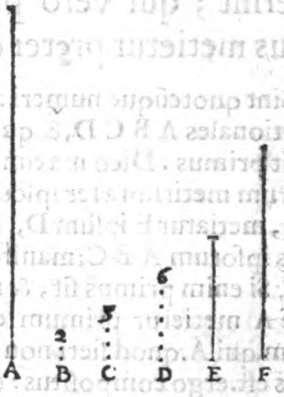
Ex antecedenti.

19. ſeptimi.

20. ſeptimi.

THEOREMA. XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipſum, præter eos, qui à principio metiebantur.



Minimum enim numerum A primi numeri B C D metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipſum A, præter ipſos B C D. ſi enim fieri poteſt, metiatur E ipſum A; & non ſit E idem, qui aliquis ipſorum B C D. & quoniã E metitur A, ipſum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipſum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B C D. ſi autem duo numeri ſe ſe multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipſis metiatur aliquis primus numerus; & vnum eorum, qui à principio poſiti ſunt, metietur. ergo B C D metientur vnum ipſorum E F. ipſum quidem E non metientur; etenim E primus eſt; & nõ idem qui aliquis ipſorum B C D. ergo ipſum F metientur, qui eſt minor, quàm A. quod fieri nõ poteſt. ponitur enim A minimus eorum, quos B C D metiantur. non igitur ipſum A metietur aliquis primus numerus, præter ipſos B C D quod demonſtrare oportebat.

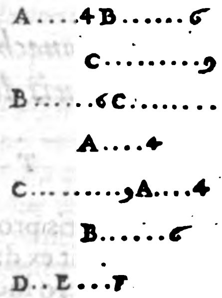
32. ſeptimi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ

qui

qui eandem, quam ipſi proportionem habeant; duo quilibet cõpoſiti ad reliquum primi erunt.



Sint tres numeri deinceps proportionales mini-
mi eorum, qui eãdem, quam ipſi proportionem ha-
bent A B C. Dico duos quoſlibet compoſitos ad re
liquũ primos eſſe, videlicet A B ad C, & B C ad A,
& A C ad B. ſumantur enim duo minimi numeri
qui eandem, quam ipſi A B C proportionem ha- A
beant D E E F. manifeſtum eſt D E ſe ipſum qui-
dem multiplicantem facere A; multiplicantem ve- 2. octaui.
ro E F facere B; & E F ſe ipſum multiplicantem fa-
cere C. & quoniam DE EF minimi ſunt, primi erũt 24. ſeptimi.
inter ſe. ſi autem duo numeri primi inter ſe fuerint,
& vterque ſimul ad vtrumque primus erit. ergo D 30. ſeptimi.
F ad vtrumque ipſorum D E E F primus eſt. Sed & D E ad E F eſt primus. quare D
F D E ad E F primi ſunt: ac propterea qui fit ex F D D E primus eſt ad E F. ſi au- 26. ſeptimi.
tem duo numeri primi inter ſe fuerint, qui fit ex vno ipſorum ad reliquum primus 27. ſeptimi.
erit. ergo qui fit ex F D D E ad eum, qui fit ex E F eſt primus. ſed qui ex F D D E B
eſt qui fit ex DE vnà cum eo, qui ex D E E F. qui igitur ex D E vnà cum eo, qui ex
D E E F primus eſt ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E eſt A; qui vero ex D E
E F eſt B, & qui ex E F eſt C. ergo A B compoſiti ad ipſum C primi ſunt. ſimili-
ter oſtendemus & B C ad A eſſe primos. Dico & A C ad B primos eſſe. Quoniam C
enim D F ad vtrumque ipſorum D E E F eſt primus, & qui fit ex D F ad eum, qui
ex D E E F primus erit. Sed ei, qui fit ex D F æquales ſunt qui ex D E, & E F fiunt D
vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui
bis ex D E E F primi ſunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui fiunt ex E
D E, & E F vnà cum eo, qui ſemel fit ex DE EF primi ſunt ad eum, qui ex D E EF.
& rurſus diuidendo qui fiunt ex D E, & EF ad eum, qui fit ex D E E F primi ſunt. F
Sed qui fit ex D E eſt A; qui vero ex D E E F eſt B; & qui ex E F eſt C. ergo A C cõ-
poſiti ad ipſum B primi erunt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipſi A B C proportionem habentium] *ex ijs, quae demonſtrauimus ad 35 ſeptimi.*

B Sed qui ex F D D E eſt qui fit ex D E vnà cum eo, qui ex D E E F] *Hoc in lineis demonſtratur ab Euclide in ſecundo libro, propoſitione tertia. ſed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non ſolum hoc ex illis demonſtrauit, ſed & quęcumque in ſecundo libro tradita ſunt, quae nos vtpote non aliena hoc loco apponenda cenſuimus. demonſtrat autem hoc theoremate tertio.*

C Quoniam enim D F ad vtrumque ipſorum D E E F eſt primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex DE EF primus erit] *nam cum D F ad vtrumque ipſorum DE E F ſit primus, erit DF primus ad eum, qui ex D E E F ex 26 ſeptimi. quare ex 27 eiuſdem & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F eſt primus.*

D Sed ei, qui fit ex D F ęquales ſunt qui ex D E, & E F] *hoc in lineis demonſtratur in ſecundo libro propoſitione 4. ſed in numeris Barlaam demonſtrauit theoremate quarto.*

E Ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui ſemel fit ex D E E F. primi ſunt ad eum, qui fit ex DE EF.] *ſi enim non ſunt primi, compoſiti erunt. quare eos aliquis numerus communis menſura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrumque & compoſitum ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex DE EF: ſed & metitur eum, qui fit ex DE EF. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F non ſunt primi ad eum, qui ex DE EF. atqui primi ſunt. quod eſt abſurdum. non igitur ſunt compoſiti. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui ſemel fit ex DE EF primi ſunt ad eum, qui fit ex D E EF.* 11. com. not.

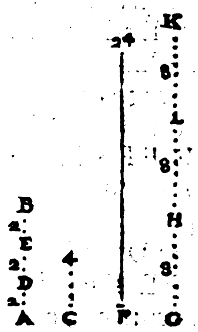
F Et rurſus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi ſunt]

Si enim non ſint primi, eodem, quo ſupra, modo oſtendemus eos, qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui fit ex DE EF non eſſe primos ad eum, qui ex DE EF, quod eſt abſurdum: ſunt enim primi, vt demonſtratum iam fuit. ergo qui fiunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi ſint neceſſe eſt.

Barlaam Monachi arithmetica demonſtratio eorum, quę Euclides libro ſecundo in lineis demonſtrauit.

THEOREMA I.

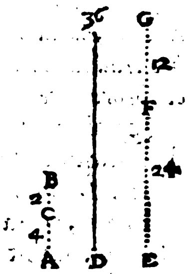
Si duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt.



Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui fiũt ex C AD, & C DE, & C EB aequalem eſſe. ſit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipſum F fecit, C
10.com.not. *metitur F per eas, quae ſunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur G H per vnitates, quae ſunt in A D: & metitur H I per vnitates, quae in D E: & I K per vnitates, quae in E B. ergo C metitur totum G K per vnitates, quae ſunt in AB. metiebatur autem & ipſum F per eas, quae ſunt in AB vnitates. vterque igitur ipſorum F GK aeque multiplex eſt*
1.com.not. *numeri C. qui vero eiuſdem ſunt aeque multiplices, inter ſe aequales ſũt. ergo F ipſi GK eſt aequalis: atque eſt F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compoſitus ex numeris planis, qui fiunt ex C, & ſingulis ipſorũ AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus aequalis eſt planis numeris, qui ex C, & ſingulis ipſorum AD DE EB fiunt. quare ſi duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis aequalis erit numeris, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

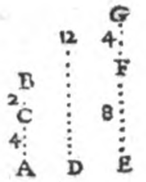
Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte, inter ſe cõpoſiti æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.



Numerus enim A B diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui fiunt ex BA AC, & AB BC inter ſe compoſitos, quadrato, qui fit ex AB, aequales eſſe. numerus enim AB ſe ipſum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem A B multiplicans faciat FG.
10.com.not. *quoniam igitur AC multiplicans AB ipſum EF fecit, A B metitur EF per eas, quae ſunt in AC vnitates. Rurſus quoniam CB ipſum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per vnitates, quae ſunt in C B. metiebatur autem & E F per vnitates, quae in A C. ergo A B totum E G per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt metitur. rurſus quoniam A B ſe ipſum multiplicans fecit D, metitur A B ipſum quoque D per vnitates, quae in ſeipſo ſunt. ergo AB vtrumque ipſorum D, E G metitur per eas, quae in ſeipſo ſunt vnitates.*
1. com. no. *quotuplex igitur eſt D ipſius A B, totuplex erit & E G ipſius A B. qui vero eiuſdem numeri ſunt aeque multiplices inter ſe aequales ſunt. ergo D ipſi E G eſt aequalis. atque eſt D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compoſitus ex duobus planis; qui fiunt ex AB BC, & B A AC. quadratus igitur numerus ex AB eſt aequalis numero compoſito ex duobus planis, qui ex AB BC, & B A AC fiunt, quare ſi numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & utraque parte inter ſe compoſiti aequales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atque illud eſt. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA III.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.



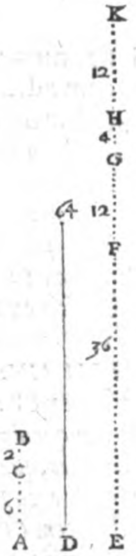
Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui fit à CB aequalem eſſe. numerus enim A B multiplicans B C ipſum D faciat. A C vero multiplicans CB faciat EF: & CB ſe ipſum multiplicans faciat FG. itaq; quoniam AB ipſum BC multiplicans fecit D, metitur BC ipſum D per vnitates, quae ſunt in AB. rurſus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quae ſuut in AC vnitates. rurſus quoniam CB ſeipſum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt: metiebatur autem & EF per vnitates, quae ſunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quae ſunt in AB vnitates: metiebatur autem & ipſum D per vnitates, quae in AB. ergo CB vtrumque D, EG aequaliter metitur: ij vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter ſe aequales ſunt. quare D eſt aequalis ipſi FG. atque eſt D quidem planus uumerus, qui fit ex AB BC: E G vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC eſt aequalis ei, qui ex AC CB, & quadrato, qui à CB. ſi igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & una parte fit aequalis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prędicta parte efficitur. quod oportebat demonſtrare.

10.com.not.

4.com.not.

THEOREMA IIII.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus ęqualis eſt quadratis, qui à partibus fiũt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.



Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem eſſe. ſit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex A C, & G H qnadratus, qui ex C B: numerus autem planns, qui fit ex AC CB uterque ipſorum FG HK. quoniam igitur AC ſe ipſum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quae in ſe ipſo sũt. rurſus quoniam BC multiplicans CA fecit FC, metitur CA ipſum FG per vnitates, quae ſunt in B C. metiebatur autem & E F per vnitates, quae in ipſo ſunt. ergo AC totum EG per vnitates, quae ſunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipſum EG fecit: ideoq́, EG eſt numerus planus, qui fit ex BA A C. ſimiliter oſtendemus & G K numerum planum eſſe, qui fit ex AB BC. atque eſt D numerus quadratus, qui ex A B efficitur. ſi autem numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus aequalis eſt duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipſi E K eſt aequalis. ſed EK conſtat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano. atque eſt D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB eſt aequalis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit, numero plano. Ergo ſi numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus aequalis eſt quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit uumero plano. quod demonſtrare oportebat.

10.com.not.

9.com.inot:

Ex 2.huius.

THEOREMA V.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur, autem & in numeros inęquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti ęqualis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato.

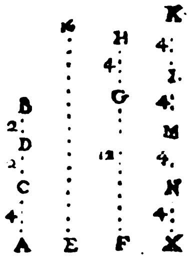
Sit par numerus AB: & bifariam in AC CB diuidatur: diuidaturq́, in partes inęquales AD DB. Dico quadratum ex C B numero plano, qui

Ex antecedente.

10.com.not.

ſit ex AD DB unà cum quadrato, qui ex C D aequalem eſſe. ſit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus ſit GH. itaq; quoniam numerus B C diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex B C, hoc eſt E aequalis quadratis ex BD DC vnà cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. ſit igitur ex B D quidem quadratus K L, ex D C vero quadratus N X: & planus ex BD DC uterque ipſorum LM MN: totus igitur KX ipſi E eſt aequalis. et quoniam BD ſe ipſum multiplicans fecit KL, metitur BD ipſum KL per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt. rurſus quoniam C D ipſum D B multiplicãs fecit L M; D B metitur L M per vnitates, quae ſunt in CD. metiebatur autem KL per eas, quae in ſe ipſo ſunt vnitates. ergo D B totum K M metitur per vnitates, quę ſunt in C B. aequalis autem eſt C B ipſi C A. quare D B metitur K M per vnitates, quae ſunt in C A. rurſus quoniam CD mnltiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae ſunt in CD vnitates. metiebatur autem & KM per vnitates, quae ſunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quae ſunt in AD, metitur. ſed & DB metitur FG per vnitates, quae ſunt in AD: ponitur enim F G, qui fit ex AD DB. aequalis igitur eſt F G ipſi KN. qui enim ſunt eiuſdem aeque multiplices inter ſe aequales ſunt. eſt autem et GH aequalis NX, cum vterque quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH eſt aequalis; eſtq; ipſi E aequalis KX. Ergo FH ipſi E aequalis erit. atque eſt F H quidem numerus planus ex A D D B vnà cum quadrato, qui fit ex D C. E vero eſt qui fit ex C B quadratus. uumerus igitur planus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex DC aequalis eſt ei, qui fit ex CB quadrato. ergo ſi par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inęquales; qui ex inęqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato, quod oportebat demonſtrare.

1.cōm. not.



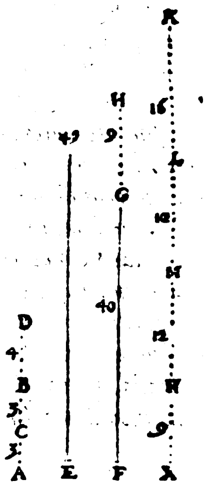
THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij eſt aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto conſtat.

4.antecedentium.

10.com.not.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros A C C B: & ipſi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CB aequalem eſſe ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus, qui fit ex AD DB ſit FG: & ex CB quadratus GH. & quoniam quadratus ex CD eſt aequalis quadratis ex DB BC vnà cũ eo, qui bis fit ex DB BC; ſit quadratus quidem ex BD numerus KL: planus vero numerus ex DB BC ſit vterque ipſorum LM MN: & ex BC quadratus NX. totus igitur KX eſt aequalis quadrato ex CD: eſt aũt E, qui fit ex CD quadratus, ergo KX ipſi E eſt aequalis. & quoniam BD ſe ipſum multiplicans fecit K L, B D metitur KL per vnitates, quae in ſe ipſo ſunt. metitur autem & LM per vnitates, quę ſunt in CB. ergo DB metitur totum KM per eas, quae ſunt in CD vnitates. eſt autem CB ipſi CA aequalis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quae ſunt in AD. ſed DB metitur quoque ipſum F G per vnitates, quae ſunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipſi KN eſt aequalis. eſt autem & HG aequalis NX. vterque enim eſt quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH eſt aequalis toti KX. ſed KX oſtenſus eſt aequalis ipſi E. ergo & FH ipſi E eſt aequalis. atque eſt FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB; E vero eſt quadratus, qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB eſt aequalis ei, qui fit ex C D quadrato. Ergo ſi par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipſi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij eſt aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto conſtat. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis ęqualis eſt numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato.

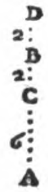
Numerus enim A B diuidatur in numeros AC CB. Dico quadratos, qui fiunt ex B A AC aequales eſſe numero plano, qui bis fit ex B A A C vnà cum ipſius B C quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex A B, eſt aequalis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC eſt aequalis duobus quadratis, qui ex A C, & quadrato ex C B vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui ſemel fit ex BA AC eſt aequalis ei, qui ſemel fit ex BC CA vnà cum ipſius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC aequalis erit ei, qui bis fit ex BC CA vnà cum duobus quadratis ipſius CA. communis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB; vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA aequales ſunt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipſius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC aequalis eſt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum quadrato reliquae partis CB. ergo ſi numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis aequalis eſt numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquae partis quadrato. quod oportebat demonſtrare.

4 antecedentium.

3 antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis ęqualis eſt quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

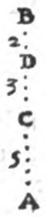


Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico numerum planū, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipſius AC aequalē eſſe ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipſi B C aequalis BD. & quoniam quadratus ex AD aequalis eſt quadratis, qui ex AB BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atque eſt B D aequalis B C. ergo qui fit ex A D quadratus aequalis eſt quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. ſed quadrati, qui ex AB BC aequales ſunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipſius AC quadrato. eſt igitur qui fit ex AD quadratus aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex AC. atque eſt quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitiur: etenim BD ipſi BC eſt aequalis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno eſt aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipſius AC quadrato. ſi igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquę partis aequalis eſt quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli ſunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipſos interiecti.



Par enim numerus A B bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inęquales AD DB. Dico quadratos, qui fiunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC CD duplos eſſe. Quoniam enim par numerus AB in numeros aequales diuiditur AC CB: & in numeros inaequales AD DB: qui fit ex AD DB vnà cū quadrato ex CD aequalis eſt ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex A D D B vnà cùm duobus ex CD quadratis duplus eſt eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus eſt quadrati, qui ex AC. ſi autem ſint duo numeri, quorum alter eiuſdem quadruplus ſit, alter vero duplus, qui quadruplus eſt dupli eſt du

5. antecedentium.

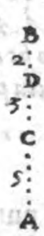
4. antecedentium.

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vnà cũ duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor eſt, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. rurſus quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum numero compoſito ex quadratis AD DB aequalis eſt ei, qui fit ex AB quadrato: erit compoſitus ex AD DB quadratis maior, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atque eſt quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compoſitus igitur ex quadratis AD DB maior eſt, quàm duplus quadrati ex AC, duplo quadrati ex DC. ergo duplus eſt quadratorum, qui ex AC CD fiunt. ſi igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli ſunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipſos interiecti. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Pręcedens demonſtratio obſcuriuſcula eſt, quare apertius hoc modo explicabitur.

Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, aequalis quadratis ex AC CD vnà cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB ſit aequalis ipſi AC, quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB. quadrati igitur ex AD DB aequales ſunt quadratis ex BC CD DB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. ſed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium ſunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD vnà cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB aequales ſunt duplis quadratorum ex BC CD, hoc eſt duplis quadratorum ex AC CD: ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonſtrare op ortebat.



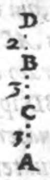
THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq́; ipſi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati dupli ſunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur.

7. antecedentium.

6. antecedentium.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturq́; ipſi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos eſſe. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB BD, erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB vnà cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB eſt aequalis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC CB; eſt enim AC ipſi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB sũt aequales ei qui bis fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CB eſt aequalis quadrato ex CD: erit qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CB quadratis aequalis duobus quadratis, qui ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales ſunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur ſunt quadratorũ ex AC CD. atque eſt quadratus quidẽ ex AD, qui fit ex toto cũ adiecto; quadratus uero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cũ adiecto vnà cũ eo, qui ex adiecto, duplus eſt quadrati, qui fit ex dimidio vnà cũ quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto cõſtat. quare ſi par numerus bifariã diuidatur, adijciaturq́; ipſi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli ſunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem, quod vndecimę ſecundi libri reſpondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis ſit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri poteſt.

Si enim fieri poſſit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB. vt qui ex AB BC fit nume-

rus

rus planus aequalis ſit quadrato ex A C. qui igitur quater ſit ex A B B C quadrati ex A C quadruplus eſt. ergo qui quater ſit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C quintuplus eſt ipſius quadrati ex A C. ſed qui quater ſit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C numerus quadratus eſt; etenim aequalis eſt quadrato, qui à toto A B, et à parte B C tamquam ab vno efficitur ex octauo premiſſorum. eſt autem & qui ſit A C quadratus. duo igitur quadrati numeri inter ſe proportionem habent, quam quinque ad vnum. quod fieri non poteſt. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte ſit numerus planus aequalis ſit ei, qui à reliqua parte ſit, quadrato. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, non erit vt primus ad ſecũdum, ita ſecundus ad alium vllum.

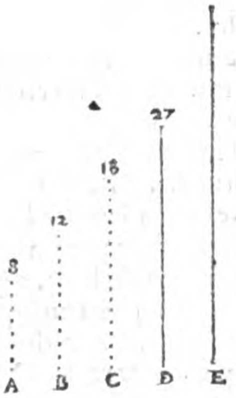
Duo enim numeri AB primi inter ſe ſint. Dico non eſſe ut A ad B, ita B ad alium vllum. ſi enim fieri poteſt, ſit vt A ad B, ita B ad C. & ſunt AB primi, ſed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. metitur igitur A ipſum B, vt antecedens antecedentem. ſed & ipſe ſe ipſum metitur. ergo A metitur ipſos AB primos inter ſe exiſtentes. quod eſt abſurdum. non igitur eſt vt A ad B, ita B ad C. quod oportebat demonſtrare.

23. ſeptimi.
21. ſeptimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint, non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, extremi autem ipſorum A D primi ſint inter ſe. Dico non eſſe vt A ad B, ita D ad alium vllum. ſi enim fieri poteſt, ſit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & ſunt A D primi; ſed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. metitur igitur A ipſum B. atque eſt vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipſum C; & ob id A quoque ipſum C metitur. & quoniam eſt vt B ad C, ita C ad D; metitur autem B ipſum C, & C ipſum D metietur. Sed A metitur C. quare & ipſum D. metitur autem & ſe ipſum. Ergo A ipſos A D primos inter ſe exiſtentes metitur. quod fieri non poteſt. non igitur erit vt A ad B, ita D ad alium vllum. quod demonſtrare oportebat.

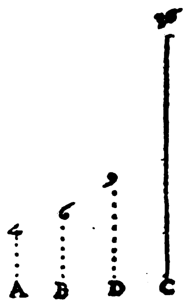


23. ſeptimi.
21. ſeptimi.
2. cōm. not.

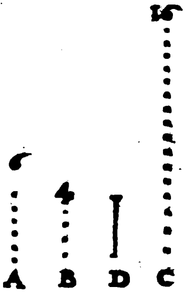
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis conſiderare an tertius ipſis proportionalis inueniri poſſit.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat conſiderare an poſſit tertius ipſis proportionalis inueniri. Itaque AB vel primi inter ſe ſunt, vel non primi. ſi quidem primi, iam oſtenſum eſt, fieri non poſſe, vt tertius ipſis proportionalis inueniatur. Sed non ſint A B inter ſe primi, & B ſe ipſum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipſum C fecit. ſed & B ſe ipſum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D eſt ęqualis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipſis A B tertius proportionalis D inuentus eſt.

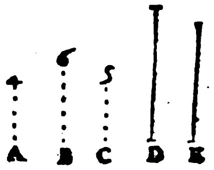


Sed non metiatur A ipſum C. Dico fieri non poſſe, vt ipſis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri poteſt, inuentus ſit D. ergo qui fit ex A D aequalis eſt ei, qui fit ex B. ſed qui fit ex B eſt C. qui igitur fit ex A D ipſi C eſt ęqualis. ergo A ipſum D multiplicans fecit C. & ob id A ipſum C per D metitur. ſed & non metiri poſitum eſt, quod eſt abſurdum. non igitur fieri poteſt, vt ipſis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipſum C non metitur. quod demonſtrare oportebat.

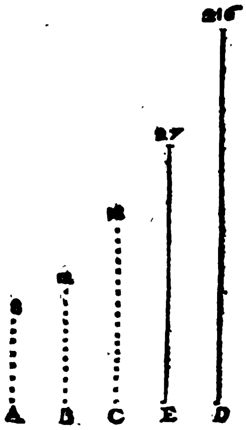


PROBLEMA II. PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis conſiderare an quartus ipſis proportionalis inueniri poſſit.

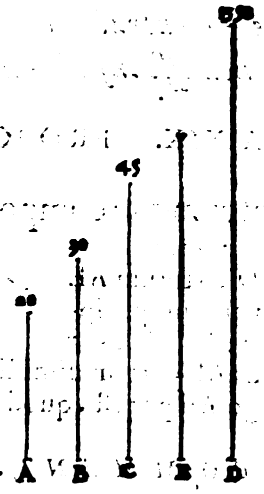


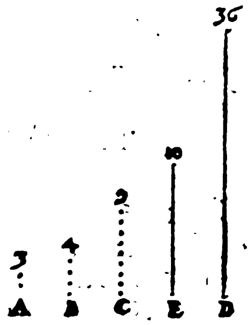
Sint dati tres numeri A B C, & oporteat conſiderare an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri. ergo ipſi A B C vel deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi primi inter ſe ſunt, vel non deinceps proportionales, & eorũ extremi ſunt primi inter ſe, vel proportionales quidẽ deinceps, non autem extremi ipſorum inter ſe primi, uel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter ſe ſunt. ſi quidem igitur ABC deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter ſe, iam demonſtratum 17 huius. eſt fieri non poſſe, vt quartus ipſis proportionalis inueniatur. ſi vero non ſunt deinceps proportionales, & extremi ipſorum ſunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non poſſe. ſi enim inueniri poteſt ſit D. vt igitur A ad B, ita C ad D: & vt B ad C, ita ſit D ad E. ergo ex ęquali vt A ad C, ita C ad E: ſed ſunt AC primi; primi 23. ſeptimi. autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem 21. ſeptimi. habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. ergo A ipſum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & ſe ipſum. quare A ipſos AC primos inter ſe exiſtentes metitur. quod fieri non poteſt. ipſis igitur ABC non poteſt quartus proportionalis inueniri.



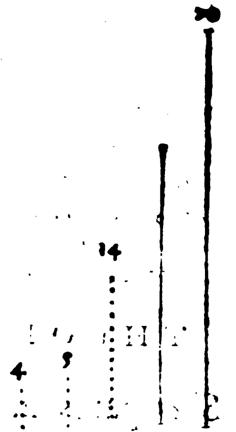
Rurſus ABC proportionales quidem ſint deinceps, nõ autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri poſſe. multiplicans enim B ipſum C faciat D. itaque vel A metitur 9. com. not. ipſum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D. ſed & B multiplicãs C ipſum D fecit. qui igitur fit eſt AE eſt æqualis ei, qui ex BC; 19. ſeptimi. proptereaq; vt A. ad B, ita eſt C ad E. ipſis igitur ABC quartus proportionalis E inuentus eſt.

Sed non metiatur A ipſum D. Dico fieri non poſſe, vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis. ſi enim inueniri poteſt, inueniatur, ſitq; E. ergo qui fit ex A E eſt æqualis ei, qui ex BC. ſed qui fit ex BC eſt D. quare qui fit ex A E, ipſi D eſt æqualis: & ob id A ipſum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipſum D per E. quare A ipſum D metitur. ſed & nõ metitur. quod eſt abſurdum. non igitur fieri poteſt, vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipſum D non metitur. 19. ſeptimi.





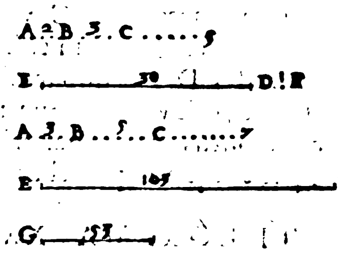
Sed non ſint neque deinceps proportionales A B C, neque A C inter ſe primi, & B ipſum C multiplicans faciat D. ſimiliter demonſtrabimus, ſi A ipſum D metiatur, inueniri poſſe quartum proportionalem: ſin minus, inueniri nõ poſſe. quod demonſtrandum fuerat.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

Sint propoſiti primi numeri A B C. Dico ipſis A B C plures eſſe primos numeros. ſumatur enim minimus, quem ipſi A B C metiantur; ſitq; DE: & ipſi DE apponatur vnitas DF. ergo EF vel primus eſt, vel non. ſit primum primus. Inuenti igitur ſunt primi numeri ABC EF plures, quàm ipſi ABC. ſed non ſit EF primus. ergo eum primus aliquis metitur. metiatur G. Dico G nulli ipſorum ABC eundem eſſe. ſi enim G idem ſit, qui vnus ipſorũ ABC; ipſi autem ABC metiantur DE; & G ipſum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF vnitatem metietur numerus exiſtens. quod eſt abſurdum. ergo G non eſt idem, qui unus ipſorum ABC, & ponitur primus. Inuenti igitur ſunt primi numeri A B C G plures propoſita multitudine primorum numerorum A B C. quod oportebat demonſtrare. 13. com. sen.



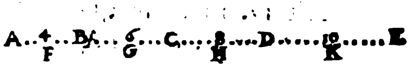
SCHOLIVM.

In hoc theoremate vult oſtendere infinitos eſſe numeros primos; ſi enim omni propoſita numerorum multitudine primi plures ſint, infinitos eſſe primos manifeſtum eſt. ſi autem hoc, videtur obſiſtere philoſophorum dogmati, qui aſſerunt prima determinata eſſe, & numero minora.

quid igitur dicemus? primos numeros non eſſe principium numerorum, ſed vnitatem ipſam, quæ & contracta eſt & ſola. quare & in numeris hoc ſeruatur, principium non eſſe infinitum, ſed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.



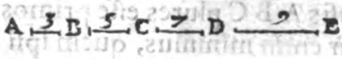
Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE parem eſſe. Quoniam enim vnuſquiſque ipſorum AB BC CD DE par eſt, habet partem dimidiam. * quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus eſt, qui bifariam diuiditur. ergo AE par eſt. quod demonſtrare oportebat. 6. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare & totus AE partem dimidiam habebit.] *Quoniam enim vnuſquiſque eorum habet dimidium, ſit ipſius AB dimidia AF, & ipſius BC dimidia BG, & ipſius CD dimidia CH, denique ipſius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimidiam AF, ita & vnuſquiſque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. ſed AF dimidia eſt ipſius AE. ergo & AF BG CH DK ſunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.* 12. septimi.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par; totus par erit.



Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem eſſe. Quoniam enim vnuſquiſque ipſorum AB BC CD DE impar eſt, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnuſquiſque reliquorum par. quare & compoſitus ex ipſis par erit. eſt autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par eſt. quod oportebat demonſtrare. Ex antecedente.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componãtur, & multitudo ipſorum ſit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcumque, quorum multitudo ſit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem eſſe. auferatur ab ipſo CD vnitas DE. reliquus igitur AE par eſt. eſt autẽ & AC par. ergo & totus AE par erit. atque eſt DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonſtrare. 21. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

7 diffi. Atque eſt DE vnitas, impar igitur eſt AD] *impar enim numerus eſt, qui à pari vnitate differt.*

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem eſſe. Quoniam enim AB par eſt, habet partem dimidiam. Eadem ratione & B C. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur eſt AC. quod oportebat demonſtrare. *

F. C. COMMENTARIVS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam] *Sit ipſius ab dimidia BD, & ipſius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE. & diuidendo AC ad CB, vt DE ad EB. rurſusq́; permutando AC ad DE, vt CB ad BE. ſed BE eſt dimidia ipſius CB. ergo & DE ipſius AC dimidia erit. cum igitur AC partē habeat dimidiam biſariā diuiditur, ac propterea par eſt. quod demonſtrandū proponebatur.* *

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem eſſe. auferatur ab ipſo BC vnitas CD. ergo DB par eſt. eſt autem par & AB. & reliquus igitur AD eſt par. atque eſt CD vnitas. ergo CA impar eſt. quod demõſtrare oportebat. Ex antecedente.

THEOREMA. XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem eſſe. Quoniam enim AB impar eſt, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD eſt par. Eadem ratione & CD eſt par. quare & reliquus AC par eſt. quod oportebat demonſtrare. 24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

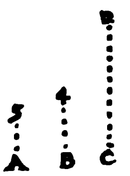
Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem eſse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par eſt. eſt autem par & BC. & reliquus igitur CD eſt par. atque eſt DA vnitas. ergo CA impar eſt. quod oportebat demonſtrare. 24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

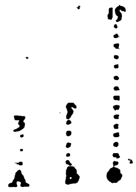
Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem eſse. Quoniam enim A multiplicans B ipſum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipſi B, quot vnitates ſunt in A. atque eſt B par. ergo C ex paribus numeris componitur. ſi autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit. ergo C eſt par. quod demonſtrare oportebat. 21. huius.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

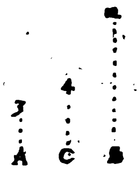
Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.



Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem eſſe. Quoniam enim A multiplicans B ipſum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipſi B, quot ſunt in A vnitates. atque eſt vterque ipſorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo eſt impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo im-
23.huius. par., & ipſe impar erit. ergo C eſt impar. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX

Si impar numerus parem numernm metiatur, & dimidium eius metietur.



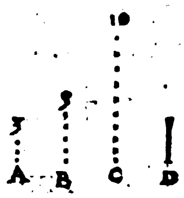
Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium ejus metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipſũ per C. Dioo C nõ eſſe imparem. nã ſi fieri poteſt, ſit impar. & quo-
9. com. not. niam A ipſum B metitur per C, A multiplicans ipſum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo eſt impar; ac propterea impar eſt. quod eſt abſurdum. par enim ponitur. non igitur C eſt impar. ergo par. quare A ipſum B pariter metitur.
* & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

* Et ob id ejus quoque dimidium metitur] *quoniam enim A ipſum B metitur per C, & C ipſum B per A metictur. habet autem vterque ipſorum CB partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. ſed C metitur ipſum B per A. ergo & ipſius C dimidium dimi-*
9. com. not. *dium ipſius B per A metietur; ideoq́; A multiplicans ipſius C dimidium, dimidium ipſius B fecit.*
10. com. not. *quare A ipſius B dimidium per dimidium ipſius C metitur.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum ſit primus, & ad ipſius duplum primus erit.



Impar enim numerus A ad aliquem numerũ B ſit primus, & ſit C ipſius B duplus. Dico A etiam ad C primũ eſſe. ſi enim non ſint AC primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur,
* ſitq́; D: & eſt A impar. impar igitur eſt & D. & quoniam D im-
Ex antecedente. par exiſtens metitur ipſum C, atque eſt C par; & D ipſius C dimidium metietur. ſed ipſius C dimidium eſt B. ergo D ipſum B metitur, metitur autem & ipſum A. quare D ipſos AB metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri non poteſt. non igitur A ad C primus non eſt. ergo AC inter ſe primi ſunt. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

Et eſt A impar. impar igitur eſt & D] *quoniam enim A impar eſt, metitur autem ipſum numerus D, vt poſitum eſt & D ſeipſum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

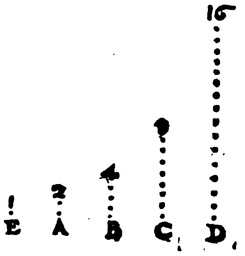
THEO-

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares eſſe tantum. at vero vnumquem ipſorum BCD pariter parem eſſe, manifeſto conſtat. à binario namque duplatus eſt. Dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales ſunt, & poſt vnitatem A primus eſt; maximum ipſorum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipſos ABC. atque eſt vnuſquiſque ipſorum ABC par. ergo D pariter par eſt tãtum. ſimiliter demonſtrabimus & vnumquemque ipſorũ ABC pariter parẽ eſſe tãtũ. quod demõſtrare oportebat.

13. huius.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar eſt tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem eſse tantum. at vero pariter imparem eſse perſpicuum eſt. dimidius enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. Dico & tantum. nam ſi A ſit etiam pariter par, dimidius ipſius par erit; atque eum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipſius par numerus metitur, impar exiſtens. quod eſt abſurdum. quare A pariter impar eſt tantum.

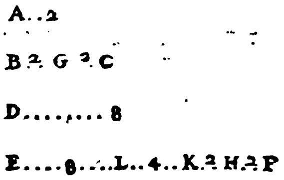
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si par numerus neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par eſt, & pariter impar.

Numerus enim A neque ſit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem eſse. at vero A pariter eſse parem, manifeſtum eſt; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem eſse. nam ſi A bifariã ſecemus, & dimidium ipſius bifariam, & hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur. ſi enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar eſt. oſtenſum autem eſt & pariter eſse parem. eſt igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à ſecundo, & ultimo æquales primo; erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.



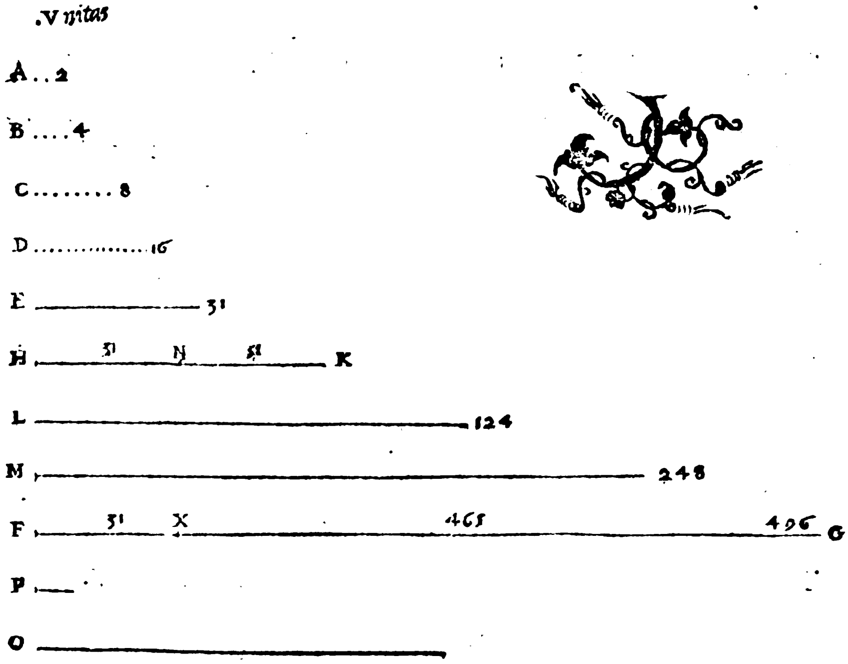
Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipſo BC; & ab EF æqualis ipſi A, videlicet GC FH. Dico vt BG ad A, ita eſſe EH ad A BC D; ponatur enim ipſi quidem B C æqualis F K; ipſi vero D æqualis FL. Quoniam igitur FK eſt æqualis ipſi BC, quorum FH eſt æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB ęqualis. & quoniam eſt vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A; ęqualis autem eſt D ipſi FL, & BC ipſi FK, & A ipſi FH: erit vt EF ad FL ita LF ad FK, & KF ad FH. quare diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, * & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. eſt igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atque eſt KH quidem æqualis BG, FH vero ipſi A, & LF KF HF æquales ipſis D BC A. ergo vt BG ad A, ita eſt EH ad D BC A. eſt igitur vt ſecundi exceſſus ad primum, ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare diuidendo vt EL ad LF] *ex ijs, quae nos ad* 14 *ſeptimi demonſtrauimus.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponātur in dupla analogia, quoad totus compoſitus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.



Ab vnitate enim exponantur quotcumque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus compoſitus primus fiat A B C D: & toti ęqualis fit E: & E ipſum D multiplicans faciat FG. Dico FG perfectum eſſe. quot enim ſunt A B CD mul-

C D multitudine, tot ſumantur ab ipſo E in dupla analogia, qui ſint E HK L M. er
go ex ęquali vt A ad D, ita erit E ad M: ac propterea qui fit ex E D eſt æqualis ei, 19. ſeptimi.
qui ex A M. eſt autem qui ex E D ipſe FG. quare FG eſt, qui fit ex A M. multiplicās
igitur A ipſum M fecit FG. ergo M metitur F G per vnitates, quæ ſunt in A. atque 10. com. not.
eſt A binarius. duplus igitur eſt FG ipſius M. ſunt autem & M L HK E deinceps
dupli inter ſe. ergo E HK L M FG deinceps proportionales ſunt in dupla analo-
gia. auferatur à ſecundo HK, & ab vltimo FG ipſi primo E æqualis vterque HN,
FX. eſt igitur vt ſecundi numeri exceſſus ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes
ipſum antecedentes. quare vt NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque eſt NK ipſi E
ęqualis. ergo & XG eſt æqualis ipſis M L HK E. eſt aũt & FX æqualis ipſi E; atque
E ipſis A B C D, & vnitati æqualis. totus igitur FG æqualis eſt & ipſis E HK L M,
& ipſis A B C D, & vnitati; omnesq́; ipſum FG metiuntur. Dico FG nullum alium
metiri pręter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatem. ſi enim fieri poteſt, metia
tur aliquis numerus ipſũ FG, qui ſit O: ſitq́; O nulli ipſorũ A B C D E HK L M idẽ.
& quoties O ipſum FG metitur, tot vnitates ſint in P. ergo P ipſum O multiplicans 9. cõis. not.
fecit FG. ſed & E multiplicans D ipſum FG fecit. eſt igitur vt E ad P, ita O ad D. & 19. ſeptimi.
quoniam ab vnitate deinceps proportionales ſunt A B C D, et poſt vnitatem A pri
mus eſt, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipſos A B C: & ponitur O 13. huius.
nulli ipſorum A B C idem. non igitur O ipſum D metietur. vt autem O ad D, ita E
ad P. ergo neque E metietur ipſum P. atque eſt E primus. omnis autem primus nu 31. ſeptimi.
merus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt. quare E P primi inter
ſe ſunt. ſed primi & minimi; minimi vero eos, qui eandem, quam ipſi, proportio- 23. ſeptimi.
nem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens con- 21. ſeptimi.
ſequenté. atque eſt vt E ad P, ita O ad D. ergo E ęqualiter metitur ipſum O, atque
P ipſum D. ſed D nullus alius metitur pręter ipſos A B C. quare P idẽ eſt, qui vnus
ipſorum A B C. ſit idẽ, qui B. & quot ſunt B C D multitudine, tot ab ipſo E ſuman
tur E HK L: ſuntq́; E HK L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur
ut B ad D, ita eſt E ad L. ergo qui fit ex B L eſt ęqualis ei, qui ex D E. ſed qui fit ex 19. ſeptimi.
D E eſt æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare 19. ſeptimi.
vt P ad B, ita eſt L ad O. eſtq́; P idem qui B, ergo & L idem erit, qui O. quod fieri
non poteſt. etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur. non igitur ipſum
FG metitur aliquis numerus præter ipſos A B C D E HK L M, & vnitatẽ. atque
oſtenſus eſt FG æqualis ipſis A B C D E HK L M, et vnitati. perfectus autem nume
rus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat
demonſtrare.

NONI LIBRI FINIS.

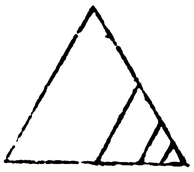
SCHOLIVM.

Propoſitum eſt Euclidi in decimo libro tractare de commenſurabilibus & incommenſurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem ſunt incommenſurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura ſunt; irrationalia vero & rationalia poſitione. ſi enim quadrati diametrum natura incommanſurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, ſed ex illius rationibus, quæ in ipſa ſunt. quare neque irrationale eſt eorum, quæ natura ſunt incommẽſurabilia, ſed incommenſurabile. etenim natura ipſa hoc facit iuxta omnem menſuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus tractat, eorum naturã exquirens: poſtea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obſiſtentes ipſa reprehendunt: ſed de maxime ſimplicibus ſpeciebus, quibus compoſitis infinitæ irrationales gignũtur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad ſcientiam autem attinet, cauſas, principia, & ſimplicia conſiderare, non ſingularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium ſimplices ſpecies tredecim, quæ tribus modis inuentę ſunt, his enim aliæ ſimplices non inuenientur. Horum modorum vnus eſt iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam ſpeciem eorũ. alius iuxta compoſitionẽ, per quẽ ſex ſpecies; tertius iuxta diuiſionẽ, per quem reliquas ſex inuenit. Venerũt autem initio ad inquiſitionem ſymmetriæ, hoc eſt commenſurabilitatis Pythagoræi primi, ipſam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas ſit omnium numerorum communis menſura, & in magnitudinibus communis menſura inueniri non poſſit. Huius cauſſa eſt, quòd omnis numerus, iuxta quaſlibet ſectiones diuiſus relinquit particulam aliquam minimã, & quę ſectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitũ diuiſa non relinquit particulam, quæ propterea quòd minima ſit, ſecari non poſſit. ſed & illa in infinitum ſecta infinitas efficit particulas, quarũ ſingulę in infinitum ſecabuntur. & ſimpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps eſt principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini eſt particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps eſt infiniti. Itaque quoniam oportet menſuras minores eſſe ijs, quæ menſurantur; menſuratur autem omnis numerus, neceſſe eſt omnium minimam eſſe menſuram. quare & magnitudinum, ſi omnes menſura communi menſurantur, neceſſe eſt eam minimam eſſe. Sed in numeris quidem eſt communis menſura, terminatur enim, qaemadmodum dictum eſt: in magnitudinibus vero

non

non item, non igitur communis quædam menſura eſt omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagoræi, vt fieri potuit, in magnitudinibus menſuram inuenerunt. omnes enim, quas eadem menſura metitur, commenſurabiles appellarunt; eas uero, quas non metitur eadẽ menſura, incõmenſurabiles. & harum rurſus, quaſcumque alia quæpiam cõmunis menſura metitur inter ſe cõmenſurabiles; quaſcumque vero non metitur illis incõmenſurabiles. & ita ſumptis menſuris, omnes poſſunt eſſe commenſurabiles: rationales aũt omnes, & omnes irrationales eſſe poſſunt, vt ad aliquid; propterea quòd commenſurabile quidem & incommenſurabile natura illis ineſt: rationale autem, & irrationale poſitione. Inueniuntur autẽ commenſurabiles & incõmenſurabiles tripliciter iuxta tres dimenſiones, nimirum lineæ, ſuperficies, & ſolida, vt Theon demonſtrauit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi poſſe, hoc theoremate oſtenderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, baſim bifariam ſecant: & vni portioni æqualem abſcindentes in altero latere, per pũctum diuiſionis ad baſis partes parallelam ducunt: & rurſus æquilaterum conſtitutum eſt triangulum. cuius baſim eodem modo ſecantes ſimiliter faciunt, & nũquam deſinunt ad trianguli uerticẽ. ſi enim deſinerent, ſequeretur ęquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia eſſe, quod eſt abſurdum.



Quod autem horum vtilis, nec ſuperuacanea ſit cognitio, vel ex veteri pythagoreorũ ſermone colligi poteſt. fabulantur enim eũ, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto proferre eſt auſus, naufragio periiſſe. idq; ea factum de cauſſa, quòd omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt præterea, ſi quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore ſtatim, vt in generationis, hoc eſt profundi locum deferatur, perpetuisq; illic obruatur fluctibus, tanta veneratione hi viri irrationalium hanc cognitionem ſunt proſecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER DECIMVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

II.

Incommenſurabiles autem, quarum nullam eſſe communem menſuram contingit.

III.

Rectę lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum ea, quæ ab ipſis fiunt, quadrata idem ſpacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commenſurabiles ſeorſum non diffiniuit, quòd in prima diffinitione magnitudinum commenſurabilium comprehendantur; ſunt enim rectę lineę longitudine commenſurabiles, quas eadem menſura metitur.

IIII.

Incommenſurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipſis fiunt, nullum commune ſpacium eſſe contingit.

V.

His poſitis oſtenditur, cuicumque rectę lineæ propoſitę rectas lineas multitudine infinitas, & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia ſolum. vocetur autem propoſita recta linea, rationalis,

VI.

Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea propoſita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineę, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, quę ipſis æqualia quadrata deſcribunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quędam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hę.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Qualibet magnitudo multiplicata poteſt omnem propoſitam magnitudinem eiuſdem generis ſuperare.*

2 *Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quã illa ipſa metitur.*

3 *Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

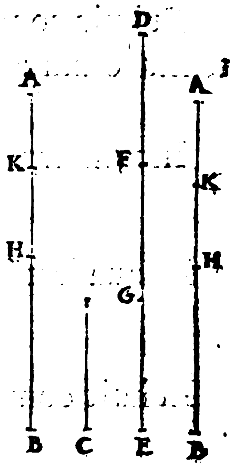
4 *Quęcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quę ex ipſis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt rurſus auferatur maius, quam dimidium; & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſita minor erit.

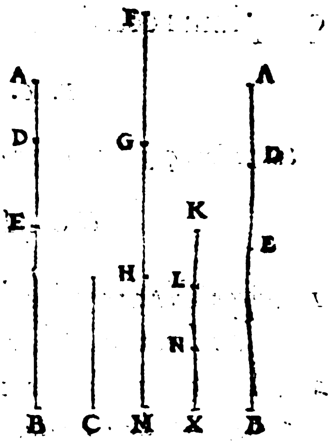
Sint

Sint duæ magnitudines inæquales AB C, quarum maior AB. Dico ſi ab ipſa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine AB. multiplicetur, & ſit DE ipſius quidem C multiplex, maior autem, quàm AB, diuidaturq; DE in partes ipſi C æquales DF FG GE. & ab ipſa AB auferatur maius, quàm dimidium BH; ab ipſa vero AH rurſus maius, quàm dimidium auferatur HK, atque hoc ſemper fiat, quoad diuiſiones, quæ ſunt in AB, multitudine æquales fiant diuiſionibus, quę in DE: ſint igitur diuiſiones AK KH HB diuiſionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior eſt DE, quàm AB, & ablatum eſt ab ipſa quidem DE minus, quàm dimidium EG; ab ipſa vero AB maius, quàm dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA maius. rurſus quoniam maior eſt GD, quàm HA, & ablatum eſt ab ipſa quidem GD dimidium GF; ab ipſa vero HA maius, quàm dimidium HK; reliquum FD reliquo AK maius erit. eſtq; FD æqualis ipſi C. ergo C quā AK eſt maior. minor igitur eſt AK, quàm C. Ergo ex magnitudine AB relicta eſt magnitudo AK expoſita minori magnitudine C minor. quod demonſtrare oportebat. 1.com. not.



* ſimiliter autem demonſtrabitur etiam ſi dimidia ablata fuerint.

ALITER. Exponātur duæ magnitudines inęquales AB C, ſitq; C minor. & quoniam minor eſt C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat vt FM, diuidaturq; in partes ipſi C ęquales MH HG GF: & ab ipſa AB auferatur maius, quàm dimidium BE, & ab EA maius, quàm dimidium ED: atque hoc ſemper fiat, quoad diuiſiones, quę ſunt in FM, æquales fiant diuiſionibus, quę in AB. fiant igitur vt BE ED DA. & ipſi DA vnaquæque ipſarum KL LN NX ſit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuiſiones KX ęquales ſint diuiſionibus ipſius FM. & quoniam BE maior eſt, quàm dimidium ipſius AB, erit BE maior, quàm EA. multo igitur maior eſt BE, quàm DA. ſed ipſi DA ęqualis eſt XN. ergo BE maior eſt, quàm XN. rurſus quoniam ED maior eſt quàm dimidium EA, erit ED maior, quàm DA. ſed ipſi DA eſt æqualis NL. quare ED, quàm NL eſt maior. tota igitur DB maior eſt, quàm XL. ipſi vero DA æqualis eſt LK. quare tota AB, quàm tota XK maior erit. ſed & MF maior eſt, quam BA. multo igitur MF, quàm XK eſt maior. & quoniam XN NL LK inter ſe æquales ſunt; ſunt autem & MH HG GF inter ſe æquales: atque eſt multitudo earum, quæ ſunt in MF æqualis multitudini ipſarum, quæ in XK: erit vt KL ad FG, ita KX ad FM. maior autem eſt FM, quàm XK. ergo & GF quàm LK eſt maior. atque eſt FG ipſi C æqualis; & KL ęqualis ipſi AD. ergo C quàm AD maior erit. quod oportebat demonſtrare. 12.quinti. 14.quinti.



SCHOLIVM.

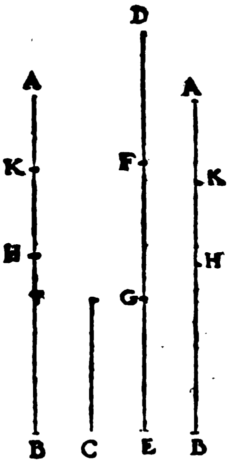
Ex hoc theoremate perſpicuum fit in magnitudinibus aſymetriam, hoc eſt incommenſurabilitatem ineſſe. ſi enim expoſita magnitudine minorem aſſumere licet, & rurſus hac minorem, & ſemper minorem In magnitudinibus aſymetriam ineſſe.

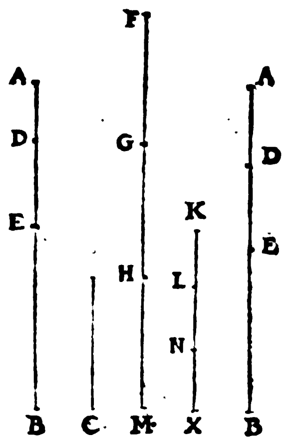
magnitu-

magnitudines in infinitum ſecantur ; & non in minimam menſuram determinatam , vt in numeris eſt vnitas . ſi igitur non eſt determinata magnitudo minima , erunt quędam magnitudines incommenſurabiles , quas communis aliqua magnitudo , cum indeterminata ſit, non metietur.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem demonſtrabitur, etiam ſi dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipſa AB dimidium BH: & ab ipſa AH dimidium HK: idq́; ſemper fiat. quo ad diuiſi ones AB ęquales ſint diuiſionibus ipſius D E : & quoniam D E maior eſt quàm AB, & ab ipſa quidem D E ablatum eſt minus quàm dimidium; ab ipſa vero AB ablatam eſt dimidium ; erit reliquum GD maius reliquo HA . rurſus quoniam G D maior eſt quàm HA: & ab ipſa G D ablatum eſt dimidium GF; ab ipſa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit . quae deinceps ſunt ſimiliter demonſtrabuntur.* *

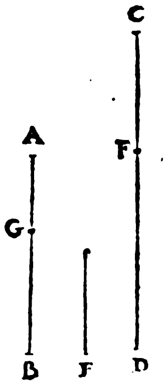




Sed in alia demonſtratione. auferatur ab ipſa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED : atque hoc fiat, quoad diuiſiones, quae ſunt in FM aequales ſint diuiſionibus, quae in AB: ſint autem BE ED DA. & ipſi DA aequalis ſit vnaquęque ipſarum KL LN NX. & quoniam BE eſt aequalis ipſi EA, & EA maior quàm AD, erit BE quàm DA maior. ſed ipſi DA eſt aequalis XN. ergo BE maior eſt quàm XN. rurſus quoniam ED DA ſunt aequales ipſis NL LK, tota AB quã tota XK maior erit. reliqua vero ſimiliter demonſtrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inęqualibus expoſitis detracta ſemper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt.



Duabus enim magnitudinibus inęqualibus expoſitis AB CD, quarum minor ſit AB, & detracta ſemper minore de maiore, reliqua minime metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB CD incommenſurabiles eſſe. ſi enim commenſurabiles ſint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, ſi fieri poteſt, ſitq́; E: & AB quidem metiens DF relinquat ſe ipſa minorem CF: CF vero metiens BG relinquat ſe ipſa minorem AG ; & hoc ſemper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ ſit minor ipſa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipſa E minor. Quoniã igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipſam DF metitur. ſed & metitur totã CD. ergo & reliquam CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipſam BG metitur. metitur autem *

& totam

& totam AB, & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non poteſt. non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommenſurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detracta ſemper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommenſurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

* *Magnitudines quaſdam longitudine eſſe incommenſurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commenſurabiles eſſe perſpicue apparet. magnitudinum autem commenſurabilium maximam communem menſuram inuenire, non cuius vis eſt, ſed hominis eruditi: cuius quidem maxima communis menſurę inuentionem in ſequenti theoremate tradit.*

ALIVD SCHOLIVM.

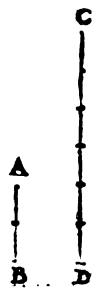
Cum in antecedenti theoremate cauſſam explicauerit incommenſurabilitatis, in hoc ſignum incommenſurabilium magnitudinum affert, quando ſcilicet incommenſurabiles ſunt. in ſextodecimo autem theoremate ipſarum proprium exponit, ita vt & cauſſa, & ſignum, & proprium habeatur. At in commenſurabilibus magnitudinibus cauſſam veluti manifeſtam prætermiſit; exponit autem & ſignum, & proprium.

F. C. COMMENTARIVS.

* Et hoc ſemper fiat, quoad relinquatur quædã magnitudo, quæ ſit minor ipſa E.] *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit ſe ipſa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit ſe ipſa minorem AG: erit AG minor, quàm BG. ergo ex AB ablatum eſt maius, quàm dimidium ipſius, videlicet BG: & ita ſemper fiet. quòd cum ex AB ſemper auferatur maius, quàm dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quae ipſa E minor erit.* Ex antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. III.

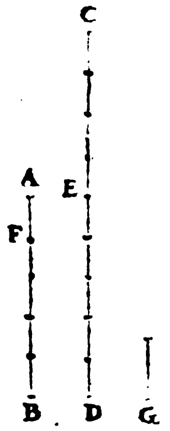
Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.



Sint datæ duæ magnitudines commenſurabiles AB CD, quarum minor AB. oportet ipſarum AB CD maximam communem menſuram inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & ſi quidem AB metitur CD, metitur autem & ſe ipſam; erit AB ipſarum AB CD communis menſura. & perſpicuũ eſt maximam eſſe; magnitudo enim maior magnitudine AB ipſam AB non metietur. ſi vero AB non metitur CD; * detracta ſemper minore de maiore, relinquetur tandẽ quædam magnitudo, quę præcedentem metietur; propterea quòd AB CD non ſint incommenſurabiles. & AB quidem metiens ED relinquat ſe ipſa minorem EC: EC vero metiens FB relinquat ſe ipſa minorem AF; & AF ipſam CE metiatur. Quoniam igitur AF metitur CE; ſed CE metitur FB: & AF ipſam FB metitur. metitur autem & ſe ipſam. & totam igitur AB metietur. ſed AB metitur DE. ergo AF ipſam DE metitur. metitur autem

2. com not.
4. com. not.

tem & CE. & totã igitur CD metietur. ergo AF ipſas AB CD metitur; ac propterea ipſarum eſt communis menſura. Dico & maximam eſſe. niſi enim ita ſit, erit aliqua magnitudo maior ipſa A F, quę ipſas A B CD metietur. Itaque metiatur, & ſit G. & quoniam G metitur A B, A B vero metitur E D; & G ipſam E D metitur. metitur autem & totam C D. ergo & reliquam C E metietur. ſed C E metitur F B. quare G ipſam F B metitur. metitur autem & totam A B. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non poteſt. non igitur magnitudo quædam maior ipſa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipſarum AB CD maxima erit communis menſura. Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis AB CD maxima ipſarum communis menſura inuenta eſt AF. quod facere oportebat.



3. com: not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri. *

SCHOLIVM.

Tamquam manifeſtum ſit, eſſe magnitudines commenſurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius oſtendit, quemadmodum in ijs, quæ in commenſurabiles ſunt. conſtat enim magnitudines omnes alicuius multiplices, ſi comparentur cum ea, cuius ſunt multiplices, commenſurabiles eſſe.

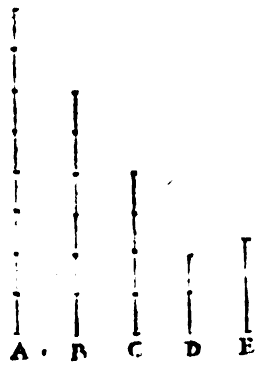
F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipſarum communem menſuram metiri] *ſequitur illud ex vltima parte demonſtrationis, vt ad ſecundam propoſitionem ſeptimi libri in numeris explicauimus.* *

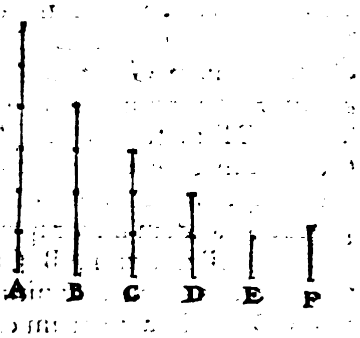
PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram inuenire.

Sint datæ tres magnitudines commenſurabiles A B C. oportet ipſarum A B C maximam communẽ menſuram inuenire. ſumatur enim duarum A B maxima cõis menſura, quę ſit D. itaque D ipſam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & qm̃ D ipſam C metitur, metitur autem & AB; & ipſas A B C metietur. Quare D ipſarum A B C communis eſt menſura: & manifeſtum eſt maximam eſſe. magnitudo enim maior magnitudine D ipſas A B C non metietur. nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitu-



Ex antecedente.



do maior ipſa D, quæ ſit E. Quoniã igitur E magnitudines A B C metitur, & ipſas A B metietur, & ipſarum A B maximam communẽ menſuram D, maior minorẽ, quod fieri nõ poteſt. ſed non metiatur D ipſam C. Dico primũ C D commenſurabiles eſſe. Quoniã enim commenſurabiles ſunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quę ſcilicet & ipſas A B metitur. ergo & ipſarum A B maximã cõmunem menſurã D. metitur autem & ipſam C. quarę dicta magnitudo ipſas C D metitur: ideoq; C D cõmenſurabiles ſunt: ſumatur ipſarum maxima cõmunis mẽſura; & ſit E. Quoniã igitur E metitur D, D vero metitur A B; & E ipſas A B metietur. metitur autem & C. ergo E ipſarum A B C communis eſt menſura. Dico & maximam eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit aliqua magnitudo F maior ipſa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipſas A B metietur, & ipſarum A B maximam communem menſuram, quæ eſt D. ergo F metitur D. metitur autem & C. quare F ipſas C D metitur, & ipſarum C D maximam communem menſuram, hoc eſt E. ergo F ipſam E metietur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur magnitudo quædam maior ipſa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipſarum A B C maxima erit communis menſura, ſi D ipſam C non metiatur; ſi vero metiatur erit ipſa D. tribus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis maxima ipſarum communis menſura inuẽta eſt. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicue conſtat, ſi magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipſarum maximam communem menſuram metiri. ſimiliter & in pluribus magnitudinibus maxima communis menſura inuenietur, & corollarium procedet.

SCHOLIVM.

Quoniam incommenſurabiles magnitudines conſequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuerſum: vult oſtendere commenſurabiles magnitudines conſequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quonam modo commenſurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis menſura inueniatur. ſic & in primo arithmeticorum libro fecit. poſtquam enim oſtendit qui nam ſint incommenſurabiles, quos primos appellat, propterea quod non omnino incommenſurabiles ſunt, vt magnitudines; oſtendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel ſuperparticularem, vel ſuperpartientem, vel multiplicem ſuper-

particularem, vel multiplicem ſuperpartientem, quos ipſe breuitatis cauſa ex minori nominauit, vel partem, vel partes. per partem intelligens ſubmultiplicem, vel ſubſuperparticularē, vel ſubmultiplicem ſuperparticularem. per partes vero ſubſuperpartientem, vel ſubmultiplicem ſuperpartientem. hoc igitur volens oſtendere eo indigebat, quo modo commenſurabilium maxima cōmunis menſura inueniatur. quod etiam hoc loco obſeruauit. Poſtea in quinto theoremate oſtēdet cōmēſurabiles magnitudines inter ſe proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commenſurabilem magnitudinem omnis commenſurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem eſſe, vel partes: hoc enim eſt proportionem habere, quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus. quamobrem eo vſus eſt. Sciendum autem & ipſas demonſtrationes, quæ ex arithmeticis petuntur, incommutabiles eſſe.

ALIVD.

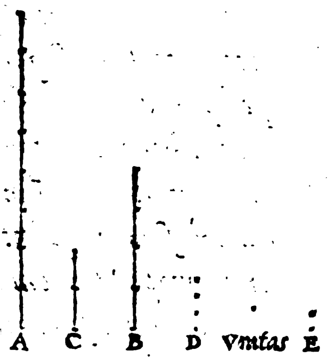
Poſtquam docuit, quæ ſint magnitudines incommenſurabiles, deinceps quid ipſas conſequatur oſtendet; & inſuper quid conſequatur commenſurabiles in quinto, & ſexto theoremate. & quoniam indigebat cōmuni menſura earum, quæ ſunt in ſymmetria, videlicet commenſurabilium, hoc aſſumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inueniendæ ſint commenſurabilium communes menſuræ. ſeptimum autem theorema inquirit; quę conſequantur incommenſurabiles magnitudines non ſimpliciter, ſed ſecundum ſpeciem, vt incommenſurabiles longitudine, vel potentia; nam de incommenſurabilibus ſecundum priuationem nihil dixit; vt pote, quæ non ſint ipſis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quę longitudine, & potentia commenſurabiles ſunt, & incommenſurabiles: his enim indiget in nono theoremaoe, & ſequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compoſitionem, & diuiſionem commenſurabilitas, & incommenſurabilitas inquiritur vſque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commenſurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B propor nem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commenſurabiles ſunt, metietur ipſas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit C. & quoties C ipſam A metitur, tot vnitates ſint in D: quoties autem C metitur B, tot vnitates ſint in E.

quoniam igitur C ipſam A metitur per vnitates, quę ſunt in D: metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipſo ſunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. ergo vt C ad A, ita eſt vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatem. Rurſus quoniam C ipſam B metitur per vnitates, quæ ſunt in E; metiturq; vnitas numerum E per vnitates, quę in ipſo ſunt: vnitas numerum E ęqualiter metietur, atque C ipſam B. eſt igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatē. quare ex ęquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commēſurabiles igitur magnitudines A B inter ſe proportionem habent, quam D numerus ad numerū E. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

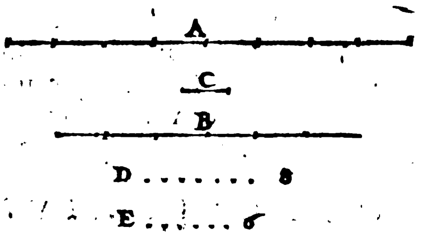
Hoc proprium eſt commenſurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars eſt, vel partes. ſi quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam vnitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; ſi vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim ſubmultiplicem facit proportionem: partes vero vnam reliquarum ſubproportionalium. ſi igitur rectæ lineæ ſint, & plana, quæ ab ipſis fiunt, & ſolida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. ſi vero plana, & quæ ab ipſis ſolida, non item reſtæ lineæ, niſi proportio numerorū ſit quadrati ad quadratum. & ſi ſolida nō omnino quę ipſa præcedunt, niſi proportio ſit cubi ad cubum. quòd ſi ſolida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana; neque rectæ lineæ habebunt: non enim ſunt commenſurabiles. In hoc autem theoremate & ſequenti de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus ſimpliciter diſſerit; at in ſeptimo de incommenſurabilibus longitudine. ex quo manifeſtum eſt & de potentia incommenſurabilibus. In octauo denique ortum tradit commenſurabilium, & incommenſurabilium longitudine & potentia.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis poſſumus illud quoque problema abſoluere.

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam inter ſe proportionem habeant in numeris inueuire.

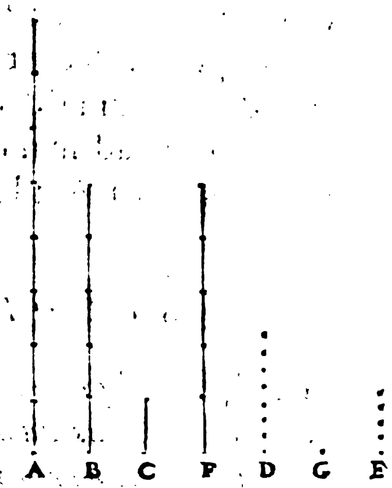
Sint propoſitae magnitudines commenſurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis menſura, quae ſit C. & quoties C metitur A, tot vnitates ſint in D: quoties autem metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. habebit igitur A ad B proportionē eā, quā habet numerus D ad E numerum. itaque ſi A B rectae lineae ſint, & earum quadrata erunt cōmenſurabilia, & inter ſe proportionem habebunt, quam *numerus quadratus ad quadratum numerum. ſi vero ſint ſuperficies, vel numeri D E ſunt quadrati, vel non quadrati; & ſi non ſunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & ſi quidem ſunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae linae, quae ipſas ſuperficies, vel ſuperficies ipſis aequales poſſunt, erunt longitudine commenſurabiles. ſi vero numeri non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommenſurabiles, quamquam potentia commenſurabiles ſint. quae omnia in nona propoſitione huius libri demonſtrabuntur.*



THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles magnitudines erunt.

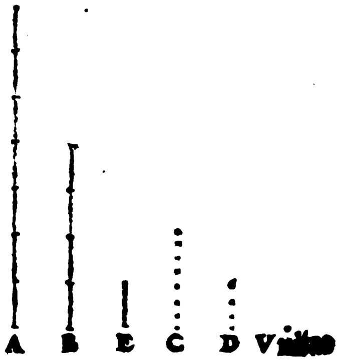
Duæ enim magnitudines A B inter ſe proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines commēſurabiles eſſe. quot enim vnitates ſunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipſarum æqualis ſit C: quot autem vnitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi C cōponatur magnitudo F. Quoniam igitur quot ſunt in D vnitates, tot magnitudines ſunt in A, ipſi C æquales; quæ pars eſt vnitas ipſius D, eadem pars erit & C ipſius A. vt igitur C ad A, ita eſt vnitas ad D. metitur autem vnitas ipſum D numerū. ergo & C ipſam A metietur. & quoniam eſt vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C, ita D numerus ad vnitatem. rurſus quoniam quot vnitates ſunt in E, tot ſunt & in F magnitudines ipſi C ęquales; vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatem. ergo ex æquali ut A ad F, ita eſt D ad E. ſed ut D ad E, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita A ad F. quòd cum A ad utramque ipſarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipſi F ęqualis. metitur 9. quinti. autem C ipſam F. ergo & ipſam B metietur. ſed & metitur A. quare C ipſas A B metitur. commenſurabilis igitur eſt A ipſi B. Quare ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonſtrare.



ALITER.

Duæ enim magnitudines A B inter ſe proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commenſurabiles eſſe. quot enim unitates ſunt in C, in tot partes ęquales A diuidatur, & uni ipſarum ęqualis ſit E. eſt igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. eſt autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex æquali

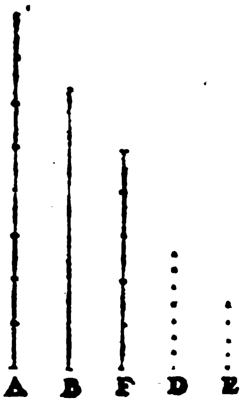
æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. ſed unitas metitur D. ergo & E ipſam B metitur. metitur autem & E ipſam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipſarum A B metietur; ideoque A B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri, vt D E, & recta linea vt A, fieri poſſe, vt D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. ſi autem ipſarum A F media proportionalis ſumatur, ut B, erit vt A ad F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc eſt vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. ſed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur eſt & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

Coll. 20. ſexti



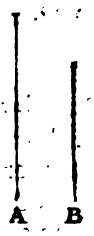
SCHOLIVM.

Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque ſpacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipſa commenſurabiles ſunt; & rectæ lineæ, quæ ipſas poſſunt, longitudine ſunt commenſurabiles. vel quando rectæ lineę inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipſę commenſurabiles ſunt longitudine, & quæ ab ipſis fiunt quadrata, vel ſpacia quadratis ipſarum ęqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur ſe extendunt potentia commenſurabiles, quàm commenſurabiles longitudine; & continentiores ſunt, vt ex ſequentibus theorematibus fiet manifeſtum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

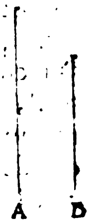
Sint incommenſurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. ſi enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad nnmerum, commēſurabilis erit A ipſi B. atqui non eſt commenſurabilis. nō igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

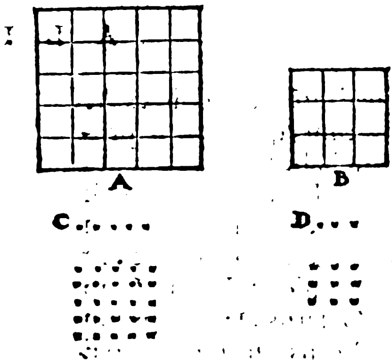
Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeāt, quā numerus ad numerū, incōmēſurabiles erūt.

Duæ enim magnitudines A B inter ſe proportionem non habeāt quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommenſurabiles eſſe. ſi enim commenſurabilis eſt A ipſi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommenſurabiles igitur ſunt A B magnitudines. ergo ſi duę magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles erunt. quod oportebat demōſtrare.



THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commenſurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommenſurabilibus rectis lineis fiunt, inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

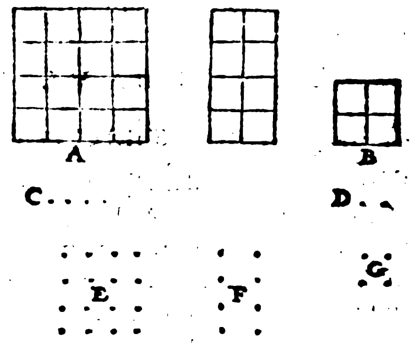


Sint rectæ lineæ A B longitudine cōmenſurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. 5.huius. habeat eam, quam numerus C ad numerū D. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla eſt proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; ſimiles enim figuræ in dupla ſunt proportione homologorum laterum: Coroll. 20. ſexti. proportionis vero, quā habet numerus G ad numerum D dupla eſt proportio quadrati ipſius C ad ipſius D quadratum; etenim duorū numerorū quadratorum vnus medius proportionalis eſt numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, 11 octaui. quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum,

quod

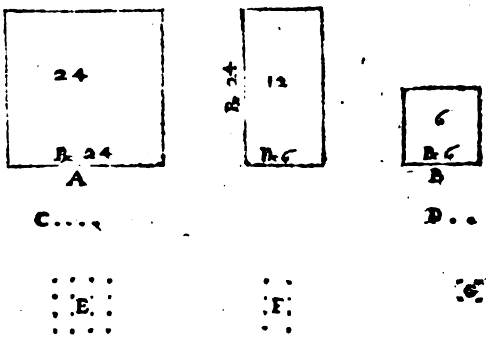
quod ex B,ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

ALITER.



Quoniam enim cõmenſurabilis eſt A ipſi B longitudine,proportioné hẽt quã numerus ad numerũ. habeat quã C ad D. & C ſe ipſum quidé multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D ſe ipſum multiplicans faciat G.itaque quoniã C ſe ipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicãs vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc eſt 1.ſexti. vt A ad B,ita E ad F.ſed vt A ad B,ita quadratum,quod fit ex A ad rectãgulum, quod fit ex A B.eſt igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulũ, quod ex A B, ita E ad F. rurſus quoniam D ſe ipſum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc eſt vt A ad B, ita erit F 1. ſexti. ad G.vt autem A ad B,ita rectangulũ,quod fit ex A B ad quadratũ, quod fit ex B. ergo vt rectangulum,quod ex A B ad quadratum,quod ex B, ita F ad G.ſed vt quadratum,quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B,ita erat E ad F.ex æquali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B,ita E ad G. eſt autem vterque ipſorum E G quadratus.& E quidem eſt à numero C; G uero ab ipſo D.quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum,quod ex B proportionem habet,quam quadratus numerus ad quadratum numerum.Sed ſit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratũ, quod ex B, ita quadratus numerus, qui eſt à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D.Dico A ipſi B longitudine commenſurabilem eſſe.Quoniam enim eſt vt quadratum,quod fit ex A ad quadratum,quod ex B, ita quadratus numerus, qui eſt à numero C ad quadtatum numerum, qui à numero D.ſed proportio quidem quadrati,quod fit ex A ad quadratum,quod ex B,dupla eſt proportionis, quã Coroll. 20. ſexti. hẽt A ad B:proportio vero quadrati numeri,qui eſt à numero C ad quadratũ nume 11.octaui. rũ,qui à numero D itidẽ dupla eſt proportionis,quã hẽt C numerus ad numerum D.eſt igitur vt A ad B,ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet,quam nume 6.huius. rus C ad D numerum: ac propterea A ipſi B longitndine eſt commenſurabilis. quod oportebat demonſtrare.

ALITER.



Sed quadratũ, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat,quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G.Dico A ipſi B longitudinem commẽſurabilem eſſe. ſit enim ipſius quidem E latus C, ipſius vero G latus D; & C ipſum 17. ſeptimi. D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales ſũt in proportione, quæ eſt C ad D. & quoniam quadratorum, quæ 17. ſeptimi. ſiunt ex A B, medium proportionale eſt rectangulum, quod ex A B:numerorum vero quadratorum E G medium proportionale eſt F, erit vt quadratum

dratum, quod ſit ex A, ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: ſed vt quadratum ex A ad rectangulũ ex A B, ita A ad B. ergo A B commenſurabiles ſunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc eſt quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: 17.ſeptimi.
nam C ſe ipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem D ipſum F fecit. eſt igitur vt C ad D, ita E ad F.

Sed incommenſurabilis ſit A ipſi B lõgitudine. Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem nõ habere, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. ſi enim quadratũ ex A ad quadratũ ex B proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, commenſurabilis erit A ipſi B longitudine. non eſt autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Rurſus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipſi B longitudine incommenſurabilem eſſe. ſi enim commenſurabilis ſit A ipſi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quę deinceps ſunt. quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIVM.

Et manifeſtum eſt ex iam demonſtratis rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

C Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commenſurabilibus proportionem habent, quam quadratus nnmerus ad quadratum numerum; quę vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commenſurabilia ſunt: erunt rectę lineę commenſurabiles longitudine, non ſolum longitudine, ſed & potentia commenſurabiles. 6.huius.

D Rurſus quoniam quæcunque quadrata inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commenſurabilia, vt oſtenſum eſt, quæ etiam potentia commenſurabilia ſunt, cum eorum quadrata proportionẽ habeãt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: quęcunq; quadrata proportionẽ nõ habẽt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, ſed E ſimpliciter quã aliquis alius numerus ad aliũ numerũ, cõmẽſurabilia ſunt, hoc eſt rectę lineæ à quibus ipſa deſcribũtur, cõmẽſurabiles ſunt potẽtia, nõ aũt & longitudine. ergo rectæ linęæ longitudine quidem commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt: potentia vero commenſurabiles non omnino & longitudine, niſi earum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommenſurabiles non omnino & poten- F tia incõmenſurabiles eſſe, Q̃m potentia cõmenſurabiles poſſunt proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ideoq; cum potentia commenſurabiles ſint, longitudine ſunt incommenſurabiles. ergo non quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, omnino & potentia: ſed longitudine incommenſurabiles exiſtentes poſſunt

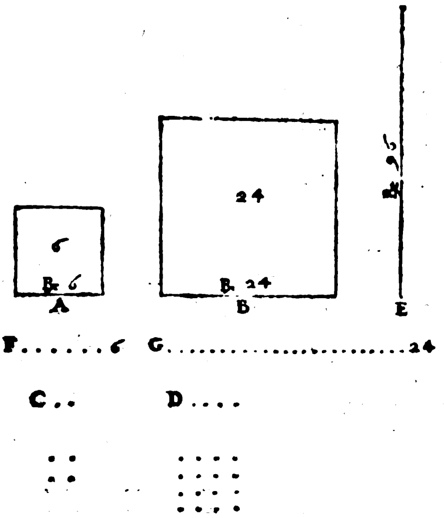
G ſunt potentia & incommenſurabiles, & commẽſurabiles eſſe. potentia vero incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. ſi enim longitudine ſint commenſurabiles, & potentia commenſurabiles erunt. atqui ponuntur incõmenſurabiles: quod eſt abſurdum. potentia igitur incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles erunt.

SCHOLIVM.

Hoc theorema Theæteti eſt inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theæteto. ſed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuerſe. namq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris menſurantur, commenſurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem eſt hæc propoſitio: neque enim omnia commenſurabilia ſpacia, quorum & latera commenſurabilia ſunt, comprehendit; ſi quidem quadratorum ſpaciorum commenſurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & ſi non ſecundum menſuram numerorum inueniantur, aliter tamen commenſurabilia ſunt. at ipſa ſpacia à quadratis numeris minime menſurantur, quamquam etiam menſurari poſſint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, ſed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non fruſtra quadrati numeri mentio facta eſt. ſi enim tantum dixiſſet, quam numerus ad numerum, redundans eſſet diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter ſe duplam proportionem habent, commenſurabilia habere latera oporteret, non habent autem, eſt enim maioris latus ad latus minoris, vt quadrati diameter ad eius latus. ſi igitur ita dixiſſet, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commenſurabilia non habent. Si vero dixiſſet, quæ à quadratis numeris menſurantur, diffinitio diminuta eſſet, non comprehendens ea, quę cum latera commenſurabilia habeant, à quadratis numeris non menſurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appoſitum eſt, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; comprehenduntur enim omnia ſpacia, quæ & ſi à quadratis numeris non menſurantur, tamen cum ſint commenſurabilia, latera quoque commenſurabilia habent: nam 18 & 8 commenſurabilibus exiſtentibus, propterea quòd à lateribus commenſurabilibus deſcribuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque ſumentes latera ipſorum 9 & 4, æqualiter ſecabimus, propoſitorum quadratorum latera: & habebimus commenſurabilitatẽ. namque vt quadrata ad quadrata, ita ſunt latera ad latera.

A Quæ à rectis lineis longitude commenſurabilibus fuerint quadrata] *intellige rectas lineas longitudine commenſurabiles inter ſe ſe, non expoſitae rationali: hoc enim non ſolum rationalibus contingit, ſed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.*

B Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commenſurabilia] *Per quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non ſolum intelligenda ſunt ea, quae totidem quadratas menſuras continent, quot vnitates ſunt in numeris quadratis; ſed ēt quae inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum. ſint enim duo numeri plani ſimiles F G, & recta linea A. ſitq́; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario ſextę propoſitionis huius, vt F ad G, ita A ad aliam lineam, quae ſit E. & inter A E ſumpta media proportionali B, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum, quod ex ſecunda, hoc eſt ita* Coroll. 20. ſexti.
quadratum, quod ex A ad quadratum, quod ex B. ſed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G. vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq́; quadratum ex A continebit totidem menſuras quadratas, vt exempli gratia totidem pedes quadratos, quot vnitates ſunt in F, videlicet ſex, & quadratum ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates ſunt in G, hoc eſt 24. & quoniam numeri plani ſimiles F G inter ſe proportionem 26. octaui.
habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; habebit etiam quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. ſimiliter demnoſtrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non poſſint, tamen inter ſe longitudine commenſurabilia eſſe. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iuniores eiuſmodi latera radices quadratas, vel radices ſimpliciter appellāt; dicetur enim A radix 6, & B radix 24. atque eſt ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum ſit quadrati ex A, erit B ipſius A dupla. ſimiles enim rectilineę figurae in du- Coroll. 20.
pla ſunt proportione homologorum laterum. ſexti.



C Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commenſurabilibus] *Oſtendit quomodo prima corollarij pars ſequatur ex prima parte theorematis.*

D Rurſus quoniam quæcunque quadrata inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rurſus oſtendit quomodo idem ex ſecunda parne theorematis ſequatur.*

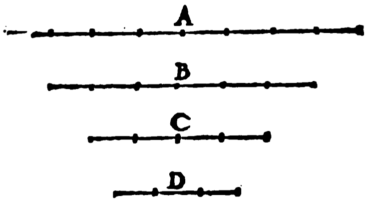
E Quęcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed ſimpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum] *Hoc ad ſecundam partē Corollarij attinet, & ſequitur ex vltima parte theorematis.*

F Dico & longitudine incommenſurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.*

G Potentia vero incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt] *Hęc eſt vltima corollarij pars, quae per deductionem ad id, quod fieri non poteſt ex prima parte theorematis demonſtratur.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartę commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundę fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, ſitq; vt A ad B, ita C ad D, & ſit A ipſi B commenſurabilis. Dico & C ipſi D commenſurabilem eſſe. Quoniam 5.huius. enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum: atque eſt vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. commenſu- 6.huius. rabilis igitur eſt C ipſi D. ſed A ipſi B ſit incommenſurabilis. dico & C ipſi D incõ- 7.huius. menſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A ipſi B, non habebit A ad B proportionẽ, quam numerus ad numerum. eſt aũt vt A ad B, ita C ad D. ergo neque C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. ſi enim C ad D proportionem habeat, quã numerus ad numerum; & A ad B eam, quã numerus ad numerũ proportionẽ habebit; atq; erit A ipſi B cõmẽſurabilis. quod eſt abſurdũ; in cõmẽſurabilis enim ponitur. ergo C ad D proportionẽ nõ hẽt, quã numerus ad nu- 8.huius. rum; ideoq; C ipſi D eſt incommenſurabilis. Si igitur quattuor magnitudides proportionales fuerint; prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis, & tertia quartæ commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

LEMMA. I.

16.octaui. *Oſtenſum eſt in arithmeticis numeros planos ſimiles inter ſe proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: &* A *ſi duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe proportionalia proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ſi enim haberent, ſimiles plani eſſent. quod non ponitur. ergo diſſimiles plani inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

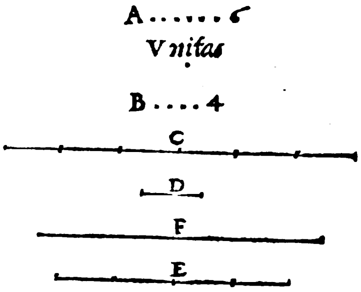
LEMMA. II.

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri A B; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad ſecundum numerum. quot enim vnitates ſunt in A, in tot partes ęquales diuidatur C recta linea, &

uni

vni ipſarum æqualis ſit D. quot autem vnitates ſunt in B, ex tot partibus ipſi D æqualibus cõponatur recta linea E: eſt igitur vt vnitas ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. eſt autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipſam E. ſumatur rectarum linearũ C E media proportionalis F. eſt igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nãque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum. ſed vt C ad E, ita eſt A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F ſunt rectę lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta eſt.

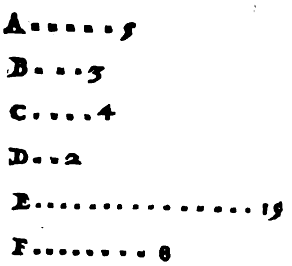


Coroll. 20. ſexti.

LEMMA III.

Duos numeros planos diſſimiles inuenire, hoc eſt vt inter ſe proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

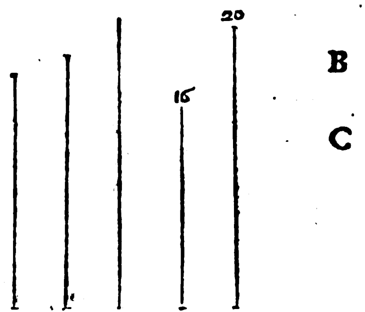
Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non ſit ſicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perſpicuum eſt E F numeros planos eſſe, planos autem diſsimiles, quoniam latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.



PROBLEMA III.
PROPOSITIO. XI.

Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit propoſita recta linea A. oportet ipſi A inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter ſe proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc eſt diſsimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum eſt. ergo quadratum ex A commenſurabile eſt quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, neque quadratum ex A ad quadratũ ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommenſurabilis igitur eſt A ipſi D longitudine. ſumatur ipſarum A D media proportionalis E. eſt igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. ſed A ipſi D longitudine eſt in commenſurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommenſurabile erit. incommenſurabilis



9. huius.
Coroll. 20. ſexti.
D

rabilis igitur eſt A ipſi E potentia. ergo propoſitæ rectæ lineæ rationali, à qua dicebamus menſuras ſumi, vt ipſi A potentia quidem commenſurabilis inuenta eſt D, hoc eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis, irrationalis vero E. irrationales enim vniuerſe appellantur, quæ rationali & longitudine, & potentia incommenſurabiles ſunt.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ſi duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe] *Hoc ab Euclide non demonſtratur in arithmeticis, ſed nos ad vigeſimam ſextam octaui libri demonſtrauimus.*

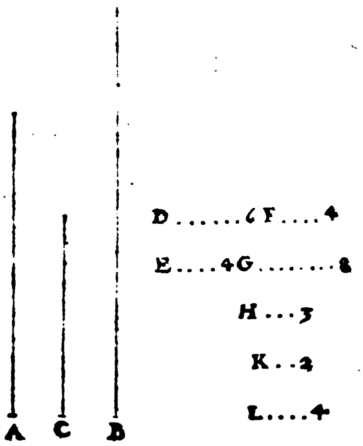
B Exponantur enim duo numeri B C inter ſe proportionem non habentes, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc eſt diſsimiles plani] *Hoc in promptu eſt, ſed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur.*

C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditū eſt] *In corollario ſcilicet ſexti theorematis, & quamquam hoc ex illo perſpicue appareat, tamen ſecundum lemma, quod in grecis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommenſurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt.



Vtraque enim ipſarum A B ipſi C ſit commenſurabilis. dico & A ipſi B commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi C, habebit A ad C proportionem, quā numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipſum E. Rurſus quoniam commenſurabilis eſt B ipſi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuſcunque, videlicet quam habet D ad E, & quam habet F ad G; ſumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus H K L; ſitq; vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita K ad L. Quoniam igitur eſt vt A ad C, ita D ad E; ſed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L; erit & vt B ad C, ita K ad L. eſt autem & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet. quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipſi B eſt commenſurabilis. Quæ igitur eidē magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt. quod oportebat demonſtrare.

5.huius.

4.octaui.

11.quinti.

6.huius.

SCHOLIVM.

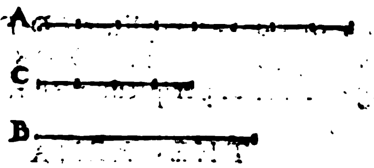
Hoc ab identitate non conuertitur. non enim quę inter ſe ſunt commenſurabiles, & eidem commenſurabiles ſunt; quemadmodum neque æquales inter ſe eidem ſunt æquales, ſed contra. nam contingit & incō

menſurabiles

menſurabiles eſſe eidem, & commenſurabiles; quod ſequens theorema, & eius conuerſum oſtendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis; magnitudines inter ſe incommenſurabiles erunt.

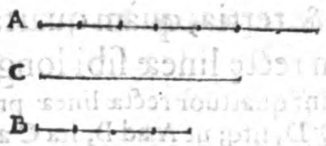


Sint enim duę magnitudines A B, alia autem ſit C: & A quidem ipſi C commenſurabilis ſit; B vero eidem C incommenſurabilis. Dico & A ipſi B incommenſurabilem eſſe. ſi enim commenſurabilis eſt A ipſi B, eſt autem & C commenſurabilis ipſi A; erit & C ipſi B cõmenſurabilis. quod non ponitur.

Ex antecedente.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIIII.

Si duę magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis, & reliqua eidem incommenſurabilis erit.



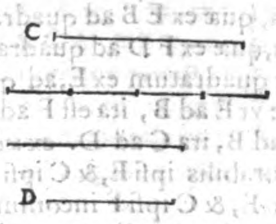
Sint duæ magnitudines commenſurabiles A B; altera vero ipſarum A alicui magnitudini C ſit incommenſurabilis. Dico & reliquam B ipſi C incommenſurabilem eſſe. ſi enim commenſurabilis eſt B ipſi C, eſt autem & A commenſurabilis ipſi B; & A ipſi C commenſurabilis erit: ſed & incommenſurabilis. quod fieri non poteſt. non igitur commenſurabilis eſt B ipſi C. ergo eſt incommenſurabilis. ſi igitur duæ magnitudines cõmenſurabiles ſint, altera aũt ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; & reliqua eidem incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

12 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonſtrata ſunt, licet illud etiam demonſtrare.

Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.



Sint duae magnitudines incommẽſurabiles A B: ſitq; C ipſi A commenſrrabilis: & D commenſurabilis ipſi B. Dico C D inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A C commenſurabiles ſunt, atque eſt A ipſi B incommenſurabilis; & C ipſi B incommenſurabilis erit. Rurſus quoniam B D commenſurabiles ſunt, eſt autem B incommenſurabilis ipſi C; & D ipſi C incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

Ex antecedente.

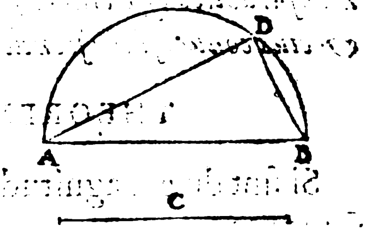
LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus poteſt, quàm minor,

[illegible]

Sint

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior ſit AB. oportet inuenire id, quo AB plus poteſt, quàm C. Deſcribatur in recta linea AB ſemicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipſi C æqualis, & D B iungatur. perſpicuum eſt angulum ADB rectum eſſe, & ipſam AB plus poſſe, quàm A D, hoc eſt quàm C, quātum eſt rectæ lineæ DB quadratum. 1·quarti. 31.tertij. 47·primi.



Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt, hoc modo inuenietur.

Sint duæ datæ rectę lineę AD DB; & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipſas poſsit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulum contineant ADB, & AB iungatur. rurſus perſpicuum eſt rectam lineam AB ipſas AD DB poſſe. 47.primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint; prima vero tāto plus poſsit, quàm ſecunda, quātum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi cōmenſurabilis longitudine: & tertia tāto plus poterit, quàm quarta, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quòd ſi prima tanto plus poſsit, quàm ſecunda, quātum eſt quadratum rectę lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

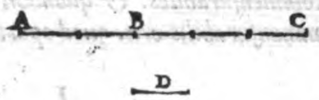
Sint quattuor rectæ lineæ proportionales A B C D, ſitq; ut A ad B, ita C ad D; & A quidē plus poſsit, quàm B, quadrato, quod fit ex E: C vero plus poſsit, quàm D, quadrato ex F. Dico ſi A ipſi E ſit commenſurabilis, & C ipſi F cō menſurabilem eſſe. ſi uero A ipſi E ſit incommenſurabilis, & C ipſi F incommenſurabilem eſſe. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum. 22.sexti. ſed quadrato quidem, quod fit ex A ęqualia sūt quadrata, quæ ex ipſis E B; quadrato autem ex C æqualia ſunt quadrata ex F D. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ ex F D ad quadratum ex D: & diuidēdo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratū ex D. quare vt E ad B, ita eſt F ad D: & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. 22.sexti. eſt autem & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita eſt C ad F. 10.huius. ergo ſi A eſt commenſurabilis ipſi E, & C ipſi F erit commenſurabilis; ſi vero incommenſurabilis eſt A ipſi E, & C ipſi F incommenſurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota

magnitudo

magnitudo vtrique ipſarum cōmenſurabilis erit. quòd ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit commenſurabilis, & quę à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

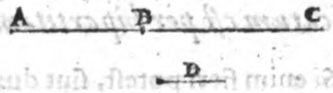


Cōponantur enim duæ magnitudines commenſurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipſarum A B B C commenſurabilem eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt A B B C, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D. & quoniam D metitur ipſas A B B C, & totam A C metietur: metitur autem & A B B C. Ergo D magnitudines A B B C, & ipſam AC metitur. commenſurabilis igitur eſt A C vtrique ipſarum A B B C. Sed A C vni ipſarum A B B C ſit commenſurabilis, videlicet ipſi A B. Dico & A B B C commenſurabiles eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit D. Itaque quoniam D metitur ipſas C A AB, & reliquam BC metietur. metitur autem & A B. ergo D ipſas A B B C metitur: ac propterea A B B C commenſurabiles ſunt. Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

1. diff.
4. com. not.
3. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componātur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. quòd ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit incōmēſurabilis, et quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.



Componantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipſarum AB BC incommenſurabilem eſſe. ſi enim non ſunt incommenſurabiles CA AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur D metitur ipſas CA AB, & reliquam B C metietur. metitur autem & B A. ergo D ipſas A B B C metitur; ac propterea commenſurabiles ſunt AB BC. ponuntur autem & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas C A AB metietur aliqua magnitudo. quare CA AB incommenſurabiles ſunt. ſimiliter & AC CB incōmenſurabiles eſſe demōſtrabimus. ergo AC vtrique ipſarum AB BC eſt incōmenurabillis. ſed AC vni ipſarū AB BC incōmenſurabilis ſit; & primū ipſi A B. Dico & AB BC incōmēſurabiles eſſe. ſi enim ſunt cōmenſurabiles, eas aliqua magnitudo metietur, metiatur, & ſit D. qm̄ igitur D metitur ipſas AB BC, & totā AC metietur. metitur autem & AB. ergo D ipſas CA AB metitur: ideoq; C A A B commenſurabiles ſunt. ponuntur autem & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas AB BC metietur aliqua magnitudo. quare AB BC incommēſurabiles erūt. ſimiliter demonſtrabimus A C, & reliquæ B C eſſe incommenſurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

4. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis illud etiam conſtat.

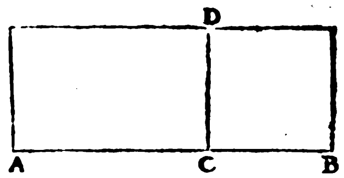
Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentium ſit incommenſurabilis, & reliquæ incommenſurabilis erit.

Sit enim tota magnitudo A C incommenſurabilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquae B C incommenſurabilem eſſe. Quoniã enim C A eſt incommenſurabilis ipſi A B, erunt A B, B C incommenſurabiles. & quoniam AB BC incommenſurabiles ſunt, & A C vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. quod oportebat demonſtrare.

Ex demonſtratis.

L E M M A. I.

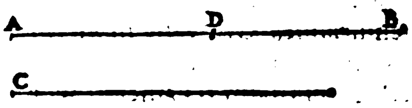
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.



Ad aliquam enim rectam A B applicetur A D parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata DB. Dico parallelogrammum A D rectangulo A C B æquale eſſe; quod quidem per ſeſe patet. quoniàm enim quadratum eſt DB, erit DC ipſi CB æqualis, atque eſt parallelogrammum AD, quod AC CB continetur. ſi igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

L E M M A II.

Si duę rectæ lineæ inęquales ſint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum eſt per bipartitam ſectionem non tranſit.



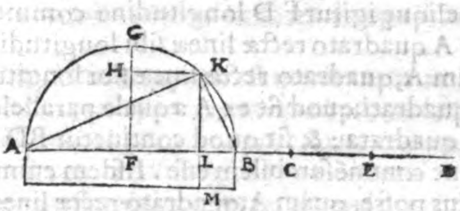
Si enim fieri poteſt, ſint duæ rectæ lineę inęquales AB C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quæ ſcilicet, fit à DB ipſius A B dimidia, erit ex præcedenti lemmate id, quod applicatum eſt æquale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc eſt æquale quadrato ex D B. etenim A B bifariã in puncto D ſecatur. quod igitur quater fit à DB ęquale eſt quadruplo eius, quod applicatum eſt. ſed quod quater fit à D B eſt ipſius AB quadratum; nam longitudine duplæ potentia quadruplę ſunt: quadruplum vero eius, quod applicatur eſt quadratum ipſius C. ergo quadratum, quod fit ex A B eſt æquale quadrato ex C, hoc eſt quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri non poteſt. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad A B per bipartitam ſectionẽ trãſit.

L E M M A. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Sint datę duæ rectæ lineæ inæquales A B CD; ſitq́; maior A B. & oporteat facere quod propoſitum eſt. ſecetur C D bifariã in E. manifeſtum eſt quartam partem quadrati, quod fit à C D eſſe quadratum ex CE. & deſcribatur in recta linea A B ſemicirculus; ſeceturq́; A B bifariã in F: & à puncto F ipſi A B ad rectos angulos ducatur

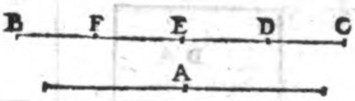
ducatur



ducatur F G. Quoniam igitur A B maior eſt, quàm C D, erit & ipſius A B dimidia maior, quàm dimidia ipſius C D, hoc eſt maior quàm C E. ponatur F H æqualis C E, & per H ipſi A B parallela ducatur HK, atque à puncto K ad A B perpẽdiculari ducta K L. iungantur A K KB. rectangulum igitur eſt triangulum A K B, & ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt K L. ergo rectangulum A L B eſt æquale quadrato, quod fit ex K L. producatur K L, & ponatur ipſi LB æqualis L M, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex K L, hoc eſt quod ex F H eſt æquale parallelogrammo A M. ſed quod fit ex F H eſt ęquale quadrato ex C E, hoc eſt quartæ parti quadrati ex C D: eſtq; A M deficiens figura quadrata. quod ipſum facere oportebat. 8 & 17.ſexti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales ſint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quòd ſi maior tanto plus poſsit, quàm minor, quãtum eſt quadratum rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudiue commenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectę lineę inęquales A B C, quarum maior B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc eſt ei, quod fit à dimidia ipſius A, ęquale parallelogrãmum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur BD DC, ſitq; B D ipſi D C commenſurabilis longitudine. Dico B C plus poſſe, quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. ſecetur enim B C bifariam in puncto E, & ipſi D E æqualis ponatur E F. reliqua igitur D C eſt æqualis B F. & quoniam recta linea B C ſecatur in partes quidem æquales ad E pũctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit B D C rectangulum vnà cum quadrato ex E D æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla quod igitur quater B D D C continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale eſt quadrato quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater B D D C continetur ęquale eſt quadratum ex A: ei vero, quod quater fit ex D E æquale eſt quadratũ, quod ex D F, etenim D F ipſius D E eſt dupla: & ei quod quater fit ex EC ęquale eſt quadratum quod ex B C; rurſus enim B C dupla eſt ipſius E C. ergo quadrata, quæ fiunt ex A D F ęqualia ſunt ei, quod fit ex B C quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex B C maius eſt, quàm quadratũ, quod ex A, quadrato, quod ex D F. recta igitur linea B C tanto plus poteſt, quàm A, quantum eſt ipſius D F quadratum. oſtendendum eſt & B C ipſi D F commenſurabilem eſſe. Quoniam enim B D commenſurabilis eſt ipſi D C longitudine, erit & BC ipſi CD longitudine commenſurabilis. ſed D C ipſis C D B F eſt commenſurabilis longitudine. æqua

A 5.ſecundi. 5.quinti. B C

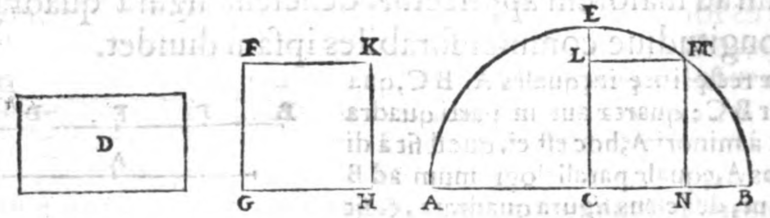
D lis enim eſt C D ipſi B F.quare & BG ipſis B F CD longitudine eſt commenſurabi-
E lis,& reliquę igitur F D longitudine commenſurabilis erit . ergo B C plus poteſt,
qu àm A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Sed BC plus poſ-
ſit quàm A,quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem
parti quadrati,quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad B C applicetur, deficiens
figura quadrata ; & ſit quod continetur BD DC. oſtendendum eſt B D ipſi D C lõ
gitudine commẽſurabilem eſſe . Iiſdem enim conſtructis ſimiliter demonſtrabimus
B C plus poſse, quàm A,quadrato rectæ lineæ FD.ſed B C plus poteſt,quàm A,qua
F drato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis . ergo B C commenſurabilis
eſt ipſi F D longitudine . & reliquę igitur, vtrique ſcilicet B F D C longitudine eſt
commenſurabilis, ſed vtraque B F D C ipſi D C commẽſurabilis eſt longitudine;
G etenim B F eſt ęqualis D C.ergo & B C ipſi C D longitudine eſt commenſurabilis.
H ex quibus conſtat B D ipſi D C longitudine commenſurabilem eſſe.Si igitur duę re
ctæ lineę inęquales ſint , & reliqua.quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartæ autem parti quadrati,quod fit à minori A, hoc eſt ei,quod fit à dimidia ipſius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate.Hoc autem nihil aliud eſt,niſi rectam lineam maiorem,ita ſecare , vt rectnagulum ipſius portionibus contentum quartae parti quadrati minoris ſit aequale. ſed poſſumus illud idem vniuerſalius explicare in hunc modum .*

Datam rectam lineam ita ſecare,vt rectangulum,quod partibus cõtinetur,ſit ęquale dato rectilineo . oportet autem datum rectilineũ minus eſſe quadrato , quòd à dimidia deſcribitur.

*Sit data recta linea A B,diuiſa bifariam in C;datumq́; rectilineum D. & oporteat facere quod
propoſitum eſt.Deſcribatur in A B ſemicirculus A E B;& à puncto C ipſi A B ad rectos angu-*
25.sexti. *los ducatur C E:deinde rectilineo D fiat aequale quadratum F G H K . erit eius latus F G minus*



ipſa A C,hoc eſt ipſa C E . quare à recta linea C E abſcindatur C L , quae ſit aequalis F G : & per L quidem ducatur L M parallela ipſi A B : per M vero ducatur M N parallela C E.Dico rectam lineam A B ſectam eſſe in puncto N,vt oportebat , hoc eſt rectangulum A N B rectilineo D aequale eſſe.aequale etenim eſt quadrato ex M N .ſed cum M N ſit aequalis ipſi C L, hoc eſt ipſi FG,erit rectãgulũ ANB quadrato FGHK,hoc eſt rectilineo D ęquale.quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, vt qui ex ipſis producitur dato numero ſit ęqualis.oportet autem datum numerum, cui ęqualis eſſe debet,quadrato dimidij minorem eſſe.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere , vt qui ex partibus producitur, ſit aequalis dato numero 75.Accipiatur ipſius 20 medietas,quae eſt 10,& in ſe multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum,videlicet 75,& relinquetur 25. huius igitur latus 5 additũ ipſi 10 conſtituit 15;& detractum ab eodem conſtituit 5.Dico 20 in has partes ita diuiſum eſſe, vt oportebat,hoc eſt eum,qui ex ipſis producitur, aequalem eſſe dato numero 75.Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes aequales , & in duas partes inęquales , numerus planus,qui fit ex partibus inaequalibus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis eſt ei,qui fit à dimidio quadrato, quod demonſtratum eſt à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum,quae nos ad 15 noni

appoſuimus

appoſuimus.ergo qui fit ex 15,& 5 vnà cũ quadrato ipſius 5 eſt aequalis quadrato dimidij,videlicet 100: & detracto communi quadrato 25,erit qui producitur ex 15,& 5 aequalis dato numero 75.quod facere oportebat.

Sed ei quidem,quod quater DB BC continetur ęquale eſt quadratum ex A]*Ponitur enim parallelogrammum rectãgulum D B C aequale quartae parti quadrati,quod fit ex A.* B

Erit & BC ipſi CD longitudine cõmẽſurabilis]*Ex prima parte ſextae decimae huius.* C

Quare BC ipſis BF CD longitudine eſt commenſurabilis]*Ex 12 huius.* D

Et reliqua igitur F D longitudine commenſurabilis erit]*Ex eo,quod nos ad 17.huius demonſtrauimus.ſumantur enim BF DC ſimul,ac ſi vna linea eſſet.* E

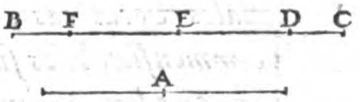
Et reliquę igitur,vtrique ſcilicet B F D C longitudine eſt commenſurabilis]*Ex eodem theoremate,quod ad 17 huius appoſuimus.* F

Ergo & BC ipſi DC longitudine eſt commenſurabilis.]*Ex 12 huius.* G

Ex quibus conſtat BD ipſi DC longitudine commenſurabilem eſſe] *Ex ſecunda parte ſextae decimae huius.* H

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XIX.

Si duæ rectę lineæ inæquales ſint, quartę autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus porerit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.Quòd ſi maior tanto plus poſsit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,quartę autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur,deficiens figura quadrata;in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC,quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori A,æquale parallelogrammum ad ipſam BC applicetur, deficiẽs figura quadrata; & ſit quod continetur B D D C;ſitq́; BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis.Dico B C plus poſſe, quàm A quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis.ijſdem enim,quę ſupra, conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BC plus poſſe, quàm A,quadrato rectę lineæ D F.oſtendendum igitur eſt B C ipſi D F longitudine incommenſurabilem eſſe.Quoniam enim incommenſurabilis eſt B D ipſi D C,erit & BC ipſi C D longitudine incommenſurabilis. 17.huius. ſed DC incommenſurabilis eſt vtriſque BF DC. 14.huius. ergo & BC ipſis BF DC longitudine eſt incommenſurabilis.ac propterea reliquę F D incommenſurabilis eſt longitudine; Ex demonſtratis ad 17. huiust & BC plus poteſt; quàm A.quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis.Sed BC rurſus plus poſsit,quàm A,quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BC applicetur,deficiens figura quadrata;& ſit quod BD DC continetur.oſtendendum eſt BD ipſi DC longitudine incommenſurabilem eſſe.Ijſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC plus poſſe quàm A,quadrato rectæ lineæ DF. ergo oſtendendum relinquitur BC plus poſſe, quàm A,quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi DF longitudine. Ex demonſtratis ad 17. huius. quare & reliquę, videlicet vtrique BF DC eſt incommenſurabilis. 14.huius. ſed vtraque BF DC commenſurabilis eſt longitudine ipſi DC. 17.huius. ergo & BC ipſi CD eſt incommenſurabilis longitudine;ac propterea diuidendo BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis erit. Si igitur duę rectæ lineę inæquales ſint, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus, nunc ad rationales & medias tranſit.

LEMMA. I.

Quoniam demonſtratum eſt longitudine commenſurabiles omnino & Coroll.9.huius. *potentia commenſurabiles eſſe. potentia vero commenſurabiles non omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: manifeſtum eſt, ſi expoſitæ rationali aliqua commenſurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia, longitudine enim commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitę rationali aliqua fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quòd ſi expoſitæ rationali rurſus aliqua commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic rationalis potentia tantum commenſurabilis.*

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expoſitæ rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. ſunt autem & alię rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitę rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus rationales, ſed commenſurabiles inter ſe vel longitudine, & potentia, vel potentia ſolum. & ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ rationales longitudine commenſurabiles, vt intelligatur etiam potentia commenſurabiles eſſe: ſi vero potentia ſolum, inter ſe ſunt commenſurabiles, dicuntur ipſæ quoque rationales potentia ſolum commenſurabiles.

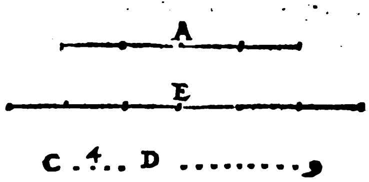
Rationales commenſurabiles ſunt. 12.huius. *At vero rationales commenſurabiles eſſe ex his conſtat.*

Quoniam enim rationales ſunt, quæ expoſitę rationali ſunt commenſurabiles, quæ vero eidem commenſurabiles etiam inter ſe commenſurabiles ſunt; ſequitur rationales commenſurabiles eſſe. quod demonſtrare oportebat.

LEMMA III.

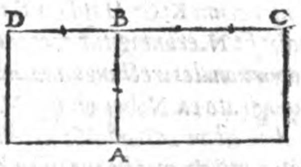
Inuenire duas rationales longitudine commenſurabiles.

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel ſimpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E : erunt per ea, quæ demonſtrata ſunt A E longitudine commenſurabiles. Ex corol. 8. huius. In 9. huius.



THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum continetur rectãgulum rationale eſt. A



Rationalibus enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale eſſe. deſcribatur ex A B quadratum A D. ergo A D eſt rationale. B Et quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C longitudine, atque eſt A B æqualis BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. eſt autem & vt DB ad BC, ita DA ad AC: 1. sexti. & commenſurabilis eſt DB ipſi BC. ergo & DA ipſi AC commenſurabile erit. C eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale. D quod igitur rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum rationale eſt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Secundum aliquem prædictorum modorum] *Rectarum enim linearum A B BC vel vtrque ſunt expoſitae rationali longitudine commenſurabiles, vel vtrque eidem commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe commenſurabiles longitudine. quocunque autem modo ſe habeãt, quod ex ipſis fit rectangulum rationale eſt, & eadem demonſtratio in omnibus congruit.* A

Ergo AD eſt rationale] *Ex diffinitione 9. ſiue enim longitudine ſint commenſurabiles expoſitae rationali, ſiue potentia ſolum, earum quadrata rationalia ſunt, quippe quae quadrato expoſitae rationalis ſint commenſurabilia.* B

Ergo & DA ipſi AC commenſurabilis erit] *Ex decima huius.* C

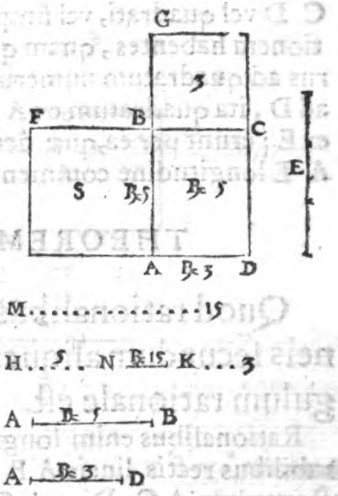
Eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale] *rationali namque commenſurabile & ipſum rationale eſt. quod ita demonſtrabitur.* D

Sit expoſitae rationalis quadratum A, & ipſi commenſurabile ſit ſpacium B. erit B rationale ex 9 diffinitione. ſit rurſus aliud ſpacium C ipſi B commenſurabile. Dico & C rationale eſſe. Quoniam enim ſpacia A C eidem ſpacio B ſunt commenſurabilia, & inter ſe commenſurabilia ſunt ex 12 huius. Quòd cum C ipſi A ſit commenſurabile, etiam rationale erit ex 9 diffinitione. quod demonſtrare oportebat.

Vt autem ea, quae hoc loco de rationalibus dicuntur, manifeſtiora ſint, & quaſi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quae ad ea etiam, quae ſequuntur, vtilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datũ erit.

Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD contineatur rectangulum A C. Dico AC datum

datum eſſe. Expoſita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipſi E longitudine eſt commenſurabilis, vel vtraque commenſurabilis eſt potentia ſolum, vel altera quidem longitudine, altera potentia ſolum commenſurabilis. & ſi quidem vtraque eſt commenſurabilis longitudine, rectangulum, quod ipſis continetur datum erit ex ijs, quę Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propoſitionę 16 demonſtrauit; & ex ijs, quae nos demonſtrauimus in commentarijs in 3 propoſitionẽ libri Archimedis de circuli dimenſione. ſi vero vtraque expoſitae rationali potentia ſolum eſt commenſurabilis, nihilominus rectangulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia ſunt commenſurabiles, 3.huius. earum quadrata commenſurabilia erunt. ideoq; inter ſe proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. ſit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipſum K multiplicans faciat M, cuius radix ſit N. erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps 17.sexti. proportionales; rectangulum enim contentum H K eſt aequale quadrato ex N, hoc eſt ipſi M. & quoniam quadratum F A ad rectangulum AC eſt vt FB ad 1.sexti. BC, hoc eſt vt AB ad BC; vt autem AB ad BG, hoc eſt ad BC, ita rectangulum AC ad CG quadra- 11.quinti. tum: erunt & tres hę magnitudines deinceps proportionales. quãdo autem tres magnitudines dein- 10.diffi.quinti. ceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad ſecundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC. ſed quadratum AF ad quadratum CG eſt, vt numerus H ad ipſum K. & cum H ad K ſimiliter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum FA 1. datorum Euclid. ad rectangulum AC, vt H ad N. ſunt autem magnitudines H N datae; ideoq; data ipſarum proportio: & datum eſt quadratum F A. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione de- 2. Datorum Euclid. monſtrabimus rectangulum datum eſſe, ſi altera datarum linearum ſit longitudi ne commenſurabilis, altera vero potentia ſolum. quod demonſtrare oportebat.

OPERATIO.

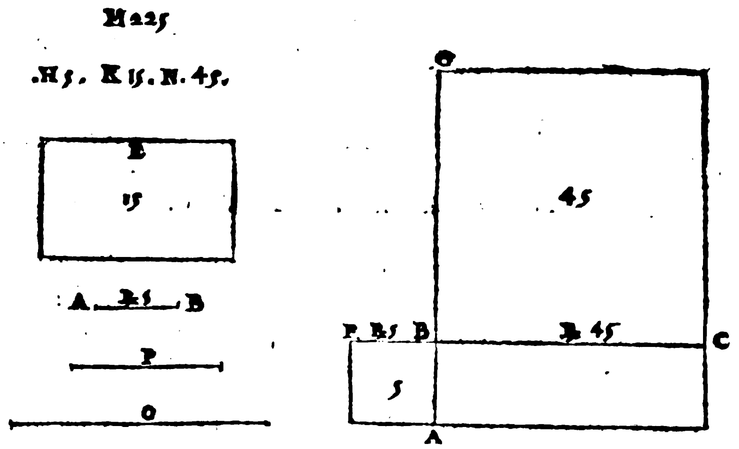
Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipſos inter ſe multiplicabimus; ſi vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera eſt radix, & eius, qui producitur radicem dicemus eſſe rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hęc nihil aliud eſt, niſi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarũ inter ſe ſe. vt ſi AB ſit radix. 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex ℞ 5, & ℞ 3 inter ſe ductis. ſi vero AB ſit 2, AD ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipſius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod quęritur.

THEOREMA II.

Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur ſpacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

Sit data recta linea rationalis AB, & ſpacium datum E. Dico ſi ad rectam lineam AB ſpacium E applicetur, latitudinem, quam facit, datam eſſe. vel igitur recta linea AB expoſitae rationali commenſurabilis eſt longitudine, vel potentia ſolum; vel ſpacium E rationale eſt, vel irrationale, quod medium appellatur. & ſi quidem recta linea AB longitudine eſt commenſurabilis, & ſpacium E rationale, illud manifeſtum erit ex ijs, quae Regiomontanus demonſtrauit in primo libro de triangulis propoſitione 17. & ex ijs, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum eſt, demonſtrauimus. ſi vero AB eſt commenſurabilis potentia ſolum, & ſpacium E ſiue rationale, ſiue irrationale, vel AB eſt longitudine commenſurabilis, & ſpacium E irrationale, latitudo, quã facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia ſolum commenſurabilis, & ſpacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis eſt, & ſpacium E rationale, erit quadratum ipſius AB ſpacio

E commenſu-

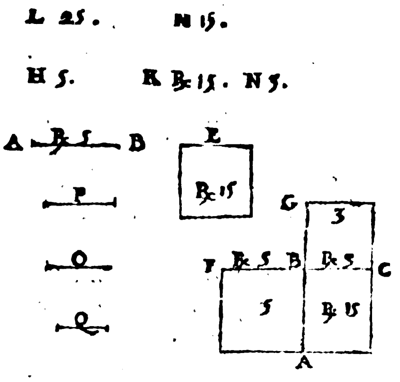


E commenſurabile;ac propterea ad ipſum proportionem habebit, quam numerus ad numerum. habeat quam numerus H ad numerum K;fiatq; ex corollario ſextae propoſitionis huius libri vt H ad K,ita recta linea AB ad aliam rectam lineam O:& inter AB & O ſumpta media proportionali P,erit vt numerus H ad numerum K,ita quadratum rectae lineae AB ad rectę lineae P quadratum.ſed & quadratũ rectae lineae AB ad ſpaciũ E erat,vt numerus H ad numerũ K.Cum igitur quadratum ex AB ad ſpacium E eãdem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipſa P;erit quadratũ ex P ſpacio E aequale.Itaque ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC aequale quadrato ex P,hoc eſt aequale ſpacio E; latitudinem faciens BC. & ex AB BC deſcribãtur quadrata AF CG. numerus autem K ſe ipſum multiplicans faciat M, & M per K diuiſo exeat N.erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales; rectangulũ enim ipſis KN contentum eſt aequale quadrato ex K.Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC eſt vt rectangulum AC ad CG quadratum,quod ſuperius oſtenſum eſt.quadratum autem FA ad rectangulum AC eſt,vt numerus H ad numerum K;erit & rectangulum AC ad quadratum CG,vt K ad N.ſed datum eſt quadratum FA, & rectangulum AC; quòd numeri K N ſint dati.ergo & quadratum CG datum erit,& data ipſius radix BC,videlicet latitudo, quam facit ſpacium E ad rectam lineam AB applicatum.

9. quinti

2. datorum Euclid.

Sit rurſus recta linea AB potentia ſolum commenſurabilis, & ſpacium E irrationale. ergo quadratum rectae lineae AB incommenſurabile eſt ſpacio E.ſit autem quadratum rectae lineae AB ad ſpaciũ E,vt H ad K,hoc eſt ad radicẽ numeri M:& H ſe ipſum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati ſint,& eorum latera HK,habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. itaque fiat vt L ad M,ita recta linea AB ad rectam lineam Q:& inter AB & Q ſumatur media proportionalis O.habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque eſt vt L ad M,ita AB ad Q.ergo vt H ad K,ita AB ad O. Rurſus inter AB & O inueniatur media proportionalis P;erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad quadratum ex P.vt igitur H ad K,ita eſt quadratum ex AB ad quadratum ex P. ſed erat vt H ad K,ita quadratum ex AB ad ſpacium E.Ergo quadratum ex AB ad quadratum ex P eandem habet proportionem, quam ad ſpacium E.ideoq; quadratum ex P ſpacio E aequale erit.Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC,aequale quadrato ex P, hoc eſt ſpacio E aequale,quod faciat latitudinem BC:deinde ex AB BC fiant AF CG. quadrata; & rurſus ipſarum H K magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ducta K inter ſe ſe; & quod producitur diuiſo per B, vt proxime dictum eſt.ſit autem tertia proportionalis N.Eadem ra



9. quinti

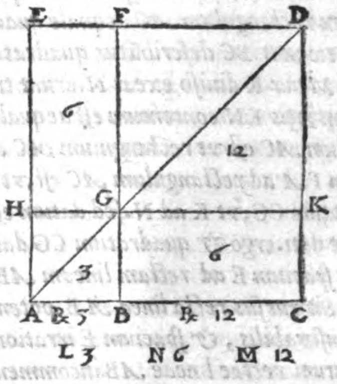
tione demonſtrabitur vt quadratum ex A B ad rectangulum AC, ita eſſe rectangulum AC ad C G quadratum. Quoniam igitur H K N deinceps proportionales ſunt, quadratum autem F A ad rectangulum AC eſt vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. ſed datum eſt quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC, hoc eſt latitudo, quae fit ſpacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonſtrabitur ſi recta linea AB ſit longitudine commenſurabilis, et ſpacium E irrationale.

OPERATIO.

Si datae magnitudines radices numerorũ fuerint, numerus, qui ſpacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; ſi vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea eſt radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius eſt radix, diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectã lineam applicatum. eſt autem hęc diuiſio radicum inter ſe ſe, quam dicunt. vt ſi ℞ 15 diuidenda ſit per ℞ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix eſt quod fit ℞ 15 per ℞ 5 diuiſa: ſi vero ℞ 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipſius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix eſt id, quod queritur.

THEOREMA III.

Quæ ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.



Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. vel igitur datae rectae lineae expoſitae rationali longitudine commenſurabiles ſunt, vel commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe lõgitudine commenſurabiles. Et ſi quidem expoſitae rationali ſint commenſurabiles longitudine, quae ex ipſis componitur recta linea data erit, ex demonſtratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propoſitione tertia, & ex ijs, quae nos eodem in loco demonſtrauimus. ſi uero expoſitae rationali ſint commenſurabilis potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles, earum quadrata proportionem habebunt; 9.huius, *quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat rectae lineae A B quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erũt numeri L M ſimiles plani. ſi enim quadrati ſint, rectae lineae AB AC longitudine erunt commenſurabiles.* 18.octaui; *quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & ſit N. deſcribaturq; ex recta linea AC quadratum ACDE; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipſarum AE CD parallela B G F: per G vero ducatur H G K alteruti ipſarum AC ED parallela. ſimiliter vt ſupra demonſtrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita eſſe, vt rectangulum GC ad GD quadratum. ſed quadratum AG ad quadratum G D eſt vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC eſt vt numerus L ad ipſum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. eſt autem rectangulum EG, quod eſt alterum ſupplementorum, aequale reliquo GC. Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB eſt vt L ad M vnà cum duplo ipſius N: & conuertendo gnomon EKB ad qundratum AG, vt M vnà cum duplo ipſius N ad ipſum L. ergo componendo, rurſuſq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compoſitum ex L & M vnà cum duplo ipſius N. ſed compoſitum hoc eſt datum, quippe cum dati ſint numeri ipſum componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis conſtat. atque illud eſt, quod demonſtrandum proponebatur.*

OPERATIO.

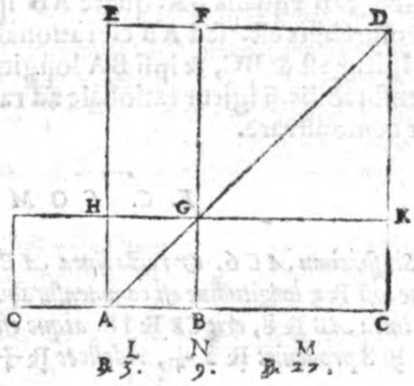
Numeros reſpondentes quadratis datarum linearum ſimul coaceruabimus vnà cum duplo lateris

teris quadrati eius, qui ex eorum inter ſe multiplicatione producitur, hoc eſt vnà cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipſos medius interijcitur; et huius compoſiti radix erit recta linea, quę ex duabus datis rectis lineis conſtat. atque hęc eſt radicum inter ſe additio, quam dicunt: vt ſi radix 3 addenda ſit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod eſt 6 duplabimus: et omnibus ſimul coaceruatis fient 27, cuius radix eſt recta linea, quam quęrimus: Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, ſi inter ſe componantur, vna recta linea fit, ſic ex duobus ſpacijs medijs commenſurabilibus, ſi itidem inter ſe componantur vnum fiet medium. Quòd ſi duae rationales lōgitudine incommenſurabiles inter ſe addendae ſint, vt ℞ 3. ℞ 5, dicemus ℞ 3 vnà cum ℞ 5, vel ℞ 3 addita ℞ 5, vel vtemur hac voce plus, quod eſt in communi vſu, hoc modo ℞ 3 plus ℞ 5, et 3 plus ℞ 8, et ita fiet etiam ſi plures ſint, quàm duae, vt 2 plus. ℞ 3 plus ℞ 5. Quòd ſi duae ſint, dicentur ex binis nominibus, ſeu binomia, vt Campanus, et recentiores. ſi vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. et eodem modo in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum rationalium, quæ inæquales ſint, & longitudine commenſurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae rationales inęquales, & longitudine commenſurabiles rectae lineae AB AC, quarum differentia ſit BC. Dico BC datam eſſe. ſi enim AB AC ſint expoſitae rationali longitudine commenſurabiles, earum differentia data erit ex demonſtratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propoſitione 4, & ex ijs, quae à nobis eodem in loco demonſtrata ſunt. ſi vero expoſitae rationali commenſurabiles ſint potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles, earum quadrata inter ſe proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 9. huius. *habeat igitur rectae lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM ſimiles plani;* 18. octaui. *ideoq; inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, ſitq; N: & ex recta linea AC deſcribatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum ſuperius. producta vero CA vſque ad O, ita vt AO, ſit aequalis AB, quadratum OH deſcribatur, quod quidem quadrato rectae lineae AB, hoc eſt ipſi AG aequale erit. atque eſt quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratū CE, vt CK ad CD, hoc eſt vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC, ita eſt rectangulum HC ad CE quadratum. ſed & numeri LNM deinceps proportionales ſunt, & quadratum OH ad quadratum CE eſt vt L numerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quòd cum rectangulum EG ſit aequale rectangulo GC, ſupplementa etenim ſunt, addito vtrique aequali quadrato, erit rectangulum HC aequale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. ſi igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectanguli HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectae lineae BC eſt aequale. quod etiam in ſeptima propoſitione ſecundi libri demonſtratum eſt. & quoniam numeri LNM ſunt dati, & quadrata OH CE data erunt, & rectangulum HC, atque eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonſtrare oportebat.*



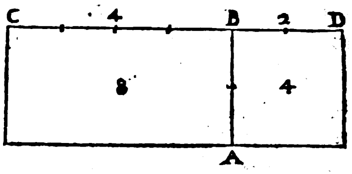
OPERATIO.

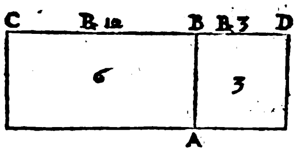
Numeros reſpondentes quadratis datarum linearum ſimul iungemus, & ab eo, qui factus eſt, auferemus duplum numeri, qui inter ipſos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim *quadratum, cuius radix erit recta linea, quam querimus. atque hęc eſt radicum quadratarum ſubtractio, quam dicunt. Vt ſi à radice 27 auferenda ſit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui eſt 9, videlice 18, & relinquentur 12, cuius radix eſt ea, quam quęrimus. eodem modo & ſpaciorum mediorum inęqualium, quae commenſurabilia ſint, differentia inuenietur. ſi uero ab aliqua rationali auferenda ſit alia minor, quae ipſi longitudine ſit incommenſurabilis. vt ſi à ℞ 5 auferre velimus ℞ 3, dicemus ℞ 5 dēpta ℞ 3, vel vtemur hac voce minus, vt nunc ſolent, hoc modo ℞. 5 minus ℞ 3, & ℞ 6 minus ℞ 4, quas Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores reſidua, ſeu reciſa.*

Si igitur recta linea AB ſit ℞ 3, & recta BC ℞ 12, erit ex ante demonſtratis in primo antecedentium theorematum, rectangulum AC ℞ 36, hoc eſt 6. & rurſus ſi AB ſit ℞ 8, & BC ℞ 18, erit AC rectangulum ℞ 144, hoc eſt 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, lõgitudine cõmenſurabilẽ.





Rationale enim AC ad rationalem ſecũdum aliquem rurſus dictorum modorũ applicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC rationalem eſſe, & ipſi ab longitudine commenſurabilẽ. Deſcribatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale eſt: ſed & rationale eſt AC. ergo AD ipſi AC eſt commenſurabile. atque eſt vt DA ad AC, ita DB ad BC. commenſurabilis igitur eſt DB ipſi BC. eſt autem DB æqualis BA. quare AB ipſi BC commenſurabilis eſt. ſed AB eſt rationalis. rationalis igitur eſt & BC, & ipſi BA longitudine commenſurabilis. ſi igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

45.primi.

Ex lẽma. 2. ad 20. huius

10.huius.

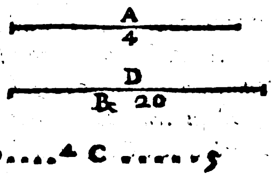
6.diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit ſpacium AC 6. & recta linea AB ℞ 3. erit ex 2 theoremate pręmiſſorum CB ℞ 12, quae ipſi ℞ 3 longitudine eſt commenſurabilis. eſt enim ipſius dupla. rurſus ſit AC 12, & recta linea AB ℞ 8, erit CB ℞ 18. atque eſt ℞ 18 ad ℞ 8, ut 3 ad 2. nam ſi ℞ 18 diuidatur per ℞ 8 proueniet ℞ 2 $\frac{1}{4}$, videlicet ℞ $\frac{9}{4}$, quae eſt. $\frac{3}{2}$

LEMMA I.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles.



Exponatur rationalis A, & duo numeri BC non habẽtes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quę oſtenſa ſunt AD potentia ſolũ cõmenſurabiles.

Corol.6.huius.

LEMMA II.

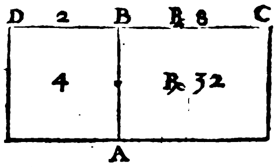
Recta linea, quæ poteſt irrationale ſpacium, irrationalis eſt.

Poſsit

Poſſit enim recta linea A ſpacium irrationale, hoc eſt quadratum, quod fit ab A irrationali ſpacio ſit æquale. Dico A irrationalem eſſe. ſi enim ſit rationalis, erit quod ab ipſa fit quadratum rationale; ſic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non eſt. ergo A irrationalis ſit neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat. Diffi. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

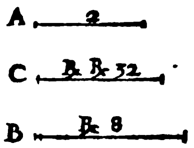
Quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt: & recta linea ipſum potens eſt irrationalis. vocetur autem media.



Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipſum poteſt, irrationalem eſſe. vocetur autem media, ſeu medialis. deſcribatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale eſt. Et quoniam AB incommenſurabilis eſt ipſi BC longitudine, potentia enim ſolum ponuntur commenſurabiles, atque eſt AB æqualis BD. incommenſurabilis igitur eſt DB ipſi BC longitudine. eſt autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipſi AC eſt incommenſurabile. ſed DA rationale eſt, irrationale igitur eſt AC. Quare & Diffi. 10. recta linea, quę ipſum AC poteſt, videlicet quę poteſt quadratum ipſi æquale eſt irrationalis. vocetur autem media; propterea quòd ipſius quadratum eſt æquale re- Diffi. 11. ctangulo, quod AB BC continetur, & ipſarum AB BC media ſit proportionalis. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM. I.

Media eſt irrationalis, quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.



Rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis A B ſpacium contineatur. oſtendendum eſt huiuſmodi ſpacium irrationale eſſe. ſumatur enim ipſarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB eſt æquale quadrato ex C; ac propterea C poteſt rectangulum, quod ipſis AB continetur. eſt igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex ſecunda, quod demonſtratum eſt in corollario 20 ſexti elementorum. incommenſurabilis autem eſt A ipſi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C eſt incommenſurabile. ſed quadratũ ex A rationale eſt. irrationale igitur eſt quadratum ex C, hoc eſt rectãgulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C eſt irrationalis. media autem idcirco vocatur, Diffi. 11. quòd irrationalis exiſtens ipſarum A B media eſt proportionalis.

SCHOLIVM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ vna eſt irrationalium, in geometrica analogia conſiderari: media enim eſt proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia ſolum commenſurabiles.

& recta linea ipsũ potẽs eſt media. ſi enim quod extremis cõtinetur ęqua- 17.sexti. *le eſt quadrato, quod fit à media, tres rectę lineæ proportionales ſunt.*

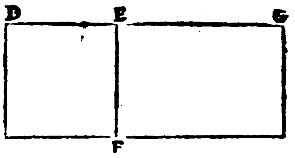
F. C. COMMENTARIVS.

Sciendum eſt ſpacium illud irrationale, quod poteſt media linea, medium appellari.

Sit recta linea AB 2; & recta BC ℞ 8. erit rectangulum AC ℞ 32, quod irrationale eſt, & medium dicetur. recta autem linea ipſum potens eſt ℞ ℞ 32, quę media appellatur.

LEMMA.

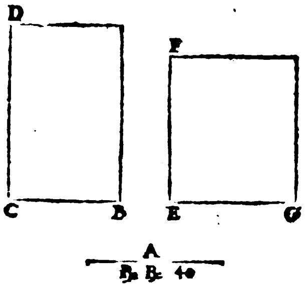
Si ſint duæ rectę lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.



Sint duæ rectæ lineę FE EG. Dico vt FE ad EG, ita eſſe quadratum ex FE ad FEG rectangulum. deſcribatur ex FE quadratum DF, & GF cõ- 1.sexti. pleatur. Quoniam igitur eſt vt FE ad EG, ita DF ad FG; atque eſt DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc eſt rectangulum FEG: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. ſimiliter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc eſt vt GF ad FD, ~~ita eſt~~ GE ad EF.

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



Sit media quidem A, rationalis autem CB, 45.primi. & ad CB ei, quod fit ex A æquale ſpacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico CD rationalem eſſe, & ipſi BC longitudine incommenſurabilem. Quoniam enim media eſt Ex antecedenti. A, poteſt ſpacium contentum rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. poſsit GF: ſed poteſt & BD. æquale igitur eſt BD ipſi GF, 14.sexti. atque eſt ęquiangulum. ęqualium autem, & æquiangulorum parallelogrãmorũ latera, quæ ſunt circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. ergo vt BC ad EG, ita 11.sexti. eſt EF ad CD. eſt igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. ſed quadratum ex BC commenſurabile 1.pars 10.huius. eſt quadrato ex EG; vtraque enim ipſarum eſt rationalis. commenſurabile igitur eſt & quadratum ex EF quadrato ex CD. eſt autem quadratum ex EF rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD eſt rationalis. itaq; quoniam FE incommenſurabilis eſt ipſi EG longitudine; potentia enim ſolum cõ- Ex antecedente lemmate. menſurabiles ſunt; vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectangulũ: erit quadratum ex EF incommenſurabile rectangulo FEG. ſed quadrato quidem * ex EF commenſurabile eſt quadratum ex CD; rationales enim ſunt potentia, vt oſtẽſum eſt. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG eſt incommenſurabile. rectangulo autem FEG commenſurabile eſt, quod DC CB continetur; ſunt enim quadrato

ex A

ex A ęqualia.incommenſurabile igitur eſt, & quadratum ex CD rectangulo DCB. 13.huius.
ſed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum, ita eſt DC ad CB. ergo DC ipſi CB incommenſurabilis eſt longitudine. & ob id DC eſt rationalis, & ipſi C B longitudine incommenſurabilis. quod oportebat demonſtrare.

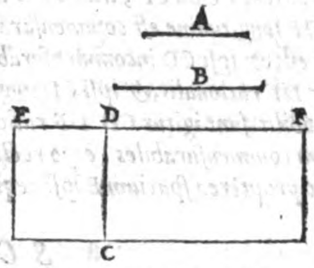
F. C. COMMENTARIVS.

Rationales enim ſunt potentia] *hoc eſt potentia commenſurabiles: rationales enim commenſurabiles ſunt, vt in Scholio ante vigeſimam huius demonſtratur. & quamquam hę voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perſpicuum eſt. quod nonnulli negarunt.* *

Sit quadratum ex A ℞ 40, CB vero ſit 2. ſi igitur ad CB applicetur ℞ 40, latitudinem faciet ℞ 10. rurſus ſi CB ſit ℞ 5. & ad ipſam applicetur ℞ 40, erit latitudo, quam facit ℞ 8 ex 2. theoremate pręmiſſorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Mediæ commenſurabilis, media eſt.



Sit media A, & ipſi A commenſurabilis ſit B. Dico & B mediam eſſe. Exponatur enim rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur ſpacium rectangulum CE, 45.primi.
latitudinem efficiens ED. rationalis igitur eſt ED, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. Ex antecedente.
quadrato autem ex B ęquale ad CD applicetur ſpacium rectangulum CF, latitudinem efficiens DF. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. cor.9. huius
ſed quadrato quidem ex A æquale eſt rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commenſurabile igitur eſt rectangulum EC rectangulo CF. atque eſt vt EC ad CF, ita ED ad DF. ergo ED ipſi DF longitudine eſt commenſurabilis. eſt autem ED rationalis, & incommenſurabilis ipſi DC longitudine. Ergo & DF rationalis eſt, & ipſi 13.huius.
DC longitudine incommenſurabilis. rationales igitur ſunt CD DF potentia ſolũ commenſurabiles. quod autem rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus re- 22.huius.
ctis lineis continetur rectangulum irrationale eſt; & recta linea ipſum potens eſt irrationlis: vocetur autem media. ergo recta linea, quę poteſt rectangulum C D F eſt media. ſed B poteſt rectangulum CDF. quare B media erit.

COROLLARIVM.

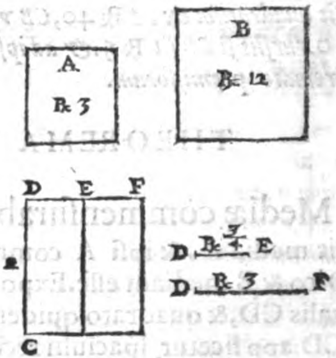
Ex hoc manifeſtum eſt ſpacium medio ſpacio commenſurabile, medium eſſe. poſſunt enim ipſa rectæ lineæ, quæ ſunt potentia commenſurabiles, quarum altera media eſt. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum eſt, ita & in medijs dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commenſurabilem dici mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia; vniuerſe enim quę longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. ſi vero mediæ commenſurabilis quædam recta linea fuerit potentia, ſi- *

quidem etiam longitudine, dicuntur & ſic medię & longitudine, & potentia commenſurabiles. ſi autem potentia ſolum, dicuntur mediæ potentia ſolum commenſurabiles.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifeſtum eſt ſpacium medio ſpacio commenſurabile medium eſſe.

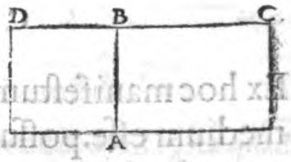
Sit ſpacium medium A, & ipſi commenſurabile ſit alterum ſpacium B. Dico B medium eſſe. Exponatur enim rationalis CD, & ad ipſam applicetur ſpacium rectangulum CE ſpacio A aequale, quod latitudinem faciat ED. erit ED. rationalis, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. 21. huius: *Rurſus ad eādem CD applicetur aliud ſpacium rectangulum CF, aequale ſpacio B, latitudinemq́ faciens DF. Quoniam igitur ſpacium A eſt cōmenſurabile ſpacio B; eſtq́ ſpacio quidem A aequale rectangulum CE; ſpacio autem B aequale rectangulū CF: rectangulum CE rectangulo CF commenſurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita eſt ED ad DF. ergo & ED ipſi DF longitudine eſt commenſarabilis. ſed ED rationalis eſt, & ipſi CD incommenſurabilis longitudine. ergo & DF rationalis, & ipſi CD longitudine eſt incōmenſurabilis. ſunt igitur CD DF rationales, & potentia ſolum commenſurabiles. ergo rectangulum CF, quod ipſis continetur, irrationale eſt, & medium: ac propterea ſpacium B ipſi aequale, medium ſit neceſſe eſt. quod oportebat demonſtrare.* 22. huius:



SCHOLIVM.

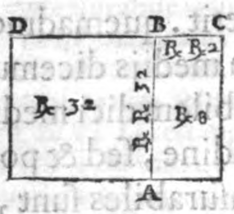
Media duplex eſt, videlicet potens quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, & quæ mediæ eſt commenſurabilis. poſtquam autem oſtendiſſet mediam eſſe, quę poteſt id quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quę ſequuntur. oportet enim primum oſtendere aliquas eſſe commenſurabiles medias, deinde inquirere quale ſpacium illud ſit, quod ipſis comprehenditur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.



Quod medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulū medium eſt.

Medijs enim longirudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico AC medium eſſe. deſcribatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD medium eſt. & quoniam commenſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine, æqualis autem AB ipſi BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. quare & DA commenſurabile eſt ipſi AC. ſed AD eſt medium. ergo & AC medium erit. quod demonſtrarę oportebat. Ex antecedē te corol:



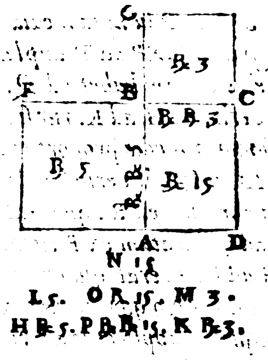
Quae de rationalibus supra demonstrata sunt, eadem & de medijs demonstrabuntur.

THEOREMA I.

Quod datis duabus medijs, vel media & rationali cōtinetur rectāgulū datū erit.

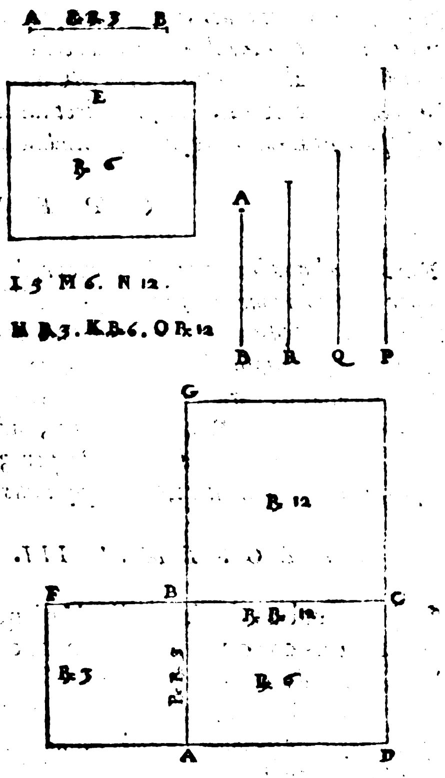
Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali. AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum esse. sint primum AB AD mediae, & fiant ex ipsis quadrata AF CG. eruut ea irrationalia, quae media appellantur. habeant autem inter se proportionem, quam H ad K. & H quidem se ipsam multiplicans faciat L, K vero se ipsam multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipsum N faciat, cuius N radix sit O; & rursus ipsius O sit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deincpes sunt proportionales, suntque earū radices HPK, & HPK deinceps proportionales erunt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectāgulum AC ad CG quadratum. quod superius demonstratum est. quadratum autem FA ad quadratum CG est, vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. et sunt HP datę, et datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum sit necesse est. sed sit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media; et ex ipsis rursus fiant quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et ijsdem constructis similiter demonstrabitur rectangulum AC datum esse. quod demonstrare oportebat.

2. Datorum Euclid.



OPERATIO.

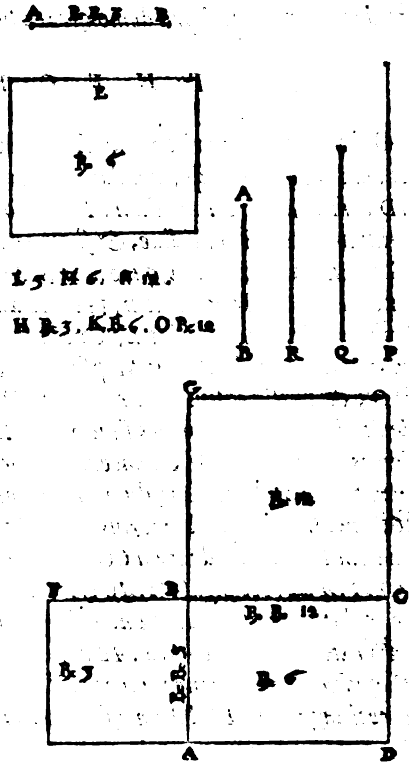
Numeros ad quadratos quadratorum reductos inter se multiplicabimus, & eius quod producitur radix radicis erit rectāgulum, quod datis rectis lineis continetur: atque hec est multiplicatio radicum radicum inter se, quam dicunt. Vt si AB sit ℞ ℞ 5 AD ℞ ℞ 3, multiplicabimus 5 per 3 fient 15, & ℞ ℞ 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter se ductis producitur. si vero AB sit ℞ ℞ 5, AD 2, quadratū quadrati ipsius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus, fient 80, & ℞ ℞ 80 erit ea, quae ex eorū multiplicatione oritur. deniq; si AB sit ℞ 2, & AD ℞ ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2, hoc est 4 per 5, & producti accipiemus radicē radicis, erit ℞ ℞ 20 ea, quam inquirimus.



THEOREMA II.

Si ad datum mediam applicetur spacium datum, latitudo, quam facit, data erit.

Sit data media AB, et spacium datum E, quod ad ipsam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam esse. vel igitur spacium E rationale est, vel irrationale, quod *medium appellatur. ſit primum irrationale, ac medium, habeatq; quadratum ipſius AB ad ſpacium E proportionem eam, quā habet H ad K; et H quidem ſe ipſum multiplicans faciat L: K vero ſe ipſum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc eſt H ad K. Itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: et inter AB, et P ſumpta media proportionali, Q, habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rurſus inter AB et Q ſumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R eſt vt H ad K. ſed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad ſpacium E. ergo quadratum ex R ſpatio E eſt aequale.* 9. quinti. *applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectāgulum AC, aequale quadrato ex R, quod et ſpacio E aequale erit.* [illegible] *et ex AB AD fiant AF, CG quadrata; numerorum autem LM inueniatur tertius proportionalis N, cuius radix ſit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps ſunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erūt. atque eſt vt quadratum FA ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare ſimiliter ut ſuperius demonſtrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita eſſe, vt K ad O. ergo et quadratum CG, et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quęrimus. non alia ratione demonſtrabimus, ſi ſpacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam eſſe. quod oportebat demonſtrare.*



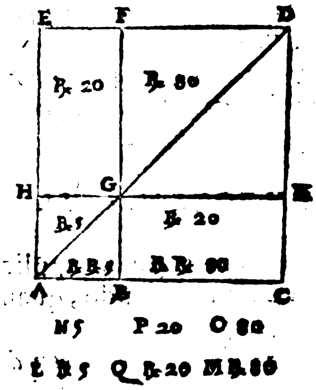
O P E R A T I O.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo ſpacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectam lineam applicatum; et hęc eſt radicum inter ſe diuiſio, quam dicunt, vt ſi diuidenda ſit ℞ 6 per ℞ ℞ 3, multiplicabimus 6 in ſe ipſum, fient 36, et diuidemus 36 per 3, exibunt 12, et ℞ ℞ 12 erit, quae ex earum diuiſione oritur. ſi vero diuidere oporteat 3 per ℞ ℞ 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et fient 81, diuiſiſq; 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix eſt ea, quam quęrimus.

T H E O R E M A III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmēſurabilibus cõponitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commenſurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. ſit quadratum rectae lineae AB ad quadratū ipſius BC, vt L ad M, et L quidem ſe ipſum multiplicans faciat N; M vero ſe ipſum multiplicans faciat O. et quoniam AB BC longitudine commenſurabiles



ſunt,

ſunt, earum quadrata L M, & rurſus quadratorum quadrata N O inter ſe proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipſos N O cadet vnus medius proportionalis numeris. cadat, ſitq́ P, cuius radix Q. & ex AC deſcripto quadrato A C D E, & reliqua figura completa, quemadmodum ſuperius, ſimiliter demonſtrabitur quadratum AG ad rectangulum GC eſſe, vt L ad Q, & rectangulum GE ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compoſitum ex L, & M vnà cum duplo ipſius Q. quòd cum dati ſint L Q M, & compoſitum ex ipſis dabitur. ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit. quod oportebat demonſtrare. 9. huius.

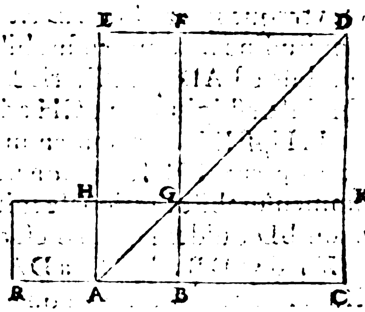
OPERATIO.

Magnitudines reſpondentes quadratis rectarum linearum ſimul coaceruabimus vnà cum duplo mediae proportionalis, & huius cōpoſiti radix erit recta linea, quę ex duabus datis conſtat; atque hęc eſt ℞ ℞ inter ſe additio, quam vocant, vt ſi ℞ ℞ 5 addenda ſit ℞ ℞ 80, iungemus ex ante demonſtratis ℞ 5 cum ℞ 80, & cum duplo ℞ 20, quae faciunt ℞ 405, cuius radix, videlicet ℞ ℞ 405 eſt recta linea, quae ex earum additione producitur. Quòd ſi duae, vel plures mediae lnngitudine incommenſurabiles ſibi ipſis addendae ſint, vel etiam rationales, & mediae vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum eſt, hoc modo ℞ ℞ 5 plus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 2 plus ℞ ℞ 3, plus ℞ ℞ 5, vel ℞ 2 plus ℞ ℞ 6, vel 3 plus ℞ 5 plus ℞ ℞ 6. & ſic in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quæ inæquales ſint, & longitudine commenſurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inęquales, & longitune commenſurabiles AB AC, quarum differentia ſit BC. Dico BC datam eſſe. ſit quadratum rectae lineae AB ad quadratum ipſius A C, vt L ad M. & ſit rurſus ipſius L quadratum N, & ipſius M quadratum ſit O. habebunt N O inter ſe proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & ſit P, cuius radix Q: & ex AB AC deſcriptis quadratis R H AD, & figura completa, quemadmodum ſuperius, ſimiliter demonſtrabimus quadratum R H ad rectangulum H C eſſe, vt L ad Q; & rectangulum H C ad quadratum C E, vt Q ad M. & pręterea duo quadrata R H AD aequalia eſſe duplo rectanguli H C & quadrato F K. ergo ſi ab ipſis L N auferatur duplum ipſius Q, reliquum erit id, quod quadrato F K reſpondet. datae autem ſunt L Q M magnitudines, ergo & quadratum F K, atque eius radix B C dabitur. quod demonſtrare oportebat.



N 5. P 45. O 405.

L ℞ 5. Q ℞ 45. M ℞ 405.

A ℞ ℞ 5 B. A ℞ ℞ 405 C.

OPERATIO.

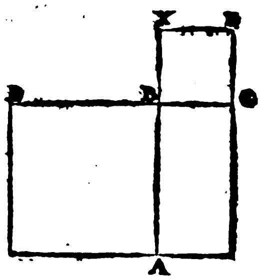
Magnitudines reſpondentes quadratis rectarum linearum ſimul iungemus, et ab ea, quae facta eſt, auferemus duplam mediae proportionalis, quae inter ipſas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quęrimus; atque hęc eſt ℞ ℞ ſubtractio, quam appellant. vt ſi à ℞ ℞ 405 auferenda ſit ℞ ℞ 5, iungemus ex ante demonſtratis ℞ 5 cum ℞ 405, fient ℞ 500, à qua auferemus duplum ℞ 45, hoc eſt ℞ 180, relinquetur ℞ 80: ergo BC erit ℞ ℞ 80. At ſi ab aliqua media auferenda ſit alia minor, quae longitudine ſit ipſi incommenſurabilis, vel à media rationalis, vel contra à rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationa-

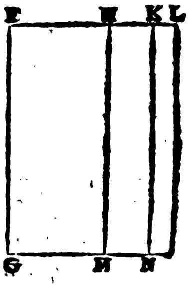
Hinc dicti eſt hoc modo ℞ ℞ 5 minus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 12 minus ℞ 3, vel ℞ ℞ 20 minus 2, vel ℞ 6 minus ℞ ℞ 30, vel 3 minus ℞ ℞ 40. et ita in reliquis.

Itaque ſi mediae lõgitudine cõmẽſurabiles ſint AB BC videlicet ℞ ℞ 32, et ℞ ℞ 2. erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipſis continetur ℞ ℞ 64, hoc eſt ℞ 8; ſunt enim ℞ ℞ 32 et ℞ ℞ 2 longitudine commenſurabiles, videlicet vt 2 ad 1. nam ſi ℞ ℞ 32 diuidatur per ℞ ℞ 2 prouenit ℞ ℞ 16, hoc eſt 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quod medijs potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale eſt, vel medium.





Medijs enim potentia ſolum commenſurabilibus
rectis lineis A B BC contineatur rectangulũ A C,
Dico AC vel rationale eſſe, vel medium. deſcriban-
tur enim ex AB BC quadrata AD BE. vtrumque
22.huius. igitur ipſorum A D BE medium eſt. exponatur ra
45.primi. tionalis FG, & ipſi quidem AD æquale ad FG appli
cetur parallelogrammum rectangulum GH, latitu-
dinem faciens FH; ipſi vero AC æquale ad HM ap-
plicetur rectangulum M K, latitudinem faciens HK;
& inſuper ipſi BE æquale ſimiliter ad KN applicetur
14.primi. NL, latitudinẽ faciens KL. In recta igitur linea ſunt
FH HK KL. Quoniam igitur medium eſt vtrũque
ipſorum AD BE; atque eſt AD quidem æquale ipſi
GH, BE vero ipſi NL, erit & vtrumque ipſorum G
H NL medium, & ad rationalẽ FG applicata ſunt.
23.huius. ergo & vtraque ipſarũ FH KL eſt rationalis, & ipſi
FG longitudine incommenſurabilis. & quoniam cõ
menſurabile eſt AD ipſi BE, erit & GH ipſi NL com
1.sexti: menſurabile. eſt igitur & vt GH ad NL, ita FH ad K
10.huius. L. ergo FH ipſi K L eſt commenſurabilis longitudi-
ne; ac propterea FH KL rationales ſunt longitudi
ne commenſurabiles. rationale igitur eſt rectangulum, quod FH KL continetur. et
quoniam BD quidem ipſi BA eſt æqualis; XB uero ipſi BC, erit vt DB ad BC, ita A
1.sexti. B ad BX: ſed vt D B ad BC, ita DA quadratum ad rectangulum A C; vt autem A B
Conuertendo. ad BX, ita AC rectãgulum ad quadratum CX. eſt igitur vt XC ad CA, ita CA ad A
D: æquale autem eſt AD ipſi GH, & AC ipſi MK, & CX ipſi NL. quare vt GH ad M
K, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL; ideoq; quod FH KL conti-
17.sexti. netur eſt æquale quadrato, quod fit ex HK. eſt autem quod continetur FH KL ra-
tionale. ergo & rationale eſt quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK ratio-
nalis. & ſi quidem HK commenſurabilis eſt ipſi HM, hoc eſt ipſi FG longitudine,
20.huius: erit rectangulũ NH rationale; ſi vero HK eſt incõmenſurabilis ipſi FG lõgitudine,
22.huius. KH HM rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id rectangulum
HN medium erit. ergo HN vel rationale eſt, vel medium. ſed HN eſt æquale ipſi A
C. quare AC vel rationale, vel medium eſt. quod igitur medijs potentia ſolum com
menſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale eſt, vel mediũ,
quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIUM.

Admiratione dignum eſt triadis vel ternarij numeri, ac facultatem ita potentem eſſe, vt etiam irrationalium poteſtatem definiat, & ad illorum vſque extrema permeet. præterea & illud mirum eſt vnamquamque

irrationalitatis

irrationalitatis ſpeciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Muſica. porrò anima ipſa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in ſe habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non ſunt, & ipſam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud eſt, nomen commune mediæ in ea, quæ magis eſt particularis, natura poſitum eſſe. nam & quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus longitudine commenſurabilibus, media omnino eſt rationalium illarum; & quæ poteſt ſpacium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, ſed quę poteſt ante dictum ſpacium. Illud quoque animaduertendum eſt, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias verſatur, ſimilem facere rationalibus. etenim has vel longitudine, vel potentia ſolum commenſurabiles, quemadmodum illas eſſe dicit. & ſpacium quidem, quod medijs longitudine commenſurabilibus continetur, medium eſſe, quemadmodum illic ſpacium rationalibus contentum rationale. ſpacium vero contentum medijs potentia ſolum cōmenſurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, medium eſſe. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit, & videtur ea, quę inter medias longitudine commenſurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia ſolum commenſurabiles omnino media eſſe; quæ vero inter medias potentia ſolum commenſurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media. ideoq; & incommenſurabilis potentia interdum rationalis, interdum media eſt. duę enim mediæ potentia commenſurabiles eſſe poſſunt, quemadmodum & duę rationales potentia commenſurabiles. exiſtimandum igitur eſt analogiam cauſſam eſſe ortus contentorum ſpaciorum: vt potequæ inter extrema; hoc eſt vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem conſtituit; & totum nexum quandoque ſimilem facit extremis, quandoque ipſis diſſimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiue a potētibus appellat Euclides.

Contēplatio quæ circa medias ſimilis eſt ei, quæ circa rōnales verſatur.

Medium tripliciter, rationale vero dupliciter continget.

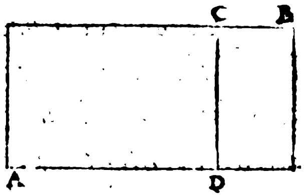
F. C. COMMENTARIVS.

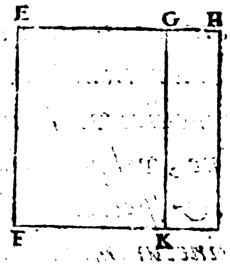
Sint mediae potentia ſolum commenſurabiles AB BC, & ſit AB ℞℞ 54, & BC ℞℞ 24, erit rectangulum ipſis contentum ℞℞ 1296, videlicet 6, quod eſt rationale. Rurſus ſint mediae potentia ſolum commenſurabiles ℞℞ 128, & ℞℞ 22, rectangulum, quod ipſis continetur, erit ℞℞ 9216, videlicet ℞ 96, quod eſt medium. At vero ℞℞ 54, & ℞℞ 24: itemq; ℞℞ 128, & ℞℞ 72 eſſe potentia ſolum commēſurabiles patet tum ex 28, & 29, huius, tum ex eo, quòd ſi ℞℞ 54 per ℞℞ 24 diuidatar, proueniet ℞℞ $\frac{9}{4}$, hoc eſt ℞ $\frac{3}{2}$. erit igitur ℞℞ 54 ad ℞℞ 24, vt

24, vt ℞ 3 ad ℞ 2. Rurſus ſi ℞℞ 128 diuidatur per ℞℞ 72, prouenient ℞℞ $\frac{4}{3}$. quare ℞℞ 128 ad ℞℞ 72 erit vt ℞ 4 ad ℞ 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVII.

Medium non ſuperat medium rationali.

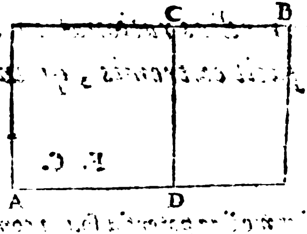




Si enim fieri poteſt, medium AB ſuperet medium
AC rationali DB. & exponatur rationalis
EF, atque ipſi quidem AB æquale ad EF applicetur
parallelogrammum rectangulum FH, latitudinem
faciens EH: ipſi vero AC æquale auferatur
FG. reliquum igitur BD reliquo KH eſt æquale.
rationale autẽ eſt BD. ergo & KH rationale. quoniam
igitur medium eſt vtrumque ipſorum AB,
AC; eſtq́; AB æquale FH, & AC æquale FG: erit
& vtrumque ipſorum FH FG medium: & ad rationalem
23.huius. EF applicata ſunt. rationalis igitur eſt
vtraque earum HE EG, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis.
& quoniam rationale eſt DB,
et ipſi KH æquale; & KH rationale erit. eſt autem
21.huius; ad EF applicatum. rationalis igitur eſt GH, & ipſi
EF commenſurabilis longitudine. ſed & EG eſt rationalis,
& ipſi EF longitudine incommenſurabilis.
ergo EG incommenſurabilis eſt ipſi GH longitudine.
Coro.23.huius. atque eſt vt EG ad GH, ita quadratum ex EG ad rectangulum, quod EG,
GH continetur. incommenſurabile igitur eſt quadratum ex EG rectangulo EGH.
10.huius. ſed quadrato quidem ex EG commenſurabilia ſunt ex EG, GH quadrata. vtraque
6.huius. enim ſunt rationalia. rectangulo autem EGH commenſurabile eſt quod bis EG
14.huius, GH continetur; eſt enim ipſius duplum. ergo quadrata ex EG, GH incommenſurabilia
ſunt ei, quod bis EG, GH continetur. & vtraque igitur, videlicet quadrata
4. ſecundi, ex EG GH, & quod bis continetur EG GH, hoc eſt quadratum ex EH, incommenſurabilia
17.huius, ſunt quadratis ex EG GH. ſunt autẽ rationalia, quę ex EG GH quadrata.
irrationale igitur eſt quadratum ex EH: ac propterea EH eſt irrationalis.
ſed & rationalis. quod fieri non poteſt. non igitur medium ſuperat medium rationali.
quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non ſuperare rationale niſi rationali, hoc modo demonſtrabitur.

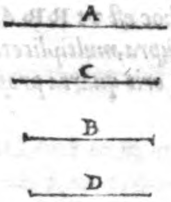


*Sint parallelogramma rectangula AB AC rationalia.
Dico DB, quo parallelogrammum AB ipſum AC ſuperat,
rationale eſſe. quoniam enim AB AC ſunt rationalia, &
inter ſe commenſurabilia ſunt, atque eſt tota magnitudo
AB ex magnitudinibus AC DB compoſita vni ipſarum*
16.huius. *AC commenſurabilis. ergo & reliquae DB commenſurabilis
erit. ſed AB eſt rationale. quare & DB rationale ſit
neceſſe eſt. quod nos ad 2S huius demonſtrauimus.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur



Exponatur duæ rationales potentia ſolum commen-
ſurabiles A B; & ſumatur ipſarum A B media proportio
nalis C: fiatq́; vt A ad B, ita C ad D. quoniā igitur A B 12.sexti.
rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit *
quod ipſis A B continetur rectāgulum, hoc eſt quadra- 22. huius.
tum ex C medium. ergo recta linea C media eſt. & quo
niam ut A ad B, ita eſt C ad D; ſuntq́; A B potentia ſolū
commenſurabiles: & C D potentia ſolum commenſura
biles erunt. eſt autem recta linea C media. media igitur 10. huius.
eſt & D. quare C D mediæ ſunt potentia ſolum cōmenſurabiles. Dico etiam ipſas 24. huius.
rationale continere. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt
A ad C, ita B ad D. ſed vt A ad C, ita C ad B. ergo & vt C ad B, ita B ad D. quod 17.sexti.
igitur ipſis C D continetur quadrato ex B eſt ęquale. rationale autem eſt quadra-
tum ex B. ergo & quod continetur C D rationale erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ
potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. atque illud eſt. quod fa
cere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq́; ut A ad B, ita C ad D] *Sit A 3, & B ℞ 6, erit rectangulum, quod ipſis continetur ℞ 54, & recta linea C inter ipſas A B media proportionalis, quae ipſum poteſt ℞ ℞ 54. itaque fiat ut A ad B, hoc eſt ut ℞℞ 81 ad ℞℞ 36, ita C videlicet ℞℞ 54 ad aliam, quae ſit D, hoc modo. multiplicetur 54 per 36, fiet 1944. ergo ℞℞ 1944 eſt rectangulum, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞℞ 54 ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad ℞℞ 81 latitudinem faciet ℞℞ 24 ex ſecundo eorumdem. quare rec tangulum contentū ℞℞ 81, & ℞ ℞ 24 eſt aequale ei, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞ ℞ 54 eſt igitur ut ℞℞ 81 ad ℞ ℞ 36, ita ℞℞ 54 ad ℞℞ 24.* * 16.sexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentia ſolum cō
menſurabiles A B C, ſumaturq́; ipſarum A B
media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D *
ad E. Quoniam igitur A B rationales ſunt, potē
tia ſolum commenſurabiles, erit quod A B con-
tinetur rectāgulum, hoc eſt quadratnm ex D me
dium. ergo D media eſt. & quoniam B C ſunt ra- 22. huius.
tionales potentia ſolum commenſurabiles, atque
eſt vt B ad C, ita D ad E, rectę lineæ D E potētia 10. huius.
ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem D me-
dia. ergo & E media eſt; ac propterea D E medię 24 huius.
ſunt potetia ſolum commenſurabiles. Dico ipſas
etiam medium continere. Quoniam enim eſt vt B ad C, ita D ad E, erit permutan-
do vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita eſt D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad
E. quod igitur A C continetur rectangulum eſt æquale contento D E. eſt autem 16.sexti.
quod continetur A C medium. ergo & quod continetur D E medium erit. Inuen- 22. huius.
tę igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, vt
facere oportebat.

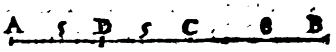
F. C. COMMENTARIVS.

Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit A 4, B ℞ 8, et C ℞ 6, erit rectangulum, quod A B continet ur* * *tinetur* ℞ 128, *& recta linea D inter ipſas A B media proportionalis* ℞ ℞ 128. *fiat igitur vt B ad C, hoc eſt vt* ℞℞ 64 *ad* ℞℞ 36, *ita D videlicet* ℞℞ 128 *ad aliam, quae ſit E. eodem modo, quo ſupra, multiplicetur* 128 *per* 36, *fit* 4608, *&* 4608 *diuidatur per* 64, *exeunt* 72. *ergo* ℞℞ 72 *erit quarta proportionalis A, quam quęrebamus.*

LEMMA. I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipſis cõponitur etiã quadratus ſit.

Exponantur duo numeri AB BC, qui vel
A pares ſint, vel impares. & quoniam ſiue à par
par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus
par eſt; erit AC numerus par. ſecetur AC biſariam in D. ſint autem AB BC uel ſimiles pla-



B ni, vel quadrati, qui & ipſi ſimiles plani ſunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD eſt ęqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque eſt quadratus, qui fit ex
C AB BC; oſtenſum enim eſt ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquem faciãt,
factum quadratum eſſe. Inuenti igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit
ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum
faciunt, nempe eum, qui fit ex BD. quod ipſum facere oportebat.

COROLLARIUM.

Et manifeſtum eſt rurſus inuentos eſſe duos numeros quadratos, &
qui fit ex BD, & qui ex CD, ita vt ipſorum exceſſus, videlicet qui
D *fit ex AB BC, ſit quadratus; quando AB BC ſimiles plani ſint. Quãdo autem non ſint ſimiles plani, inuenti ſunt duo quadrati & qui fit ex BD, & qui ex CD, quorũ exceſſus, qui ex AB BC nõ eſt quadratus.*

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar reliquus par eſt] *ex*
24, *&* 26 *noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD eſt æqualis ei, qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonſtratur à Barlaam Monacho in theoremate* 6 *eorum, quae nos ad* 15 *noni libri appoſuimus.*

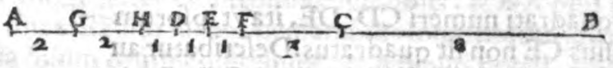
C Oſtenſum eſt enim ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquem faciant, factum planum eſſe] *in prima propoſitione noni libri.*

D Quando autem non ſint ſimiles plani,
inuenti ſunt] *Sint enim duo numeri AB BC,*
qui non ſint ſimiles plani, & AC biſariam ſecetur in D. rurſus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD eſt aequalis ei, qui ex BD ex 6 *Barlaam Monachi iam dicto. ſed qui fit ex AB BD, non eſt quadratus. ſi enim quadratus ſit, erunt numeri AB BD ſimiles plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri ſunt, qui fiunt ex BD, & DC, quorum exceſſus, qui fit ex AB BC non eſt quadratus.*

LEMMA II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit enim qui ex A
B BC quadratus, vt
dictum eſt, & par nũmerus
C A ; ſecetur-



q; CA bifariam in D. perſpicuũ eſt quadratum ex AB BC vnà cum quadrato A
ex CD ęqualem eſſe ei,qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadratus
ex AB BC vnà cum quadrato ex CE minor eſt quadrato ex BD . Dico igitur
quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non eſſe . ſi enim eſt
quadratus vel æqualis eſt quadrato ex BE,vel eo minor,nõ autem maior,vt ne vnitas B
ſecetur;neuè qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD , qui eſt ęqualis quadrato
ex BD ęqualis ſit quadrato ex AB BC vnà cum quadrato ex CE.ſit primum , ſi
fieri poteſt,qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & ſit
GA duplus ipſius DE vnitatis . Quoniam igitur totus AC totius C D eſt duplus,
quorum AG eſt duplus DE,erit & reliquus C G ipſius GE duplus.ergo GC in pũcto C
E biſariam ſecatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE ęqualis
eſt ei,qui fit ex BE quadrato.ſed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis
ponitur quadrato ex BE.ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE eſt
æqualis ei,qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE; & communi detracto quadrato D
ex CE concludetur AB ipſi GB æqualis.quod eſt abſurdum.non igitur qui ex A
B BC vnà cum quadrato ex CE æqualis eſt quadrato ex BE. Dico neque quadrato
ex BE minorẽ eſſe.ſi enim fieri poteſt,ſit quadrato ex BF æqualis, & ipſius DF duplus
ponatur HA.concludetur rurſus HC duplus CF,ita ut & HC in F bifariam diuidatur; E
ac propterea qui ex HB BC unà cum quadrato ex CF æqualis ſit quadrato
ex BF.ponitur autem & qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE æqualis quadrato
ex FB . ergo ſequitur qui ex AB BC uuà cum quadrato ex CE æqualem eſſe
ei,qui ex HB B C unà cum quadrato ex CF . quod eſt abſurdum. non igitur qui ex F
A B B C unà cum quadrato ex C E eſt æqualis minori, quàm ſit quadratus ex B E.
oſtenſum eſt autem neque ipſi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem eſſe. ergo
qui fit ex AB BC unà cum quadrato ex CE non eſt quadratus. & cum fieri poſſit,
ut idem pluribus modis oſtendatur, unus qui proxime dictus eſt nobis ſufficiat,
ne longam tractationem longius producamus.

F. C. COMMENTARIVS.

Perſpicuum eſt quadratum ex A B B C unà cum quadrato ex C D æqualem eſſe A
ei,qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

Non autem maior ut nę unitas ſecetur] *ſi enim fieri poteſt ſit maior, vel igitur eius la-* B
tus eſt BD, vel minus quàm BD. & ſi quidem BD, erit totum parti aequale. quod fieri non poteſt. ſi vero minus quàm BD, cum ſit maius quàm BE, vnitas ſecabitur. quod itidem fieri non poteſt.

Erit & reliquus CG ipſius GE duplus] *Ex 7 vel 11 ſeptimi libri.* C

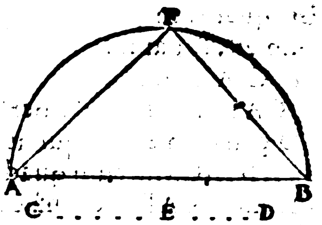
Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipſi G B ęqualis] *Relin-* D
quetur enim qui ex AB BC aequalis ei, qui ex GB BC. ſed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC eſt vt AB ad BG, ex 17 ſeptimi. ergo AB ipſi BG eſt aequalis, quod eſt abſurdum.

Concludetur rurſus HC duplus CF.] *Quoniam enim AC ipſius CD eſt duplus, quorum* E
AH ponitur duplus ipſius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.

Quod eſt abſurdum] *Eſt enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quòd AB ſit ma-* F
ior quàm BH. & ſimiliter quadratus ex CE maior quadrato ex CF ; quoniam AC quàm CF eſt maior.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



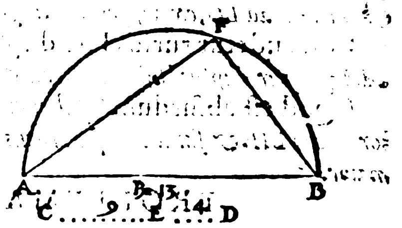
Exponatur enim quædam rationalis AB, &
Ex corolla. primi lem. antecedentium. duo quadrati numeri CD DE, ita vt ipſorum
exceſſus CE non ſit quadratus. Deſcribatur autē in recta linea AB ſemicirculus AF B: fiatq;
Per Corol. 6. huius. vt DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur eſt, vt quadratum ex BA ad quadratum ex
AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA
ad quadratum ex AF proportionem eam, quã
6. huius. numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF eſt commenſurabile. ſed rationale eſt quadratum ex A
diffi. 9. huius B. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF eſt rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad
quadratum numerum; neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F proportio-
9. huius: nem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt recta linea BA ipſi AF longitudine. ergo AB AF rationales ſunt po-
Ex 47. primi, uel ex coroll. ante 15. huius. tentia ſolum commenſurabiles, Quòd cum ſit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA
ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum
ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus
numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratũ ex AB ad quadratũ ex B F
9. huius. proportionẽ habebit, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & ob id recta
47. primi. linea AB ipſi BF longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus poteſt, quàm A F quadrato rectæ lineę B
F ſibi commenſurabilis longitudine. Inuentæ igitur ſunt duæ rationales potentia
ſolum commenſurabiles BA AF, ita vt maior BA plus poſsit, quàm minor AF, quadrato ipſius FB, ſibi longitudine commenſurabilis. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quę per compoſitionem fiunt; præmittit autem theoremata hęc, vtpote ex quibus eiuſmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

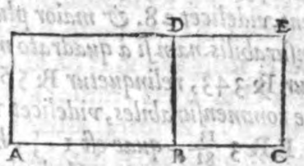


Exponatur rationalis A B, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipſis componitur nõ ſit quadratus. atque in recta linea AB ſemicirculus AFB deſcribatur: & fiat vt DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF: & iuncta FB, ſimiliter oſtendemus, vt in antecedente, BA AF rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt vt D C ad C E, ita quadratum ex B A ad id quod ex AF quadratum; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, ſed C D ad D E proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nõ igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

merum. ergo A B ipſi B F longitudine eſt incommenſurabilis. & B A plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF ſibi incommenſarabilis longitudine. quare AB BF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AB plus poteſt, quàm AF quadrato rectæ lineæ FB ſibi longitudine incommenſurabilis.

LEMMA.

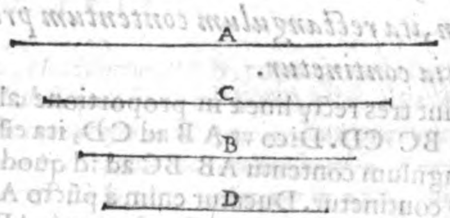
Si ſint duę rectę lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.



Sint duæ rectæ lineæ AB BC in proportione aliqua. Dico vt AB ad B C, ita eſſe rectangulum ex AB BC ad quadratū ex B C. deſcribatur enim ex BC quadratum BDEC, & compleatur AD parallelogrammū. manifeſtum eſt ut AB ad BC, ita eſſe A D parallelogrammum ad parallelogrammum B E. 1.sexti atque eſt A D quidem, quod AB B C continetur; eſt enim B C ipſi B D æqualis. B E vero eſt quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



Exponantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A B, ita vt A maior plus poſſit, quàm B minor, quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine commenſurabilis. & ſit rectangulo ex AB æquale quadratum, quod fit à recta linea C. medium autem eſt quòd ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipſa C media. at quadrato quod fit ex B ęquale ſit rectãgulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD eſt rationale. & quoniam eſt vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quadratum ex C; quadrato autem ex B ęquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipſam D. vt igitur A ad B, ita C ad D. commenſurabilis autem eſt A ipſi B potentia ſolum. ergo & C ipſi D potentia ſolũ eſt commenſurabilis. atque eſt C media. media igitur & D. & quoniam eſt vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis lõgitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Inuentę igitur ſunt duæ medię potentia ſolum cõmenſurabiles C D, quæ rationale continent, & C plus poteſt quàm D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſimiliter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commenſurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi incommenſurabilis longitudine, quãdo A plus poſſit, quàm B quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis.

30.huius.

22.huius.

Ex antecedẽti lemmate.

1·forti.

10. huius.

24. huius.

15.huius.

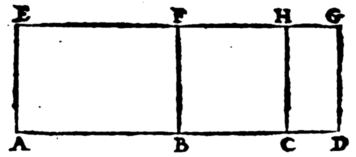
*

Similiter autem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum commẽſurabiles] *Maneant eadem quae ſupra, & A plus poſſit, quàm B quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſimiliter vt ante demonſtrabitur, rectam lineam D mediam eſſe. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. ergo rurſus inuentae ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles C D, rationale continentes, & C plus poteſt quàm D quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis.*

Sit A 8, B ℞ 28. erit rectangulũ, quod ipſis cõtinetur ℞ 1792, & recta linea C ℞℞ 1792, quae media eſt. fiat vt 8 ad ℞ 28, ita ℞℞ 1792 ad aliam, quae ſit D. erit ea ℞ ℞ 343. ergo ℞℞ 1792 & ℞℞ 343 duae mediae ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine cõmenſurabilis. nam ſi à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à ℞ 1792 auferatur ℞ 343, relinquetur ℞ 567. & ſunt duae mediae ℞℞ 1792 ℞℞ 567 inter ſe longitudine commenſurabiles, videlicet vt 4 ad 3. ſi enim ℞℞ 1792 diuidatur per ℞ ℞ 567, prouenit ℞℞ $3\frac{13}{81}$, quae eſt $1\frac{1}{3}$, hoc eſt $\frac{4}{3}$. Rurſus ſit A 8. B ℞ 20, erit rectangulum ipſis contentum ℞ 1280, & recta linea C ℞℞ 1280. fiat ut 8 ad ℞ 20, ita ℞℞ 1280 ad aliam, quae ſit D. erit ea ℞℞ 125. ſunt igitur R R *1280, &* R R *125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A 3 B ℞ 6, rectangulum ipſis contentum erit* R *54, & recta linea C ℞℞ 54. Rurſus fiat ut 3 ad ℞ 6, ita* R R *54 ad aliã, erit ea* R R *24. quare* R R *54, &* R R *24 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae rationale continent, videlicet 6; & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis.*

LEMMA

Si fuerint tres rectæ lineę in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.

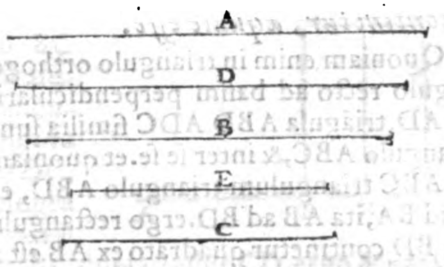


Sint tres rectę lineæ in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt A B ad C D, ita eſſe rectangulum contentũ AB BC ad id quod B C CD continetur. Ducatur enim à pũcto A ipſi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipſi BC æqualis; & per E quidem ipſi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF CH DG parallelæ ipſi A E. quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum B H; ut autem BC ad C D, ita parallelogrammum BH ad ipſum C G: erit ex ęquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum C G. & eſt parallelogrãmum quidem A F, quod AB BC continetur; namque AE eſt ęqualis BC; parallegrammum vero CG eſt, quod continetur BC CD; etenim BC ipſi CH eſt ęqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima & media ad rectangulum media & tertia cõtentum. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Exponantur



Exponantur tres rationales A B C, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine: & ſit rectangulo ex ipſis A B ęquale quadratum, quod fit ex D. medium autem eſt rect angulum ex AB. ergo & quadratũ ex D medium erit; & recta linea D media. rect angulo autem ex BC æquale ſit rectangulum ex DE. Quoniam igitur eſt vt rectangulum ex AB ad rectangulum ex BC, ita recta linea A ad ipſam C; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C ęquale rectangulum ex DE: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E rectangulum. ſed ut quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & ut igitur A ad C, ita D ad E. commenſurabilis autem eſt A ipſi C potentia ſolum. ergo & D ipſi E potentia ſolum eſt cõmenſurabilis. atque eſt D media. media igitur & E. itaque qm̃ eſt vt A ad C, ita D ad E; & A plus poteſt, quàm C quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine commenſurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectę lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine. Dico prętera rectangulum ex DE medium eſſe. Quoniam enim rectangulo ex B C ęquale eſt, quod ex D E rectangulum; medium aũt eſt quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuentę igitur ſunt duę medię potentia ſolum commenſurabiles DE, quæ medium continẽt, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis. Rurſus ſimiliter inuenientur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles. & medium continentes, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; quando ſcilicet A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod facere oportebat.

22. huius.

Ex anteced. lemate.

Lem: 25. huius.

24. huius.

15. huius.

22. huius.

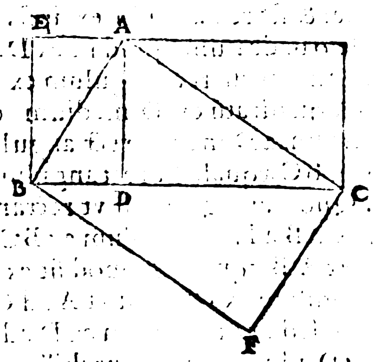
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 8 B ℞ 48, C ℞ 28, rectangulũ. quod ipſis AB cõtinetur, erit ℞, 3072. & recta linea D ℞℞ 3072, quae eſt media. fiat vt A ad C, ita D ad aliã, quae ſit E. erit E ℞℞ 588. ergo ℞℞ 3072, & ℞℞ 588 duae mediae ſunt potentia ſolũ commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine commeuſurabilis. ſi enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à ℞ 3072 auferatur ℞ 588, reliqua erit ℞ 972. ſuntq́; ℞℞ 3072, & ℞℞ 972 duae mediae longitudine inter ſe commenſurabiles, vt 4 ad 3. nã ſi ℞℞ 3072 diuidatur per ℞℞ 972, exibit ℞℞ 3, $\frac{13}{81}$ quae eſt 1. $\frac{1}{3}$ hoc eſt $\frac{4}{3}$. rurſus ſit A 8, B ℞ 48, C ℞ 20, erit D cadẽ, quę ſupra, videlicet ℞℞ 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quae ſit E. erit E ℞℞ 300. ſunt igitur ℞℞ 3072, & ℞℞ 300 duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, quae medium continent, & maior plus poteſt, quàm minor quadrato rectae lineae ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A ℞ 6, B ℞ 3, C ℞ 2, erit D ℞℞ 18. fiatq́; vt A ad C, ita ℞℞ 18 ad aliã, quae ſit E, erit E ℞℞ 2. ergo ℞℞ 18, & ℞℞ 2 ſunt duae mediae potentia ſolum commenſurabiles, & medium continentes, quarum maior plus poteſt, quã minor, quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine.

LEMMA I.

Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum B A C, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD ęquale eſſe quadrato, quod fit ex BA; cõtentum vero BC CD æquale quadrato ex CA; & contentum B D D C æquale quadrato ex

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale eſſe.

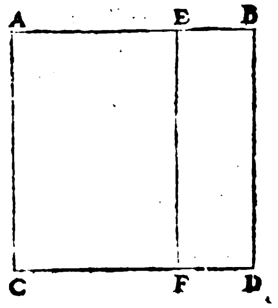


Quoniam enim in triangulo orthogonio ab
angulo recto ad baſim perpendicularis ducta
eſt AD, triãgula ABD ADC ſimilia ſunt, & toti
8 sexti. triangulo ABC, & inter ſe ſe. et quoniam ſimile
eſt ABC triangulum triangulo ABD, erit vt C
4. sexti. B ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulũ, quod
CB BD continetur quadrato ex AB eſt æquale.
17. sexti. Eadem ratione et rectangulum contentum BC
CD æquale eſt quadrato ex AC, rurſus quoniã
in triangulo orthogonio ab angulo recto ad ba
ſim perpendicularis ducitur, ducta baſis partiũ
8. sexti. media proportionalis eſt. quare ut BD ad DA,
ita AD ad DC; ac propterea rectãgulum, quod
BD DC continetur eſt æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum
BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale eſſe. Quoniam enim, vt diximus, trian
gulum ABC triangulo ACD eſt ſimile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. ſi autem
4. sexti. quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum eſt
16. sexti. ęquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD conten-
to BA AC æquale erit. Dico præterea ſi deſcribamus parallelogrammum rectan-
gulum EC, & ipſum AF compleamus, rectangulum EC ipſi AF æquale eſſe. vtrũ-
que enim ipſorum duplum eſt triãguli ABC. atque eſt rectangulũ quidem EC id,
quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectã-
gulum, quod cõtinetur BC AD rectangulo BA AC contento eſt æquale.

LEMMA II.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulũ, quod tota, & minori continetur.

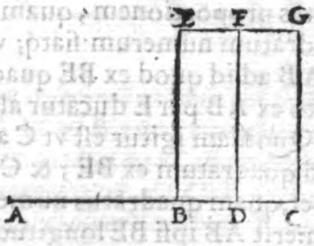
Recta enim quædam linea AB ſecetur in partes inæquales ad E. Dico vt AE ad EB, ita eſſe rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. deſcribatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E quidem alterutri ipſarum AC DB parallela ducatur EF, perſpicuum eſt vt AE ad EB, ita eſſe AF parallelogrãmum ad parallelogrammum FB. atque eſt AF quidẽ parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipſi AB eſt æqualis: parallelogrammum vero FB eſt quod continetur AB BE; æqualis enim eſt DB ipſi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cõtinetur. quod oportebat demonſtrare.



LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipſarum in partes æquales ſecetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum eſt eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

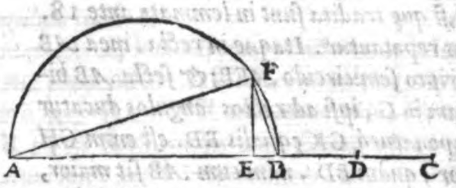
Sint



Sint duæ rectæ lineæ inęquales AB BC, quarum maior AB: & ſecetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum eſſe eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipſi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipſi BA æqualis, & figura deſcribatur. Quoniam igitur eſt vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrã mum; erit componendo vt BC ad CD, ita paral- **1.sexti:** lelogrammum BG ad ipſum GD. eſt autem BC dupla ipſius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi CD eſt duplum. atque eſt BG quidem, quod AB BC continetur; etenim AB eſt ęqualis BE: DG vero eſt quod continetur AB BD: nam BD ipſi DC, & AB ipſi DF eſt ęqualis. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipſis continetur, medium.



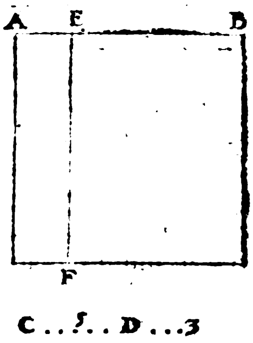
Exponantur duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB **31.huius.** BC, ita vt maior AB plus poſsit, quã minor BC quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. & ſecta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipſarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineã AB applicetur, deficiens figura quadrata: & ſit quod continetur AE EB. deſcribatur **Per lemma ante 19. huius uel per 28.sexti.** in recta linea AB ſemicirculus AFB; ducaturq; ipſi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duę rectæ lineę AB BC inæquales ſunt, & AB plus poteſt, quàm BC quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quartæ autem parti qnadrati, quod fit à minori BC, hoc eſt quadrato dimidiæ ipſius æquale parallelogrammum applicatum eſt ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipſi EB incommenſurabilis. atque eſt vt **19.huius:** AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE **Per 2. lemma ex antecedentibus.** quadrato ex AF eſt æquale; & rectangulum ABE ęquale quadrato ex BF. quadratũ igitur ex AF incommenſurabile eſt quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB po- **Per 1. lemma** tentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam AB rationalis eſt, & quadratum, quod **Per 9. diffi.** fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compoſitum ex quadratis ipſarum AF FB. rurſus quoniam rectangulum AEB eſt ęquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE eſt ęqualis BD, ac propterea BC ipſius EF eſt dupla. rectangulũ igitur ABC duplum eſt rectãguli, quod **Per 3. lemma** AB EF continetur. ſed rectangulum ABC eſt medium. ergo & medium quod con **22.huius.** tinetur AB EF. eſt autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. conten **Cor. 24. huius.** tum igitur AF FB medium eſt. ſed & oſtenſum eſt rationale, quod componitur ex **Per 1. lemma** ipſarum AF FB quadratis. Inuentę igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AF FB, quę faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipſis continetur, medium. quod facere oportebat.

SCHOLIUM.

At vero ex duobus ſpacijs irrationalibus inter ſe compoſitis totum fieri rationale, ex hoc cognoſcemus.

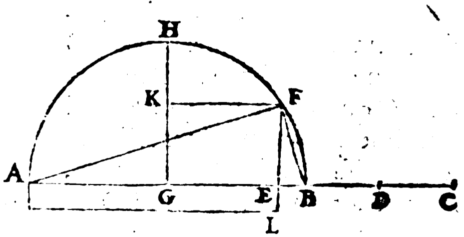
Exponatur

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non ha
bentes proportionem, quam quadratus numerus ad
Corol.10.huius. quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum
ex AB ad id quod ex BE quadratum: & deſcripto qua
drato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela
EF. Quoniam igitur eſt vt C ad D, ita quadratum ex A
B ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non
habet, quam quadratus numerus ad quadratum nume
9.huius. rum: erit AB ipſi BE longitudine incommenſurabilis.
Ex demonſtratis.ad 17 huius. ergo & BA reliquę AE incommenſurabilis eſt longitu
dine. vt autẽ AB eſt ad vtramque ipſarum AE EB, ita
1.sexti. quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorũ.
quadratum igitur ipſis parallelogrammis incommen-
ſurabile erit. ſed quadratum eſt rationale. irrationalia
igitur ſunt parallelogramma, quæ rationalis ſunt partes, & ipſum rationale cõplẽt.



F. C. COMMENTARIVS.

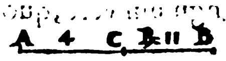
Sit recta linea AB 8, BC ℞ 20. erit BD, vel DC ℞ 5: & quadrato ipſius BD, quod eſt 5 aequale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figura quadrata. illud autem facile aſſequemur, ſi quę tradita ſunt in lemmate ante 18. huius repetantur. Itaque in recta linea AB deſcripto ſemicirculo AFB; & ſecta AB bifariam in G, ipſi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK ęqualis BD. eſt enim GH maior, quàm BD. nam cum AB ſit maior, quàm BC, erit etiam ipſius AB dimidia maior, quàm dimidia BC. deinde per K ipſi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quae protendatur in L, ita vt EL ſit aequalis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & aequale quadrato ipſius FE, hoc eſt quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum eſt parallelogrammum AL quadrato ipſius BD aequale, & deficiens figura quadrata. & quoniam re-
5.secundi. *cta linea AB ſecatur in partes aequales ad G, & in partes inęquales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vnà cum quadrato ipſius GE aequale quadrato dimidiae AB, hoc eſt ipſius AG: quadratum autem AG eſt 16, & rectangulum AEB 5; eſt enim FE ℞ 5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB eſt aequale. reliquum igitur quadratum ipſius GE eſt 11, & recta linea GE ℞ 11. ergo AE conſtans ex AG GE eſt 4 vnà cum ℞ 11, vel 4 plus ℞ 11. & EB 4 dempta ℞ 11, vel 4 minus ℞ 11. vt autẽ ſciamus, quae ſint AF FB, neceſſe erit prius inuenire quadrata ipſarum AE EB. quare non inutile viſum eſt theoremata nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quae ex binis, vel pluribus nominibus conſtant, & ad apotomas.*



THEOREMA. I.

Data recta linea, quæ ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: ſitq; AC 4, CB ℞ 11. Dico quadratum eius datum eſſe. Quoniam enim AB vtcunque ſecatur in puncto C, erit ex quarta propoſitione ſecundi libri, quadratum totius aequale quadratis partium, & rectangulo, quod his dictis partibus continetur. itaque quadratum AC eſt 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB eſt ℞ 176, cuius duplum ℞ 704. ergo quadratum AB eſt 27 plus ℞ 704.



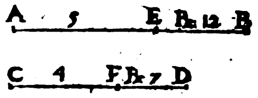
Sit

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: ſitq́ AB 6, BC R 10, & CD R 3. Dico et quadratum ipſius dari. nā cum AD ſecetur in duobus punctis B C, erit quadratum totius aequale rectangulis, quae ſingulis partibus ad ſingulas applicatis cōtinentur, ex ijs, quae à nobis demōſtrata ſunt ad ſecundā propoſitionē ſecūdi libri. quadratum igitur AB eſt 36, & rectangulū contentū AB BC eſt R 360; contentum vero AB CD eſt R 108. & rurſus contentum AB BC eſt R 360, & quadratum BC eſt 10. preterea rectangulum, quod continetur BC CD eſt R 30, & quod rurſus continetur AB CD R 108; & quod continetur BC CD R 30. & denique quadratū CD eſt 3. ſed duplum R 360 eſt R 1440, & duplum R 108 eſt R 432; duplum vero R 30 eſt R 120. quare ſumma totius erit 49 plus R 1440 plus R 432 plus R 120, quod eſt ipſius AD quadratum. Et eodem modo in alijs faciemus quotcunque nomina habeant.

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus conſtent, & rectangulum ipſis contentum datum erit.

Sint rectae lineę AB CD; conſtetq́ AB ex binis nominibus AE EB; & ſit AE 5, EB R 12; CD vero conſtet ex CF FD, & ſit CF 4 FD R 7. Dico rectangulum, quod ipſis continetur, datum eſſe. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vtcunque ſecantur in punctis E F, rectangulum ipſis cōtētū eſt aequale rectāgulis, quae vnaquaq; parte vnius ad vnāquāq; partē alterius applicatæ continentur, ex ijs quae nos demōſtrauimus ad primā propoſitionē ſecūdi libri theoremate primo. rectāgulū igitur contentū 4 & 5 eſt 20, & contētū 4, & R 12 eſt R 192. quod aūt cōtinetur R 7, & 5 eſt R 175, & quod continetur R 7, & R 12 eſt R 84. totius ergo ſumma eſt 20 plus R 292 plus R 175 plus R 84. quod eſt rectangulum ipſis AB CD contentum. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus conſtent.



THEOREMA III.

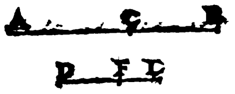
Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC, & recta linea ipſi congruens ſit CB; ſitq́ tota AB 4, BC R 11. erit AC 4 minus R 11. Dico & quadratum ipſius datum eſſe. vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propoſitione ſecundi libri, vt ante, ſed ſeptima eiuſdem. non enim 4, & R 11 ſunt partes dictae lineae, ſed 4 eſt tota linea, et R 11; eſt pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB ſecatur vtcunque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB, et BC vnà cum alterius partis AC quadrato. eſt igitur quadratum ipſius AB 16, et quadratum BC 11; rectangulum autem, quod tota AB, et BC continetur eſt R 176, cuius duplum R 704. ergo R 704 vnà cum quadrato ex AC eſt æquale 27; ac propterea quadratum ex AC eſt 27 minus R 704. qui vero ex quarta propoſitione ſecundi id quadratum ſibi inueniendum proponunt, coguntur dicere ſi minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non eſſe primus animaduertit Hieronymus Cardanus non ſolum mathematicus, ſed et Philoſophus, ac medicus preſtantiſſimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verū quoniam ex eorum operatione error non ſequitur, hoc ipſis condonandum eſt.

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipſis continetur, datum erit.

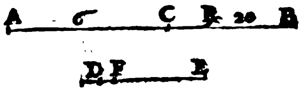
Sint duae apotomae datae AC DF: et ipſi quidem AC cōgruat CB; ipſi vero DF congruat FE: ſitq́ tota AB 8, BC R 12: et ſit DE 4, EF R 3. erit AC 8 minus R 12, et DF 4 minus R 3. Dico



et rectāgulum, quod ipſis continetur, datum eſſe. Quoniam enim duę rectae lineae AB DE vtcumque ſecantur in punctis C F, erit rectāgulū, quod continetur totis AB DE vnà cum rectāgulo contento partibus CB FE aequale rectangulo contento tota AB, et parte FE vnà cum contento tota DE, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus A C DF continetur, ex ijs, quae demonſtrata ſunt à nobis ad primā propoſitionem ſecundi libri theoremate ſecundo. itaque rectangulum contentum AB DE eſt 32, & contentum CB FE eſt ℞ 36, hoc eſt 6; rectangulum vero, quod continetur AB FE eſt ℞ 192, et quod continetur DE CB eſt ℞ 192, quae duae radices inter ſe iunctae faciunt ℞ 768. quare 38 eſt aequalis ℞ 768 vnà cum eo, quod AC DF continetur. ex quibus ſequitur rectangulum contentum AC DF eſſe 38 minus ℞ 768. at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; et ob id aſſerunt ſi minus per minus multiplicetur produci plus, ſed non recte, cum vtendum ſit theoremate ſecundo; neque enim 8, et ℞ 12 ſunt partes vnius rectae lineae; immo vero 8 eſt tota linea, et eius pars ℞ 12, et ſimiliter dicendū de 4 minus ℞ 3. ex ipſorum tamen operationū nullus ſequitur error.

THEOREMA V.

Data recta linea, quæ ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectāgulum, quod ipſis continetur, datum erit.



Sit data quidem recta linea AB, quae conſtet ex binis nominibus AC CB, vt ſit AC 6; CB ℞ 20. data autem apotome ſit DF, et ipſi congruens FE, vt tota DE ſit 4, et EF ℞ 12. erit DF 4 minus ℞ 12. Dico rectāgulū, quod ipſis AB DF cōtinetur datum eſſe. Quoniam enim duae rectae lineae AB DE vtcumque ſecantur in punctis CF, erit ex ſecundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipſis AB DE continetur, aequale rectangulis, quae fiunt vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata; videlicet rectangulo contento DF AC, et contento DF CB: et preterea rectangulo, quod continetur FE AC, et quod continetur FE CB. rectangulum autem contentum DE AC vnà cum contento DE CB eſt aequale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima ſecundi libri. Itaque rectangulum contentum DE AC eſt 24, et contentum DE CB eſt ℞ 320. rectangulū vero, quod cōtinetur FE AC eſt ℞ 432, et quod continetur FE CB ℞ 240. ergo rectangula, quae cōtinētur DF AC, et DF CB, hoc eſt rectangulum contentum DF AB eſt 24 plus ℞ 320, minus ℞ 432, et minus ℞ 240. Eodem modo procedemus, ſi rectae lineae AB DE ex pluribus nominibus conſtent.

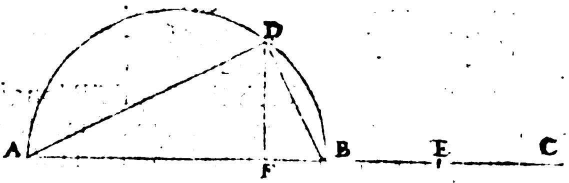
Ex quibus apparet ſi plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.

His ita demonſtratis conſtat, quadratum ipſius AE eſſe 27 plus ℞ 704, et quadratum EB eſſe 27 minus ℞ 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod eſt 5, erit quadratum ex AF 32 plus ℞ 704, et quadratum ex FB 32 minus ℞ 704, rectaq́ linea AF radix huius ſummae 32 plus ℞ 704, quam radicem vniuerſalem appellant, et ita notant, videlicet ℞ V. 32 plus ℞ 704: et ſimiliter BF ℞ V. 32 minus ℞ 704, quarum quidem quadrata inter ſe iuncta videlicet 32 plus ℞ 704, et 32 minus ℞ 704 faciunt 64, quod eſt ipſius AB quadratum. preterea quoniam rectangulum, quod continetur rectis lineis AF FB eſt aequale contēto ipſis AB EF, vt demonſtratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF eſt ℞ 320: erit etiam rectangulum, quod his lineis ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704 continetur ℞ 320. Hoc autem ita eſſe ex earum quoque inter ſe multiplicatione manifeſto apparere poteſt. diſpoſitis enim his radicibus uidelicet ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704, ut quid ex earum multiplicatione proueniat cognoſcamus, operandum eſt, quemadmodum in ſimplicibus radicibus; nimirū multiplicādo earū quadrata inter ſe, et eius, quod producitur radix erit id, quod queritur. cū aūt quadrata utriuſq; cōſtēt ex duabus partibus, erit rectāgulū, quod totis cōtinctur, ac ſi lineę eſſent, ęquale rectāgulis, quę fiūt ſingulis partibus unius ad ſingulas alterius applicatis, ut demonſtratū eſt. ſi igitur 32 in ſe multiplicentur fiunt 1024; rurſus ſi 32, hoc eſt ℞ 1024 multiplicet ℞ 704 fit ℞ 720896. et ita ſi 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. poſtremo ſimul tiplicetur ℞ 704 per minus ℞ 704 fiunt minus 704. totū igitur ex his compoſitū eſt 1024 plus R 720896

℞ 720896 minus ℞ 720896 minus ℞ 704, hoc eſt 1024 minus 704. itaq; detractis 704 de 1024 relinquẽtur 320, & eius radix erit id quod quæritur. ergo ſi multiplicemus ℞ V. 32 plus ℞ 704 per ℞ V. 32 minus ℞ 704 producetur ℞ 320. Quatenus vero ad ſcholiũ pertinet, ſit AB 10 & numerã CD. 5. 3. & fiat vt 5 ad 3. ita quadratũ ex AB, hoc eſt 100 ad quadratũ ex BE, erit ad 60. ergo ipſa BE eſt ℞ 60, & AE 10 minus ℞ 60. rectãgulum autem BF eſt ℞ 6000, & rectangulum AF 100 minus ℞ 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectã gulum vero quod ipſis continetur rationale.



Exponantur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB BC, quæ rationale contineant, ita vt AB plus poſſit quàm BC quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis, & in ipſa AB deſcribatur ſemicirculus DB: ſectaq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipſius BE, deficiens figura quadrata; & ſit quod continetur AF FB. incommenſurabilis igitur eſt AF ipſi FB longitudine. à puncto autem F ipſi AB ad rectos angulos ducatur FD; & AD DB iungantur. itaque quoniam AF eſt incommenſurabilis FB; erit & BAF rectangulum rectangulo ABF incommenſurabile. eſt autem rectangulũ quidem BAF quadrato ipſius AD æquale; rectangulum vero ABF æquale quadrato ipſius DB incommenſurabile igitur eſt quadratum AD ipſius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam medium eſt quadratum ipſius AB, erit & compoſitum ex quadratis ipſarum AD DB medium. quòd cum dupla ſit BC ipſius DF, & rectangulum ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commenſurabile. rationale autem eſt rectangulum ABC, ita enim ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD eſt rationale. ſed rectangulo ex AB FD æquale eſt rectangulum ADB quare & ipſum ADB rectangulum rationale erit: Inuentæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommẽſurabiles AD DB, quæ faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum uero, quod ipſis continetur rationale.

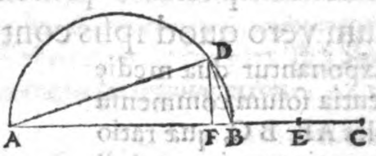
e.huius.
Lemma ad 19.huius.
19.huius.
Lemma 2.
Lemma. 1.
Lemma. 3.
Lemma 1. ante 34. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24. & diuiſa ℞℞ 24 bifariam, erit eius dimidia BE ℞ ℞ 1 $\frac{1}{2}$, applicetur ad AB parallelogrammum aequale quadrato ipſius BE, hoc eſt aequale ℞ 1 $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata. quod ſimiliter, atque ſupra fiet. diuiſa enim rurſus AB. hoc eſt ℞℞ 54 bifariam, erit eius dimidia ℞℞ 3 $\frac{3}{8}$. & ſi ab ipſius quadrato, videlicet à ℞ 3 $\frac{3}{8}$ auferatur ℞ 1 $\frac{1}{2}$, reliqua erit ℞ $\frac{3}{8}$. ergo recta linea AF eſt RR 3 $\frac{3}{8}$ plus RR $\frac{3}{8}$, & FB RR 3 $\frac{3}{8}$. minus RR $\frac{3}{8}$. quadratũ aũt ipſius AF eodẽ modo inuenietur eſſe R 6 plus R 4 $\frac{1}{2}$. & quadratũ ex FB R 6 minus R 4 $\frac{1}{2}$, quibus addito cõi quadrato ipſius FD, videlicet R 1 $\frac{3}{2}$, erit quadratum ex AD ℞ 13 $\frac{1}{3}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & quadratum ex DB R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$. ideoq; recta linea AD ℞ V R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & DB R V. R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$, quarũ quadrata ſimul iuncta faciunt R 54, videlicet rectae lineae AB quadratum. quod eſt medium. At rectangulum, quod AD DB continetur eſt aequale contento AB DF. contentum vero AB DF, hoc eſt RR. 54, & RR 1 $\frac{1}{2}$ eſt RR 81, hoc eſt 3. ergo quod continetur AD DB eſt 3. ſed et idem aliter conſtat multiplicando R V. R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$ plus R V R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$; fit enim R 9, *quae eſt 3. ſunt igitur hę rectae lineae potentia incommenſurabiles, & faciunt compoſitum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipſis continetur, rationale, vt oportebat.*

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectāgulum, quod ipſis continetur, medium, incommenſurabileq́ue compoſito ex ipſarum quadratis.



33 huius. Exponantur duæ medię potentia ſolū commenſurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita vt AB plus poſsit, quàm BC quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommēſurabilis. & in AB ſemicirculus ADB deſcribatur, & reliqua fiant, quēadmodū in ijs, quæ ſuperius dicta ſunt. Quoniam igitur AF incommenſurabilis eſt ipſi FB longitudine, erit & AD ipſi DB potentia incommenſurabilis. & quoniam medium eſt quod fit ex A B, & compoſitum ex quadratis AD DB eſt medium. Quòd cum rectangulū AFB ęquale ſit quadrato alterutrius ipſarū BE DF, erit DF ęqualis BE; ac propterea BC ipſius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplū eſt eius, quod AB FD continetur. medium autem eſt rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD eſt mediū, atque eſt ęquale contento AD DB. quare & ipſum medium erit. & quoniam incommenſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine; commenſurabilis autem CB ipſi BE: erit & AB ipſi BE lōgitudine incommenſurabilis. ergo & quadratum ex AB incommenſurabile eſt rectangulo ABE. ſed quadrato quidem ex AB ęqualia ſunt quę ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE eſt æquale rectangulum contentum AB FD, hoc eſt rectangulum ADB. compoſitum igitur ex quadratis ipſarum AD DB rectangulo ADB eſt incommenſurabile. ergo inuentæ ſunt duę rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipſis continetur, medium, & adhuc compoſito ex ipſarum quadratis incommenſurabile.

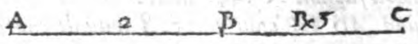
Corol. 24 huius.
1. lemma ad 34. huius.
13. huius.

F. C. COMMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 18, & BC ℞℞ 2. diuidaturq́; BC bifariam in E, erit BE ℞℞ $\frac{1}{8}$. et ſi ad AB applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipſius BE, hoc eſt ℞ $\frac{1}{8}$, deficiens figura quadrata, crit recta linea AF ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{2}$ & FB ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ minus ℞℞ $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipſius AF ℞ 3 $\frac{1}{8}$ plus ℞ 3, & quadratum FB ℞ 3 $\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito utrique quadrato ipſius BE, erit quadratum ex AD ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3. & quadratum ex D B ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD eſt ℞ V. ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, quarū quadrata ſimul iuncta faciunt ℞ 18, quantum eſt quadratum ex AB. rectangulum vero ipſis contentum eſt ℞ 1 $\frac{1}{2}$. quod eſt medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.



Componantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A B BC. Dico AC irrationalem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BC longi tudine, potētia enim ſolū

commenſu-

commenſurabiles ſunt; & vt AB ad BC, ita rectãgulum ABC ad id, quod fit ex BC 1.sexti.
quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommenſurabile. Sed recta 10.huius.
gulo quidem ABC commenſurabile eſt id, quod bis AB BC continetur: quadrato 6. huius.
autem ex BC commenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC 13. huius.
continetur incommenſurabile eſt quadratis ex A B B C. & componendo quod bis
AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc eſt quadratum ex AC incō- 4.secundi.
menſurabile eſt compoſito ex ipſarum AB BC quadratis. rationale autem eſt com
poſitum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale eſt: & ob id re- 20.diffi.
cta linea AC eſt irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 11.diffi.

SCHOLIUM.

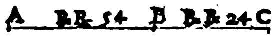
Quæ inter has rationales media eſt proportionalis, ea media eſt, neutra autem harum, neque vtraque eſt media, ſed quæ ex ipſis conſtat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium ſunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2, & BC ℞ 3. erit AC 2 plus ℞ 3. & eius quadratum 7 plus ℞ 48. eſt enim quadratum ipſius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur ℞ 12, cuius duplum eſt ℞ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.



Componantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB BC, quæ rationale contineãt. dico totam AC irrationalem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommenſurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt ipſius AC quadratum incommenſurabile eſt rectangulo ABC. ſed A B C rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex A C irrationale eſt, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

A B C

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hę inueniantur docuit in 28 huius. ſit autem AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24, erit tota AC ℞℞ 54 plus ℞℞ 24.*

B Et quadrata ex A B B C incommenſurabilia erunt rectangulo, quod bis A B BC continetur] *Hoc eodem modo, quo ſupra, ſequitur ex 13 huius bis repetita.*

C Quod eſt ipſius AC quadratum] *Ex 4 ſecundi.*

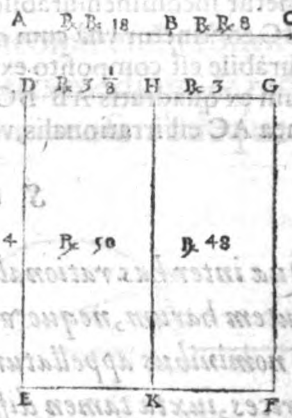
D Ergo quadratum ex AC irrationale eſt, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.*

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duę medię potentia ſolum commenſurabiles componantur.

quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs ſecunda.



A Componantur enim duæ mediæ potentia ſolum
commenſurabiles, AB BC, quæ medium
B contineant. Dico AC irrationalem eſſe. exponatur
rationalis DE: & quadrato ex AC æquale
parallelogrammum rectangulum DF ad ipſam
DE applicetur, quod latitudinē faciat DG.
C itaque quoniam quadratum ex AC æquale eſt
4.ſecundi quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB BC continetur. applicetur ad ipſam DE
quadratis ex AB BC æquale parallelogrammū
E rectangulum EH. reliquum igitur FH æquale
eſt ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam
media eſt utraque ipſarum AB BC, erūt & quadrata
F ex AB BC media. medium autem ponitur
& quod bis continetur AB BC. atque eſt
quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum
EH. rectangulo autem bis AB BC contento ęquale eſt ipſum HF. me-
G dium igitur eſt vtrumque ipſorum EH HF: & ad rationalē applicantur. ergo vtraque
recta linea DH HG eſt rationalis, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis.
H & quoniam incommenſurabilis eſt AB ipſi BC lōgitudine; atque eſt vt AB ad BC,
K ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum: erit quadrato ex AB rectangulum
L ABC incommenſurabile. ſed quadrato quidem ex AB commenſurabile eſt compoſitum
ex quadratis ipſarum AB BC: rectangulo autem ABC eſt commenſurabile,
M quod bis AB BC continetur. ergo compoſitum ex quadratis AB BC incommenſurabile
erit ei, quod bis continetur AB BC. ſed quadratis ex AB BC æquale eſt
parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF parallelogrammum.
N quare EH ipſi HF eſt incommenſurabile; & ob id recta linea DH
ipſi HG incommenſurabilis longitudine. oſtenſæ autem ſunt rationales. ergo DH
O HG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt irrationalis;
P rationalis autem DE; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulū
Q irrationale eſt. ſpacium igitur DF eſt irrationale, & quę ipſum poteſt irrationalis. poteſt
autem ipſum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex
binis medijs ſecunda.

SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medijs ſecundam, quoniam medium eſt non rationale, quod ipſis AB BC continetur; medium enim rationali poſterius eſt. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale eſſe perſpicue conſtat.

21 huius. Nam ſi rationale ſit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; ſed & irrationalis. quod eſt abſurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur eſt irrationale. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ medię potentia ſolum commenſurabiles AB BC, quę medium contineant] *Quomodo autem hę inueniantur docet in 29 huius. ſit AB* RR 18, *et BC* RR 8, *erit AC* RR 18 *plus* RR 8, *cuius quadratum* R 50 *plus* R 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum

gulum DF ad ipſam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4, ad quam ſi applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quae ſit DH: et ſi ad eãdem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quae ſit HG. ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

C Itaque quoniam quadratum ex AC æquale eſt quadratis] *Ex quarta ſecundi, vel 4. Barlaam monachi.*

D Applicetur ad ipſum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum rectangulum EH] *Quadratum ipſius AB eſt* R 18, *et quadratum BC* R 8, *quae inter ſe iunctę faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH eſt* R 50, *et recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$.

E Reliquum igitur FH eſt æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc eſt* R 48, *et recta linea HG* R 3, *vt dictum eſt.*

F Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod AB BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur eſt ei commenſurabile, videlicet duplum ex 6. huius, et ipſum medium erit, ex corollario 24. huius.*

G Ergo vtraque recta linea DH HG eſt rationalis, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23. huius.*

H Atque eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23 huius appoſito, vel ex 1. ſexti.*

K Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommenſurabile] *Ex 10. huius.*

L Sed quadrato quidem ex AB commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commenſurabiles. ergo & earum quadrata commenſurabilia erunt, et compoſitum ex ipſis commenſurabile vtrique quadrato ex 16. huius.*

M Ergo compoſitum ex quadratis AB BC incommenſurabile erit ei, quod bis continetur AB BC] *Ex 14. huius.*

N Et ob id recta linea DH ipſi HG incommenſurabilis longitudine] *Ex 1. ſexti, et 10. huius.*

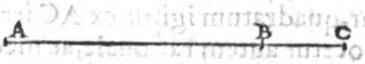
O Ac propterea DG eſt irrationalis] *Ex 37. huius.*

P Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale eſt] *Quomodo hoc ſequatur in antecedenti ſcholio dictum fuit.*

Q Et quę ipſum poteſt irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componãtur, quæ faciãt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem maior.



A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico AC irrationalem eſſe. Quoniam enim id, quod AB
BC continetur, medium eſt; & quod bis continetur AB BC medium erit. compoſi- B
um autem ex ipſarum AB BC quadratis eſt rationale. ergo quod bis AB BC conti
netur incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis ipſarum AB BC. & ob id qua- C
drata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt quadratum ex
AC, incommenſurabile eſt quadratis ex AB BC. rationale autem eſt compoſitum
ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta
linea AC eſt irrationalis. vocetur autem maior.

SCHOLIVM.

Vocauit autem ipſam maiorem, propterea quòd rationalia ex AB

BC maiora

BC maiora ſint medio, quod bis AB BC continetur: oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC maiora eſſe eo, quod bis AB BC continetur, ſic oſtendemus.

Manifeſtum igitur eſt AB BC inter ſe inęquales eſſe. ſi enim ſint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit. quod nō ponitur. Inæquales igitur ſunt AB BC. ponatur maior AB, & ipſi BC ęqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia ſunt ei, quod bis AB BD cōtinetur vnà cum quadrato ex DA. ęqualis autem eſt DB ipſi BC. quadrata igitur ex AB BC ęqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoq; quadrata ex AB BC maiora ſunt, quàm id, quod bis AB BC continetur, quadrato ipſius DA. 7.secundi

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duę rectę lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt] *Inueniuntur autē hae ex 34 huius. ſit AB* R *V*.34 *plus* R 704; *et*
B *BC* R *V*.32 *minus* R 704. *erit tota AC* R *V*.32 *plus* R 704 *plus* R *V*.32 *minus* R 704.

C Et quod bis AB BC continetur medium erit] *Ex corollario 24 huius.*

Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt quadratum ex AC incommenſurabile ęſt quadratis ex AB BC] *Ex 17. huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

A Componantur enim duę rectæ lineę potentia incommēſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico AC irrationalem eſſe. B Quoniam enim cōpoſitum ex ipſarum AB BC quadratis medium eſt; quod autem bis AB BC cōtinetur rationale: erit compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis incommenſurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare componēdo quadratum ex AC eſt incommenſurabile ei, quod bis continetur ABBC. A eſt autem rationale, quod bis AB BC continetur. quadratum igitur ex AC irrationale eſt; ideoq; recta lineà AC eſt irrationalis. vocetur autem rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipſam idcirco appellauit, quòd poſſit bina ſpacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale pręcedit irrationale, ipſius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Componātur enim duæ rectę lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea quæ propoſita ſunt] *Hae autem inueniuntur ex 35 huius ſit AB* R *V*. R 13 $\frac{1}{2}$ *plus*

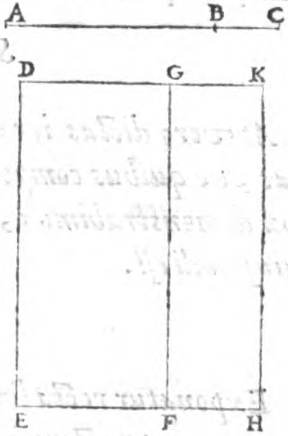
℞ 4 $\frac{1}{2}$, BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, vt tota AC ſit ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ V. ℞. 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius.* B
ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.

Quare componendo quadratum ex AC eſt incommenſurabile ei, quod bis con- C
tinetur AB BC] *Quoniam enim compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis incommenſurabi-*
le eſt ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compoſitum ex quadratis AB BC vnà cum
eo, quod bis AB BC continetur, hoc eſt quadratum ex AC incommenſurabile ei, quod bis conti- 4. ſecundi
netur AB BC.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectę lineę potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & quod ipſis cōtinetur medium, incommenſurabileq́; compoſito ex quadratis ipſarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bina media potens.



Componantur enim duæ rectæ lineę potētia incō- A
menſurabiles AB BC, quę faciant compoſitum quidē
ex ipſarum AB BC quadratis medium; quod autem
ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabi-
le compoſito ex ipſarum quadratis. Dico AC irratio-
nalē eſſe. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipſam B
applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æ-
quale quadratis ipſarum AB BC: & parallelogram-
mum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. to-
tum igitur DH quadrato ipſius AC eſt ęquale. & quo
niam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum
AB BC, & æquale parallelogrammo DF; erit ipſum
quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatū
eſt. rationalis igitur eſt DG, & ipſi DE lōgitudine in- C
commenſurabilis. ob eandem cauſam & GK eſt ratio-
nalis, & incommenſurabilis longitudine ipſi FG, hoc
eſt ipſi DE. & quoniam compoſitum ex quadratis ip-
ſarum AB BC incommenſurabile eſt ei, quod bis AB BC continetur; erit & paral-
lelogrammum DF ipſi GH incommenſurabile. ergo & recta linea DG incommen- D
ſurabilis eſt ipſi GK; & ſunt rationales. quare DG GK rationales ſunt potentia ſo-
lum commenſurabiles; ac propterea DK eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus E
appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale eſt, & ip F
ſum potens irrationalis. ſed ipſum DH poteſt recta linea AC. quare AC irrationa- G
lis eſt. vocetur autem bina media potens.

SCHOLIVM.

Vocauit ipſam bina media potētem, propterea quod poteſt bina ſpacia media, videlicet compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis, & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur.n. duæ rectę lineę potentia incōmenſurabiles AB BC, quæ faciāt A compoſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis medium, quod autem ipſis cõtinetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri poſsint, tradit in 36. huius. Sit AB* ℞ *V.* ℞ *4* $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ *3, & BC* ℞ *V.* ℞ *4* $\frac{1}{2}$ *minus* ℞ *3. erunt earum quadrata ſimul iuncta* R 18, *& rectangulum ipſis contentum* R 1 $\frac{1}{2}$, *cuius duplum eſt* R 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum DF ęquale quadratis ipſarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam ſi applicetur parallelogrãmum DF, aequale compoſito ex ipſarum AB BC quadratis, videlicet* R 18, *latitudinem faciet* R 2, *quae ſit DG: & ſi ad eandem applicetur parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* R 6, *latitudinẽ faciet* R $\frac{2}{3}$, *quae ſit GK. tota igitur latitudo DK erit* R 2 *plus* R $\frac{2}{3}$, *quae eſt irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit aequale quadrato ipſius AC, ex 4 ſecundi.*

C Rationalis igitur eſt DG ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommenſurabilis eſt ipſi GK] *Ex 10 huius, eſt enim vt DF ad GH, ita DG ad GK, ex 1. ſexti.*

E Ac propterea DK eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale eſt] *Nam quod rationali, & irrationali continetur eſt irrationale, vt in ſcholio 39. huius demonſtratum fuit.*

G Et ipſum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCHOLIVM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quę propoſitas ſpecies conſtituunt, mox demonſtrabimus, ſi prius lemma quoddam expoſuerimus, quod huiuſmodi eſt.

LEMMA.

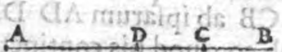
Exponatur recta linea AB, & ſecetur tota in partes inæquales ad vtrumque punctorum C D: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipſarum AC CB quadratis AD DB maiora eſſe.

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam maior eſt AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB eſt autem AE ipſi EB ęqualis. ergo DE. quàm EC eſt minor: & puncta CD non ęqualiter diſtant à bipartita ſectione.
5. ſecundi. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineæ CE eſt ęquale quadrato ipſius EB; ſed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineę DE eſt æquale ipſius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipſius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipſius DE. Quorum quadratum ipſius DE eſt minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus eſt rectangulo ADB, quare & quod bis AC CB continetur minus eſt eo, quod bis continetur AD DB, ſed compoſitum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, eſt ęquale compoſito ex quadratis ipſarum
4. ſecundi AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. eſt enim vtrumque eorum quadrato ipſius AB ęquale, & reliquum igitur compoſitum ex quadratis AC CB maius erit compoſito ex quadratis AD DB. quod demõnſtrare oportebat.

ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuiſa in partes quidem ęquales ad punctum D, in partes vero inęquales ad C. Dico quadrata ex A C CB maiora eſſe quadratis ex AB DB.



Quoniã enim quadrata ex AC CB dupla ſunt quadratorum ex AD DC, quod demonſtratum eſt in nono theoremate ſecundi libri elementorum; & ſunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD; propterea quòd AB in D bifariam ſecatur; quod autem bis fit ex DC duplum eſt quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB ęqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora ſunt quàm quadrata ex AD DB, eo, quod bis fit ex DC. Nõ ſecetur autem AB bifariam, ſed vtcunque in punctis CD, ita vt AD ſit maior, quàm CB. ſimiliter demonſtrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora eſſe. Quoniam enim recta linea AB vtcũque ſecatur in C, quadratum ex AB eſt ęquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratũ ex AB eſt ęquale quadratis ex AD DB vnà cũ eo, quod bis AD DB continetur. quorũ quod bis continetur AD DB maius eſt eo quod bis AC CB continetur. eſt enim rectangulum ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora ſunt. quod demonſtrare oportebat.

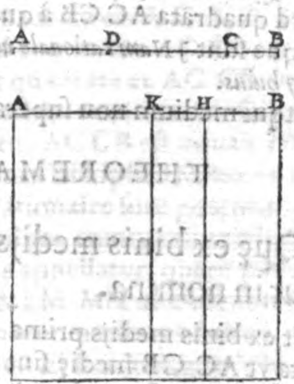
4. ſecundi:

Ex proximo demõſtratis.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perſpicue apparet exceſſum, quo compoſitum ex quadratis rectarum linearum AC CB ſuperat compoſitum ex quadratis ipſarum AD DB, ęqualẽ, vel potius eundem eſſe exceſſui, quo rectangulum bis contentum AD DB ſuperat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipſam AF applicetur parallelogrammum FH ęquale compoſito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG aequale rectangulo bis contento AC CB. Rurſus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK aequale compoſito ex quadratis AD DB. reliquum igitur parallelogrammum KG eſt aequale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH eſt aequale compoſito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK eſt aequale compoſito ex quadratis AD DB: etit parallelogrammum LH exceſſus, quo alterum alterum ſuperat. Sed idem LH eſt exceſſus, quo rectangulum bis contentum AD DB ſuperat id, quod bis AC CB continetur. conſtat igitur verum eſſe, quod nos demonſtrandum propoſuims.

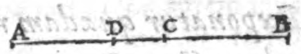


4. ſecundi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B diuiſa in nomina ad punctum C. ergo AC CB ratio
nales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Dico AB ad aliud punctũ non diuidi A.
in duas rationales potentia ſolum commenſurabiles. ſi enim fieri poteſt, diuidatur
in D, ita vt AD DB rationales ſint potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles. Itaq; manifeſtũ eſt A B
C non eſſe eandem, quæ D B. ſi enim fieri poteſt, ſit eadem. erit igitur & AD ca- C



dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD
ad DA : & AB in D ſimiliter diuiſa erit, atque in
D puncto C. quod non ponitur. ergo AC non eſt eadẽ,
E quę DB. ſimili ratione & puncta CD non ęqualiter
F diſtant à bipartita ſectione. quo igitur differunt quadrata rectarum linearum
AC CB ab ipſarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur
ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectarum linearũ AC
CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB; & quadrata ipſarum AD DB vnà cũ
G eo, quod bis AD DB continetur, æqualia ſunt quadrato ipſius AB. ſed quadrata
AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque ſunt. ergo
& quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ipſa
H media ſint. atqui medium non ſuperat medium rationali. nõ igitur quæ ex binis
nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur
in nomina. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles] *Ex 37 huius.*

B Itaque manifeſtum eſt AC non eſſe eandem, quæ DB] *Hoc eſt AC non eſſe aequalem ipſi DB; ſumitur enim hoc loco idem pro aequali.*

C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC ſit aequalis ipſi DB, dempta BC vtrique communi, erit reliqua AD reliquae CB ęqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuiſa, atque in ipſo C.*

E Simili ratione & puncta CD non æqualiter diſtant à bipartita ſectione] *Nã ſi AD CB inter ſe ęquales non ſint, neque puncta CD aequaliter diſtabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD biſariam diuidit.*

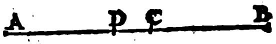
F Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipſarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis cõtinetur AC CB] *Quomodo hoc ſequatur in antecedenti ſcholio dictum eſt.*

G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque ſunt] *Nam rationale non ſuperat rationale, niſi rationali. quod nos demonſtrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non ſuperat medium rationali] *Ex 27 huius.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XLIIII.

Quę ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

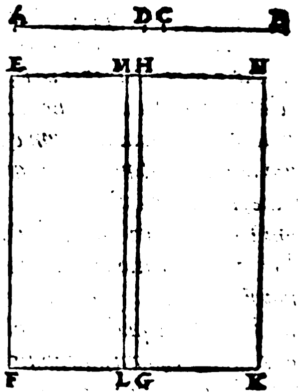


Sit ex binis medijs prima AB diuiſa in puncto
C, ita vt AC CB medię ſint potentia ſolum commenſurabiles,
quæ rationale contineāt. Dico AB
in alio puncto non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur
etiam in D, ita vt AD DB ſint medię potentia ſolum cõmenſurabiles, quæ
rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis AD
DB ab eo, quod bis AB CB continetur, hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum
Ex demonſtratis ad 21 huius. AC CB ab ipſarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum
AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim ſunt rationalia: ſequitur
vt etiam quadrata ipſarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ
27. huius. vtraque media ſunt. illud autem fieri non poteſt. non igitur quæ ex binis medijs prima
in alio, atque alio puncto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur
neceſſe eſt.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs ſecunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs ſecũda AB diuiſa in C,ita vt AC
CB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quę
medium contineant. manifeſtum eſt punctum C non
eſſe in bipartita ſectione, quoniam nõ ſunt longitudi
ne commenſurabiles. Dico ipſam A B in alio puncto
non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt
A C non ſit eadem, quæ DB. ſed maior A C poſitione. A
Itaque conſtat quadrata ex AC CB quadratis ex AD
DB maiora eſſe, vt ſupra oſtendimus; & AD DB me- B
dias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ me-
dium contineant. Exponatur rationalis EF: & quadra-
to quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad
ipſam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æqua
le auferatur EG. reliquum igitur HK æquale eſt ei, C
quod bis AC CB continetur. rurſus quadratis ex AD
DB, quæ minora ſunt quadratis ex AC CB, ut oſten-
ſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur EL. er-
go reliquum MK eſt æquale ei, quod bis cõtinetur AD DB. et quoniam media ſunt D
quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum eſt. qua E
re EH rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione &
HN eſt rationalis, & ipſi EF incommenſurabilis lõgitudine. Quòd cum AC CB me-
diæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, erit AC ipſi C B incommenſurabilis lon
gitudine. ut autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB contine-
tur. quadratum igitur ex A C incommenſurabile eſt ei, quod continetur AC CB.
ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex A C C B, etenim
AC CB potentia ſunt commenſurabiles; ei uero, quod continetur AC CB, commẽ
ſurabile eſt illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incom-
menſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autẽ ex AC CB æqua-
le eſt parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB eſt æquale HK. er- F
go EG ipſi HK eſt incommenſurabile; & ob id recta linea EH ipſi HN incommenſu
rabilis longitudine; ſuntq; rationales. ergo EH HN rationales ſunt potentia ſolum
commenſurabiles. ſi autem duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles com-
ponantur, tota irrationalis eſt, quę ex binis nominibus appellatur. quare EN ex bi- G
nis nominibus eſt diuiſa in puncto H. eadem ratione & EM MN oſtendentur ratio-
nales potentia ſolum cõmenſurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque H
aliud punctum diuiſa, uidelicet ad H, & ad M. & non eſt EH eadem, quæ MN: quo- K
niam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB ſunt maiora; quadrata autẽ ex AD
DB maiora ſunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc
eſt parallelogrammum EG multo maius eſt eo, quod bis continetur AD DB, hoc
eſt parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN eſt maior. non igitur E H eadem
eſt, quę MN. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed maior AC poſitione] *Hoc eſt ponatur nunc AC maior, quam DB.* A

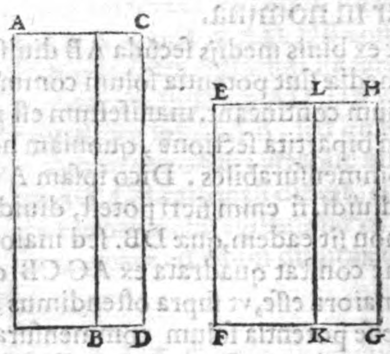
Vt ſupra oſtendimus] *In lemmate, quod poſitum eſt ante 43. huius.* B

Reliquum igitur HK æquale eſt ei, quod bis AC CB cõtinetur.] *Ex 4. ſecundi libri.* C

Et quoniam media ſunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] *Rectæ enim li* D
neae

neae AC CB ponuntur mediae potentia ſolum commenſurabiles. quare & media erunt ipſarum quadrata, atque inter ſe commenſurabilia; & ſi componantur vnum fiet medium, quemadmodũ ex duabus rationalibus, ſi longitudine commenſurabiles ſint, vna fit rationalis.

At vero ſpacium ex medijs compoſitum irrationale eſſe ſic demonſtrabimus.] *Componantur duo media ſpacia AB BC. Dico totum AD eſſe irrationale. ſit enim rationale, ſi fieri poteſt; exponaturq́; rationalis quędam recta linea EF; & ad ipſam applicetur parallelogrammum EG ipſi AD aequale, latitudinẽ faciens EH: à parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipſi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC eſt ęquale. & quoniam medium eſt vtrumque ipſorum AB BC; atque eſt EK quidem ipſi AB aequale; LG vero ipſi BC: erit & vtrumque ipſorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata ſunt. rationalis igitur eſt vtraque ipſarum EL LH, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam AD rationale ponitur, eſtq́; ipſi EG aequale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationalis erit, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. eſt autem EL eidem EF incommenſurabilis longitudine. ergo EH ipſi EL longitudine incommenſurabilis erit. ſed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commenſurabile eſt quadratis ex HE EL; vtrumque enim ipſorum eſt rationale. & rectangulum contentum HE EL eſt commenſurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quae ad 14. huius demonſtrauimus, quadrata ex HE EL incommenſurabilia ſunt ei, quod bis continetur HE EL. ſed quadratis ex HE EL aequale eſt id, quod bis HE EL continetur vnà cum quadrato ipſius LH, ex 7 ſecundi libri. ſi autem magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentium ſit incommenſurabilis, & reliquae incommenſurabilis erit. quod à nobis demonſtratum eſt ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommenſurabilia ſunt quadrato ex LH. rationalia autem ſunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale eſt: & ob id recta linea LH eſt irrationalis; ſed & rationalis, vt demonſtratum fuit; quod fieri non poteſt. non igitur ſpacium AD eſt rationale. quare irrationale ſit neceſſe eſt. quod demonſtrare oportebat.*



23.huius

21.huius.

13.huius.

E Quare EH rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis.] *Ex 23 huius.*

F Ergo EC ipſi HK eſt incommenſurabile] *Ex demonſtratis ad 14 huius.*

G Tota irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur] *Ex 37. huius.*

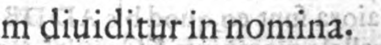
H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiſa, videlicet ad H, & ad M] *Quod fieri non poſſe in 43 huius demonſtratum eſt. non igitur quae ex binis medijs ſecunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi neceſſarium eſt.*

K Et non eſt EH eadem, quæ MN] *Oſtendit EH ipſi MN non eſſe aequalem.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB diuiſa in C, ita ut AC CB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum AC CB quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipſis continetur, mediũ. Dico AB in alio puncto non diuidi. ſi enim fieri poteſt, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incõmenſurabiles ſint, faciẽtes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis continetur, medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis continetur AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur.



ſed

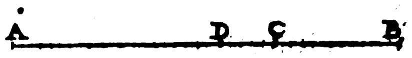
ſed quadrata ex AC CB ſuperant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia ſunt.ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali ſuperat id,quod bis AC CB cõtinetur, cũ media ſint.quod eſt abſurdũ.nõ igitur maior ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur neceſſe eſt.

Ex demonſtratis.ad 27 huius.

Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

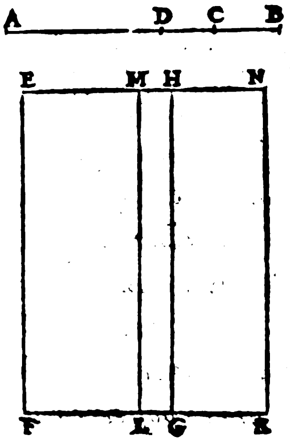
Rationale,ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit rationale,ac medium potens AB, diuiſa in C; ita vt AC CB potentia incõmenſurabiles ſint; faciantq; compoſitũ quidem ex ipſarum AC CB quadratis medium;quod autem ipſis continetur,rationale. Dico AB in alio puncto non diuidi.ſi enim fieri põteſt,diuidatur in D,ita vt etiam AD DB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium: quod autem ipſis continetur,rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur,hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB.rectangulum autem bis contentum AD DB rationali ſuperat id, quod bis AC CB continetur.ergo & quadrata ex AC CB ſuperant quadrata ex AD DB rationali,cum media ſint.quod eſt abſurdum.non igitur rationale,ac mediũ potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtax at punctum diuidetur.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit bina media potens AB,diuiſa in C, ita vt AC CB potentia incommenſurabiles ſint, facientes etiam compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium;& quod ipſis continetur,medium,incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita vt faciat quæ propoſita ſunt. Si enim fieri poteſt,diuidatur in D,ita vt rurſus AC non ſit eadem,quæ DB,ſed ſit AC poſitione maior;exponaturq; rationalis EF, & ad ipſam quadratis quidẽ ex AC CB ęquale parallelogrammum EG applicetur;rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK eſt æquale ei,quod fit ex AB, quadrato. Rurſus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB.ergo reliquum, quod bis AD DB continetur,reliquo MK eſt æquale.& quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB medium ponitur,erit & parallelogrammum EG medium:& ad rationalem EF applicatum eſt. rationalis igitur eſt HE,& ipſi EF longitudine incommenſurabilis. Eadem ratione & HN eſt rationalis, ipſiq; EF incommenſurabilis longitudine.& quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB incommenſurabile eſt ei,quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammũ EG ipſi HK incommenſurabile.ergo & recta linea EH eſt incommenſurabilis rectę HN.& ſunt rationales.quare EH HN rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles

4.ſecundi.

23.huius.

biles.& ob id EN ex binis nominibus eſt diuiſa in puncto H. ſimiliter oſtendemus ipſam EN in puncto quoque M diuidi:& non eſt H eadem, quæ MN. ergo quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod eſt abſurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

Ex 43. huius.

DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Expoſita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſsit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſiquidem maius nomen expoſitæ rationali commenſurabile ſit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expoſitæ rationali longitudine ſit commenſurabile, dicatur ex binis nominibus ſecunda.

3 Quòd ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rurſus ſi maius nomen plus poſsit, quàm minus, quadrato rectę lineæ ſibi lõgitudine incommenſurabilis, ſiquidem maius nomen expoſitæ rationali ſit commenſurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd ſi neutrum, dicatur ſexta.

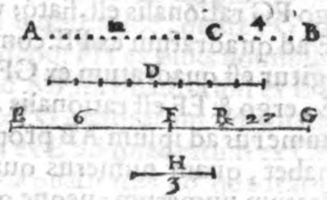
SCHOLIVM.

Cum igitur ſex rectæ lineę ita ſumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus poteſt, quàm minor, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; ſecundas uero tres reliquas, in quibus maior plus poteſt, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quòd commenſurabile antecedit incommenſurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commenſurabile eſt expoſitæ rationali; ſecundam, in qua minus nomen, quoniam rurſus maius antecedit minus, cum ipſum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expoſitæ rationali eſt commenſurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans, ſecundam quintam, & tertiam ſextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compoſitus ex ipſis, videlicet AB ad ipſum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;



numerum;ad ipſum vero CA proportionem
non habeat, quã quadratus numerus ad qua
dratum numerum.& exponatur quędam ra-
tionalis D;& ipſi D longitudine commenſu-
rabilis ſit EF. ergo EF eſt rationalis.fiat autẽ
vt BA numerus ad numerum AC, ita ipſius
EF quadratum ad quadratũ FG. Sed BA ad
AC proportionem habet,quam numerus ad
numerum. ergo & quadratum ipſius EF ad
quadratũ FG proportionẽ habebit,quã numerus ad numerũ.cõmenſurabile igitur D
eſt quadratũ ex EF quadrato ex FG;atq; eſt EF rationalis.ergo & rationalis FG. & E
qm̃ BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadra
tum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem ha
bebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipſi FG in- F
commenſurabilis eſt longitudine.& ob id EF FG rationales ſunt potentia ſolum cõ
menſurabiles.ex binis igitur nominibus eſt EG.Dico & primam eſſe.Quoniã enim G
eſt vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG qua-
dratum.maior autem eſt BA,quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG
eſt maius.ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H.Quoniam igitur eſt vt B H
A ad AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuerſionem ratio-
nis vt AB ad BC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. ſed AB ad BC propor-
nem habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igi
tur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus
ad quadratum numerum.quare EF ipſi H longitudine eſt commẽſurabilis. ideoq; K
EF plus poteſt, quàm FG quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.
ſunt autem EF FG rationales,& EF ipſi D longitudine eſt commenſurabilis. ergo L
EG ex binis nominibus eſt prima.

F. C. COMMENTARIVS.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compoſitus ex ipſis videlicet AB ad ipſum quidem BC proportionem habeat,quam quadratus numerus ad quadratum numerum;ad ipſum vero CA proportionem non habeat] *Inuenientur autem hi ex corollario primi lemmatis ante 30 huius.* A

Ergo EF eſt rationalis] *Ex 6 diffinitione.* B

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipſius EF quadratum ad quadratum FG] *Ex corollario 6 huius.* C

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex EF quadrato ex FG] *Ex ſexta huius.* D

Ergo & rationalis FG] *Ex 6 diffinitione.* E

Ergo EF ipſi FG incommenſurabilis eſt longitudine] *Ex 9 huius.* F

Ex binis igitur nominibus eſt EG] *Ex 37 huius.* G

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H] *Inuenietur quadratum ipſius H ex lẽmate ante 15 huius.* H

Quare EF ipſi H longitudine eſt commenſurabilis] *Ex 9 huius.* K

Ergo EG ex binis nominibus eſt prima] *Ex prima ſecundarum diffinitionum.* L

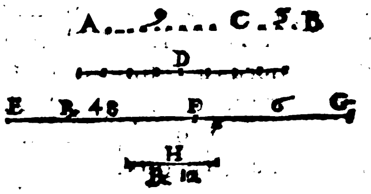
Sit AC numerus 12, CB 4, & EF 6. fiatq; vt 16 ad 12, ita 36 ad aliũ. erit ad 27, ergo 6 plus ℞ 27 eſt ex binis nominibus prima.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO L.

Inuenire ex binis nominibus ſecundam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB ad ipſum BC quidem proportionem habeat,quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

numerum:& exponatur rationalis D:& ſit FG ipſi D longitudine commenſurabi-
6.diffi. lis.ergo FG rationalis eſt.fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum
Corol. 6. huius. ex GF ad quadratum ex FE.commenſura-
6.huius. bile igitur eſt quadratum ex GF quadrato
6.diffi. ex FE. ergo & EF eſt rationalis. & quoniã
CA numerus ad ipſum AB proportionem
non habet, quam numerus quadratus ad
quadratum numerum; neque quadratum
ex GF ad quadratum ex FE proportionẽ
habebit, quàm numerus quadratus ad qua
9.huius. dratum numerum.incommenſurabilis igi
tur eſt GF ipſi FE longitudine. quare EF FG rationales ſunt potentia ſolum com-
menſurabiles;ac propterea ex binis nominibus eſt EG. Oſtendendum eſt & ſecun-
dam eſſe. Quoniam enim conuertendo eſt vt BA numerus ad numerũ AC,ita qua-
dratum ex EF ad quadratum ex FG: maior autẽ eſt BA,quàm AC.ergo & quadra-
tum ex EF quadrato ex FG eſt maius.ſint quadrato ex EF æqualia quadrata e xFG,
H.eſt igitur per conuerſionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad qua
dratum ex H. ſed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad
quadratum numerum.ergo & quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionẽ
9.huius. habebit,quam quadratus numerus ad quadratum numerum;& ob id EF ipſi H lon
gitudine eſt commenſurabilis.quare EF plus poteſt, quàm FG quadrato rectæ li-
neę ſibi commenſurabiles longitudine.ſuntq; rationales EF FG potentia ſolum cõ
menſurabiles:& FG minus nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi D expoſi-
2.diffi.ſecũdarum. tæ rationali.ergo EG ex binis nominibus eſt ſecunda.

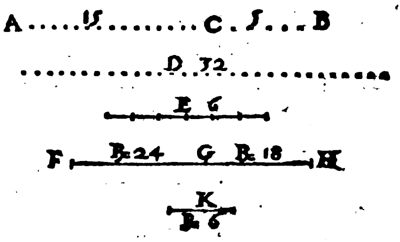


F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 9 CB 3. & FG 6. fiat autem vt 9 ad 12, ita 36 ad aliũ erit ad 48. quare ℞ 48 plus 6 eſt ex binis nominibus ſecunda.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.



Exponantur duo numeri AC CB, ita vt
compoſitus ex ipſis AB ad BC quidem pro-
portionem habeat, quam numerus quadra-
tus ad quadratum numerum; ad AC vero
proportionem non habeat, quam numerus
quadratus ad quadratum numerum. Expo-
natur etiam alius numerus D non quadra-
tus, qui ad vtrumque ipſorum BA AC pro-
portionem non habeat,quam quadratus nu
merus ad quadratum numerum.denique ex
ponatur rationalis quędam recta linea E;
Corol.6.huius. fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad
6.huius. quadratum ex FG.quadratum igitur ex E quadrato ex FG eſt commenſurabile.ra-
Diffi.6. tionalis autem eſt E.ergo & FG eſt rationalis.& quoniam D ad AB proportionem
non habet,quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum
ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit,quã quadratus numerus ad qua
9.huius. dratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt E ipſi FG longitudine.Rurſus fiat
vt BA numerus ad numerum AC,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. er-
6.huius. go quadratum ex FG quadrato ex GH eſt commenſurabile. rationalis autem eſt F
G.quare,& GH eſt rationalis.& quoniam BA ad AC proportionem non habet,quã
quadratus numerus ad quadratum numerum,neque quadratum ex FG ad quadra
tum

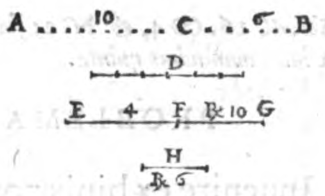
tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt FG ipſi GH longitudine. quare FG GH rationales 9.huius. ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus eſt. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. ſed D ad AC proportionem non habet, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipſi GH incommenſurabilis eſt longitudine. Et quoniam vt BA ad 9.huius. AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. ſint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuerſionem igitur rationis eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. ſed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commenſurabilis igitur eſt F 9.huius. G ipſi K longitudine: & ob id FG plus poteſt, quam GH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. ſuntq; FG GH, rationales potentia ſolum commenſurabiles: & neutra ipſarum commenſurabilis eſt ipſi E longitudine. ergo FH ex bi- 3 diffi. ſecundarum. nis nominibus eſt tertia.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30, rationalis autẽ E ſit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ. erit ad 24. rurſus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc eſt ad 18. ergo ℞ 24 plus ℞ 18 eſt ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.



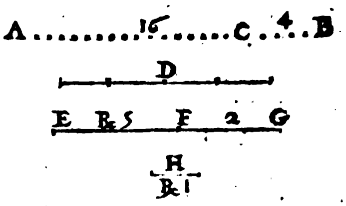
Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrũque ipſorum proportionem non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipſi D commenſurabilis ſit EF longitudine. ergo EF eſt rationalis. fiat diffi.6. autem vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commenſura- 6.huius. bile igitur eſt quadratum ex EF quadrato ex FG: ideoq; recta linea FG eſt rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipſi FG longitudi- 9.huius. ne incommenſurabilis. ergo EF FG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabi- 37.huius. les: & ob id EG ex binis nominibus eſt. Dico eam & quartam eſſe. Quoniam enim eſt vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem eſt BA, quàm AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuerſionem igitur rationis eſt vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. ſed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. er- 9.huius. go EF ipſi H longitudine eſt incommẽſurabilis; ac propterea EF plus poteſt, quàm FG quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; EF FG rationales potentia ſolum commenſurabiles; & EF ipſi D commenſurabilis eſt longitudi- 4.diffi.ſecundarum. ne. ergo EG ex binis nominibus eſt quarta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 10, CB 6. rationalis autem D ſit 6, & EF 4; fiatq; ut 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10. erit 4 plus ℞ 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.



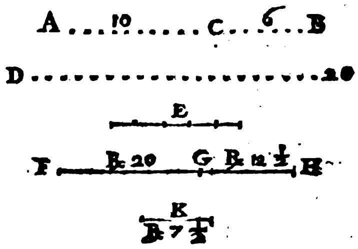
Exponantur duo numeri A C C B, ita vt AB ad vtrumque ipſorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipſi D longitudine commenſura- 6.diffi. bilis ſit FG.ergo FG eſt rationalis:& fiat vt C A ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum.rationalis igitur eſt FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nõ habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum;neque quadratum ex G F ad quadratum ex FE proportionem habebit,quam numerus quadratus ad quadratum numerum.ergo EF 37 huius. FG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id EG ex binis nominibus eſt. itaque dico & quintam eſſe. Quoniam enim eſt vt CA ad AB, ita quadratũ ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG eſt maius. ſint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG,H. per cõuerſionem igitur rationis eſt vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id,quod ex H quadratum. ſed AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea E F ipſi H longitudine eſt incommẽſurabilis. quare EF plus poteſt, quàm FG,quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; EF FG rationales potentia ſolum com- 5.diffi.secundarum. menſurabiles: & FG minus nomen expoſitę rationali D commenſurabilis eſt longitudine.ergo EG ex binis nominibus eſt quinta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20,ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit ℞ 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus ſextam.



Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipſorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ſit etiam alius numerus D non quadratus,qui ad vtrumque ipſorum BA AC proportionem non habeat,quam numerus quadratus ad quadratum numerum : & exponatur rationalis quędã recta linea E : fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. commẽſurabilis igitur eſt E ipſi F G potentia,atque eſt E rationalis. quare & rationalis eſt F G. Et quoniam D ad AB proportionem non habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum;neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habe- 9.huius. bit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipſi F G longitudine eſt incommenſurabilis.itaque rurſus fiat ut BA ad AC, ſic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH eſt commenſura- 9.diffi. bile. rationale autem eſt quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH eſt rationale: ob idq; recta linea GH eſt rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionẽ nõ habet,

bet;quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex G H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt F G ipſi G H longitudine: & ideo 9.huius: FG GH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare ex binis nominibus eſt FH. 37.huius. oſtẽdendum eſt & ſextã eſſe. Quoniam enim vt D ad AB,ita eſt quadratũ ex E ad quadratũ ex F G; eſt aũt & vt BA ad AC,ita quadratũ ex F G ad quadratũ ex GH: erit ex æquali vt D ad AC,ita quadratũ ex E ad quadratũ ex GH. ſed D ad AC proportionem non habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex G H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt 9.huius. E ipſi GH longitudine. oſtenſum autem eſt & ipſi FG incommẽſurabilem eſſe. quare utraque ipſarum FG GH ipſi E longitudine eſt incommenſurabilis. & quoniam eſt vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratũ ex FG quadrato ex GH maius. ſint quadrato ex FG ęqualia quadrata ex GH, K. ergo per conuerſionem rationis vt AB ad BC,ita eſt quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed A B ad B C proportionem non habet,quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipſi K longitudine eſt incommenſurabilis. ergo FG plus poteſt,quàm GH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: ſuntq; FG GH rationales potentia ſolum commenſurabiles: & neutra ipſarum longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali E. quare FH ex binis nominibus eſt ſexta. 6.diffi.ſecundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E ſit 5, & fiat vt 20 ad 16, ita 25 ad alium, nempe ad 20. rurſus fiat vt 16 ad 10,ita 20 ad aliũ, erit ad $12\frac{1}{2}$. ergo ℞ 20 plus ℞ $12\frac{1}{2}$ eſt ex binis nominibus ſexta.

LEMMA

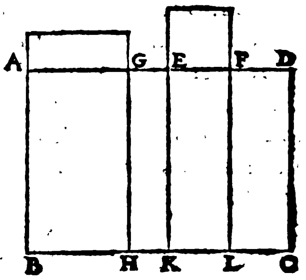
Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, vt DB ſit in directum ipſi BE. ergo & FB ipſi B G in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum eſſe: & quadratorum A B B C rectangulum DG medium eſſe proportionale; itemq; ipſorum AC CB medium proportionale eſſe DC.

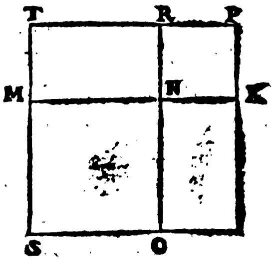
Quoniam enim D B quidem eſt æqualis B F, E B vero ipſi B G; erit tota D E toti FG æqualis. ſed DE æqualis eſt vtrique ipſarum AK H C.ergo & vtraque AH 34.primi. KC vtrique AK HC eſt ęqualis. ęquilaterũ igitur,eſt AC parallelogrãmum. eſt autem & rectangulum. ergo quadratum eſt AC.Et quoniam eſt vt FB ad BG,ita DB ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igitur AB ad DG, ita eſt DG ad BC:ideoq; ipſorum AB BC medium proportionale eſt DG. Dico præterea ipſorum AC CB medium proportionale eſſe DC. nam cũ ſit vt AD ad DK, ita KG ad GC: eſt enim vtraque vtrique æqualis: & componendo erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. ſed vt AK ad KD,ita AC ad CD;& vt KC ad CG, 1.ſexti. ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD,ita eſt DC ad CB. ac propterea ipſorum AC CB medium proportionale eſt CD. quod oſtendendum proponebatur.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

Si ſpacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta

recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.





Spaciũ enim ABCD contineatur rationali AB,
& ex binis nominibus prima AD. Dico rectam
lineam, quę poteſt ſpacium A C irrationalem eſſe,
quę ex binis nominibus appellatur. Quoniã enim
AD eſt ex binis nominibus prima, diuidatur in
1. Secundarũ diffin. nomina ad punctum E: & ſit AE maius nomen.
manifeſtum eſt AE ED rationales eſſe potentia ſolũ
commenſurabiles, & AE plus poſſe, quàm ED
quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine:
& præterea AE expoſitæ rationali A B longitudine
commenſurabilem eſſe. Secetur ED bifariam
in F. Quoniam igitur A E plus poteſt, quàm E D
quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine,
ſi quartę parti quadrati, quod fit à minori,
hoc eſt quadrato ex EF æquale parallelogrammũ
ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata,
A in partes commenſurabiles ipſam diuidet.
B itaque applicetur, & fit A G E. ergo A G ipſi G E
longitudine eſt commenſurabilis. Deinde per pũcta
G E F alterutri ipſarum A B DC parallelæ ducantur
14. ſecundi. GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum conſtituatur
SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN
ſit in directum ipſi N X. ergo RN ipſi N O in directum erit: & parallelogrammum
Ex antecedẽti lemmate. SP compleatur, quadratum igitur eſt SP. & quoniam rectangulum AGE eſt æquale
quadrato ex EF, erit vt A G ad E F, ita FE ad E G. quare & vt A H ad E L, ita eſt
C EL ad KG: ac propterea parallelogrammorum A H K G mediũ proportionale eſt
1. ſexti. EL. Sed parallelogrammo AH ęquale eſt quadratum SN, & parallelogrammo GK
æquale quadratum NP. ergo quadratorum SN NP medium proportionale eſt EL.
ſed & eorumdem SN NP medium proportionale eſt & MR. æquale igitur eſt MR
43. Primi. ipſi EL. ſed MR eſt æquale OX, & EL ipſi FC. ergo totũ EC ipſis MR OX eſt æquale.
ſũnt autem & AH GK ęqualia ipſis SN NP. totũ igitur A C eſt æquale toti S P,
hoc eſt quadrato ex MX; ideoq; ipſa MX poteſt parallelogrammum AC. Dico MX
D ex binis nominibus eſſe. quoniam enim AG commenſurabilis eſt ipſi G E, erit A E
utrique ipſarum AG GE commenſurabilis; ponitur autem & A E commenſurabilis
E ipſi AB longitudine. ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles; ſunt; atque eſt
F AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipſarũ AG GE: & ob id rationale vtrũq;
G ipſorum AH GK: & A H ipſi G K eſt commenſurabile. ſed A H eſt ęquale ipſi S N,
& GH ipſi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia
H ſunt, & commenſurabilia. Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi E D longitudine,
& AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG; DE vero ipſi EF: erit & A G ipſi
K L EF longitudine incommenſurabilis. ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL. ſed
AH eſt æquale SN, & EL ipſi MR. quare S N eſt incommenſurabile ipſi M R: vt autem
M SN ad MR, ita ON ad NR. incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR: eſt autẽ
N ON ęqualis MN, & NR ipſi NX. ergo MN ipſi NX eſt incommẽſurabilis. atque eſt
quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX: & vtrumque rationale. quare
37. huius. MN NX rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus
eſt, & poteſt parallelogrammum AC. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A In partes commenſurabiles ipſam diuidet] *Ex 2 parte 18 huius.*

B Itaque applicetur, & ſit AGE] *Ex 3 lemmate ante 18 huius.*

C Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14 ſexti.*

D Erit AE vtrique ipſarum AG GE commenſurabilis] *Ex 16 huius.*

E Ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles ſunt] *Ex 12 huius.*

F Et ob id rationale vtrumque ipſorum AH GK] *Ex 20 huius.*

G Et AH ipſi GK eſt commenſurabile] *Eſt enim ex 1 ſexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogramum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipſi GK eſt commenſurabile.*

H Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine] *Ponitur enim AD eſſe ex binis nominibus prima, quae conſtat ex duabus rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.*

K Erit & AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis] *Ex ijs, quae ad 14 huius demonſtrauimus.*

L Ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipſum EL. quare ex 10 huius propoſitum concludetur.*

M Incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam eſt.*

N Atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim ſupra demonſtratum eſt.*

Sit AB 5, & AD 4 plus ℞ 12. erit EF, vel FD ℞ 3. & ſi ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonſtratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammũ AH eſt 15, GK 5, & EL vel FC ℞ 75: ideoq; totum AC parallelogrammum erit 20 plus ℞ 300. Huiuſmodi vero ſpacia iuniores etiam binomialia, ſeu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quae tradita ſunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis ſpacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

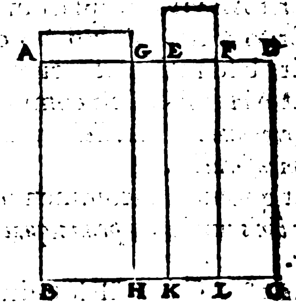
Sit binomiale ſpacium 20 plus ℞ 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati minoris nominis, hoc eſt aequale 75. erit ex ijs, quae nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico ℞ 15 plus ℞ 5 eſſe latus quadratum eius ſpacij 20 plus ℞ 300. Quoniam enim recta linea, quae ex binis nominibus cõſtat, videlicet ℞ 15 plus ℞ 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius aequale quadratis partiũ vnà cum rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum ℞ 15 eſt 15; & quadratum ℞ 5 eſt 5: rectangulum autem, quod continetur ℞ 15 & ℞ 5 eſt ℞ 75, & eius duplum eſt ℞ 300. quae omnia ſi componantur facient 20 plus ℞ 300, et idem erit quadratũ, quod fit ex recta linea ℞ 15 plus ℞ 5. ergo ℞ 15 plus ℞ 5 eſt latus quadratum, vel radix huius ſpacij binomialis 20 plus ℞ 300. Eodem modo & aliorum ſpaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

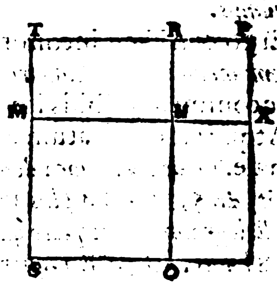
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AC poteſt, ex binis medijs primam eſſe. Quoniam enim AD eſt ex binis nominibus ſeeunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE ſit maius nomen. ergo AE ED rationales ſunt potẽtia ſolum cõmenſurabiles: & AE plus poteſt quàm ED quadrato rectę lineę ſibi longitudine cõ- 2.diffi secũdarum. menſurabilis: & minus nomen ED commenſurabile eſt ipſi AB longitudine. ſecetur ED bifariam in F: & quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AGE. commenſurabilis 18.huius. igitur eſt AG ipſi GE lõgitudine. & per puncta G E F ipſis AB DC parallelę ducantur GH EK FL. parallelogrammo autẽ AH ęquale quadratum SN conſtituatur, & parallelogrammo GK ęquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi

ipſi NX. ergo & RN ipſi NO in directum erit; &
In antecedẽti lemmate. compleatur SP quadratum. manifeſtum iam eſt ex
ijs, quæ demõſtrata ſunt, parallelogrammum MR
medium eſſe proportionale quadratorum SN N
Ex demonſtratis in antecedente. P: & parallelogrammo EL ęquale. & prętereà rectã
lineam MX poſſe ſpacium AC. oſtendendum
igitur eſt ipſam MX ex binis medijs primam eſſe.
37. huius. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AE ipſi
ED longitudine, cõmenſurabilis aũt ED ipſi AB;
14. huius. erit AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis.
Et quoniam AG commenſurabilis eſt longitudine
16. huius. ipſi GE, erit AE vtrique ipſarũ AG GE lõgitudine
6. diffi. cõmẽſurabilis. atque eſt AE rationalis. rationalis
igitur & vtraque AG GE. Quòd cũ AE ſit
incommenſurabilis quidem ipſi AB lõgitudine,
commenſurabilis autẽ vtrique ipſarum AG GE,
24. huius. erunt AG GE ipſi AB longitudine incommenſurabiles.
quare BA, AG, GE rationales ſunt
22. huius. potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur
eſt vtrumque parallelogrammorum AH G
K. & ob id vtrumque quadratorum SN NP eſt
medium. ergo rectæ lineę MN NX medię ſunt.
rurſus quoniam commenſurabilis eſt AG ipſi GE longitudine, erit parallelogrammum
AH parallelogrammo GK commenſurabile, hoc eſt quadratum SN ipſi NP,
hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia commenſurabiles
ſunt. & quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine: & AE quidem
Ex demonſtratis ad 14 huius. eſt commenſurabilis ipſi AG; ED vero ipſi EF: erit AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis.
quare & parallelogrammum AH incommenſurabile parallelogrammo
EL, hoc eſt SN ipſi MR, hoc eſt ON ipſi NR, hoc eſt MN ipſi NX incommenſurabilis
eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN NX & mediæ, & potentia commenſurabiles.
ergo MN NX medię ſunt, potentia ſolum commenſurabiles. Dico & rationale
continere. Quoniam enim DE ponitur commẽſurabilis vtrique ipſarum AB EF.
21. huius. erit FE ipſi EK longitudine commenſurabilis: atque eſt rationalis vtraque ipſarum,
20 huius. rationale igitur eſt & parallelogrammum EL, hoc eſt MR. eſtq; MR, quod MN NX
continetur. ſi autem duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur,
38. huius. quę rationale contineant; tota irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur.
ergo MX ex binis medijs eſt prima, quod demonſtrare oportebat.





F. C. COMMENTARIVS.

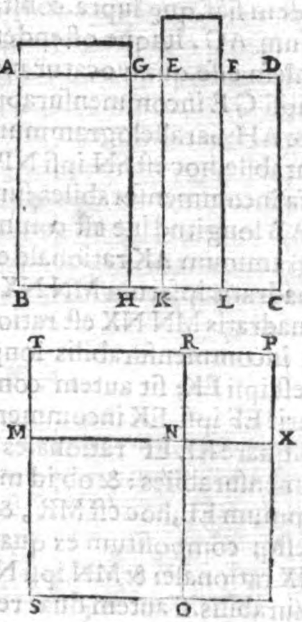
Sit AB 6, AD ℞ 12 plus 3. erit EF vel FD 1 $\frac{1}{2}$: & ſi ad AE applicetur parallelogrammũ aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata; erit AG ℞ 6 $\frac{3}{4}$ GE ℞ $\frac{3}{4}$. parallelogrammum igitur AH eſt ℞ 243, GK ℞ 27, & EL 9: & totum AC parallelogrammum ℞ 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, diuidemus ℞ 432 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati 18, hoc eſt aequale 81. erit ex iam dictis maior pars ℞ 108 plus ℞ 27: quae duae radices ſi inter ſe componantur facient ℞ 243. minor autem pars erit ℞ 108 minus ℞ 27. & detracta ℞ 27 à ℞ 108 relinquitur ℞ 27. maior igitur pars eſt ℞ 243, & minor ℞ 27. quare ſpacij binomialis ℞ 432 plus 18 radix erit ℞℞ 243 plus ℞℞ 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis medijs ſecunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB,& ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius ſit AE. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpacium AC irrationalem eſſe, quę ex binis medijs ſecūda appellatur. conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia eſt, erunt AE ED rationales potentia ſolum commenſurabiles,& AE plus poterit, quàm ED quadrato rectę lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: neutraq; ipſarum AE,ED ipſi AB longitudine erit commenſurabilis. ſimiliter oſtēdemus MX eam eſſe, quæ ſpacium AC poteſt,& MN NX ex binis eſſe medijs. itaque oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. Quoniam enim DE incommenſurabilis eſt longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; atque eſt DE commenſurabilis EF: erit EF ipſi EK longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales. ergo FE EK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id EL, hoc eſt MR medium eſt, quod MN NX continetur. quarę MX ex binis medijs eſt ſecunda.



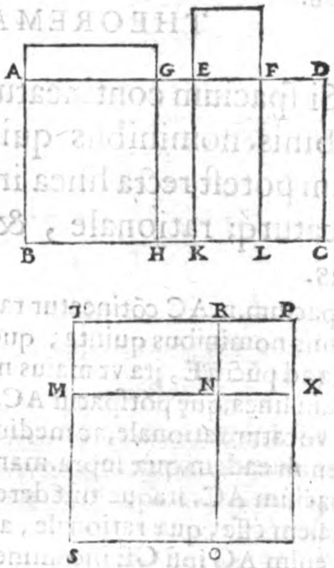
diffi.3.ſecundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD ℞ 18 plus ℞ 10. erit EF ℞ 2 $\frac{1}{2}$*: & ſi ad AE applicetur parallelogrammū AGE aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata, erit AG ℞ 12* $\frac{1}{2}$ *GE* $\frac{1}{2}$*. quare parallelogrammum AH eſt ℞ 450, GK ℞ 18, & EL ℞ 90: & totum parallelogrammum AC eſt 648 plus ℞ 360. Diuidatur ℞ 648 in duas partes, ita vt quod ipſis continetur ſit aequale quartae parti quadrati ℞ 360, hoc eſt 90. erit maior pars ℞ 450, & minor ℞ 18. ſpacij igitur binomialis ℞ 648 plus ℞ 360 radix eſt ℞℞ 450 plus ℞℞ 18.*

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

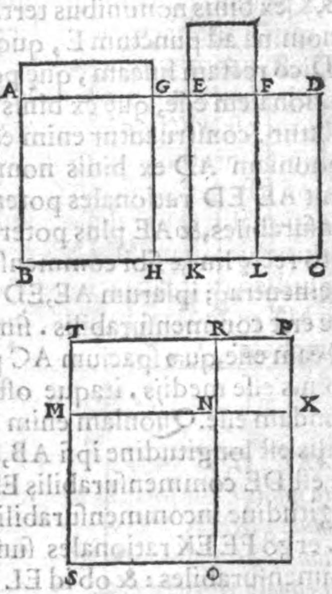
Si ſpacium contineatur rationali,& ex binis nominibus quarta, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ vocatur maior.



Spacium enim AC contineatur rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuiſa in nomina ad punctum E, quorum AE ſit maius. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AC poteſt, irrationalem eſſe, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus eſt quarta, erunt AE ED rationales potentia ſolum commenſurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommeuſurabilis: & AE ipſi AB commenſurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipſius EF æquale parallelogrammum ad AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AGE. erit igitur AG ipſi GE longitudine incommen-

diffi.4.ſecundarum.

19.huius:



ſurabilis. Ducãtur ipſi AB parallelę GH EK FL. & eadem fiãt, quę ſupra. conſtat igitur MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtendendum eſt MX irrationalem eſſe, quæ vocatur maior. Quoniã enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt lõgitudine, erit & AH parallelogrammum ipſi GK incommẽſurabile, hoc eſt SN ipſi NP. ergo MN NX potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum AK rationale eſt. atque eſt æquale quadratis ipſarum MN NX. ergo compoſitũ ex quadratis MN NX eſt rationale. quod cum DE ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; ſit autem commenſurabilis ipſi EF: erit EF ipſi EK incommenſurabilis longitudine. quare KE EF rationales ſunt potentia ſolũ 20 : huius. commenſurabiles: & ob id medium eſt parallegrammum EL, hoc eſt MR, & MN NX continetur: eſtq; compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX rationale: & MN ipſi NX potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum qua- 40. huius. dratis rationale, quod autem ipſis continetur medium; tota irrationalis erit. vocetur autem maior. ergo MX irrationalis eſt, quæ maior appellatur, & poteſt ſpacium A C. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD 6 plus R *24. erit EF* R *6. ſi autem ad AE applicetur parallelogrammum AGE aequale quadrato ipſius EF, et deficiẽs figura quadrata; erit AG 3 plus* R *3, & GE 3 minus* R *3. ergo AH parallelogrammũ eſt 18 plus* R *108, GK 18 minus* ℞ *108, & EL vel FC* ℞ *216, totumq́; parallelogrammum AC 36 plus* ℞ *864. itaque ſi diuidamus 36 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit ęquale 216, erit maior pars 18 plus* ℞ *108, & minor 18 minus* R *108. quare ſpacij binomialis 36 plus* R *864 radix eſt* R *V. 18 plus* ℞ *108 plus* ℞ *V. 18 minus* R *108.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt, vocaturq; rationale, & medium potens.

Spacium.n. AC cõtineatur rationali AB, & AD exbinis nominibus quinta, quę diuidatur in nomina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ ſit AE. Dico rectam lineã, quę põtſpaciũ AC, irrationalẽ eſſe, quę vocatur rationale, ac mediũ potens. conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. manifeſtũ eſt MX poſſe ſpacium AC. itaque oſtẽdere oportet MX irrationalem eſſe, quæ rationale, ac medium poteſt. 19. huius. Qm̃ enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt longitudine, & parallelogrammum AH eſt incom-

menſurabile

menſurabile parallelogrammo HE, hoc eſt quadratũ ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incõmenſurabiles ſunt. Quòd cũ AD ſit ex binis nominibus quinta; ſitq; minor ipſius portio ED; erit ED ipſi AB cõmẽſurabilis longitudine. ſed AE ipſi ED eſt incommenſurabilis. ergo & AB incommenſurabilis eſt longitudine ipſi AE; ac propterea BA AE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt AK, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX. & quoniam DE commenſurabilis eſt longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; eſtq; DE commenſurabilis ipſi EF: erit & FE ipſi EK commenſurabilis. rationalis autem eſt EK. ergo & FE eſt rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc eſt MR, hoc eſt quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium: quod autem ipſis continetur, rationale. ergo MX potens eſt rationale, ac medium, & poteſt ſpacium AC. quod demõſtrare oportebat.

Diffi. 5. ſecũdarum.

22. huius.

12. huius.

20. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD ℞ *24 plus 4, erit EF 2. applicetur ad AE parallelogrammum AGE aequale quadrato ipſius EF, deficiẽs figura quadrata; erit AG* ℞ *6 plus* ℞ *2, GE* R *6 minus* ℞ *2; parallelogrammumq́; AH* R *216 plus* R *72; GK* R *216 minus* R *72; EL 12: & totum AC parallelogrammum* R *864 plus 24. ſi igitur diuidamus* R *864 in duas partes, vt id, quod ex ipſis producitur, ſit ęquale 144, erit maior pars* R *216 plus* R *72, & minor* R *216 minus* R *72. quare ſpacij binomialis* R *864 plus 24 radix eſt* R *V.* R *216 plus* R *72 plus* R *V.* R *216 minus* R *72.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO LX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt: vocaturq́; bina media potens.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE ſit maius nomen. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium AC, irrationalem eſſe, quæ vocatur bina media potens. conſtruantur enim eadem, quę ſupra, manifeſtũ eſt MX poſſe ſpacium AC: & MN ipſi NX potentia incommenſurabilem eſſe. Et quoniam EA ipſi AB incommenſurabilis eſt longitudine, erunt EA AB rationales potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt AK, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarũ MN NX. Rurſus quoniam incõmenſurabilis eſt ED ipſi AB longitudine, erit & FE ipſi EK longitudine incommenſurabilis. ergo & FE EK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea medium eſt EL, hoc eſt MR, hoc eſt quod MN NX continetur. Quòd cum AE ſit incommenſurabilis ipſi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incõmenſurabile erit. Sed AK quidem eſt cõpoſitũ ex quadratis ipſarũ MN NX: EL vero eſt quod MN, NX continetur. incommenſurabile igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque eſt vtrumque ipſorum medium; & MN NX potentia ſunt incommenſurabiles. ergo MX eſt bina media potens, & poteſt ſpacium AC. quod demonſtrare oportebat.

22. huius.

A

B

C

D

F. C. COMMENTARIVS.

A Rurſus quoniam incõmenſurabilis eſt ED ipſi ab longitudine, erit & FE ipſi EK longitudine incommenſurabilis] *Quoniam enim ED ipſi AB incommenſurabilis eſt longitudine; atque eſt FE commenſurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipſi AB, hoc eſt ipſi EK longitudine incommenſurabilis.*

B Quòd cum AE ſit incommenſurabilis ipſi EF] *Ex 13 huius. eſt enim AE ipſi ED incommenſurabilis, & EF commenſurabilis ipſi ED.*

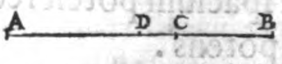
C Et MN NX potentia ſunt incommenſurabiles] *Nam cum AG ſit incommenſurabilis ipſi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc eſt quadratũ ex MN quadrato ex NX incommenſurabile. ergo MN NX potentia incommenſurabiles ſunt.*

C Ergo MX eſt bina media potens] *Ex 42 huius.*

D *Sit AB* 5, *AD* R 10 *plus* R 8. *erit EF* R 2. *ſi igitur ad AE applicetur parallelogrammum A G E, aequale quadrato ipſius E F, quod deficiat figura quadrata, erit A G* R $2\frac{1}{2}$ *plus* R$\frac{1}{2}$, *GE* R $2\frac{1}{2}$ *minus* R $\frac{1}{2}$ *& parallelogrammum AH* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$, *GK* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R $12\frac{1}{2}$, *et EL* R 50*: totumq́; AC parallelogrammum* R 250 *plus* R 200. *Diuidatur* R 250 *in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale* 50; *erit maior pars* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$, *& minor* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R $12\frac{1}{2}$. *Eius igitur ſpacij binomialis* R 250 *plus* R 200 *radix eſt V.* R $62\frac{1}{2}$ *plus* R $12\frac{1}{2}$ *plus* R $62\frac{1}{2}$ *minus* R$12\frac{1}{2}$.

L E M M A.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, ipſarum partium quadrata maiora ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.



Sit recta linea A B, & ſecetur in puncto C, ita vt AC ſit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora eſſe rectangulo, quod bis AC CB continetur. ſecetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem ęquales ſecatur ad D; in partes vero inęquales ad C; rectangulum, quod AC CB continetur vnà cum quadrato ipſius C D eſt æquale ei, quod fit ex AD quadrato. ergo rectanctulũ ACB quadrato ex AD eſt minus. quod igitur bis continetur AC CB minus eſt quàm duplum quadrati ex AD. ſed quadrata ex AC CB dupla ſunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora ſunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonſtrare oportebat. 5. ſecundi. *

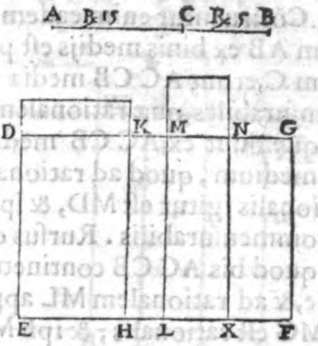
F. C. COMMENTARIVS.

* Ergo quadrata ex AC CB maiora ſunt eo, quod bis AC CB continetur] *Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla ſunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quàm dupla quadrati ex AD. ſed quod bis continetur AC CB minus eſt, quàm duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora ſunt eo, quod bis AC CB continetur.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO. LXI.

Quadratum eius, quæ eſt ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuiſa in nomina ad punctum C, ita vt AC ſit maius nomen: exponaturq́; rationalis DE; & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipſam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam eſſe. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipſius AC æquale parallelogrammum DH: quadrato autem ipſius BC æquale KL. reliquum



reliquum igitur, quod bis AC CB continetur eſt 4. ſecundi
ęquale parallelogrammo MF. ſecetur MG bifariã
in N: & alterutri ipſarum ML GF parallela ducatur
NX. vtrumque igitur parallelogrammorum
MX NF eſt æquale ei, quod ſemel AC CB continetur.
Et quoniam ex binis nominibus eſt AB, diuiſa
in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales 37. huius.
potentia ſolum commenſurabiles. ergo quadrata
ex AC CB rationalia ſunt, & commenſurabilia
inter ſe ſe: & ob id compoſitum ex quadratis
ipſarum AC CB commenſurabile eſt earumdem 16. huius.
AC CB quadratis. rationale igitur eſt compoſitũ 6. diffi.
ex quadratis AC CB, atque eſt æquale parallelogrammo
DL. ergo & DL eſt rationale, & ad rationalem
DE applicatum eſt. rationalis igitur eſt DM,
& ipſi DE commenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam AC CB rationales 23. huius.
ſunt potentia ſolum commenſurabiles, medium eſt, quod bis AC CB continetur,
hoc eſt MF, & ad rationalem ML applicatum eſt. rationalis igitur eſt MG, & ipſi ML
hoc eſt ipſi ED longitudine incommenſurabilis. eſt autem & MD rationalis, & ipſi
DE commenſurabilis longitudine. ergo DM ipſi MG longitudine eſt incommenſurabilis. 13. huius.
ſuntq; rationales. ergo DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles;
ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & primam eſſe.
Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale eſt, quod AC CB Ex lemmate ad 55. huius.
continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale MX.
eſt igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc eſt vt recta linea DK ad MN, ita MN 1. ſexti.
ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN eſt æquale. Et quoniam quadratum 17. ſexti.
ex AC commẽſurabile eſt quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo
KL commenſurabile. ergo & DK ipſi KM longitudine eſt commenſurabilis. 1. ſexti.
quòd cum quadrata ex AC CB maiora ſint eo, quod bis AC CB continetur; 10. huius.
erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo MF: ideoq; recta linea Ex antecedentium.
DM ipſa MG eſt maior. atque eſt rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc 1. ſexti.
eſt quartæ parti quadrati ex MG: & DK ipſi KM longitudiue eſt commenſurabilis. ſi 14. quinti.
autem ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris ęquale parallelogrammum
ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes cõmenſurabiles
ipſam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ
ſibi commenſurabilis longitudine. ſuntq; rationales DM MG, & DM, quæ eſt maius 19. huius.
nomen expoſitę rationali DE longitudine eſt commenſurabilis. ergo DG eſt ex 1. diffi. ſecũdarum.
binis nominibus prima. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

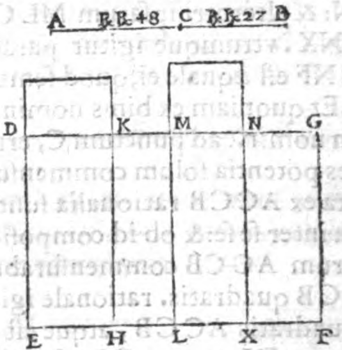
Sit AB ℞ 15 *plus* R 5, *& DE* 5. *erit DH* 15 *KL* 5, *& MX* R 75 *& NF* R 75. *quare ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK* 3: *& ſi applicetur KL faciet KM* 1. *Quòd ſi ad eandẽ applicetur MX videlicet* R 75 *faciet latitudinẽ MN* R 3 *ex* 2 *theoremate eorum, quae ad* 20 *huius conſcripſimus. et ſimilitrr NG erit* R 3. *ergo tota DG eſt* 4 *plus* R 12, *quae eſt ex binis nominibus prima.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quę eſt ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuiſa in medias ad pũctum C, quarum AC ſit maior: exponaturq; rationalis DE; & ad ipſam applicetur parallelogrammum æquale

quadrato



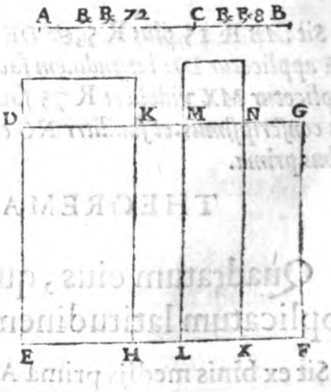
quadrato ipſius AB,quod ſit DF,latitudinem faciẽs DG.Dico DG ex binis nominibus ſecundã eſſe. Cõſtruantur enim eadem,quę ſupra. & quoniam AB ex binis medijs eſt prima,diuiſa ad 18.huius. pũctum C,erunt AC CB mediæ potentia ſolum cõmenſurabiles,quæ rationalem continent. quare & quę fiunt ex AC CB media ſunt; ideoq; DL eſt medium , quod ad rationalem applicatũ eſt. 23.huius. rationalis igitur eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis . Rurſus quoniam rationale eſt quod bis AC CB continetur,erit & MF 21.huius. rationale,& ad rationalem ML applicatum eſt . ergo & MG eſt rationalis ; & ipſi ML, hoc eſt ipſi DE commenſurabilis longitudine. 13.huius. incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG,& ſunt rationales.quare DM MG rationales ſunt 37. huius. potẽtia ſolum commenſurabiles;ac propterea DG eſt ex binis nominibus . oſtendẽdum Ex lem. ad eſt & ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora ſunt eo,quod bis 61.huius. AC CB continetur,erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. 1.sexti ergo & recta linea DM maior eſt ipſa MG . Quòd cum quadratum ex AC quadrato 14. quinta. ex CB ſit commenſurabile,& DH parallelogrammum parallelogrammo KL commenſurabile erit.quare & DK commenſurabilis ipſi KM:atque eſt quod DK KM 19. huius. cõtinetur quadrato ipſius MN æquale.ergo DM plus poteſt, quàm MG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.eſtq; MG commenſurabilis longitudi- 2.diffi.secũdarum. ne ipſi DE.quare DG ex binis nominibus eſt ſecunda.

F. C. COMMENTARIVS.

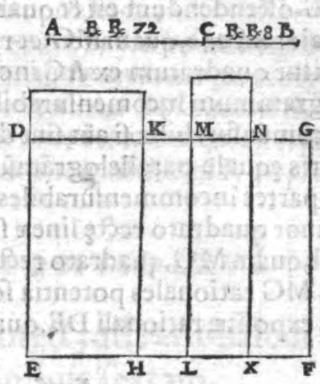
Sit AB RR 48 *plus* RR 27,*et DE* 4;*erit DH* R 48,*KL* R 27,*MX, et NF* 6. *ergo ſi ad DE applicetur DH,faciet DK* R 3 *ex* 2 *theoremate iam dicto,et eadem ratione ſi ad eandem applicetur KL,erit KM* R $1\frac{11}{16}$ *et ſi applicetur MX vel NF,erit MN,vel NG* $1\frac{1}{2}$ *et quoniam DK KM hoc eſt* R 3,R $1\frac{11}{16}$ *longitudine cõmenſurabiles ſunt,ſi inter ſe componantur, erit ex tertio theoremate eorum,quae nos ad* 20 *huius appoſuimus,DM* R $9\frac{3}{16}$ *ergo tota DG eſt* R $9\frac{3}{16}$ *plus* 3 *videlicet ex binis nominibus ſecunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXIII.

Quadratum eius , quę eſt ex binis medijs ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.



Sit ex binis medijs ſecunda AB, diuiſa in medias ad C,ita vt AC ſit maior portio . rationalis autem ſit DE:& ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur , latitudinem faciens DG.Dico DG ex binis nominibus tertiam eſſe.Conſtruantur enim eadem , quę ſupra . & quoniã AB eſt ex binis medijs ſecũda,diuiſa ad punctũ 39.huius. C,erunt AC CB mediæ potentia ſolum commen- A ſurabiles,quæ medium contineant.ergo & compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium eſt, & ipſi DL æquale.medium igitur eſt DL , & ad ra- 25. huius. tionalem DE applicatur . ergo rationalis eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis.Eadem ratione, & MG eſt rationalis , & incommenſurabilis ipſi ML,hoc eſt ipſi DE. vtraque igitur ipſarum



DM MG rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. & quoniam incommenſurabilis eſt AC ipſi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommenſurabile. ergo & compoſitum ex quadratis AC CB incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur; hoc eſt DL incõmenſurabile ipſi MF. et ob id recta linea DM ipſi MG eſt incommenſurabilis: ſuntq; rationales. ergo DG eſt ex binis nominibus. oſtendendũ eſt et tertiã eſſe. ſimiliter enim concludemus DM ipſa MG maiorem eſſe, et DK ipſi KM commenſurabilem. atque eſt rectangulum DKM quadrato ipſius MN æquale. ergo DM plus poteſt, quàm MG, quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; et neutra ipſarum DM MG eſt longitudine commenſurabilis ipſi DE. quare DG eſt ex binis nominibus tertia.

1. ſexti, uel ex lemm. ad 23. huius.

B

1. ſexti. & 10. huius.

37. huius.

19. huius.

3. diffi. ſecundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

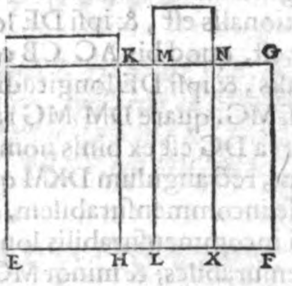
Ergo et compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis medium eſt.] *Ex duobus enim medijs commenſurabilibus, ſi inter ſe componantur, vnum fit medium, vt in 45 huius diximus.* A

Ergo et compoſitum ex quadratis AC CB incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commenſurabilia ſint, ſi inter ſe componantur, erit compoſitum commenſurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectãgulo ACB eſt incõmẽſurabile, vt pote eius duplum. ergo ex ijs, quae nos ad 14 huius demonſtrauimus, compoſitum ex quadratis AC CB incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur.* B

Sit AB RR *72 plus* RR *8, et DE 4. erit DH* R *72, KL* R *8, MX, vel NF* R *24. quare ſi ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R *4 $\frac{1}{2}$: ſi vero applicetur KL faciet KM* R *$\frac{1}{2}$. et ſi MX, vel NF faciet MN, vel NG* R *1 $\frac{1}{2}$. At ſi DK KM componantur, hoc eſt* R *4 $\frac{1}{2}$, & R $\frac{1}{2}$ fiet DM* R *8. tota igitur DG eſt* ℞ *8 plus* ℞ *6, quae eſt ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIIII.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



Sit maior AB, diuiſa in puncto C, ita vt AC maior ſit quã CB. rationalis autem quędam ſit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipſam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartã eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam maior eſt AB, diuiſa in C, erunt AC CB potentia incommenſurabiles, quæ faciunt cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium. itaque quoniam rationale eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis eſt recta linea DM, ipſiq; DE longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt quod bis AC CB continetur, hoc eſt MF, & ad rationalẽ ML eſt applicatum; erit et MG rationalis, & ipſi DE incommenſurabilis longitudine. ergo & DM ipſi MG longitudine incommenſurabilis eſt; ac propterea DM MG

40. huius.

21. huius.

23. huius.

rationales

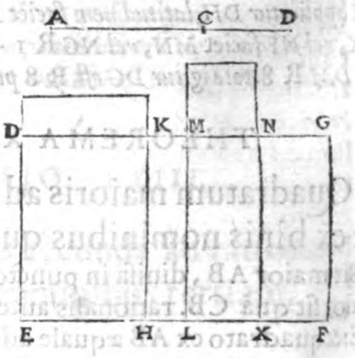
37.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex duobus nominibus eſt DG. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim ſuperioribus cõcludemus DM maiorem eſſe, quàm MG: et rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incõmenſurabile eſt quadrato ex CB, erit et DH parallelogrammum incõmenſurabile parallelogrãmo KL. et ob id recta linea DK ipſi KM (r.sexti & 10. huius.) incõmenſurabilis. ſi aũt ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris ęquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, quod (19 huius.) in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior plus poterit, quàm minor quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ergo DM plus poteſt, quàm MG, quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; DM MG rationales potentia ſolum commenſurabiles: atque eſt DM commenſurabilis expoſitæ rationali DE. quare DG eſt ex binis nominibus quarta. (4. diffi. ſecũdatum.)

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞V. 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$ plus ℞V. 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: et DE ſit 5. erit DH 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: KL 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: MX, vel NF ℞ 62 $\frac{1}{2}$. itaque ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciẽs DK, erit DK 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: ſi vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: & ſi applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG ℞ 2 $\frac{1}{2}$. Quòd ſi componantur DK KM, hoc eſt 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, & 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, fiet DM 4. ergo tota DG eſt 4 plus ℞ 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



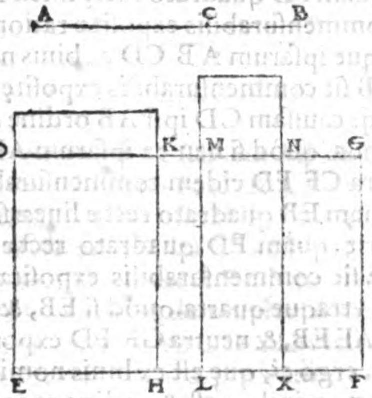
Sit rationale, ac medium potens A B, diuiſa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC ſit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum D F ad ipſã DE applicetur, latitudinem faciens D G. Dico DG ex binis nominibus quintam eſſe. Conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam rationale, ac medium potens eſt AB, diuiſa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommenſurabi- (41. huius.) les, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis, erit & parallelogrãmum DL medium: ideoq; recta linea (23. huius.) DM rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rationale eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt parallelogrammum MF; erit MG (21. huius.) rationalis, & ipſi DE longitudine commenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt (13. huius.) DM ipſi MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demõſtrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN eſſe ęquale; & DK ipſi KM longitudine eſſe incommenſurabilem. quare DM plus poteſt, quàm M G quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: ſuntq; DM MG rationales, potẽtia ſolum commenſurabiles; & minor MG commenſurabilis eſt ipſi DE lõgitudine. ergo DG (5. diffi ſecundatum.) eſt ex binis nominibus quinta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit ab R *V.*R 125 *plus* 5, *plus* R *V* R 125 *minus* 5; *& DE ſit* 5. *erit parallelogrammũ DH* R 125 *plus* 5, *KL* R 125 *minus* 5; *MX vel NF* 10: *& ſi ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudiuem faciens DK, erit DK* R 5 *plus* 1. *ſi vero applicetur KL latitudinẽ faciens KM, erit KM* R 5 *minus* 1. *& ſi applicetur MX uel NF, erit MN, vel NG* 2. *quòd ſi componantur DK KM videlicet* R 5 *plus* 1, R 5 *minus* 1, *fiet DM* R 20. *tota igitur DG eſt* R 20 *plus* 4. *nimirum ex binis nominibus quinta.*

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.



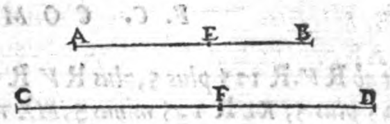
Sit bina media potens AB, diuiſa ad punctum C: rationalis autem ſit DE: & ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus ſextam eſſe. Conſtruantur enim eadem quę ſupra. Et quoniam bina media potens eſt AB, diuiſa ad C, erũt AC CB 42.huius. potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis medium: & quod ipſis continetur medium; & adhuc incommẽſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. ergo ex iam demonſtratis medium eſt vtrumque parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata ſunt. rationalis igitur eſt & 23.huius. vtraque DM MG, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. & quoniam compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur; erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommenſurabile: & idcirco DM incommenſurabilis MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ex binis nominibus eſt DG. Dico & ſextam eſſe. ſimiliter enim prædictis rurſus oſtendemus rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale, & DK ipſi KM longitudine incommenſurabilem eſſe. ergo DM plus poteſt, quàm 19.huius. MG quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: & neutra ipſarum DM MG longitudine commenſurabilis ęſt expoſitę rationali DE. quare DG ex binis nominibus eſt ſexta. 6.diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.*R 252 *plus* R 72, *plus* R *V.*R 252 *minus* R 72: *& DE ſit* 6. *erit DH* R 252 *plus* R 72: *KL* R 252 *minus* R 72: *MX, vel NF* R 180. *applicetnr ad DE parallelogrammũ DH latitudinem faciens DK. erit DK* R 7 *plus* R 2. *Rurſus applicetur KI faciens latitudinem KM. erit KM* R 7 *minus* R 2. *denique applicetur MX, vel NF. erit MN, vel NG* R 5. *ergo tota DG eſt* R 28 *plus* R 20 *ex binis nominibus ſexta.*

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

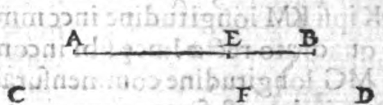
Ei, quæ eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.



Sit ex binis nominibus AB,& ipſi AB longitudinę commenſurabilis ſit C D. Dico CD ex binis nominibus eſſe, & ordine eandem ipſi AB. quoniam enim ex binis nominibus eſt A B, diuidatur in
nomina ad punctum E, & ſit AE maius nomen. ergo AE EB rationales ſunt potentia
12.ſexti. ſolum commenſurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad C F: & reliqua igitur EB
19.quinti. ad reliquam FD eſt,ut AB ad C D.commenſurabilis autem eſt AB ipſi CD longitudine.
10.huius. ergo & AE ipſi CF, & EB ipſi FD longitudine eſt commenſurabilis. ſuntq́; rationales
8.diffi. AE EB. rationales igitur ſunt & CF FD. & quoniam eſt vt AE ad C F, ita
EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: ſunt autem AE EB potentia
10.huius. ſolum commenſurabiles.ergo & CF FD potentia ſolum cõmenſurabiles erunt.
& ſunt rationales. ex binis igitur nominibus eſt CD. Dico & ipſi AB ordine eandẽ
eſſe.uel enim AE plus poteſt, quàm EB quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine com-
15.huius. menſurabilis,uel incommenſurabilis. ſi quidem commenſurabilis, & CF plus poterit,
quàm FD quadrato rectę lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi AE
12.huius. ſit commenſurabilis expoſitæ rationali,& CF eidem commenſurabilis erit. & ob id
vtraque ipſarum A B CD ex binis nominibus eſt prima;hoc eſt ordine eadem.Si vero
EB ſit commenſurabilis expoſitę rationali,& FD eidem erit commẽſurabilis. ob
eamq́; cauſſam CD ipſi AB ordine eadem eſt;vtraque enim eſt ex binis nominibns
ſecunda. quòd ſi neutra ipſarum AE EB ſit expoſitę rationali commenſurabilis, &
neutra CF FD eidem commenſurabilis erit;& eſt vtraque tertia. At ſi AE plus poſ-
15.huius. ſit,quàm EB quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & C F plus
poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommenſurabilis:&
ſi AE ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, & CF eidem commenſurabilis erit,
& eſt vtraque quarta.quòd ſi EB, & ipſa FD, & eſt vtraque quinta. ſi vero neutra ipſarũ AE EB, & neutra GF FD expoſitę rationali erit cõmenſurabilis, & eſt vtraque ſexta. ergo ei, quę eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt,& ordine eadem.

THEOREMA L. PROPOSITIO. LXVIII.

Ei,quę eſt ex binis medijs longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis medijs eſt, atque ordine eadem.



Sit ex binis medijs AB, & ipſi A B commenſurabilis longitudine ſit CD. Dico CD ex binis medijs eſſe, & ipſi AB ordine eandẽ. quoniam enim A B ex binis medijs eſt,
38.huius. diuiſa in medias ad punctum E, erunt AE
12.ſexti. EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Itaquę fiat vt A B ad C D, ita A E ad
19.quinti CF.ergo & reliqua EB ad reliquam FD eſt vt AB ad CD.commẽſurabilis autem eſt
10.huius. AB ipſi C D longitudine. quare & AE ipſi C F longitudine commenſurabilis erit,
24.huius. & EB ipſi FD. ſuntq́; mediæ AE EB. mediæ igitur & CF FD. Et quoniã eſt vt AE
ad EB, ita CF ad FD, & ſunt AE EB commenſurabiles potentia ſolum; erunt & CF
FD potentia ſolum commenſurabiles. oſtenſę autem ſunt & mediæ. ergo CD eſt
ex binis medijs. Dico & ipſi AB ordine eandem eſſe. Quoniam enim eſt vt AE ad *
EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB,ita quadratũ ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex AE ad quadratum ex C F, ita rectangulum AEB ad C F D rectangulum. commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD eſt commenſurabile. ſi igitur rationale eſt rectangulum AEB, & rectãgulum CFD rationale erit: atque eſt ex binis medijs prima. ſi vero medium eſt rectangulum

AEB

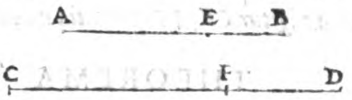
AEB; & ipſum CFD erit medium: & eſt vtraque ex binis medijs ſecunda. ergo CD ipſi AB ordine eadem eſt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim eſt vt AE ad EB, ſic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad re *
ctangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum C F D] *Nam cum ſit ut A E
ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex A E ad A E B rectangulum ex 1
ſexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad* 11.quint.
*F D. ſed vt C F ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE
ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.*

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commenſurabilis, & ipſa maior eſt.



Sit maior A B: & ipſi A B commenſurabilis ſit
CD. Dico CD maiorem eſſe. diuidatur AB in E.
ergo AE EB potentia ſunt incommenſurabiles, 40. huius.
quę faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum qua-
dratis rationale; quod autem ipſis cõtinetur, me
dium. & fiant eadem, quæ ſupra. quoniam igitur eſt vt AB ad CD, ita AE ad CF, &
EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commenſurabilis autẽ eſt A B ipſi CD.
ergo & vtraque ipſarum AE EB vtrique CF FD eſt commenſurabilis. & quoniam
eſt vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & com-
ponendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex A B ad quadratũ ex A
B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F. ſimiliter demonſtrabimus & vt B
quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita eſſe quadratum ex C D ad quadratum
ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD C
ad quadrata ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex
CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. commenſurabile autẽ eſt qua
dratum ex A B quadrato ex C D. ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD
ſunt commenſurabilia. atque eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB ratio-
nale. ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis CF FD. ſimiliter aũt & quod D
bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur. atque
eſt medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD con- E
tinetur. ergo CF FD potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex F
ipſarum quadratis rationale: quod autem ipſis cõtinetur medium. tota igitur CD
irrationalis eſt, quæ vocatur maior. ergo maiori commenſurabilis & ipſa maior eſt.
quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad qua A
dratum ex DF] *Ex 22 ſexti libri.*

Similiter demonſtrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita eſſe B
quadratum ex CD ad quadratum ex CF]
*Quoniam enim eſt vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conuerſionẽ rationis vt BA ad AE,
ita D C ad C F. ergo ut quadratum ex A B ad quadratum ex A E, ita quadratum ex C D ad* 22. sexti.
quadratum ex CF.

Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratũ ex CD ad qua- C
drata ex CF FD] *Eſt enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autẽ*

ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.

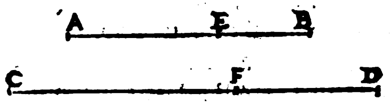
D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 ſecundi quadratum ex AB eſt aequale quadratis ex AE EB unà cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD eſt aequale quadratis ex CF FD unà cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur ſit ut totum ad totum, ita ablatũ ad ablatũ, uidelicet ut quadratum ex AB ad quadratũ ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquũ ad reliquũ, ut totum ad totũ; hoc eſt quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. ſed quadratum ex AB commenſurabile eſt quadrato ex CD. ergo ex 10 huius & quod bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei, quod bis CF FD continetur.*

E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.] *Ex corollario 24 huius. quare & medium eſt, quod ſemel continetur CF FD.*

F Ergo CF FD potentia ſunt incommenſurabiles] *Vt enim AE ad EB, ita eſt CF ad FD. ſed AE eſt potentia incommenſurabilis ipſi EB. ergo & CF ipſi FD potẽtia incommenſurabilis*
10. huius. *erit. ſunt igitur CF FD potentia incommenſurabiles.*

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

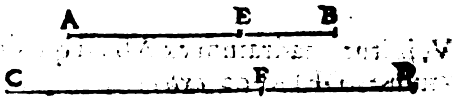
Rationale, ac medium potenti commenſurabilis, & ipſa rationale, ac medium potens eſt.



Sit rationale, ac medium potens AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. oſtendendum eſt & CD rationale, ac medium potẽtem eſſe. diuidatur AB in rectas lineas ad
40. huius. punctum E. ergo AE EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium; quod autem ipſis continetur rationale. & eadem, quae prius conſtruantur. Similiter demonſtrabimus CF FD potentia eſſe incommenſurabiles: & compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis CF FD. Quod autẽ continetur AE EB cõmẽſurabile eſt ei, quod CF FD continetur. ergo & compoſitum ex quadratis ipſarum CF FD eſt medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens eſt CD. quod oſtendere oportebat.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commenſurabilis, & ipſa bina media potens eſt.

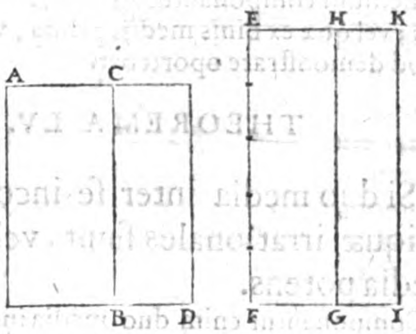


Sit bina media potens AB, & ipſi AB commẽſurabilis CD. oſtendendũ eſt CD bina media potentem eſſe. Quoniam enim bina media potens eſt AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare
41. huius. AE EB potentia ſunt incommenſurabiles, quae faciunt cõpoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum. & conſtruantur eadem, quę ſupra. ſimiliter demonſtrabimus CF FD potentia incommenſurabiles eſſe: & compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB cõmmẽſurabile compoſito ex quadratis CF FD. quod autem AE EB continetur commeuſurabile eſt ei, quod continetur CF FD. quare & compoſitum ex quadratis ipſarum CF FD medium eſt: itemq; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens eſt CD. quod oſtendendum fuit.

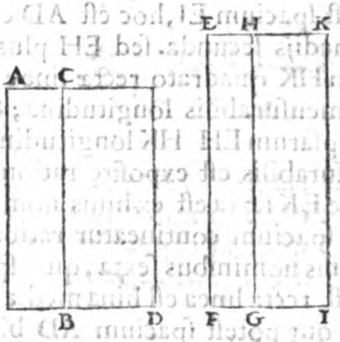
THEO-

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale,& medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea,quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima,vel maior,vel rationale ac medium potens.



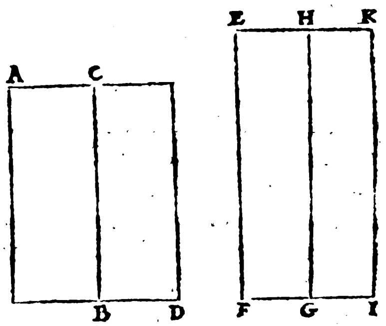
Sit rationale quidem ſpacium AB, medium autem CD.Dico eam, quę poteſt ſpacium AD, vel eſſe ex binis nominibus,vel ex binis medijs primam, vel maiorem,vel rationale, ac medium potentem.etenim AB vel maius eſt, quā CD,vel minus.ſit primum maius,exponaturq; rationalis EF: & ad ipſam applicetur parallelogrammū EG ipſi AB æquale, quod latitudinem faciat EH: ipſi vero CD ęquale ad EF, hoc eſt ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK.& quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt ęquale EG,erit & EG rationale;& ad rationalem EF applicatum eſt,latitudinem faciens EH. ergo EH eſt rationalis, 21.huius. & ipſi EF longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam medium eſt CD, & ipſi eſt ęquale HI;erit & HI medium;& ad rationalem EF,hoc eſt HG applicatum eſt,latitudinem faciens HK.quare HK eſt rationalis,& incommenſurabilis ipſi EF longitudine. 23.huius. quòd cum medium ſit CD,rationale autem AB;erit AB ipſi CD incommēſurabile.ergo & EG incōmenſurabile eſt ipſi HI.vt autem EG ad HI, ita eſt recta linea EH ad HK. 1.sexti: ergo EH ipſi HK longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtręq; 10.huius. rationales.quare EH HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibns eſt EK,diuiſa ad pūctum H.& quoniam maius eſt AB, quàm CD,æquale autem AB ipſi EG,& CD ipſi HI,erit & EG,quàm HI maius. ergo & EH maior eſt quàm HK. vel igitur EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine,vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit maior HE expoſitę rationali EF commenſurabilis. ergo EK ex binis nominibus eſt prima, atque eſt EF rationalis. 1.Diffi. ſecūdarum. Si autem ſpacium cōtineatur rationali,& ex binis nominibus prima,recta linea ſpacium potens ex binis nominibus eſt. 55.huius. ergo quæ poteſt ſpacium EI eſt ex binis nominibus.quare & ea quæ poteſt ſpacium AD.Sed EH plus poſsit,quàm HK, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſit maior EH expoſitę rationali EF commenſurabilis longitudine.ergo EK ex binis nominibus eſt quarta, & eſt EF 4.diffi: rationalis.ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta,recta linea ſpacium potens irrationalis eſt,quæ maior appellatur. 58.huius. potens igitur ſpacium EI maior eſt.ergo & potēs ſpacium AD maior.ſit deinde ſpacium AB minus, quàm CD. erit & EG quàm HI minus; & ob id recta linea EH minor, quàm recta HK. vel igitur KH plus poteſt, quàm HE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis longitudine, & ſit minor EH commenſurabils expoſitæ rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt ſecunda: rationalis autem EF. quod ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens eſt ex binis medijs 56.huius: primam:



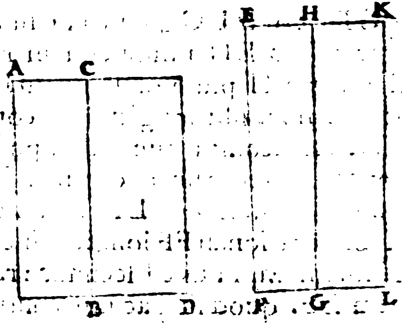
prima . potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs.ergo & potẽs ſpaciũ A
D.Sed KH plus poſsit,quàm HE quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommen-
ſurabilis;ſitq́; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine.qua-
re EK ex binis nominibus eſt quinta;atque eſt rationalis EF. ſi autem ſpacium con-
59.huius. tineatur rationali,& ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea ra-
tionale ac medium potẽs eſt.quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale & medium po
tens eſt;ideoq́; rationale & mediũ potẽs eſt quæ põt ſpaciũ AD.Si igitur rationale,
& medium componantur,quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nomini-
bus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens.
quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens.



Componantur enim duo media incõ
menſurabilia inter ſe AB CD. Dico re-
ctam lineam, quæ ſpaciũ AD poteſt vel
ex binis medijs ſecundam eſſe, vel bina
media potentem. ſpacium enim AB vel
maius eſt, quàm CD, vel minus.ſit pri-
mum maius; exponaturq́; rationalis EF:
& ad EF ſpacio quidem AB æquale ap-
plicetur EG,latitudinem faciens EH.ip-
ſi vero CD æquale applicetur HI, latitu-
dinem faciens HK. & quoniam medium
eſt vtrumq́; ipſorũ AB CD,erit & vtrũq;
EG HI medium,& ad rationalem EF ap
plicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E
23.huius: H HK.ergo vtraque EH .HK rationalis eſt,& ipſi EF longitudine incommenſura-
bilis.quòd cum AB incõmenſurabile ſit ipſi CD; ſitq́; AB quidem æquale EG; CD
1.sexti. vero ipſi HI:erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile.ſed vt EG ad HI, ita eſt EH ad HK.
10.huius. incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK lõgitudine:ideoq́; EH HK rationales sũt
37.huius. potentia ſolum commenſurabiles. quare ex binis nominibus eſt EK.Itaque vel EH
plus poteſt, quàm HK quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine, vel
incommenſurabilis.poſsit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis lon-
gitudine; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ ra
tionali EF.ergo EK ex binis nominibus eſt tertia, & eſt FE rationalis. ſi autem ſpa-
cium contineatur rationali, & ex binis
57.huius. nominibus tertia,recta linea ſpaciũ po-
tens eſt ex binis medijs ſecũda.ergo quę
poteſt ſpacium EI,hoc eſt AD eſt ex bi-
nis medijs ſecunda. ſed EH plus poſsit
quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi in-
commenſurabilis longitudine; & vtra-
que ipſarum EH HK longitudine incõ-
menſurabilis eſt expoſitę rationali EF.
quare EK ſexta eſt ex binis nominibus.
At ſi ſpacium contineatur rationali, &
60.huius. ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium
poteſt recta linea eſt bina media potẽs.
ergo quę poteſt ſpacium AD bina me-



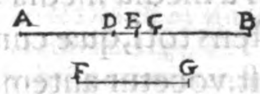
dia

dia potens eſt. Similiter demonſtrabimus & ſi AB ſit minus, quàm CD, rectam lineam, quæ ſpacium poteſt AD, vel ex binis medijs ſecundam eſſe, vel rationale, ac medium potentem. ſi igitur duo media inter ſe incommenſurabilia componantur reliquæ duæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens. quod demonſtrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ poſt ipſam ſunt, irrationales neq; mediæ, neque
inter ſe eædem ſunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum
latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incommenſurabilem. 23.huius.
quòd autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum 61.huius.
latitudinem efficit ex binis nominibus primam. quod ab ea, quę eſt ex binis medijs 62.huius.
prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus ſecundã.
Quod ab ea, quæ eſt ex binis medijs ſecunda ad rationalem applicatum latitudinẽ 63.huius.
efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum latitudinem 64.huius.
efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quæ rationale, ac mediũ 65 huius.
poteſt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam.
Quod ab ea, quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum latitudinem efficit 66.huius.
ex binis nominibus ſextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt et à prima & inter ſe ſe: à prima quidem, quòd rationalis ſit; inter ſe ſe vero, quod ordine non ſint eædem, conſtat & ipſas irrationales inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

Septem ſunt ſenarij, de quibus hactenus dictum eſt. eorum primus quidem oſtendit ortum linearum irrationalium: ſecundus autem diuiſionem, nempe quòd ad vnum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primę, ſecundę, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextę. deinceps ſequitur quartus ſenarius, oſtendens quomodo hæ lineæ inter ſe differant. namque vſus ijs, quæ ex binis nominibus, oſtendit differentiam ſex irrationalium. Quintum, & ſextum expoſuit, oſtendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quę ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorũ ſpaciorũ. In ſexto aũt quomodo irrationalibus commenſurabiles eiuſdem ſpeciei ſint. Rurſus in ſeptimo manifeſte oſtendit differentiam ipſarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media ſumitur proportionalis inter portiones cuiuſque lineę irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipſa eiuſdem ſpeciei cũ ijs, inter quarũ portiones media interijcitur. itaq primum arithmeticam medietatem in his eſſe, ſic apparet.

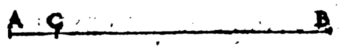


Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifeſtum eſt AC maiorem eſſe, quàm C B. auferatur à recta linea AC ipſi B C æqualis AD, & CD bifariam in E ſecetur. conſtat igitur AE ipſi EB æqualem eſſe. ponatur alterutri ipſarum ęqualis F G. manifeſtum eſt quo differt A C ab ipſa F G, eo differre EB ab ipſa BC; etenim AC ab ipſa FG differt magnitudine E C: & eadem magnitudine differt FG ab ipſa BC, quod eſt arithmeticæ analogiæ proprium. cõmenſurabilis autem eſt F G ipſi A B; eſt enim eius dimidię æqualis. ergo FG ex bi- 67.huius.
nis nominibus eſt. ſimiliter oſtendetur & in alijs.

PRINCIPIVM SENARIORVM PER APHÆRESIM HOC EST *Per detractionem.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtés toti, reliqua irrationalis eſt. vocetur autem apotome.



A rationali enim AB rationalis auferatur B
C, potentia ſolum cōmenſurabilis exiſtens to-
ti. Dico reliquā AC irrationalem eſſe, quæ vo-
catur apotome. Quoniā enim incommenſura-
A bilis eſt AB ipſi BC longitudine; atq; eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id
quod continetur AB BC: erit quadratū ex AB incommenſurabile ei, quod AB BC
continetur, ſed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt quadrata ex AB B
C: ei vero, quod continetur AB BC, commenſurabile eſt quod bis AB BC contine
B tur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſu-
C rabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommenſurabilia ſunt quadrata ex
D AB BC; quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC contine-
E tur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem ſunt quadrata ex AB BC. ergo re-
cta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem apotome.

F. C. COMMENTARIVS.

A Atqne eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. ſexti, vel ex lemmate, quod 23 huius inſeruit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia] *Ex demonſtratis à nobis ad 14 huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC iucommenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC] *Ex demonſtratis ad 17 huius.*

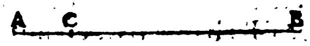
D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC cōtinetur, vnà cum quadrato ex AC] *Ex ſeptima 2 libri.*

E Ergo recta linea AC eſt irrationalis] *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommenſurabilia ſunt quadrato ex AC, & ſunt quadrata ex AB BC rationalia, ſequitur quadratum ex AC irrationale eſſe, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC eſſe irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC ℞ 3. erit AC 2 minus ℞ 3. reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae eſt ex binis nominibus, de qua in 37 huius agitur; & BC reſpondet minori. atque eſt AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem mediæ apotome prima.



A media enim AB auferatur media BC, po-
tentia ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi AB,
& cum ea rationale faciens, videlicet quod AB
BC continetur. Dico reliquam AC irrationalē
eſſe. vocetur autem medię apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ ſunt,
A erunt & quæ ex AB BC quadrata media. rationale autem eſt quod bis continetur

AB

AB BC.quadrata igitur ex AB BC incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AB BC
continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incõmenſurabile eſt id, quod B
bis AB BC continetur, quoniam ſi tota magnitudo vni componentium ſit incom- C
menſurabilis, & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt. Irrationalis igitur eſt AC. voceturq; mediæ apotome prima. D

F. C. COMMENTARIUS.

Rationale autem eſt, quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod ſemel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommenſurabile eſt id, quod bis A B
B BC continetur] *Namque ex 7 ſecundi quadrata ex AB BC ſunt aequalia ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex AC.*

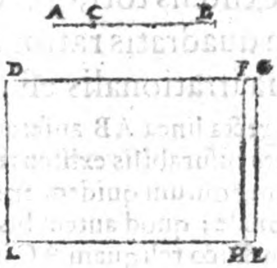
Quoniam ſi tota magnitudo vni componentium ſit incommenſurabilis] *Ex 17 huius.* C

Irrationalis igitur eſt AC] *Nam cum id, quod bis AB BC continetur ſit rationale, & incõ-* D
menſurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcircoq; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.

Sit recta linea AB ℞℞ 54, *BC* ℞℞ 24. *erit AC* ℞℞ 54 *minus* ℞℞ 24. *reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae eſt ex binis medijs prima, de qua in 38 huius, & BC minori, eſt igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracto.*

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis eſt. vocetur autem mediæ apotome ſecunda.



A media enim AB auferatur media BC potẽtia
ſolum commenſurabilis exiſtens toti AB, & cum ea
medium continens, videlicet quod continetur AB
BC. Dico reliquam AC irrationalem eſſe. vocetur
autem mediæ apotome ſecunda. exponatur enim
rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æ-
quale parallelogrammum DE ad ipſam DI appli-
cetur, latitudinem faciens DG: ei vero quod bis AB
BC continetur ęquale parallelogrammum DH ad
eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reli
quum igitur FE eſt æquale quadrato ex AC. & quo A
niam media ſunt, quæ ex AB BC quadrata; erit &
parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum eſt, latitudinem
faciens DG. ergo DG eſt rationalis, & ipſi DI longitudine incommenſurabilis. Rur B
ſus quoniam medium eſt quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB C
BC medium: atque eſt ęquale parallelogrammo DH. ergo & DH eſt medium, &
ad rationalem DI applicatum eſt latitudinem faciens DF. rationalis igitur eſt DF,
& ipſi DI longitudine incommenſurabilis. & quoniam AB BC potentia ſolum cõ-
menſurabiles ſunt, erit AB ipſi BC incommenſurabilis longitudine. ergo quadra- D
tum ex AB incommenſurabile eſt ei, quod AB BC continetur. ſed quadrato quidẽ E
ex AB commenſurabilia ſunt quæ ex AB BC quadrata; ei vero, quod AB BC con- Coroll. 24. huius.
tinetur commenſurabile eſt id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB
BC incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum F
autem DE eſt ęquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale eſt
ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipſi DH eſt incommenſurabile. ſed vt DE

1. ſexti. ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommenſurabilis igitur eſt GD ipſi DF longi-
10. huius. tudine. & ſunt vtræque rationales. quare GD DF rationales ſunt, potentia ſolum cō
G menſurabiles. ergo FG apotome eſt; & DI eſt rationalis. quod autem rationali, & ir
H rationali continetur rectangulum irrationale eſt, & ipſum potens eſt irrationalis.
K ſed recta linea AC poteſt FE parallelogrammum. ergo AC eſt irrationalis. vocetur
autem mediæ apotome ſecunda.

F. C. COMMENTARIVS.

A Reliquum igitur FE eſt æquale quadrato ex AC] *Ex 7 ſecundi libri.*

B Ergo DG eſt irrationalis, & ipſi DI longitudine incommenſurabilis] *Ex 23 huius.*

C Erit & quod bis continetur AB BC medium] *Ex corolario 24 huius.*

D Ergo quadratum ex AB incommenſurabile eſt ei, quod AB BC continetur] *Eſt enim vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipſi BC longitudine ſit incommenſurabilis, erit & quadratum ex AB incommenſurabile ei, quod AB BC continetur; ex 10 huius.* (Lemma. ad 39. huius.)

E Sed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt quæ ex AB BC quadrata] *Nam rectae lineae AB BC potentia commenſurabiles ponuntur.*

F Quadrata igitur ex AB BC incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AB BC continetur] *Ex demonſtratis ad 17 huius.*

G Ergo FG apotome eſt] *Ex 74 huius.*

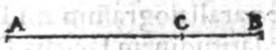
H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale eſt] *Ex ſcholio ad 39 huius appoſito, quare ſequitur parallelogrammum FE irrationale eſſe.*

K Ergo AC eſt irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞℞ 18, BC ℞℞ 8. erit AC ℞℞ 18 minus ℞℞ 8. reſpondet autem ipſa AB maiori nomini eius, quae eſt ex binis medijs ſecunda; & BC reſpondet minori. de qua in 39 huius.

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem minor.



A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommenſurabilis exiſtens toti, faciētq; cum tota AB compoſitum quidem ex ipſarū AB CB quadratis rationale; quod autem bis AB BC continetur medium. Dico reliquam AC irrationalem eſſe, quę vocatur minor. Quoniam enim cō
poſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis rationale eſt: quod autem bis AB
BC continerur medium, erunt AB BC quadrata incommenſurabilia ei, quod bis
A continetur AB BC. ergo per conuerſionem rationis quadrata ex AB BC quadra-
B to ex AC ſunt incommenſurabilia. ſed quadrata ex AB BC rationalia ſunt. irratio
C nale igitur eſt quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC eſt irrationalis. vocetur
autem minor.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo per conuerſionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC ſunt incommenſurabilia] *Ex demonſtratis ad 17 huius.*

B Irrationale igitur eſt quadratum ex AC] *Ex 10 diffinitione.*

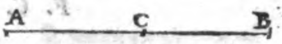
C Ideoq; recta linea AC eſt irrationalis] *Ex vndecima diffinitione:*

Sit AB ℞ V. 32 plus ℞ 704, BC ℞ V. 32 minus ℞ 704. erit AC ℞ V. 32 plus ℞ 704 minus ℞ V. 32 minus ℞ 704. reſpondet autem AB maiori nomini eius, quae dicitur maior, & BC reſpondit minori nomini eiuſdem; de qua in 40 huius.

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis bis continetur rationale; reliqua irrationalis eſt; voceturque cum rationali medium totum efficiens.



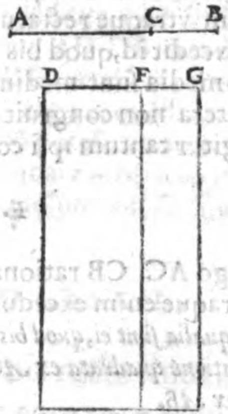
A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti AB, facienſq; compoſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem eſſe: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compoſitum ex ipſatum AB BC quadratis medium eſt: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommenſurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incommenſurabile eſt ei, quod bis continetur AB BC. atque eſt quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale eſt: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aũt cũ rationali medium totum efficiẽs. 17. huius. 10. diff.

F. C. COMMENTARIVS.

ſit AB ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$: BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$. erit AC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$. minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, reſpondetq́, AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC reſpondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti: & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis bis cõtinetur medium, incommenſurabileq́; compoſito ex quadratis ipſarum; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem cum medio medium totum efficiẽs.



A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potẽtia incommenſurabilis exiſtens toti AB, facienſq; cõpoſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis mediũ; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. Dico reliquam AC irrationalem eſſe. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipſam DI applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens DF. ergo reliquum FE eſt æquale quadrato ex AC. & ob id recta linea AC ipſum FE poteſt. itaque quoniam compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis medium eſt, & parallelogrammo DE ęquale, erit ipſum DE medium: & ad rationalẽ DI applicatũ eſt, latitudinẽ faciẽs DG. quare DG eſt rationalis, & ipſi DI longitudine incõmenſurabilis. Rurſus qm̃ id quod bis AB BC cõtinetur mediũ eſt, & æquale parallelogrãmo DH, erit DH mediũ, & ad rationalẽ DI applicatũ 23. huius.

43.huius. est, latitudinem faciens DF. ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incommensurabilis lon
gitudine. Quòd cum quadrata ex A B BC incommensurabilia sint ei, quod bis AB
1.sexti. BC continetur, & parallelogrãmum DE ipsi DH est incommensurabile, vt autem
10.huius. DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incõmensurabilis igitur est DG ipsi
DF; & sunt vtreque rationales. ergo GD DF rationales sunt, potentia solum cõmen
A ſurabiles. apotome igitur est FG: & FH est rationalis. quod autem rationali, & apo
B toma continetur rectangulum irrationale est, ipsumq; potens est irrationalis. ſed A
C C poteſt parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis eſt. vocetur autem cum me
dio medium totum efficiens,

F. C. COMMENTARIVS.

A Apotome igitur eſt F G] *Ex 74 huius.*

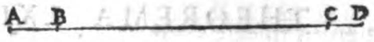
B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale eſt] *Etenim in ſcholio ad 39 huius appoſito demonſtratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale eſſe.*

C Ipſumq; potens eſt irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞ V. ℞ $13\frac{1}{2}$ plus 3, BC ℞ V. ℞ 13 minus 3. erit AC ℞ V. ℞ $13\frac{1}{2}$ plus 3 minus ℞ V. ℞ $13\frac{1}{2}$ minus 3. & reſpondet AB maiori nomini eius, quae uocatur bina media potens; & BC reſpondet minori, de qua in 42 huius.

THEOREMA LXII. PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia ſolum cõmenſurabilis exiſtens toti.



A Sit apotome A B: congruens autem ipſi ſit BC. ergo AC CB rationales ſunt potẽtia ſolum commenſurabiles. Dico ipſi AB alteram non congruere rationalem, quæ
potentia ſolum ſit comenſurabilis toti. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD
DB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam quo exceſſu qua
drata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC
B CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraque enim excedunt eodem quadra
C to, quod fit ex AB. & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt qua
drata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC
D CB continetur. ſed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali;
etenim vtraque rectarum linearum rationalis eſt. quod igitur bis continetur AD
E DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non poteſt; vtraq;
F enim media ſunt. medium autem medium non ſuperat rationali. ergo rectæ lineæ
AB altera non congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.
vna igitur tantum ipſi congruit.

F. C. COMMENTARIVS.

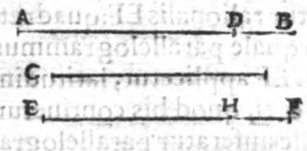
A Ergo AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles] *Ex 74 huius.*

B Vtraque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] *Quadrata enim ex AD DB aequalia ſunt ei, quod bis AD DB continetur vnà cum quadrato ex AB, ex 7 ſecundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB ſunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vnà cum quadrato ex AB.*

C Et permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB] *Hoc ſequenti lemmate demonſtrabimus.*

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.



Sit enim DB exceſſus, quo AB excedit C: & HF exceſſus quo EF excedit G. erunt DB HF aequales; itemq; aequales inter ſe AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem exceſſu, quo C ipſam G. & additis vtrinque aequalibus DB HF, excedet AB ipſam EF, vel ab ea excedetur eodem exceſſu, quo AD ipſam EH, hoc eſt quo C ipſam G. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

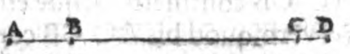
Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali] *Rationale enim non ſuperat rationale, niſi rationali. quod nos ad 27 huius demonſtrauimus.* D

Vtraque enim media ſunt] *Nam quod rationalibus potentia ſolũ commenſurabilibus continetur rectangulum irrationale eſt, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediũ igitur eſt id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, vt pote eius duplum ex corollario 24 huius. eadem ratione & medium eſt, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non ſuperat rationali] *Ex 27 huirs.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.



Sit enim media apotome prima AB, & ipſi AB cõgruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quę rationale continent. Dico ipſi AB alteram non congruere mediam, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodẽ & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim rurſus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. ſed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraque enim rationalia ſunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nõ poteſt; vtraque enim ſunt media. medium autem medium non ſuperat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quę potentia ſolum toti ſit commẽſurabilis, & cum tota rationale contineat.

75 huius.

7. ſecundi.

Ex antecedẽti lemmate.

Ex demonſtratis ad 17. huius.

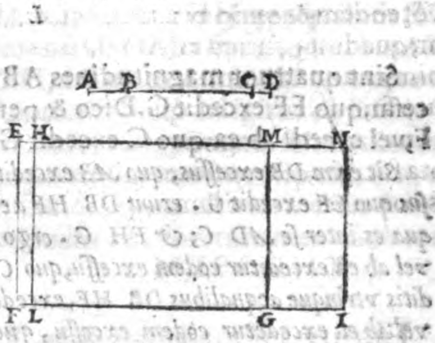
27. huius.

THEOREMA LXIIII. PROPOSITIO LXXXII.

Medię apotomæ ſecundę vna tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipſi AB 76. huius.

alteram



alteram non congruere mediam quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ADB continent: & exponatur rationalis EF: quadratiſq; ex AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EM, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur EL eſt ęquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL ęquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniã medię ſunt AC CB, erunt & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt me-
23.huius. dium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam mediũ eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt ęquale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum
23. huius. eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC in-
Ex lemm. ad 23. huius. commenſurabilis ipſi CB longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod continetur AC CB. incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex AC, ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB; ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt, quod
Ex demonſtratis in 14. huius. bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommēſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atque eſt quadratis ex AC CB æquale parallelogrammum EG; ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt in-
1. ſexti. 10. huius. commenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt vtræque rationales. ergo EM
74. huius. MH rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt EH, & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exi-
Ex 80. huius ſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo medię apotomę ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

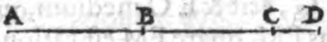
Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis continetur mediũ.

77. huius. Sit minor AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quę eadem faciat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes cō-
Ex lemmate ad 80. huius poſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium, & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia ſunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. quod fieri non poteſt. etenim vtraque ſunt media. ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cũ tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod vero bis ipſis con tinetur medium. 27 huius.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIIII.

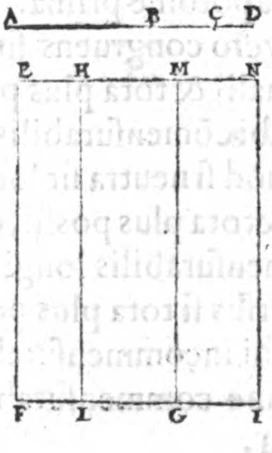
Ei, quæ cũ rationali mediũ totũ facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur, rationale.



Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipſi BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur, rationale. 78. huius: Dico ipſi AB alterã non congruere eadem facientem. ſi enim fieri poteſt, congruat. BD. ergo AD DB potẽtia ſunt incõmenſurabiles, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarũ AD DB quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur, rationale. Quoniam igitur quo ex exceſſu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur: quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia ſunt: & quadrata ex AD DB rationali excedẽt quadrata ex AC CB. quod fieri non poteſt, cum vtraque ſint media. non igitur ipſi AB altera congruit, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ipſis cõtinetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea.

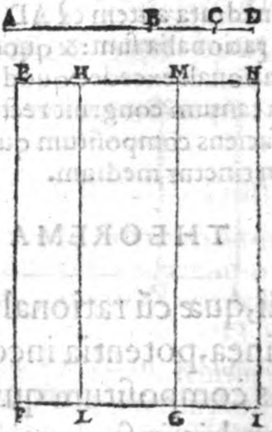
THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quę cum medio medium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ipſis continetur, medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.



Sit cum medio medium totum faciens AB, ipſi vero congruens BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur medium, & adhuc incõmenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. 79. huius. Dico ipſi AB alteram non congruere potentia incommenſurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ propoſita ſunt. ſi enim fieri poteſt, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommenſu

rabiles



rabiles ſint, faciantq́; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ipſis continetur medium, & incomenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. & exponatur rationalis EF; & quadratis ipſarum AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinē facens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB ęquale parallelogrammum auferatur HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur quadratum ex AB eſt æquale parallelogrammo EL. ergō AB ipſum EL pōt. rurſus quadratis ex AD DB ęquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipſi HI eſt quale. & quoniam compoſitum ex quadratis AC CB medium eſt, & æquale parallelogrāmo EG, erit & EG medium, quod ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. quare EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommēſurabilis. Rurſus quoniam quod bis AC CB continetur eſt medium, & æquale ipſi HG, erit & HG medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. quòd cum quadrata ex AC CB incommenſurabilia ſint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC incommenſurabile ipſi GH; ideoq́; recta linea EM rectæ MH longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtræque rationales. cum igitur EM MH rationales ſint, potētia ſolum commenſurabiles, recta linea EH apotome eſt, & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus EH rurſus apotomen eſſe, ipſiq́; congruentem HN. ergo apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ipſi AB altera congruet recta linea. quare vna tantum congruet, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.

23.huius.

10.huius.

74.huius.

80.huius.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1 Expoſita rationali, & apotoma, ſi quidē tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; ſitq́; tota expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, & tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectę lineæ ſibi cōmenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

3 Quòd ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitę rationali, & tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

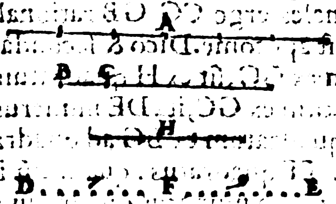
4 Rurſus ſi tota plus poſſit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

Si vero congruens expoſitę rationali ſit longitudine commenſurabilis, vocetur apotome quinta. 5

Quòd ſi neutra, dicatur apotome ſexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BG. ergo & BG eſt rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum exceſſus DF nõ ſit quadratus. neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commenſurabile igitur eſt quadratum ex BG quadrato ex GC; rationale autẽ eſt quadratũ ex BC, ergo & quadratum ex GC eſt rationale; ideoq; recta linea GC rationalis eſt. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt BG ipſi GC longitudine; & ſunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id BC apotome eſt. Dico & primam eſſe. ſit enim quadratum ex H id, quo quadratũ ex BG plus poteſt, quàm quadratum ex GC: & quoniam eſt vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuerſionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. ſed DE ad EF proportionem habet, quã quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus eſt. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commenſurabilis igitur eſt BG ipſi H lõgitudine. & BG plus poteſt, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poterit, quàm GC quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt tota BG expoſitę rationali A commenſurabilis lõgitudine. ergo BG apotome eſt prima. Inuẽta igitur eſt prima apotome. quod facere oportebat.

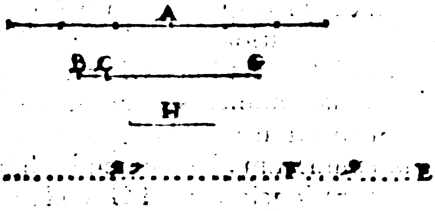
6. diffi. Corol. 1. lẽ. ad 30. huius. 9. huius. 74. huius. 9. huius. 3. diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4. numerus autem DE ſit 16, EF 9; erit DF 7. ſi igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC ℞ 7. ergo BC eſt 4 minus ℞ 7, quae eſt apotome prima.

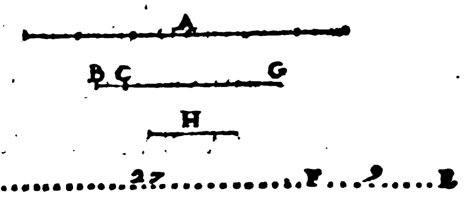
PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

Inuenire ſecundam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit CG. ergo CG eſt rationalis. & exponantur duo numeri quadrati DE EF, quorũ exceſſus DF, nõ ſit quadratus fiatq; vt FD ad DE; ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. commenſurabile igitur eſt quadratum ex CG quadrato ex GB. ſed quadratum ex

6. Diffi. Corol. 1. lemma ad 30. huius.



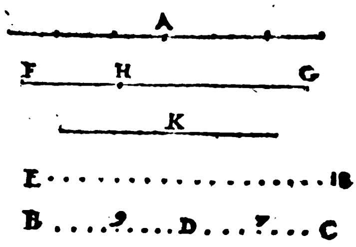
CG eſt rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex GB; ac propterea ipſa GB eſt rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, 9.huius. erit CG ipſi GB incommenſurabilis longitudine; & vtræque ſunt rationales. 74.huius. ergo CG GB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, & ob id BC eſt apotome. Dico & ſecundam eſſe. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, ſit ex H quadratum. Quoniam igitur eſt vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuerſionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque eſt vterque ipſorum DE EF quadratus. quadratũ igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem habet, 9. huius. quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipſi H longitudine eſt commenſurabilis. & plus poteſt BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poteſt, quàm GC quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt congruens CG expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine. ergo 2.diff. BC apotome eſt ſecunda. inuenta igitur eſt ſecunda apotome BC. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE ſit 36, & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GB eſt ℞ 12, & BC ℞ 12 minus 3, quae eſt apotome ſecunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.



Exponatur rationalis A, & exponãtur tres numeri E BC CD non habentes inter ſe proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD Coroll.6.huius. proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: 6.huius. vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. commẽſurabile igitur eſt quadratum ex A quadrato ex FG. atque eſt quadratum ex A rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG eſt rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. 9.huius. incõmenſurabilis igitur eſt A ipſi FG longitudine. rurſus qm̃ eſt vt BC ad CD, ita 6.huius. quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commenſurabile. rationale autẽ eſt quadratum ex FG. ergo & quadratũ ex GH eſt rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quòd cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus q uadratus ad quadratum numerum; neque quadratũ ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad 9.huius. quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt FG ipſi GH longitudine: & ſunt vtræque rationales. ergo FG GH rationales ſunt potentia ſolum commenſu- 74.huius. rabiles; ac propterea apotome eſt FH. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt E

quidem

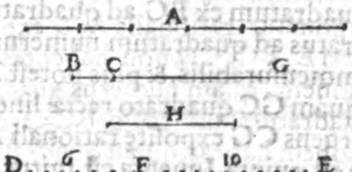
quidem ad BC,ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH;erit ex æquali vt E ad CD,ita quadratum ex A ad quadratum ex GH.ſed E ad GD proportionem non habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum.neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ. ergo A ipſi GH longitudine eſt incommẽſurabilis . neutra igitur ipſarum FG GH 9.huius. expoſitę rationali A commenſurabilis eſt longitudine. quo autem quadratum ex FG plus poteſt,quàm quadratum ex GH,ſit ex K quadratum.Quoniam igitur eſt vt BC ad CD,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH;erit per conuerſionem rationis vt CB ad BD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex K.at CB ad BD proportionem habet,quam nnmerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.commenſurabilis igitur eſt FG ipſi K longitudine: & 9.huius. plus poteſt FG, quàm GH quadrato ex K. ergo FG plus poteſt, quàm GH quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine.& neutra ipſarum FG GH longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali A . quare FH apotome eſt tertia.Inuenta igitur eſt tertia apotome FH.quod facere oportebat. 33.diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6,numerus E 18,BC 16,& CD 7.erit BD 9. fiat vt 18 ad 16 , ita 36 ad alium , erit ad 32.ergo FG eſt ℞ 32.rurſus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium.erit ad 14 quare GH eſt ℞ 14 & FH ℞ 32 minus ℞ 14,quae eſt apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO. LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.



Exponatur rationali A :& ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BG. ergo BG eſt rationalis.exponantur præterea duo numeri DF FE , ita vt totus DE ad vtrumque ipſorum DF FE proportionem non habeat,quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat vt DE ad EF , ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC . commenſurabile igitur eſt quadratum ex BG quadrato ex GC.eſt autem quadratum ex BG rationale.quare & rationale eſt quadratũ ex GC; ideoq́; recta linea GC eſt rationalis.& quoniam DE ad EF proportionem non habet , quam numerus quadratus ad quadratum numerum;neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.incommenſurabilis igitur eſt BG ipſi GC longitudine ,& ſunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ob id apotome eſt BC . Dico & quartam eſſe . Quo igitur plus poteſt BG , quàm GC,ſit quadratum ex H.& quoniam eſt vt DE ad EF,ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC;erit per conuerſionem rationis vt ED ad DF,ita quadratum ex BG ad quadratum ex H.ſed ED ad DF proportionem non habet , quam numerus quadratus ad quadratum numerum.neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit,quam numerus quadratus ad quadratum numerum.incommẽſurabilis igitur eſt BG ipſi H longitudine : & plus poteſt BG , quam GC quadrato ex H.ergo BG plus poteſt,quàm GC quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.atque eſt tota BG commẽſurabilis expoſitę rationali A.ergo BC apotome eſt quarta. Inuenta igitur eſt quarta apotome BC. quod facere oportebat.

6.huius.

9.huius.

74. huius.

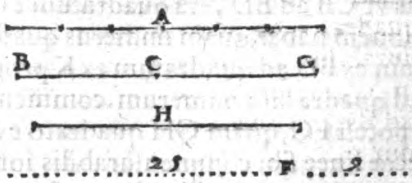
4. diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; ſi fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC ℞ 10 & BC 4 minus ℞ 10, quae eſt apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipſi A commenſurabilis ſit CG. ergo CG eſt rationalis. & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrumque ipſorum DF FE proportionem rurſus nō habeat, quā numerus quadratus ad quadratū numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. ergo quadratum ex CG commenſurabile eſt quadrato ex GB. eſt autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex GB: & idcirco recta linea GB eſt rationalis. & quoniam vt DE ad EF, ita eſt quadratum ex BG ad quadratum ex GC: & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi GC longitudine; & ſunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & BC apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Quo enim plus poteſt quadratum ex BG, quàm quadratum ex GC, ſit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC eſt vt DE ad EF, erit per conuerſionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratū. ſed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipſi H longitudine eſt incommenſurabilis. & plus poteſt BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BC plus poteſt, quàm GC quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. atque eſt congruens CG expoſitę rationali A longitudine commenſurabilis. quare BC apotome eſt quinta. Inuenta eſt igitur quinta apotome BC. quod facere oportebat.

4.huius.

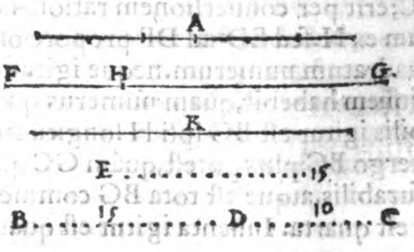
9.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF ſit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG, quod eſt 9 ad alium, erit BG R *34, & BC* R *34 minus 3, quę eſt apotome quinta.*

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO. XCI.

Inuenire ſextam apotomen.

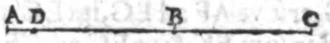


Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter ſe, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. & fiat vt E ad BC, ita quadratū ex A ad quadratū ex FG: ut aūt BC ad CD, ita quadratū ex FG ad quadratū ex GH. qm̄ igitur eſt vt E ad BC ita, quadratū ex A ad quadratū ex FG; erit quadratum ex A quadrato ex FG cō

6.huius.

menſurabile.

menſurabile.rationale autem eſt quadratum ex A. ergo & quadratum ex FG rationale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem nõ habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommẽſurabilis igitur eſt A ipſi FG longitudine. 9 huius. rurſus quoniam eſt vt BC ad CD,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH,erit quadratum 6. huius. ex FG commenſurabile quadrato ex GH. eſt autem quadratum ex FG rationale.rationale igitur eſt & quadratum ex GH; & ipſa GH rationalis. quòd cũ BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.ergo F G ipſi G H longitudine eſt incom- 9.huius. menſurabilis: & ſunt vtræque rationales. quare FG GH rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles,& FH apotome eſt. 74.uuius. Dico & ſextam eſſe. Quoniam enim eſt vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG;vt autem BC ad CD,ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. ſed E ad CD proportionem non habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numetum. ergo A ipſi GH longitudine eſt incommenſurabiiis: & neutra ipſarum FG GH expoſitæ rationali A commenſurabilis eſt longitudine.quo igitur plus poteſt quadratum ex FG, quàm quadratum ex GH,ſit quadratum ex K. & quoniam eſt vt BC ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit per conuerſionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K. at C B ad B D proportionem non habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo incommenſurabilis eſt FG ipſi K longitudi- 9 huius. ne.& FG plus poteſt,quã GH quadrato ex K. plus igitur poteſt FG,quàm GH quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum FG GH eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali A.ergo FH apotome eſt ſexta. 6. tertiarum diffi. Inuenta eſt igitur ſexta apotome F H. ſed & expeditius ſex dictarum linearum inuentionem oſtendere licet.



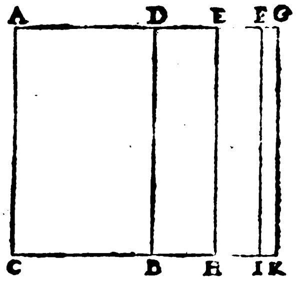
Si enim oporteat inuenire primam apotomẽ, exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius maius nomẽ ſit AB.& ponatur B D ipſi BC æqualis.ergo AB BC, hoc eſt AB BD rationales sũt, potentia ſolum commenſurabiles: & AB plus poteſt,quàm BC, hoc eſt quàm BD quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & AB eſt commenſurabilis lõgitudine expoſitę rationali.apotome igitur prima eſt AD.ſimiliter & reliquas apotomas inueniemus,eas, quæ ex binis nominibus eiuſdem ordinis exponentes.

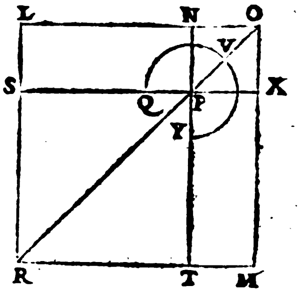
F. C. COMMENTARIUS.

Sit A 6. numerus autem E ſit 15,BC 25, & CD 10. fiat igitur ut 15 ad 25, ita 36 ad aliũ, erit ad 60. Rurſus fiat ut 25 ad 10,ita 60 ad alium,erit ad 24. ergo F G eſt R *60, & G H* R *24. ãc propterea FH eſt* R *60 minus* R *24, quę eſt apotome ſexta.*

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si ſpacium cõtineatur rationali,& apotoma prima, recta linea ſpacium potens apotome eſt.





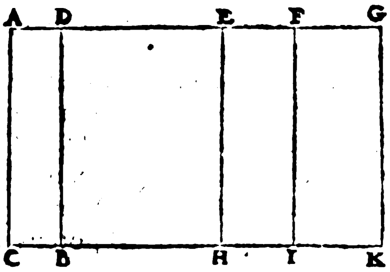
Contineatur enim ſpacium AB rationali AC,
& apotoma prima AD .Dico rectam lineam,
quæ poteſt ſpacium AB apotomen eſſe.Quoniã
enim AD prima apotome eſt,ſit ipſi congruens
1.diffi.tertiarum. DG.ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum
commenſurabiles, & tota AG longitudine
commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC. &
præterea AG plus poteſt, quàm GD quadrato
rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine.ſi
igitur quartæ parti quadrati,quod fit ex DG,ęquale
parallelogrammũ ad AG applicetur, deficiens
18.huius: figura quadrata,in partes longitudine cõmenſurabiles
ipſam diuidet.ſecetur DG bifariã
in E,& quadrato ex EG æquale parallelogrammum
ad ipſam AG applicetur, deficiens figura
quadrata, quod ſit AFG. commenſurabilis igitur
eſt AF ipſi FG longitudine: & per E F G
puncta ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK.
& qm̃ AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabilis,
16.huius. erit &tota AG vtrique ipſarum AF FG cõmenſurabilis
longitudine.ſed AG commenſurabilis
eſt ipſi AC. vtraque igitur AF FG ipſi AC
longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt AC rationalis.ergo & rationalis vtraque
20. huius. AF FG; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK eſt rationale.&
16.huius. quoniam DE ipſi EG longitudine eſt commenſurabilis, erit & DG vtrique DE EG
commenſurabilis longitudine:eſtq́; rationalis DG,& ipſi AC longitudine incõmenſurabilis.
14.huius. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt,& incommenſurabilis ipſi AC
22.huius. longitudine:& ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium eſt. ponatur
ipſi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo
autem FK æquale quadratum auferatur NX,communem ipſi angulum habens LOM.
26.sexti. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR,
& figura deſcribatur. itaque quoniam rectãgulum AFG eſt æquale quadrato ex
14.sexti. EG,erit vt AF ad EG,ita EG ad GF:ſed vt AF ad EG,ita eſt parallologrammum AI
ad ipſum EK:& vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipſum KF.parallelogrammorum
igitur AI KF medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum
LM NX medium proportionale MN, vt ſuperius oſtenſum eſt.parallelogrammumq́;
AI eſt æquale quadrato LM;& parallelogrammum KF quadrato NX æquale.
ergo & parallelogrammum MN eſt æquale ipſi EK.ſed parallelogrammum quidem
EK eſt æquale parallelogrammo DH; parallelogrammum vero MN ipſi LX.
parallelogrammum igitur DX eſt æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. eſt autẽ
& parallelogrãmũ AK quadratis LM NX ęquale.ergo & reliquũ AB eſt ęquale quadrato
ST. at quadratũ ST eſt id,quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN eſt æquale
parallelogrammo AB; ideoq́; recta linea LN ipſum AB poteſt.Dico LN apotomen
eſſe. Quoniam enim rationale eſt vtrumque parallelogrammorum AI FK,&
ſunt ęqualia quadratis LM NX,erit & vtrumque LM NX rationale; hoc eſt vtrumque
ipſorum,quæ fiunt ex LO ON;& vtraque igitur LO ON rationalis eſt. rurſus
Qm̃ medium eſt parallelogrammum DH,atque eſt æquale ipſi LX; erit & LX mediũ.
cũ igitur LX quidẽ medium ſit,NX vero rationale, incõmenſurabile eſt LX ipſi
10.huius: NX; vtq́; LX ad XN,ita eſt recta linea LO ad ON. ergo LO ipſi ON longitudine eſt
incommenſurabilis.& ſunt vtręque rationales.quare LO ON rationales ſunt potẽtia
74.huius. ſolum commenſurabiles.& idcirco apotome eſt LN;& ſpacium AB poteſt.quę
igitur poteſt ſpacium AB eſt apotome. ergo ſi ſpacium contineatur rationali, &
apotoma prima,recta linea ſpacium potens apotome eſt.

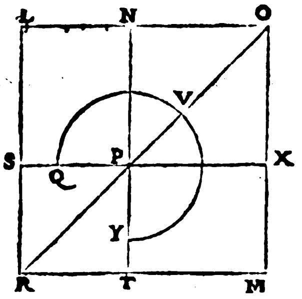
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD 7 minus R 13. *erit DG* R 13, *& DE, uel EG* R 3 $\frac{1}{4}$. *quòd ſi ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipſius EG, deficienſq; figura quadrata, erit ex demonſtratis ad 18 huius AF 6 $\frac{1}{2}$ FG $\frac{1}{2}$. ergo parallelogrammum AI eſt 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum vero DK eſt* R 468, *DH, uel EK* R 117, *EI* R 117 *minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB eſt 42 minus* R 468. *Huiuſmodi autem ſpacium iuniores etiam apotomen primam, vel reſiduum primum appellare conſueuerunt, cuius latus quadratum, vel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum eſt in ſpacijs binomialibus, prçterquã quòd loco vocis plus, vtemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes; ita vt quod ex ipſis producitur, ſit aequale quartę parti 468, hoc eſt 117. erit maior pars 39, minor 3: ideoq;* R 39 *minus* R 3 *erit latus quadratum, vel radix huius ſpacij reſidui 42 minus* R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſecunda, recta linea ſpacium potens mediæ eſt apotome prima.

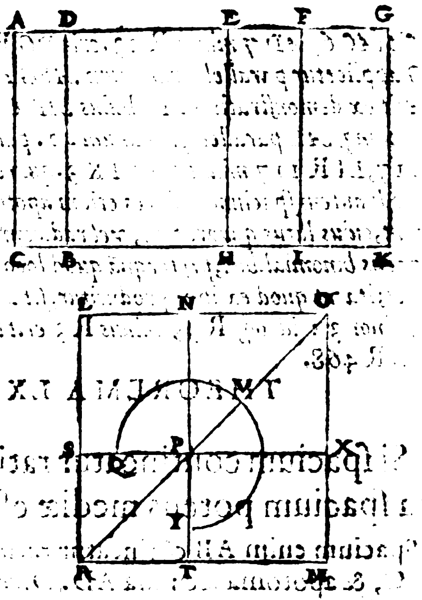




Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AB poteſt mediæ apotomen eſſe primam. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & congruẽs DG commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC; totaq; AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ipſius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E; & quadrato ipſius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. ergo commenſurabilis eſt AF ipſi FG longitudine; & per puncta EFG ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipſi FG lõgitudine eſt commenſurabilis, erit AG vtrique ipſarum AF FG commenſurabilis 16. huius. longitudine. rationalis autem eſt AG, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis. ergo & vtraque AF FG eſt rationalis, ipſiq; AC incommenſurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium eſt. 22 huius. Rurſus quoniam DE commenſurabilis eſt ipſi EG, erit & DG vtrique DE EG commẽſurabilis. 16. huius. ſed DG commenſurabilis eſt ipſi AC longitudine. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammo- 20. huius rum DH EK eſt rationale. conſtituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum ſunt qua- 26. ſexti. drata LM NX. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media ſint, & ſibi ipſis commenſurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON medię ſũt, potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam rectangulum AFG eſt æquale quadrato

2. diff. tertiarum.

18. huius



14.ſexti. drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: ſed vt AF ad EG, ita eſt parallelogrãmum AC ad ipſum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK mediũ proportionale eſt EK. eſt autẽ & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidẽ eſt ęquale quadrato LM; parallelogrãmum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipſi EK eſt ęquale. ſed DH eſt æquale EK, & LX ipſi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX ęquale erit. itaq; quoniam totum AK ęquale eſt quadratis LM NX, quorum DK eſt æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX; erit reliquum AB ęquale quadrato ST, hoc eſt ei, quod fit ex LN. quadratũ igitur ex LN eſt ęquale ſpacio AB; ideoq; recta linea LN ſpacium AB poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe primam. quoniam enim rationale eſt EK, & ęquale ipſi MN, hoc eſt ipſi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem oſtenſum eſt NX. quare LX eſt incommenſurabile ipſi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine ſunt incommenſurabiles; ac propterea LO ON mediæ ſunt commenſurabiles potentia ſolum, quæ rationale continent. quare LN medię apotome prima eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens medię eſt apotome prima. 75.huius

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 4, & AD ℞ 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipſius EG, deficienſq; figura quadrata: erit AF ℞ 27, FG ℞ 3. & ob id parallelogrammum AI ℞ 432, FK ℞ 48, & totum AK parallelogrãmum ℞ 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus ℞ 48. ergo AB eſt ℞ 768 minus 24, quod ſpacium etiam apotomen ſecundam, vel reſiduum ſecundum vocat. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur ℞ 768 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit aequale quartae parti quadrati 24, hoc eſt aequale 144, erit maior pars ℞ 432, minor ℞ 48. quare ℞℞ 432 minus ℞℞ 48 eſt latus quadratum, ſeu radix eius ſpacij reſidui ℞ 768 minus 24.

THEOREMA LXX. PROPOSITIO XCIIII.

Si ſpacium cõtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea ſpacium potens medię eſt apotome ſecunda.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectã lineam, quæ poteſt ſpacium AB, mediæ eſſe apotomen ſecundam. ſit enim ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt, potẽtia ſolum commenſurabiles, & neutra ipſarum AG GD longitudinę commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC, totaq; AG plus poteſt, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabiles longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati ipſius DG ęquale parallelogrãmum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ipſius EG æquale ad 18.huius. AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG: & per puncta EFG ipſi

ipſi AC parallelę ducantur EH FI GK. ergo AF FG
commenſurabiles ſunt: atque ob id parallelogrammũ
AI parallelogrammo FK eſt commenſurabile. & quo-
niã AF FG commenſurabiles ſunt longitudine, erit & 16.huius.
AG vtrique ipſarum AF FG longitudine commenſu-
rabilis. eſt autem rationalis AG, & ipſi AC incommen-
ſurabilis longitudine. & vtraque igitur AF FG ratio-
nalis eſt, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis;
ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI F
K eſt medium. Rurſus quoniam DE commenſurabilis 22.huius.
eſt ipſi EG longitudine, erit & DG vtrique DE EG 16.huius.
cõmenſurabilis. ſed DG rationalis eſt, & ipſi AC incõ
menſurabilis longitudine. rationalis igitur eſt & vtra-
que DE EG, & ipſi AC lõgitudine incommenſurabi-
lis. ergo vtrumque parallelogrammorũ DH EK me-
dium eſt. quòd cum AG GD potentia ſolum commẽ- 21.huius
ſurabiles ſint, AG ipſi GD longitudine erit incommẽ
ſurabilis. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AF longitu
dine, & DG ipſi GE. eſt igitur AF ipſi EG longitudine
incommenſurabilis. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK paralle- Ex demonſtratis ad 14
logrammum. ergo incõmenſurabilis eſt AI ipſi EK. conſtituatur ipſi quidem AI æ- huius.
quale quadratum LM; ipſi vero FK ęquale auferatur NX, angulum habens eundem,
quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum dia- 26.sexti.
meter OR, & figura deſcribatur. Quoniam igitur rectangulum AFG eſt æquale
quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita paralle- 14.sexti.
logrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo &
vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportio
nale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & pa-
rallelogrammum AI quidem æquale eſt quadrato LM; FK vero ipſi NX. ergo &
EK eſt æquale MN. ſed MN æquale eſt LX, & EK ipſi DH. totum igitur DK gnomo-
ni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. eſt autem & parallelogrammũ AK æquale qua
dratis LM NX. ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ST, hoc eſt quadrato ex LN. & ob
id recta linea LN ipſum AB ſpacium poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe ſecun-
dam. Quoniam enim media oſtenſa ſunt parallelogramma AI FK, & ſunt ęqualia
quadrãtis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcir
co vtraque LO ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi FK, erit &
quadratum ex LO quadrato ex ON commenſurabile. Rurſus quoniam oſtenſum eſt
AI incommenſurabile ipſi EK, & LM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt qua-
dratum ex LO rectangulo LON. quare & recta linea LO ipſi ON longitudine eſt in Lem. ad 23.
commenſurabilis. ſunt igitur LO ON mediæ commenſurabiles potentia ſolum. Di huius.
co eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonſtratum eſt EK, at
que eſt rectãgulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ ſunt po-
tentia ſolum commenſurabiles, quę medium continent; ac propterea LN mediæ 76.huius.
apotome ſecunda eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens
mediæ apotome eſt ſecunda.

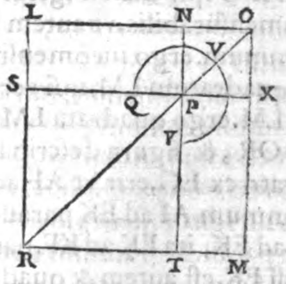
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, & AD R 27 *minus* R 15. *erit DG* ℞ 15, *& DE, vel EG* ℞ 3 $\frac{3}{4}$. *quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum aequale quadrato ex EG, deficienſq; figura quadrata, quod ſit AFG, erit AF* R 18 $\frac{3}{4}$, *FG* R $\frac{3}{4}$. *ideoq; parallelogrammum AI eſt* ℞ 675, *FK* ℞ 27, *& totum AK parallelogrammum* ℞ 972. *parallelogrammum autem DK* ℞ 540, *EK* ℞ 135, *& EI* R 135 *minus* ℞ 27. *eſt igitur AB* R 972 *minus* ℞ 540. *quod ſpacium eſt apotome tertia, vel tertium reſiduum. Itaque diuidatur* ℞ 972 *in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit ęquale*

R 135.*erit maior pars* ℞ 675,*& minor* ℞ 27. *ergo* R℞ 675 *minus* ℞℞ 27 *eſt latus quadratum,vel radix ſpacij illius reſidui* ℞ 972 *minus* ℞ 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea ſpacium potens minor eſt.



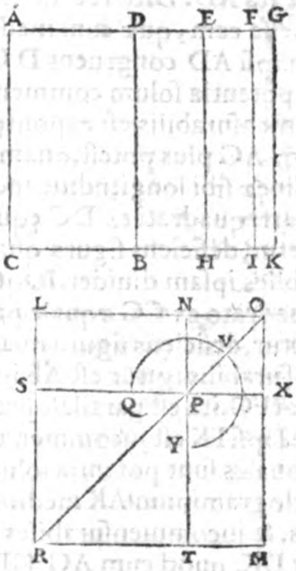
Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium AB poteſt, minorem eſſe. ſit enim 4. diffi. tertiarum. ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AG commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC lõgitudine, totaq́; AG plus poteſt, quàm GD, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ſi igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, 16.huius. deficiens figura quadrata, in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. ergo AF ipſi FG longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta EFG ipſis AC BD parallelæ EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſurabilis, 20. huius. erit totum parallelogrammum AK rationale. Rurſus quoniam incommenſurabilis eſt DG ipſi AC longitudine, & ſunt vtraque rationales, 22.huius. erit parallelogrammum DK medium. quòd cum AF ipſi FG *longitudine ſit incommenſurabilis*, erit & parallelogrammum AI incommenſurabile parallelogrammo FK. conſtituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem, 26.sexti. quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaque quoniã rectangulum AFG 14.sexti. eſt ęquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. ſed vt AF quidem ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque eſt parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & EK æquale eſt MN. ſed EK quidem eſt æquale parallelogrammo DH; MN vero ipſi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. & quoniam totum AK æquale eſt quadratis LM NX, quorum DK eſt æquale gnomoni YVQ, & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc eſt quadrato ex LN. ergo LN ſpacium AB poteſt. Dico LN irrationalem eſſe, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale eſt, & æquale quadratis ipſorum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON rationale. Rurſus quoniam parallelogrammum DK medium eſt, atque eſt æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON cõtinetur mediũ: oſtenſũ aũt eſt parallelogrãmũ AI incõmẽſurabile ipſi FK. ergo & quadratũ ex LO incõmenſurabile eſt quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia ſunt incommenſurabiles, quę faciunt compoſitum qui- 77.huius. dem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium. quare LN irrationalis eſt, quæ minor appellatur, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens minor eſt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6. AB 7 minus R 14. *erit DG* R 14, *& DE, vel EG* ℞ 3 $\frac{1}{2}$. *Si vero ad AG applicetur parallelogrammum A F G ęquale quadrato ipſius E G, deficiensq́; figura quadrata, erit A F 3 $\frac{1}{2}$ plus* ℞ 8 $\frac{1}{4}$: *FG 3 $\frac{1}{2}$ minus* R 8 $\frac{1}{4}$, *& parallelogrammum AI eſt* ℞ 21 *plus* R 315, *FK 21 minus* ℞ 315, *& totum AK 42. parallelogrammum vero D K eſt* ℞ 504, *CK* R 126. *& AB 42 minus* ℞ 504. *quod ſpacium eſt apotome quarta, vel reſiduum quartum. ſi igitur 42 diuidatur in duas partes, ita ut productum ex ipſis ſit ęquale quartae parti* ℞ 504, *hoc eſt* ℞ 126, *erit maior pars 21 plus* ℞ 126, *& minor 21 minus* R 126. *ergo* R *V. 21 plus* R 126 *minus* R *V. minus* R 126 *eſt latus quadratum, ſeu radix ſpacij reſidui 42 minus* R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO. XCVI.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum rationali medium totum efficit.



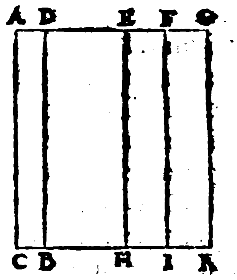
Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectā lineam, quæ ſpacium AB poteſt, eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. ſit enim ipſi AD congruens D G. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum cūmenſurabiles; & congruens DG longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC; totaq; AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. 19. huius. Itaque ſecetur D G bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit A F G. ergo AF incommenſurabilis eſt ipſi F G longitudine. Ducantur per puncta EFG ipſi AC parallelę EH FI GK. & quoniam AG incommenſurabilis eſt ipſi A C lōgitudine, & ſunt vtręque rationales; 21. huius. erit parallelogrammum AK medium. Rurſus quoniam rationalis eſt DG, & ipſi AC longitudine commenſurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Conſtituatur igitur parallelogrammo quidem A I ęquale quadratum LM; 20. huius ipſi vero FK ęquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quem LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. 16. huius ſit diameter ipſorum OR, & figura deſcribatur. Similiter oſtēdemus rectam lineam LN ſpacium AB poſſe. Dico LN eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim oſtendimus parallelogrammum AK medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum LO ON: erit & compoſitum ex quadratis LO ON medium. Rurſus quoniam DK rationale eſt, & æquale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. eſt autem AI incommenſurabile ipſi F K. incommenſurabile igitur eſt quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoque LO ON potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſorum quadratis medium; quod autem ipſis bis continetur rationale. ergo reliqua L N irrationalis eſt, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens eſt, quæ cum rationali medium totum efficit.

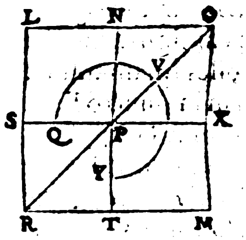
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD R 36 minus 4, erit DG 4, & DE, vel EG 2. quòd ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ex C G, deficiensq́; figura quadrata, erit AF R 14 plus R 10; FG R 14 minus R 10. & parallelogrammum A I eſt R 504 plus R 360, F K R 504 minus R 360: totumq́; AK R 2016. At vero DK eſt 24, EK 12, & AB R 2016 minus 24. quod ſpacium eſt apotome quinta, vel reſiduum quintum. Diuidatur R 2016 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit aequale 144°, erit maior pars R 504 plus R 360, & minor R 504 minus R 360. quare R V. R 504 plus R 360 minus R V. R 504 minus R 360 eſt latus quadratum dicti ſpacij reſidui R 2016 minus 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſexta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.



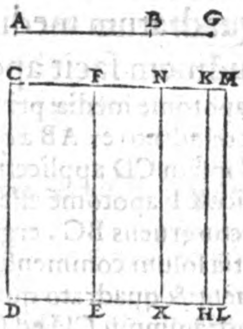


Spacium enim AB contineatur rationali A C, & apotoma ſexta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium A B poteſt, eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. ſit 6. diffin. tertiarum. enim ipſi AD congruens DG. ergo A G G D rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum commenſurabilis eſt expoſitę rationali A C longitudine. totaq́; AG plus poteſt, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. ſi igitur quartæ parti quadrati ex DG ęquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommen- 19. huius. ſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. incommenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine. ut autem AF ad FG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum FK. er- 10. huius: go AI ipſi FK eſt incommenſurabile. & quoniam AG AC 22. huius rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit parallelogrammum AK medium. ſunt autem AG DG rationales, & incommenſurabiles longitudine. medium igitur eſt & DK. quòd cum AG GD potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit A G ipſi GD longitudine incommenſurabilis. ſed ut AG ad GD, ita eſt AK ad KD. incom- 10. huius menſurabile igitur eſt AK ipſi KD. itaque conſtituatur parallelogrammo AI ęquale quadratum LM; parallelogrammo autem F K æquale auferatur quadratum N X, 24. ſexti. angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eãdem ſunt diametrum. ſit eorum diameter OR, & figura deſcribatur. ſimiliter vt ſupra, oſtendemus rectam lineam LN ſpacium AB poſſe. Dico LN eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quonã enim medium oſtenſum eſt A K, atque eſt æquale quadratis ipſarum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON medium. Rurſus quoniam medium oſtenſum eſt D K, & eſt ęquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommenſurabile autem oſtenſum eſt A K ipſi K D. ergo & quadrata ex LO ON incommenſurabilia ſunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommenſurabile. ergo LO ON potentia ſolum commenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium. quod autem ipſis bis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſa- 79. huius. rum quadratis. ergo LN irrationalis eſt, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & poteſt AB ſpacium. recta igitur linea ſpacium A B potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit AG 6, AD R 32 *minus* R 20. *erit DG* R 20, *& DE vel EG* R 5. *ſi autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, aequale quadrato ex EG, & deficiens figura quadrata, erit AF* R 8 *plus* R 3, *FG* R 8 *minus* R 3: *& idcirco parallelogrammum AI* R 288 *plus* R 108, *FK* R 288 *minus* R 108, *& totum parallelogrammum AK* R 1152. *parallelogrammum vero DK eſt* R 720, *DH* R 18, *& AB* R 1152 *minus* R 720. *quod ſpacium eſt apotome ſexta, vel ſextũ reſiduum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur eſſe* R *V*. R 288 *plus* R 108 *minus* R *V*. 288 *minus* R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.



Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ipſam CD applicetur latitudinẽ faciens CF. Dico CF apotomen eſſe primam. ſit enim ipſi AB congruens BG. ergo AG GB rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles: & quadrato quidẽ ex AG æquale ad 74.huius.
ipſam D applicetur CH: quadrato autem ex BG ęqua pplicetur KL. totum igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale eſt quadrato ex AB. ergo reliquum FL 7. ſecundi.
ei, quod bis AG GB continetur eſt æquale. ſecetur FM bifariam in N: & per N ipſi CD parallela ducatur NX: vtrumque igitur ipſorum FX LN eſt ęquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia ſunt, atque eſt quadratis ex AG GB ęquale parallelogrammum DM; erit ipſum DM rationale; & ad rationalẽ CD applicatum eſt, latitudinẽ faciens CM. ergo CM eſt rationalis, & ipſi CD commenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam medium eſt, 21.huius.
quod bis continetur AG GB, eſtq́; ei, quod bis AG GB continetur; æquale parallelogrammum LF; erit ipſum LF medium: & applicatum eſt ad rationalem CD, latitudinem faciens FM. quare FM eſt rationalis, ipſiq́; CD longitudine incommenſurabilis. & ſunt quadrata quidem ex AG, GB rationalia: quod autem bis continetur 23.huius.
AG GB medium. quadrata igitur ex AG GB incommẽſurabilia ſunt ei, quod bis AG GB continetur. ſed quadratis ex AG GB ęquale eſt parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB eſt ęquale FL. ergo CL ipſi LF eſt incommenſurabile. vt autem CL ad LF, ita eſt recta linea CM ad MF. incommẽſurabilis igitur 1. ſexti.
eſt CM ipſi MF longitudine: & ſunt vtræque rationales. ergo CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea CF eſt apotome. Dico & pri- 74. huius.
mam eſſe. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale eſt Lem. ad 55. huius.
quod AG GB continetur; atque eſt quadrato quidem ex AG ęquale parallelogrãmum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB ęquale KF. erit ipſorum CH KL medium proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. ſed vt CH ad NL, ita eſt recta linea CK ad ipſam NM. vt autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita eſt NM ad MK. & ob id rectan- 11. quinti.
gulum CKM, eſt æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc eſt quartę parti quadrati 17. ſexti.
ex FM. & quoniam quadratum ex AG commenſurabile eſt quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commenſurabile. ſed vt CH ad KL ita eſt recta linea CK ad ipſam KM. commenſurabilis igitur eſt CK ipſi KM. itaque cum duæ rectæ lineę inęquales ſint CM MF, & quartę parti quadrati ex FM ęquale parallelogramum ad ipſam CM applicatum ſit, deficiens figura quadrata, quod

ſcilicet

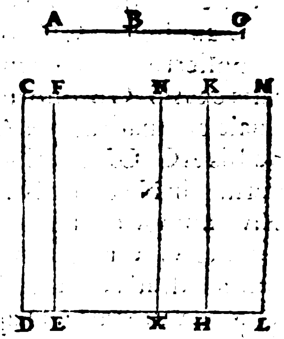
18.huius. ſcilicet CK KM continetur; ſitq́; CK commenſurabilis ipſi KM: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt 1.diffi. tertiarum. CM commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali CD. ergo CF eſt prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ 33 minus R 3, BG ℞ 3. rationalis autem CD ſit 6; & ſi ad ipſam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod eſt 33, latitudinem faciens CK, erit CK 5 $\frac{1}{2}$. & ſi ad eandem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod eſt 3, latitudinem faciens KM, erit KM $\frac{1}{2}$, & tota CM 6. Rurſus ſi ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod eſt ℞ 99, latitudinem faciens FN, erit FN R 2 $\frac{3}{4}$, & eadem ratione NM eſt R 2 $\frac{3}{4}$, & tota FM R 11. ergo CF eſt 6 minus R 11, quę eſt apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum medię apotomæ primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam.



Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autē CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammū CE ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomē eſſe ſecundam. ſit enim ipſi AB congruens BG. 73.huius. ergo AG GB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent: & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL eſt ęquale quadratis ex AG GB medijs exiſtētibus. quare & CL eſt medium; & ad rationalem CD applicatum eſt, latitudinem 23.huius. faciens CM. rationalis igitur eſt CM, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis, itaque quoniam CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB ęquale eſt parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æquale 7 ſecundi. ipſi FL. eſt autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur eſt & 21.huius. FL; & ad rationalem FE applicatum eſt, latitudinem faciens FM. quare FM eſt rationalis, & ipſi CD commenſurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc eſt parallelogrammum CL medium eſt; quod autem bis continetur AG GB, videlicet FL eſt rationale: erit CL 1.ſexti. incommēſurabile ipſi LF. vt autem CL ad LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM 10.huius. ipſi MF longitudine eſt incōmenſurabilis. & ſunt vtræque rationales. ſunt igitur CM MF rationales potentia ſolum commenſurabiles. ideoq́; CF apotome eſt. Dico & ſecundam 74.huius. eſſe. ſecetur enim FM bifariam in puncto N: & per N ipſi CD parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL eſt ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum Lem. ad 55. huius. ex AG GB medium proportionale eſt, quod AG GB continetur; eſtq́; quadratū ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipſi KL: erit parallelogrammorū CH KL medium proportionale NL. eſt igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. Sed vt CH ad NL, ita eſt recta linea CK ad ipſam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt 11.quinti. 17.ſexti. CK ad NM, ita eſt NM ad MK; ac propterea rectāgulum CKM eſt æquale quadrato ex NM, hoc eſt quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commenſurabile eſt quadrato ex GB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commenſurabile, hoc eſt recta linea CK commenſurabilis ipſi KM: quod cum

dua

duę rectæ lineę inæquales ſint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æquale
parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum ſit, deficiens figura quadra
ta, & in partes commenſurabiles ipſam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm 18.huius:
MF quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: atque eſt congruens F
M expoſitę rationali CD commenſurabilis. quare CF eſt apotome ſecunda. quadra 2. Diffi. tertiarum.
tum igitur mediæ apotomę primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit
apoto men ſecundam.

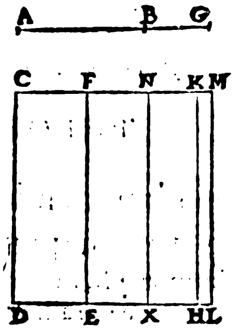
F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis perſpicuum ſit, vt apotomę quadratū inueniamus, nos vti ſeptima propoſitione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum eſt.

Sit AB RR 972 *minus* RR 108, *BG* RR 108, *rationalis autem CD ſit 6. & ſi ad ipſam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod eſt* R 972, *latitudinem faciens CK; erit CK* R 27: *& ſi ad eādem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod eſt* R 108 *latitudinem faciens KM; erit KM* R 3. *& tota CM* R 48. *Rurſus ſi ad CD applicetur parallelogrammum FX aequale rectangulo AGB, quod eſt 18, latitudinem faciens FN; erit FN 3, itemq; NM 3, & tota FM 6. ergo CF eſt* R 48 *minus 6, quae eſt apotome ſec unda.*

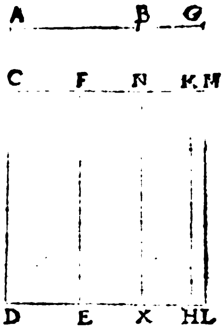
THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ ſecundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.



Sit medię apotome ſecunda AB; rationalis autem CD
& quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ip
ſam CD applicetur, latitudinem faciēs CF. Dico CF apo
tomen eſſe tertiam. ſit enim ipſi AB congruens BG. ergo 76.huius:
AG GB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles,
quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æ-
quale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: qua
drato autem ex GB ęquale ad KH applicetur KL, latitudi
nem faciens KM. totum igitur CL eſt æquale quadratis
ex AG GB: & ſunt quadrata ex AG GB media. ergo & C
L eſt medium, & ad rationalem CD applicatum eſt, lati-
tudinem faciens CM. ergo CM eſt rationalis, & ipſi CD 23.huius.
incommenſurabilis longitudine. & quoniam totum CL
eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum CE ęquale eſt
quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. ſecetur 7.secundi.
FM biſariam in N; & per N ipſi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur paral-
lelogrammorum FX NL eſt æquale ei, quod AG GB continetur. eſt autem quod
continetur AG GB medium. ergo & medium eſt FL, & ad rationalem EF applica-
tum eſt, latitudinem faciens FM. quare & FM eſt rationalis; & ipſi CD longitudine 23.huius.
incommenſurabilis. & quoniam AG GB potentia ſolum commenſurabiles ſunt,
erit AG ipſi GB incommenſurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectan Lem. ad 23. huius.
gulo AGB eſt incommenſurabile. ſed quadrato quidem ex AG commenſurabilia
ſunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commenſurabile eſt quod bis
AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, Ex demonſtratis in 24
ſunt incommenſurabilia. at quadratis ex AG GB æquale eſt parallelogrammum huius.
CL; ei vero, quod bis continetur AG GB eſt ęquale FL. incommenſurabile igitur
eſt CL ipſi LF. Vt autem CL ad LF, ita eſt recta linea CM ad MF. ergo CM ipſi MF 1.sexti.
incommenſurabilis eſt longitudine; & ſunt vtręque rationales. quare CM MF ratio 10.huius.
nalęs ſunt potentia ſolum commenſurabilis. & ob id apotome eſt CF. Dico & ter- 74.huius.
tiam eſſe. Quoniam enim quadratum ex AG commenſurabile eſt quadrato ex GB,
erit

erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL com-
menſurabile.ergo & recta linea CK eſt cõmenſurabilis ip
Lem. ad 55. huius. ſi KM. & quoniam quadratorum ex AG GB mediũ pro-
portionale eſt rectangulũ AGB; atque eſt quadrato qui-
dem ex AG ęquale parallelogrammum CH;quadrato au
tem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL:
erit parallelogrammorum CH KL medium proportio-
nale NL.eſt igitur vt CH ad NL,ita NL ad LK.ſed vt CH
1. ſexti. ad NL,ita eſt recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK,
11. quinti; ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac
17. ſexti. propterea rectangulum CKM eſt æquale quadrato ex N
M,hoc eſt quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur
duæ rectę lineæ inæquales ſunt CM MF; & quartæ parti
quadrati ex FM æquale ad CM applicatum eſt, deficiens
18. huius: figura quadrata,quod in partes cõmenſurabiles ipſam diuidit: recta linea CMplus
poterit,quam MF quadrato rectę linee ſibi longitudine commenſurabilis.& neutra
5. diffin. tertiarum. ipſarum CM MF longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali CD.ergo CF
tertia eſt apotome. quadratum igitur mediæ apotomæ ſecundę ad rationalem applicatum,
latitudinem facit apotomen tertiam.



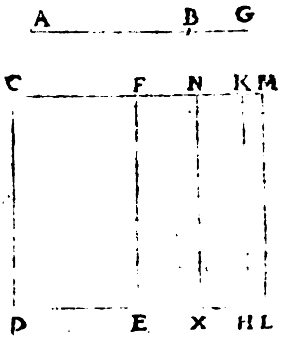
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 882 *minus* RR 18, *BG* RR 18, *& rationalis CD ſit 6. quòd ſi ad C D applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* R 24 $\frac{1}{2}$. *& ſi applicetur KL aequale quadrato ex G B, quod latitudinem faciat K M, erit KM* R $\frac{1}{2}$; *& tota CM* R 32. *prę̨terea ſi ad eandem C D applicetur F X aequale rectangulo AGB, quod eſt* R 126, *latitudinem faciens F N, erit FN* R 3 $\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *ergo C F eſt* R 32 *minus* R 14, *qu ae eſt apotome tertia.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato
ex AB æquale paralllelogrãmum CE ad ipſam CD
applicetur,latitudinem faciens CF. Dico CF apo-
tomen eſſe quartam.ſit enim ipſi AB congruẽs BG.
77. huius. ergo AG GB potentia incommenſurabiles ſunt,fa-
cientes compoſitum quidem ex ipſarum AG GB
quadratis rationale; quod autem bis ipſis contine-
tur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD ap-
plicetur CH,latitudinem faciens CK: quadrato au-
tem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinẽ
faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB
eſt æquale.atque eſt compoſitum ex quadratis AG
GB rationale.ergo &rationale eſt CL;& ad rationa
21. huius. lem CD applicatum eſt,latitudinem faciẽs CM.qua
re CM eſt rationalis, & ipſi CDlongitudine commenſurabilis. & quoniam totum
7. ſecundi. CL eſt ęquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale eſt quadrato ex AB: erit
reliquum FL ęquale ei,quod bis AG GB cõtinetur. Itaque ſecetur FM bifariam in
N;& per N alterutri ipſarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur paral
lelogrammorum FX NL eſt ęquale ei,quod continetur AG GB. & quoniam quod
bis continetur AG GB medium eſt,& æquale parallelogrammo LF. erit & LF medium.



dium.& ad rationalem FE applicatum eſt, latitudinem faciens FM.ergo FM eſt rationalis,& ipſi CD longitudine incommenſurabilis.& quoniam compoſitũ ex quadratis ipſarum AG GB eſt rationale;quod autem bis AG GB continetur mediũ: erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommenſurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale eſt parallelogrammum CL;& ei quod bis AG GB continetur eſt ęquale FL.incommenſurabile igitur eſt CL ipſi LF. ſed vt CL ad LF,ita eſt CM ad MF.quare CM ipſi MF longitudine eſt incommenſurabilis:& ſunt vtræque rationales.ergo CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles.& eam ob cauſſam apotome eſt CF.Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AG GB potentia ſunt incommenſurabiles, erit quadratum ex AG incommenſurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale eſt parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB eſt æquale KL.incommenſurabile igitur eſt CH ipſi KL.ſed vt CH ad KL,ita eſt CK ad KM.ergo CK ipſi KM eſt incommenſurabilis longitudine.& quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale eſt AGB rectangulum;atque eſt quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH;quadrato autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB ęquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. eſt igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. ſed vt CH ad NL,ita CK ad MN;& vt NL ad LK, ita NM ad MK.ergo vt CK ad MN ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM eſt æquale quadrato ex NM, hoc eſt quartę parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duę rectæ lineæ inæquales ſunt CM MF;& quartæ parti quadrati ex FM ęquale ad CM applicatum eſt,deficiens figura quadrata,quod eſt CKM,& in partes incommenſurabiles ipſam diuidit: recta linea CM plus poterit,quàm MF quadrato rectę lineę ſibi incommẽſurabilis longitudine.& eſt tota CM longitudine commenſurabilis expoſitę rationali CD. ergo CF quarta eſt apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

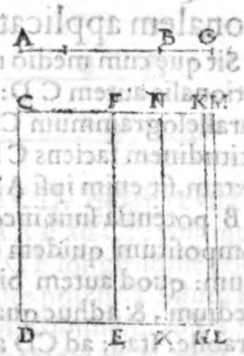
25.huius. 1.ſexti. 10.huius: 74.huius. 1.ſexti. 10.huius. Lem. ad 55. huius. 1.ſexti. 11.quinti. 17.ſexti. 19.huius. 4.Diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V.21 plus ℞ 315, minus ℞ V.21 plus ℞ 315; BG ℞ V.21 minus ℞ 315: rationalis autem CD ſit 6. & ſi ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK 3 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 8 $\frac{3}{4}$. & ſi applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM 3 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 8 $\frac{3}{4}$: & tota CM 7. Quòd ſi ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, videlicet ℞ 126, latitudinem faciens FN, erit FN ℞ 3 $\frac{1}{2}$; & tota FM R *14. eſt igitur CF 7 minus* R *14, quae eſt apotome quarta.*

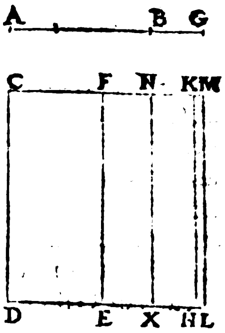
THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius, quę cum rationali mediũ totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.



Sit quę cum rationali medium totum efficit AB; rationalis autem CD;& quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen eſſe quintam. ſit enim ipſi AB congruens BG.ergo AG GB rectæ lineæ potentia ſunt incõmenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium, quod autem bis ipſis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammũ CH ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale applicetur KL latitudinẽ faciens KM.totum igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB. ſed compoſitum ex quadratis ipſarum AG GB eſt medium.ergo & medium eſt parallelogrammum CL; &

78.huius.



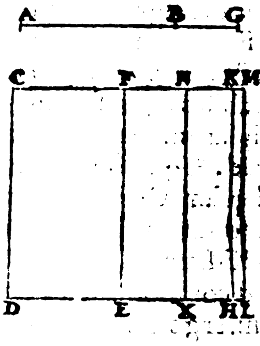
ad rationalem CD applicatum eſt, latitudinem faciens
23. huius CM. quare CM eſt rationalis, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis.
& quoniam totum CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale eſt quadrato ex A
7 secundi. B; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur.
Itaque ſecetur FM bifariam in puncto N, & ab ipſo N
alterutri ipſarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque
igitur FX NL eſt ęquale ei, quod AG GB continetur.
& quoniam quod bis continetur AG GB rationale
eſt, & ęquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale; &
ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens F
21. huius. M. ergo FM eſt rationalis, & ipſi CD commenſurabilis lōgitudine.
eſt autem parallelogrammum CL medium, &
1. sexti. FL rationale. incommenſurabile igitur eſt CL ipſi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad M
10. huius. F. ergo CM ipſi MF longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt vtræque rationales.
74. huius. quare CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ob idque apotome
eſt CF. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demonſtrabimus rectangulum CK
M eſſe ęquale quadrato ex NM, hoc eſt quartę parti quadrati ex FM, quòd cum quadratum
ex AG incommenſurabile ſit quadrato ex GB; ſitq; quadratum ex AG parallelogrammo
CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL: erit C
H ipſi KL incommenſurabile. ſed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipſi KM lon-
1. sexti. gitudine eſt incommenſurabilis. Quoniam igitur duę rectæ lineæ CM MF inæ-
10. huius. quales ſunt: & quartæ parti qnadrati ex FM æquale ad ipſam CM applicatum eſt, deficiens
figura quadrata, & in partes incommenſurabiles ipſam diuidit; recta linea C
19. huius. M plus poterit, quàm MF quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis,
atque eſt congruens FM commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali CD. ergo
5. diffi. tertiarum. CF quinta apotome eſt. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum
efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ *V.* ℞ 288 *plus* ℞ 207 *minus* R *V.* 288 *minus* ℞ 207. *BG* ℞ *V.* ℞ 288 *minus* ℞ 207: *rationalis autem C D ſit* 6. *quòd ſi ad C D applicetur parallelogrammum C H aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK* ℞ 8 *plus* ℞ 5 $\frac{3}{4}$. *& ſi applicetur K L aequale quadrato ex GB, latitudinẽ faciens KM erit KM* R 8 *minus* R 5 $\frac{3}{4}$, *& tota CM* R 32. *Rurſus ſi ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN* 1 $\frac{1}{2}$, *& tota FM* 3. *quare CF eſt* R 32 *minus* 3, *quae eſt apotome quinta.*

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam.



Sit quę cum medio medium totum efficit A B;
rationalis autem C D: & quadrato ex AB æquale
[illegible] parallelogrammum CE ad ipſam CD applicetur,
latitudinem faciens C F. Dico CF apotomen eſſe
ſextam. ſit enim ipſi AB congruens BG. ergo AG
G B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes
compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium:
quod autem bis ipſis AG GB continetur
medium, & adhuc quadratis ipſarum incommenſurabile.
Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG
æquale parallelogrãmũ C H, latitudinem faciens

CK.

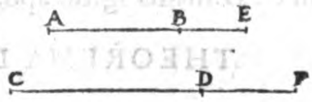
CK: quadrato aũt ex BG ęquale applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL eſt ęquale quadratis ex AG GB: ac propterea CL eſt mediũ, & ad rationalẽ CD applicatum eſt, latitudinem faciens CM. ergo CM rationalis eſt, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. Quoniam igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale eſt quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. atque eſt quod bis cõtinetur AG GB medium. ergo & FL eſt medium, & ad rationalem FE applicatum eſt, latitudinem faciens FM. eſt igitur FM rationalis, & ipſi C D longitudine incommenſurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AG GB continetur; atque eſt quadratis quidem AG GB ęquale parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipſi LF incommenſurabile. ſed vt CL ad LF, ita eſt CM ad MF. quare CM ipſi MF incommenſurabilis eſt longitudine: & ſunt vtręque rationales. ergo CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ob id CF eſt apotome. Dico & ſextam eſſe. Quoniã enim FL eſt ęquale ei, quod bis continetur AG GB, ſecetur FM bifariã in puncto N; & per N ipſi CD parallela ducatur NX. vtrũq; igitur parallelogrammorum FX NL eſt æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A G incommenſurabile quadrato ex BG. ſed quadrato quidem ex AG eſt æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipſi KL eſt incommenſurabile. vt autem CH ad KL, ita eſt CK ad KM. incommenſurabilis igitur eſt C K ipſi KM. quòd cum quadratorum ex AG GB medium proportionale ſit rectangulum AGB; ſitq́; quadrato ex AG æquale C H, & quadrato ex G B æquale KL; rectanguloq́; A G B æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione C M plus poterit, quàm M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum eſt commenſurabilis lõgitudine expoſitę rationali CD. ergo CF ſexta eſt apotome. quadratum igitur eius, quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam.

F. C. COMMENTARIVS.

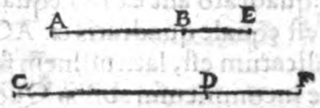
Sit AB R *V.* R 396 *plus* R 288 *minus* R *V.* R 396 *minus* R 288; *BG* R *V.* R 396 *minus* R 288; *& rationalis C D ſit* 6. *ſi vero ad C D applicetur parallelogrammum C H, latitudinem faciens CK; erit CK* R 11 *plus* R 8, *& ſi applicetur KL aequale quadrato ex G B, latitudinem faciens KM; erit KM* R 11 *minus* R 8, *& tota CM* R 44. *Rurſus ſi ad C D applicetur FX ęquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat F N, erit ea* R 3, *& tota FM* R 12. *ergo CF eſt* R 44 *minus* R 12, *quae eſt apotome ſexta.*

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO. CIIII.

Recta linea apotomę longitudine cõmenſurabilis, & ipſa apotome eſt, atque ordine eadem.



Sit apotome AB; et ipſi A B longitudine cõmenſurabilis ſit CD. Dico CD apotomen eſſe, atque ordine eandem, quæ AB. quoniam enim apotome eſt A B, ſit ipſi congruens B E. ergo 74.huius. AE EB rationales ſunt potentia ſolum commẽſurabiles. & fiat proportio BE ad D F eadem, quę eſt AB ad C D. quare vt vna ad 12.quinti vnam, ita erunt omnes ad omnes. eſt igitur vt AB ad CD, ita A E ad CF. commenſurabilis autem eſt AB ipſi CD longitudine. ergo & AE ipſi C F longitudine com- 10.huius. menſurabilis erit, & BE ipſi DF. ſunt autem AE EB rationales potentia ſolum cõ- A menſurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia ſolum commẽſurabiles: ac B propterea CD apotome eſt. Dico & ordine eandem eſſe. Quoniam enim eſt vt AE 74.huius. ad CF, ita BE ad FD, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD. vel igitur AE plus



poteſt, quàm EB quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: & ſiquidem commenſuſabilis, & C F plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę ſibi lõgitudine cõmenſurabilis: & ſi quidem AE commenſurabilis eſt longitudine expoſitę rationali; & CF expoſitæ rationali lõgitudine commenſurabilis erit: ſi vero EB eſt cõmenſurabilis, & DF cõmenſurabilis erit: & ſi neutra ipſarũ AE EB cõmenſurabilis eſt expoſitæ rationali longitudine, & neutra ipſarũ CF FD eidẽ longitudine erit cõmenſurabilis. quòd ſi AE plus poſſit, quã EB quadrato rectę lineæ ſibi incõmenſurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine incõmenſurabilis: & ſiquidem AE ſit cõmenſurabilis expoſitæ rationali lõgitudine, & CF eidẽ longitndine cõmenſurabilis erit: ſi uero BE, & DF: & ſi neutra ipſarũ AE EB, & neutra ipſarũ CF FD erit expoſitæ rationali lõgitudine cõmẽſurabilis. ergo CD apotome eſt, & ordine eadẽ, quę AB.

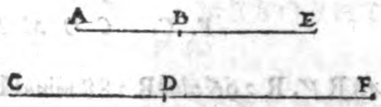
F. C. COMMENTARIVS.

A Et BE ipſi DF.] *Quoniam enim eſt vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF,* 12. huius *vt AE ad CF, hoc eſt ut AB ad CD. commenſurabilis igitur eſt & BE ipſi DF longitudine.*

B Ergo & CF FD rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles] *Nam cum ſit ut AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: ſuntq; AE EB rationa-* 22. huius *les potentia ſolũ cõmenſurabiles. ergo & CF FD rationales potentia ſolũ cõmmenſurabiles erũt.*

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

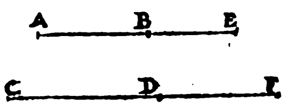
Recta linea mediæ apotomæ commenſurabilis, & ipſa mediæ apotome eſt, atque ordine eadem.



Sit mediæ apotome AB, & ipſi AB lõgitudine commenſurabilis ſit CD. Dico CD mediæ apotomen eſſe, & ordine eandem. Quoniam enim mediæ apotome eſt AB, ſit BE ipſi AB congruens. 73.76. huius ergo AE EB medię ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. ſunt autem AE EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. ergo & CF FD mediæ potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles erũt; ac propterea mediæ apotome eſt CD. oſtendendum eſt & ordine eandem eſſe, quę AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE Lem. ad 25. huius. ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. ſed quadratum ex AE cõmẽſurabile eſt quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD eſt commenſurabile. & ſi quidem rationale eſt rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. ſi vero rectangulum AEB medium eſt, & medium erit rectangulum CFD. mediæ igitur apotome eſt CD, atque ordine eadem, quæ AB.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

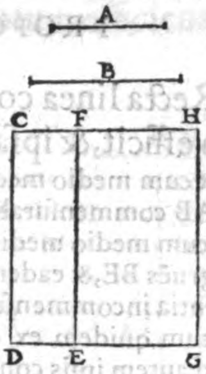
Recta linea minori commenſurabilis, & ipſa minor eſt.



Sit minor AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico & CD minorem eſſe. fiant enim eadem quæ 77. huius. prius. & quoniam AE EB potentia ſunt incõmenſurabiles, & CF FD potentia incõmẽſurabiles erũt. eſt aũt vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadra- 22. sexti. tũ ex AE ad quadratũ ex EB, ita quadratũ ex CF ad

quadratum

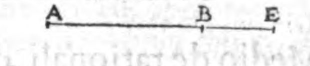
quadratum ex FD : & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando. commenſurabile autem eſt quadratum ex BE quadrato ex DF . ergo & compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB compoſito ex quadratis CF FD commenſurabile erit. ſed compoſitũ ex qnadratis AE EB eſt rationale. ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis CF FD . Rurſus quoniam eſt vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB , ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex CF: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commenſurabile. ſed rectangulum AEB medium eſt. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem ipſis continetur medium. ergo CD eſt minor. 77.huius.



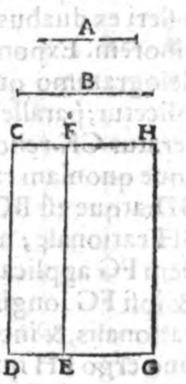
ALITER. Sit minor A , & ipſi A commenſurabilis ſit B. Dico B minorem eſſe. Exponatur enim CD rationalis : & quadrato ex A ęquale parallelogrammum CE ad ipſam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta eſt CF. [illegible].huius. quadrato autem ex B ęquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile . ſed quadrato quidem ex A ęquale eſt parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commenſurabile eſt ipſi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH . commẽſurabilis igitur eſt CF ipſi FH longitudine . ſed CF eſt apotome quarta. ergo & FH apotome quarta eſt; et ſpacium FG rationali, et 104: huius. apotoma quarta continetur . recta igitur linea ſpacium 95.huius. potens minor eſt. poteſt autem ſpacium FG ipſa B. ergo B eſt minor.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commenſurabilis ei , quæ cum rationali medium totum efficit , & ipſa cum rationali medium totum efficiens eſt.



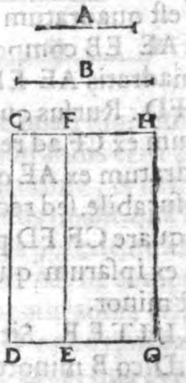
Sit cum rationali medium totum efficiens AB: et ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico CD eſſe eam, quę cum rationali medium totum efficit. ſit enim ipſi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarumquadratis medium; quod autem ipſis continetur rationale. 78. huius. et eadem conſtruantur. ſimiliter demonſtrabitur , vt prius CF FD in eadem eſſe proportione, in qua AE EB : et compoſitum ex quadratis ipſarum AE EB commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commenſurabile. quare et CF FD potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipſis continetur, rationale . ergo CD eſt quæ cum rationali medium totum efficit. 78.huius.



ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiẽ A, et ipſi A commenſurabilis B. Dico B eſſe eam , quę cũ rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipſam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF eſt apotome quinta: quadtato aũt ex B ęquale 102.huius.

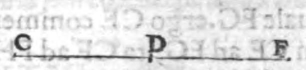
FG ad

FG ad ipſam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. ſed quadrato ex A æquale eſt parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE eſt commebſurabile ipſi FG; obidque recta linea CF ipſi FH longitudine eſt commenſu-
104.huius. rabilis. apotome autem quinta eſt CF. ergo & FH eſt apotome quinta; eſtq; FE rationalis. ſi autem ſpacium conti-
96.huius. neatur rationali, & apotoma quinta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum rationali medium totum efficit. ſed ipſa B poteſt ſpacium FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens eſt.



THEOREMA LXXXIIII.
PROPOSITIO CVIII.

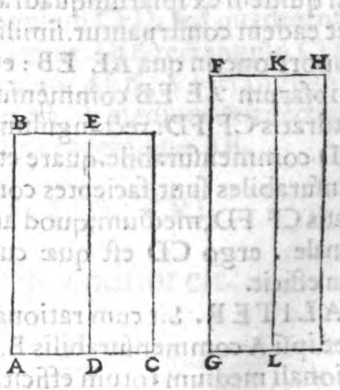
Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.



Sit cum medio medium totum efficiens AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico CD eſſe eã, quę cum medio medium totum efficit. ſit ipſi AB
79.huius. congruẽs BE, & eadem cõſtruantur. ergo AE EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium; quod autem ipſis continetur medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. & ſunt AE EB commenſurabiles ipſis CF FD, vt oſtenſum eſt: & compoſitum ex quadratis AE EB commenſurabile compoſito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium; quod autem ip-
79.huius. ſis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. ergo CD eſt quę cum medio medium totum efficit.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum ſpacium poteſt, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.



De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum ſpacium EC poteſt, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomẽ vel minorem. Exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CE eſt æquale LH. Itaque quoniam rationale eſt BC, medium autem BD: atque eſt BC ęquale GH, & BD ipſi GK; erit GH rationale; medium autem GK, & ad ra-
21.huius. tionalem FG applicatum eſt. rationalis igitur eſt
23.huius. FH, & ipſi FG longitudine commenſurabilis: FK vero rationalis, & incommenſurabilis ipſi FG lõ-
13.huius. gitudine. ergo FH ipſi FK longitudine incommenſurabilis eſt, & HF FK rationa-
74 huius. les ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea HK eſt apotome. ipſi vero congruens

congrũens KF.vel igitur HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectę linęę ſibi commēſurabilis
longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineæ
commenſurabilis.atque eſt tota HF commenſurabilis longitudine expoſitę rationali
FG.ergo HK prima eſt apotome. recta autem linea, quæ poteſt ſpacium rationali, 1.tertiarum.
& apotoma prima contentum eſt apotome. Ergo quæ poteſt LH hoc eſt CE diffin.
apotome eſt.quòd ſi HF plus poſsit, quàm FK quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis 92.huius.
longitudine; eſtq́; tota HF expoſitæ rationali F G longitudine commenſurabilis;
erit HK apotome quarta.& quę poteſt ſpacium rationali, & apotoma quarta 4 diffin.tertiatum.
contentum minor eſt.quæ igitur poteſt ſpacium LH, videlicet EC eſt minor.
95.huius.

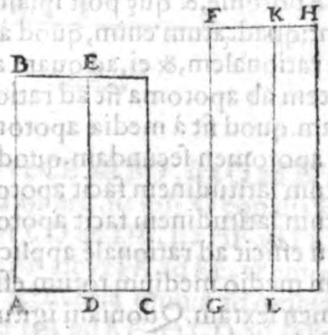
THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

Rationali de medio detracto alię duę irrationales fiunt, vel medię apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim BC rationale BD detrahatur.
Dico rectā lineā, quæ reliquũ ſpaciũ
EC poteſt, vnā duarum irrationalium fieri
vel mediæ apotomen primam, vel eam, quę
cum rationali medium totum efficit. Exponatur
enim rationalis FG, & ad ipſam ſimiliter
ſpacia applicentur; erit rationalis quidē 23.huius.
FH, & ipſi FG longitudine incommenſurabilis; 21.huius.
rationalis autem FK, & incommenſurabilis
ipſi FG longitudine. ergo HF FK rationales
ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac
propterea apotome eſt HK, & ipſi congruēs 74.huius.
KF. vel igitur HF plus poteſt, quàm FK quadrato
rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,
vel incommenſurabilis. & ſi quidē
commenſurabilis; atque eſt congruens FK commenſurabilis expoſitæ rationalis F
G longitudine: erit HK apotome ſecunda. eſt autem FG rationalis. ergo quæ poteſt 2.diffi.tertiarum.
ſpacium LH, hoc eſt CE, mediæ eſt apotome prima. quòd ſi HF plus poteſt, quàm
FK quadrato rectæ linęę ſibi longitudine incommenſurabilis; atque eſt congruens 93.huius.
FK commenſurabilis expoſitę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. 5.diffi.tertiarum.
recta igitur linea potens ſpacium EC eſt quæ cum rationali medium totum efficit. 99.huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO. CXI.

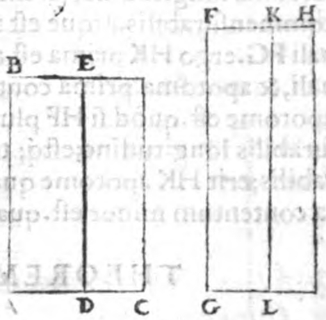
Medio de medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquę duæ irrationales fiunt, vel medię apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.



Detrahatur enim, vt in propoſitis figuris de medio
BC medium BD, quod ſit incommenſurabile toti.
Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium CE, vnā
eſſe ex duabus irrationalibus, vel medię apotomen
ſecundam, vel eam, quæ cum medio medium totum
efficit. Quoniam enim medium eſt vtrumque ipſorũ
BC BD, & BC incommenſurabile eſt ipſi BD, hoc
eſt GH ipſi GK; erit HF ipſi FK incommenſurabilis 23.huius.
longitudine. ergo HF FK rationales ſunt potentia
ſolum commenſurabiles; & ob id apotome eſt HK, & ipſi congruens KF. itaque vel 74.huius.

HF plus

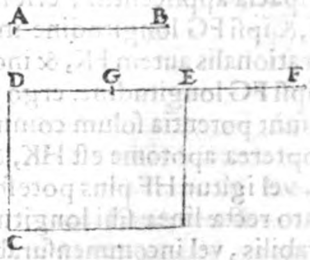
HF plus poteſt, quàm FK quadrato rectæ lineę ſibi
longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabi
lis:& ſi quidem commenſurabilis, & neutra ipſarum
HF FK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali FG
3. diffi. tertiarum. longitudine; erit HK apotome tertia .rationalis au-
tem eſt KL:& rectangulum rationali, & apotoma ter
94.huius. tia contẽtum irrationale eſt.ergo recta linea,quę ip-
ſum poteſt,eſt irrationalis, & vocatur medię apoto-
me ſecunda.ſi vero HF plus poteſt,quàm FK quadra
to rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine,
& neutra ipſarum HF FK longitudine commenſu-
6.diffi.tertium. rabilis eſt expoſitæ rationali FG; erit HK apotome
ſexta.at recta linea potens quod rationali, & apoto-
97.huius. ma ſexta cõtinetur eſt quæ cum medio medium totum efficit.ergo quæ poteſt ſpa-
cium LH,hoc eſt EC eſt cum medio medium totum efficiens.



THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non eſt eadem,quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non eſſe eandem,
quæ ex binis nominibus.ſit enim,ſi fieri poteſt;ex
ponaturque rationalis DC,& quadrato ex AB æ-
quale rectangulum CE ad ipſam DC applicetur
latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apoto-
98.huius. me eſt AB, erit DE apotome prima.ſit ipſis con-
gruens EF.ergo DF FE rationales ſunt potentia
1.diffi. tertiarum. ſolum commẽſurabiles: & DF plus poteſt,quàm
FE quadrato rectæ lineę ſibi longitudine com-
mẽſurabilis:atq;eſt DF cõmẽſurabilis expoſitę ra
tionali CD lõgitudine.Rurſus qm̃ ex binis nomi-
61. huius nibus eſt AB,erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G;
37. huius. ſitq; DG maius nomẽ.ergo DG GE rationales ſunt,potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles: &
DG plus põt,quã GE quadrato rectæ lineæ ſibi cõmẽſurabilis lõgitudine: & maior
12.huius Ex demonſtratis ad 17 huius. DG longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali DC. quare DF ipſi DG
longitudine eſt commenſurabilis.& reliquę igitur FG commenſurabilis erit. Itaq;
quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG,atque eſt rationalis DF;erit & FG ratio-
nalis.Rurſus quoniam DF commenſurabilis eſt ipſi FG longitudine, atque eſt DF
ipſi FE incommenſurabilis longitudine;erit & FG ipſi FE longitudine incommen-
ſurabilis:& ſunt rationales.ergo GF FE rationales ſunt potentia ſolum commenſu
74.huius. rabiles;ac propterea apotome eſt EG.ſed & rationalis. quod fieri non poteſt. ergo
apotome non eſt eadem,quæ ex binis nominibus.



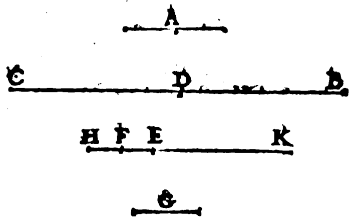
Apotome,& quę poſt ipſam ſunt irrationales, neque medię,neque inter ſe eædẽ
23.huius. ſunt:quadratum enim,quod à media fit,ad rationalem applicatum, latitudinem fa
cit rationalem,& ei,ad quam applicatur, longitudine incommenſurabilem. quod
98.huius. autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen pri-
99 huius. mam.quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem fa-
100.huius. cit apotomen ſecundam.quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem appli-
101. huius. catum latitudinem facit apotomen tertiam.quod fit à minori ad rationalem appli
catum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea,quæ cum rationali mediũ
102 huius. totũ efficit ad rationalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã. quod ab ea, quæ
103.huius cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apo
tomen ſextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt tum à prima, tum inter
ſe ſe,à prima quidem,quòd rationalis ſit,inter ſe vero, quod ordine non ſint eædẽ;
manifeſtum eſt & ipſa irrationales inter ſe differentes eſſe.& oſtenſum eſt apotomẽ

non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. quadrata autem apotomæ & earum quę ſunt poſt apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiuſdē ordinis, cuius & illæ ſunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ eſt ex binis nominibus, & earum, quæ poſt ipſam ſunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiuſdem ordinis, cuius & illę ſunt. ergo rectę lineæ, quæ ſequuntur apotomen, & quæ ſequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter ſe differunt, ita vt omnes ſint numero tredecim, videlicet.

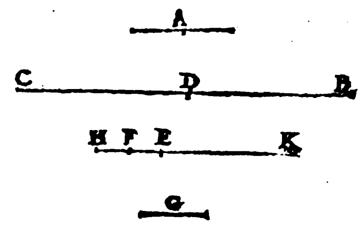
1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quę ex binis medijs prima
4 Quæ ex binis medijs ſecunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome ſecunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



Sit rationalis A; ea, quę eſt ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD: & quadrato ex A æquale rectangulum ſit quod BC EF continetur. Dico EF apotomen eſſe, cuius nomina commenſurabilia ſunt ipſis CD DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rurſus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF eſt ęquale ei, quod BD G continetur, erit vt CB ad BD, ita G ad EF: A
maior autem eſt CB, quàm BD. ergo & G quàm EF maior erit. ſit ipſi G ęqualis E B
H. eſt igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo vt CD ad DB, ita HF ad FE,
fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF eſt vt FK ad KE. vt enim C
vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia
conſequentia. ſed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB. D
cōmēſurabile aūt eſt quadratū ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratū ex HK qua E
drato ex KF eſt commenſurabile. atque eſt vt quadratum ex HK ad quadratum ex F



KF, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportionales ſunt. commenſurabilis igitur eſt HK ipſi **G** KE longitudine. ergo & HE ipſi EK longitudine eſt commenſurabilis. & quoniā quadratum ex A eſt æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem eſt quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum eſt. rationalis igitur eſt HE, & ipſi BD longitudine commenſurabilis; ideoq; & EK, quæ eſt incommenſurabilis ipſi HE rationalis erit, & ipſi BD commenſurabilis longitudine. Quoniam igitur eſt vt CD ad DB, ita FK ad KE; ſunt autē CD DB potentia ſolum cōmenſurabiles: & FK KE potentia ſolum commenſurabiles erunt. rationalis autem eſt KE, & ipſi BD commenſurabi**H** lis longitudine. quare & FK eſt rationalis, ipſiq; CD longitudine commenſurabilis. ſunt igitur FK KE rationales, & potentia ſolum commenſurabiles: & idcirco EF apotome eſt. itaque vel CD plus poteſt, quàm DB quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. & ſi quidem commenſurabilis, etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & ſi CD commenſurabilis eſt expoſitæ rationali longitudine, & FK eidem commenſurabilis erit: ſi autem BD, & KE. & ſi neutra ipſarum CD DB, & neutra ipſarum FK KE. Quòd ſi CD plus poteſt, quàm DB quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ ſibi lõgitudine incommenſurabilis. & ſi BD, & KE. at ſi neutra ipſarum CD DB, & neutra ipſarum FK KE. ergo EF apotome eſt, cuius nomina FK KE commenſurabilia ſunt nominibus CD DB eius, quę eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.

21. huius

15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 ſexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quae à nobis demonſtrata ſunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF eſt vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commenſurabile autem eſt quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quae ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF eſt commenſurabile] *Ex 22 ſexti, & decima huius.*

F Atque eſt vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario ſecundo 20 ſexti.*

G Ergo & HE ipſi EK longitudine eſt commenſurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK eſt rationalis, ipſique CD longitudine commenſurabilis] *Quoniam igitur eſt vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. ſed KE eſt longitudine commenſuraailis ipſi BD. ergo & FK ipſi CD commenſurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commenſurabiles ſint, ſitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipſi CD longitudine commenſurabilis.*

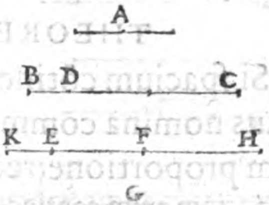
K Et idcirco EF apotome eſt] *Ex 74 huius.*

Sit A 2, CB R 12 *plus 3, vt CD ſit* R 12, *DB 3. & ſi quadratum ex A, quod eſt 4, applicetur ad DB latitudinē faciēs G, erit G* $1\frac{1}{3}$, *cui equalis ſit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF videlicet vt* R 12 *plus 3 ad 3, ita* $1\frac{1}{3}$ *ad aliū. multiplicabimus igitur 3 per* $1\frac{1}{3}$ *producetur 4, & 4 diuidemus per* ℞ 12 *plus 3, hoc eſt applicabimus 4 ad* ℞ 12 *plus 3. quod quidē hoc modo fiet. multiplicetur* ℞ 12 *plus 3 per apotomen ipſi reſpondentem, hoc eſt per* ℞ 12 *minus 3. producitur 3. rurſus multiplicetur 4 per eandem* ℞ 12 *minus 3. producitur* R 192 *minus 12. quare ex 17 ſeptimi 3 ad* ℞ 192 *minus 12 proportionem habebit eandem, quam* ℞ 12 *plus 3 ad 4. & ob id* R 192 *minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quā 4, ſi applicetur ad* R 12 *plus 3. ſed*

3. ſed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit ℞ 21 $\frac{1}{3}$ minus 4. quadratum igitur rationalis 2, videlicet 4 ad eam, quae eſt ex binis nominibus ſecunda, hoc eſt ad ℞ 12 plus 3 applicatum latitudinem facit ℞ 21 $\frac{1}{3}$ minus 4, quae eſt ſecunda apotome, cuius nomina commenſurabilia ſunt ipſis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipſa apotome.



Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale ſit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus eſſe, cuius nomina commẽſurabilia ſunt nominibus ipſius BD, & in eadem proportione: & K H eundem habere ordinem, quem habet B D. ſit enim ipſi BD congruens DC. ergo BC CD rationales ſunt poten- 94. huius.
tia ſolum commenſurabiles: & quadrato ex A ęquale ſit, quod BC, & G continetur. rationale autem eſt quadratum ex A. ergo quod BC G continetur eſt rationale; & ad rationalem BC applicatum eſt. rationalis igitur eſt recta linea G, ipſiq; BC longitudine commen- 21. huius.
ſurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G eſt æquale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem eſt CB, quàm BD. er- 14. sexti:
go & KH, quàm G eſt maior. ponatur ipſi G ęqualis KE. commẽſurabilis igitur eſt KE ipſi BC longitudine. & quoniam eſt vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per cõuer- Ex demonſtratis ad 16. quinti.
ſionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH eſt ut KH ad HE, hoc eſt vt BC ad CD. ſed BC CD potentia 19. quinti:
ſolum ſunt commenſurabiles. ergo & KF FH potentia ſolum cõmenſurabiles erũt. & cum ſit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut 11. quinti.
KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad Corr. 2. 20. sexti.
quadratum ex ſecunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commenſurabile autem eſt quadratum ex KF quadrato ex FH; ſunt enim KF FH potentia ſolum commenſurabiles. ergo & KF ipſi FE commenſurabilis eſt longitudine: ac propterea FK ipſi KE longitudine commenſurabilis. ſed KE rationalis eſt, & ipſi B C longitudine commenſurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commenſurabilis ipſi BC longitudine. & quoniã eſt vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commenſurabilis autem eſt B C ipſi KF. quare & CD ipſi FH eſt commenſurabilis: ſuntq; B C C D rationales potentia ſolum commenſurabiles. ergo & KF FH rationales potentia ſolum commenſurabiles erunt. ex binis igitur nominibus eſt KH. & ſi quidem BC plus poteſt, quàm CD quadrato rectę lineæ ſibi lõgitudine commenſurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & ſi BC longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali, & KF eidem commenſurabilis erit. ſi vero CD eſt commenſurabilis longitudine expoſitę rationali, erit & ipſa FH eidem commẽſurabilis; & ſi neutra ipſarum BC CD, & neutra ipſarum KF FH. at ſi BC plus poteſt, quàm CD quadrato rectę lineę ſibi longitudine incommenſurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. & ſiquidem BC longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali, & KF eidem commenſurabilis erit. ſi vero CD, & ipſa FH. quòd ſi neutra ipſarum BC CD, & neu-

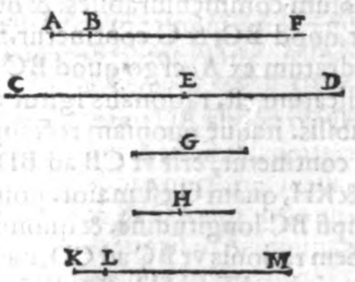
tra ipſarum KF FH. ex binis igitur nominibus eſt KH, cuius nomina KF FH commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportione; & KH eundem tenet ordinem, quem ipſa BC.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, BD ℞ 18 *minus* R 10. *& multiplicetur* R 18 *minus* ℞ 10 *per eam, quę ex binis nominibus ipſi reſpondet, videlicet per* R 18 *plus* R 10 *producitur* 8, *rurſus multiplicetur ipſius A rationalis quadratum, quod eſt* 4 *per eandem, producitur* R 288 *plus* ℞ 160. *habebit igitur* 8 *ad* ℞ 288 *plus* ℞ 160 *proportionem eandem, quam* ℞ 18 *minus* ℞ 10 *ad* 4 *ex* 17 *ſeptimi. quare ſi* ℞ 288 *plus* R 160 *applicetur ad* 8 *latitudinem faciet* ℞ $4\frac{1}{2}$ *plus* ℞ $2\frac{1}{2}$, *& eandem latitudinem faciet* 4, *ſi ad* R 18 *minus* ℞ 10 *applicetur. quadratum igitur rationalis* 4 *applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad* ℞ 18 *minus* R 10 *latitudinem facit eam, quae eſt ex binis nominibus tertia, hoc eſt* ℞ $4\frac{1}{2}$ *plus* R $2\frac{1}{2}$ *cuius nomina commenſurabilia ſunt apotomae nominibus, & in eadem proportione.*

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si ſpacium cõtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomę, & in eadem proportione; recta linea ſpacium potens eſt rationalis.



Spacium enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quę ſit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commenſurabilia nominibus apotomæ AF FB: & in eadẽ proportione; ſitq́; recta linea G potens ſpacium contentum AB CD. Dico ipſam G rationalem eſſe. exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur eſt KL, cuius nomina KM ML commenſurabilia ſint nominibus eius, quę eſt ex binis nominibus CE ED, & in aedem proportione. ſed CE ED commenſurabiles ſunt ipſis AF FB, atque in eadem proportione. eſt igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL eſt vt AF ad KM. commenſurabilis autem eſt AF ipſi KM. ergo & AB ipſi KL eſt cõmenſurabilis. eſtq́; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. ſed rectangulum contentum CD KL eſt ęquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H eſt commenſurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB eſt æquale quadrato ex G. ergo quadratũ ex G commenſurabile eſt quadrato ex H. atque eſt quadratum ex H rationale. rationale igitur eſt quadratum ex G; & idcirco ipſa G eſt rationalis; & poteſt quod CD AB continetur. Si igitur ſpacium contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadẽ proportione, recta linea ſpacium potens eſt rationalis.

113. huius.

19. quinti.

10. huius.

1. ſexti.

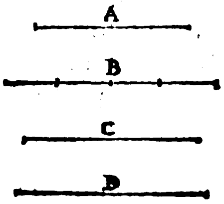
COROLLARIVM.

Ex ijs manifeſto conſtat fieri poſſe, vt ſpaciũ rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

Sit apotome AB R 21 $\frac{1}{3}$ *minus 4. ea vero,quae ex binis nominibus CD ſit 12 plus 3. & multiplicetur* ℞ 21 $\frac{1}{3}$ *minus 4 plus* R 12 *plus 3. ſit* R 256, *quae eſt 16 minus 12, hoc eſt 4, quod eſt rationale,& eius radix 2 rationalis.*

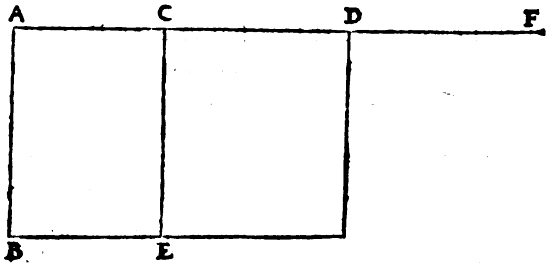
THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.



In scholio ad 39. huius.

Sit media A. Dico ex ipſa A infinitas irrationales fieri,& nullam alicui antecedentium eandem eſſe. exponatur enim rationalis B. & rectangulo contento A B æquale ſit quadratum ex C. irrationalis igitur eſt ipſa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale eſt,& nulli earum, quę prius eſt eadem : non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam.rurſus rectãgulo, quod BC continetur, æquale ſit quadratum ex D.irrationale igitur eſt ,quod fit ex D: & idcirco ipſa D eſt irrationalis,& nulli antecedentium eadem . neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius ſunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam C. Similiter & eodem ordine infinite protracto,manifeſtum eſt à media infinitas irrationales fieri,& nullam alicui antecedentium eandem eſſe.



ALITER. Sit media AC.Dico ex ipſa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandẽ eſſe. ducatur ipſi AC ad rectos angulos AB: ſitque AB rationalis,& BC cõpleatur. irrationale igitur eſt BC, & quæ ipſum poteſt eſt irrationalis. poſſit autẽ ipſum recta linea CD. ergo CD irrationalis eſt, & nulli priorum eadem.non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam . rurſus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipſum potens irrationalis. poſſit ipſum recta linea DF. ergo DF irrationalis eſt,& nulli priorum eadem . nullius enim priorum quadratum,ſi ad rationalem applicetur,latitudinem efficit ipſam CD . ergo à media infinitę irrationales fiunt,& nulla alicui priorum eſt eadem.

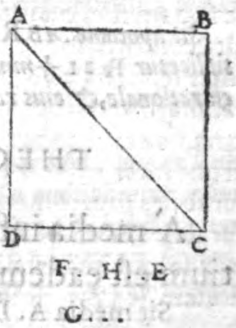
THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Propoſitum ſit nobis oſtendere in quadratis figuris diametrũ lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

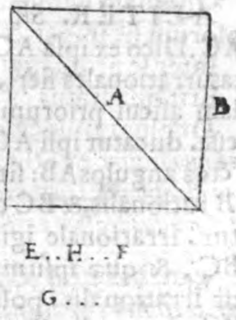
Sit quadratum ABCD,cuius diameter AC. Dico AC ipſi AB longitudine incõmenſurabilem eſſe.ſi enim fieri poteſt,ſit commenſurabilis.Dico ex hoc ſequi eundem numerum parem eſſe, & imparem . itaque manifeſtum eſt quadratum ex AC duplum eſſe quadrati ex AB . & quoniam AC commenſurabilis eſt ipſi AB , habebit AC ad AB proportionem eam,quam habet numerus ad numerũ.habeat, quam

A
B

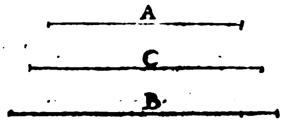
EF ad



EF ad G: ſintq́; EF. G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas eſt EF. ſi enim eſt vnitas, & habet ad G proportionem eam, quam AC ad AB; eſtq́; AC maior, quàm AB: & EF vnitas, quàm G numerus maior erit. quod eſt abſurdum. ergo EF non eſt vnitas. qua-
C re numerus ſit neceſſe eſt. & quoniam vt AC ad AB, ita eſt EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem eſt quadratum ex CA quadrati ex AB. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: ac propterea quadratus ex EF par eſt, & ipſe EF par. ſi enim eſſet
D impars, & qui fit ab ipſo quadratus impar eſſet, quoniam ſi impares numeri quomodocumque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar; & totus impar erit. ergo EF eſt par. ſecetur bifariam in H. & quoniam numeri EF G minimi ſunt eorum, qui eandem habent proportio-
E nem, inter ſe primi ſunt: & eſt EF par. impar igitur eſt G: ſi enim eſſet par, numeros EF G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter ſe ſunt. quod fieri non poteſt. non igitur G eſt impar. ergo par. & quoniam FE
F duplus eſt ipſius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. eſt autem
G quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur eſt quadratus ex G quadrati
H ex EH. ideoq́; par eſt qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipſe G eſt par; ſed & im-
K par. quod fieri non poteſt. non igitur AC commenſurabilis eſt ipſi AB longitudine. ergo eſt incommenſurabilis.



ALITER. Sed & aliter oſtendendum eſt incommenſurabile eſſe quadrati diametrum ipſius lateri. ſit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipſi B lõgitudine incommenſurabilem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit commenſurabilis. & rurſus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipſum G: ſintq́; minimi eorum, qui eandem habent pro-
24. ſeptimi. portionem. ergo EF G primi inter ſe ſunt. Dico primum, G non eſſe vnitatem. ſi enim fieri poteſt, ſit G vnitas. & quoniam eſt vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem eſt quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: atq́; eſt G vnitas. binarius igitur eſt quadratus ex EF. quod fieri non poteſt. ergo G non eſt vnitas. numerus igitur. & quoniam eſt vt quadratũ ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendò vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. ſed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus meti-
L tur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipſum EF latus metitur. metitur autem & ſe ipſum. ergo G numeros EF G metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri minime poteſt. non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis. quare incommenſurabilis ſit neceſſe eſt.



Itaque inuentis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & alię quam plurimæ magnitudines ex duabus dimenſionibus. nimirum ſuperficies incommenſurabiles inter ſe ſe. ſi enim ipſarum AB mediam proportionalem
M ſumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, & ſimiliter deſcriptam, ſiue quadrata, ſi-
N ue alia rectilinea ſimilia, ſiue circuli, qui circa diametros AC deſcribantur. quando quidem circuli inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur ſunt ſpacia plana inter ſe incommenſurabilia. oſtenſis autem his oſtendemus etiam ex ſolido-
rum

rum contemplatione ipſa ſolida eſſe commenſurabilia, & incommenſnrabilia inter
ſe ſe. nam ſi in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipſis æqualia ſint ſolida æque O
alta conſtituamus, ſiue parallelepipeda, ſiue pyramides, ſiue priſmata, erunt ea
inter ſe, vti baſes. & ſi quidem baſes commenſurabiles ſint, erunt ſolida commenſu-
rabilia; ſi vero incommenſurabiles, & ipſa incommenſurabilia erunt. ſed & duobus P
circulis exiſtentibus AB, ſi in ipſis conos ęque altos, ſiue Cylindros conſtituamus,
erunt inter ſe, vti ipſorum baſes, hoc eſt vt AB circuli, & ſi quidem circuli commen
ſurabiles ſint, cõmenſurabiles erunt & coni inter ſe ſe, & Cylindri; ſi vero incommẽ
ſurabiles, & coni, & Cylindri incommenſurabiles erunt. ex quibus perſpicuum eſt
non ſolum in lineis, & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem, & incommenſurabi
litatem, ſed & in ſolidis figuris.

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifeſtum eſt quadratum ex AC duplum eſſe quadrati ex AB] *Ex 47 primi.*

B Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum] *Ex 5. huius.*

C Et quoniam vt AC ad AB, ita eſt EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam enim eſt vt AC ad AB, ita EF ad G, erit et vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. ſed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita eſt quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario ſecundo 20. ſexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita eſt quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.*

D Quoniam ſi impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totum impar erit] *Ex 23 noni. ſequitur enim hoc ex 29 eiuſdem.*

E Inter ſe primi ſunt] *Ex 24 ſeptimi.*

F Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus] *Ex 11. octaui.*

G Duplus igitur eſt quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, compoſita eſt ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. ſed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH eſt quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratũ ex G eſt dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.*

H Ideoq; par eſt, qui fit ex G quadratus] *Quoniam enim quadratus ex G duplus eſt quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par neceſſario erit.*

K Et ex iam dictis ipſe G eſt par] *Si enim ſit innpar, & quadratus ex ipſo impar eſt ex 29 noni. ſed & par. quod fieri nou poteſt.*

L Et propterea latus G ipſum EF latus metitur] *Ex 14 octaui,*

M Erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, & ſimiliter deſcriptam] *Ex corollario ſecundo vigeſimae ſexti.*

N Quandoquidem circuli iuter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata] *Oſtenditur id in ſecunda propoſitione duodecimi libri. vnde colligi poteſt hac ſiue ſint Euclidis, ſiue alterius alieno loco poſita eſſe.*

O Nam ſi in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quę ipſis æqualia ſint, ſolida ęque alta conſtituamus, ſiue parallelepipeda, ſiue pyramides, ſiue priſmata, erunt ea inter ſe vti baſes] *Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi,*

P Sed & duobus circulis exiſtẽtibus AB, ſi in ipſis conos æque altos, ſiue Cylindros conſtituamus, erunt inter ſe, vti ipſorum baſes] *Ex 11. duodecimi.*

DECIMI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à ſcientia ſolidorum diſtinxerunt. etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato oſtendit in politicis; hanc autem ſtereometriam. At vero Iuniores cum utriuſque ſcientiæ communis ſit cognitio, quæ circa magnitudines uerſatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas uelut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia uero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in ſolidis, alia conſtant ex planis rectilineis, alia ex ſphæricis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et ſphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea uero, uel quæ ex rectilineis ſunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum eſt. & ſi aliquod eſt corpus, hoc & ſolidum eſt, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta ſunt: hęc enim imaginabilia ſunt ſolida, non antitypa, hoc eſt dura, & reſiſtentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VNDECIMVS ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

* * *

DIFFINITIONES

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſsitudinem habet.

II.

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III.

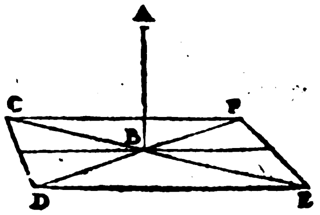
Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubiecto ſunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si poſſet planum in rectas lineas reſolui, ita dixiſſet. Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum conſtat, rectos facit angulos, tunc & ad ipſum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinite rectis lineis ſectum in ipſas non reſoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano. contingentes autem addit, ut non parallelæ ſint.

F. C. COMMENTARIVS.

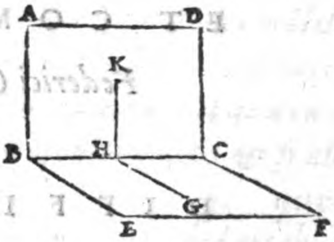
Sit recta linea AB ad ſubiectum planum CDEF perpendicularis, ſiue recta, & à puncto B ducantur quotcunque rectae lineae in eodẽ plano BC BD BE BF. erũt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quòd ſi anguli CBA DBA EBA FBA recti ſint, dicemus rectam lineam AB ad ſubiectum planum CDEF perpendicularem, ſiue rectam eſſe.



IIII.

Planum ad planum rectum eſt,quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineę in vno plano,alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.



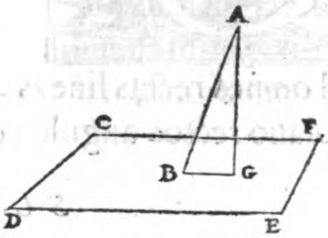
Sit planum ABCD ad planum BEFC rectũ, ſitq́ eorũ cõis ſectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpẽdicularis ad ipsã BC. erit recta linea GH ad planũ ABCD perpẽdicularis, ſiue recta. At ſi recta GH, vel planũ ABCD perpẽdicularis ſit, ſiue recta, erit ea ad BC cõem duorũ planorũ ſectionẽ perpẽdicularis. Et ſimiliter cõtinget, ſi in alio plano ducatur KH perpẽdicularis ad ipsã BC. ponatur autẽ nũc cõem duorũ planorũ ſectionẽ rectã lineã eſſe, quod in ſequentibus demonſtrabitur.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, quando à ſublimi termino lineę ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui eſt in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & ſtante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB inclinata ad ſubiectum planũ CDEF: atque à puncto ſublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectae lineae AB ad planum CDEF inclinatio.

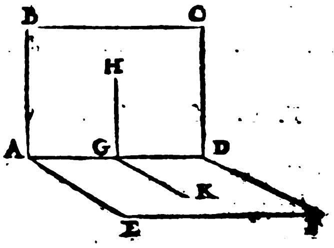


V I.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis lineis cõtentus, quę ad rectos angulos communi planorum ſectioni ad vnum ipſius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter ſe inclinata ABCD EADF, quorum cõmunis ſectio AD, & ſumpto in ipſa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK, erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.

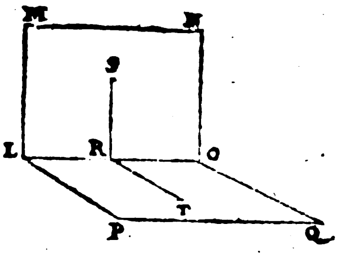


V I I.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

F. C.

Sint duo plana inter ſe inclinata ABCD EADF, de quibus proxime dictum eſt: ſintq́; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & ſint anguli HGK SRT aequales. dicetur planum ABCD ad planum EADF ſimiliter inclinatum, atque planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela ſunt, quę inter ſe non conueniunt.

IX.

Similes ſolidæ figurę ſunt, quę ſimilibus planis multitudine æqualibus continetur.

X.

Aequales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus eſt, plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe ſe contingant, & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non exiſtentibus in eodem plano, & ad vnum punctum conſtitutis.

SCHOLIVM.

Euclides quidem in inclinatione angulum vult eſſe: Stoici vero dicunt inclinationem eſſe angulum. ſed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio eſt ad vnum punctum. hæc autem diffinitio imperfecta eſt. angulus enim quartę partis ſphæræ pluribus quidem, quàm duabus ſuperficiebus comprehenditur, ſed non planis: & dimidius conus ad verticem angulum ſolidum non efficit. nam ſi is eſt angulus: & coni uertex angulus erit. quare & ex duabus ſuperficiebus & ex vna ſolidus angulus conſtabit. quod quidem verum eſt. melius igitur erit ſolidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, Vel magnitudinum ad vnum punctum.

ἐν τῇ κλίσει.

σύννευσις.

σύννευσιν.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab vno plano ad vnum punctum conſtituitur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida planis comprehenſa,quorum duo,quæ opponuntur æqualia, & ſimilia & parallela ſunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Priſmata dicuntur non ſolum,quae baſes habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora ſeratilia appellat,ſed quęcumque plana,quae opponuntur, ſiue triangula, ſiue quadrilatera,ſiue pentagona,ſiue plurilatera, & aequalia,& ſimilia habent, reliqua vero parallelogrãma. quod ex ijs,quae tum in hoc libro,tum in ſequenti traduntur,manifeſtiſſime apparet. Alia autem priſmata Campanus improprie columnas lateratas vocat,quemadmodum & conos,pyramides rotundas,& Cylindros columnas rotundas.

XIIII.

Sphęra eſt figura comprehenſa, quando circa manentem diametrum ſemicirculus conuerſus reſtituatur rurſus in eundem locum,à quo moueri cœpit.

XV.

Axis ſphæræ eſt recta linea manens, circa quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem,quod & ſemicirculi centrum.

XVII.

Diameter ſpęrę eſt recta linea quędam per centrum ducta, & ex vtraque parte à ſuperficie ſphærę terminata.

XVIII.

Conus eſt comprehenſa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum,quæ circa rectum angulum ſunt, triangulum conuertatur, quoad rurſus in eundem reſtituatur locum, à quo moueri cœpit. & ſi quidem manens recta linea ęqualis fuerit reliquo lateri,quod circa rectũ angulũ cõuertitur,conus orthogonius erit;ſi vero minor,ambligonius;& ſi maior,oxigonius.

XIX.

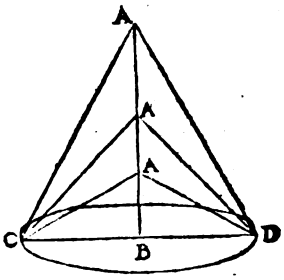
Axis coni eſt recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

XX.

Baſis vero circulus à conuerſa recta linea deſcriptus.

SCHOLIVM.

Oſtendendum quomodo conus orthogonius ſit, vel angulum rectum ad verticem habeat.



Exponatur triangulum orthogonium ABC rectũ habens ABC angulum; & rectam lineam BC rectę AB æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum conſtitui. producatur enim CB vſque ad D: ponaturq; BD ipſi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB eſt æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC ęqualis, & vterque ipſorũ dimidius recti, quòd rectus ponatur ABC: Eadem ratione & BAD eſt recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus eſt; & idcirco conus circa ABC deſcriptus eſt orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eũdem locum reſtituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB neceſſe eſt in conuerſione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipſi BD ſit æqualis: & circulus à puncto C deſcriptus baſis erit coni, qui à triangulo ABC conſtituitur, & eius circuli diameter erit baſis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd ſi conus à vertice A ad baſim vſque bifariam diuidatur, portionum ſuperficies non aliud erunt, niſi triangulum ADC, quod eſt orthogonium. quare & coni uertex orthogonius erit. ſi vero angulus BAC ſit maior dimidio recti, erit ob eandem cauſſam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtuſus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtuſum habebit. ſi denique BC ſit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ oſtenſa ſunt, DAC angulus recto minor, hoc eſt acutus, & conus oxygonius erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides conos, & cylindros dumtaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuerſe ex Apollonio, Serenoq; ortum explicare viſum eſt.

EX APOLLONIO.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur, & manente puncto cõuertatur circa circuli circũferentiã, quouſque ad eum locum redeat, à quo cępit moueri; ſuperficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemq́ue ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit in infinitum producta; uoco Conicam ſuperficiem, Verticem ipſius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctũ, et centrum circuli ducitur: Conum autem voco figuram contentam circulo

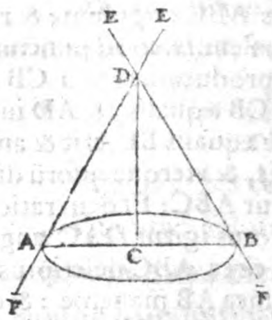
&

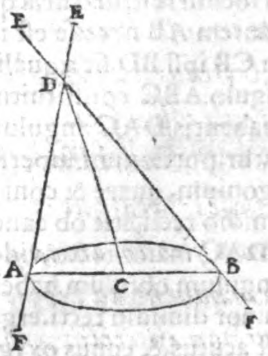
& conica ſuperficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur. Verticem coni punctum, quod et ſuperficiei conicæ vertex eſt. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Baſim circulum ipſum.

Conorũ rectos quidẽ voco, qui axes habẽt ad rectos angulos ipſis baſibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habẽt.

Quem locum explicans Eutocius ita ſcribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod ſublime D: iunctaque D B in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E F. Si igitur recta linea D B feratur eo vſque in circuli A B circumferentia, quouſque punctum B rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cępit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quę quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus, ad D punctum ſe ſe tangentibus. eam voco conicam ſuperficiem; quę & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsã deſcribens in infinitum producitur. verticem ſuperficiei dicit, punctum D: axem, rectam D C. conum vero appellat figuram cõtentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B ſola deſcribit: coni verticem punctum D: axẽ D C: & baſim, A B circulum. At ſi D C ad circulum, ſuerit perpendicularis, rectum vocat conum; ſin minus, ſcalenum.





Deſcribetur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quae non ſit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineae, quod eſt in ſublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipſam conuertatur: comprehenſa etenim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur lineam circumductam in conuerſione quandoque maiorem; quandoque minoram, & quandoque aequalem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.

XXI.

Cylindrus eſt comprehenſa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, parallelogrammum conuertatur, quouſque rurſus reſtituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

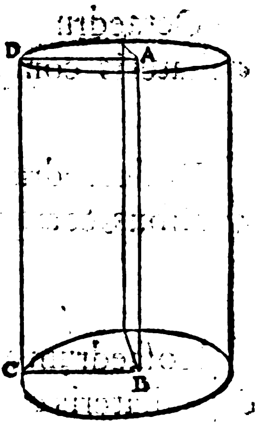
XXII.

Axis Cylindri eſt manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII:

Baſis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuerſis deſcibuntur.

F. C. COMMENTARIVS.



Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latere AB manĕte intelligatur latus CD conuerti, quouſq; ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri. erit iã deſcripta figura, cuius axis eſt AB recta linea manens, & baſis circuli ipſi à punctis CD circa centra BA deſcripti.

EX SERENO.

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorũ diametri ſemper inter ſe ſe parallelæ, & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & vnà circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: ſuperficies, quæ à circumlata recta linea deſcribitur, Cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, recta linea deſcribente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur. Cylindri baſis circuli ipſi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius Cylindri, baſes vtraſque contingit: quam & circumlatam deſcribere ſuperficiem Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

XXIIII.

Similes coni, & Cylindri ſunt, quorum, & axes, & baſium diametri eandem inter ſe proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum ſcalenos hoc modo diffiniemus.

Similes coni, & Cylindri ſunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos baſibus, communes ſectiones eorum & baſium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter ſe, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida, ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

Octaedrum

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehenſa.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & ęquiangulis continetur.

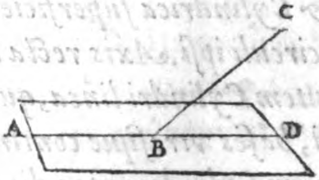
XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida, quę viginti triangulis æqualibus, & ęquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

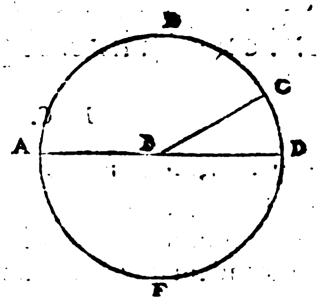
Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt rectæ lineę AB pars quidem AB ſit in ſubiecto plano, pars vero BC in ſublimi. erit vtique recta linea quædam ipſi AB in directum continuata in ſubiecto plano. ſitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio eſt AB, quod fieri non poteſt; recta enim linea cum recta linea non conuenit in pluribus punctis, quàm vno. alioqui rectæ lineę ſibi ipſis congruẽt. non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubiecto plano, quędam vero in ſublimi.



SCHOLIVM.

A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD cõmunis portio eſt AB, quod fieri non poteſt.] *Duabus enim rectis lineis non eſt communis portio. ſi enim fieri poteſt, ſit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & ſumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallum vero BA, & circulus AEF deſcribatur. Quoniam igitur punctum B centrum eſt circuli AEF, & per B ducta eſt quędam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter ABC. diameter autem circulum bifariam ſecat. ergo AEC ſemicirculus eſt. Rurſus quoniam B centrum eſt AEF circuli, & per B recta linea quędam ducta eſt ABD, erit ABD circuli AEF diameter. oſtẽſa autem eſt & ABC diameter eiuſdem circuli, & ſemicirculi eiuſdem circuli ſunt aequales inter ſe. ergo AEC ſemicirculus ſemicirculo AED eſt aequalis, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur duabus rectis lineis communis portio eſt, ſed differens; ac propterea neque fieri poteſt, vt terminatae rectae lineae alia recta linea in directum continuata ſit ex ijs, quae ante oſtenſa ſunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non eſt recta linea.*



B Alioqui rectę lineę ſibi ipſis congruent.] *Manifeſtum eſt congruentibus rectis lineis, & earum fines inter ſe congruere. ſi autem hoc, duae rectae lineę eoſdem fines habentes ſpacium cõtinebunt. quod fieri non poteſt.*

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent, in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

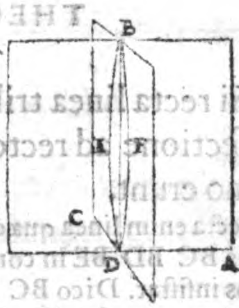
Duę enim rectæ lineę AB CD ſe inuicem in puncto E ſecent. Dico ipſas AB CD in vno eſſe plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis EB EC quæuis puncta FG; iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum conſiſtere in vno plano. Si enim trianguli EBC pars quidem FHC, vel GBK in ſubiecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in ſubiecto plano, & pars in alio. Quòd ſi triãguli ECB pars FG BG ſit in ſubiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarũq; rectarum linearum EC EB quędam pars erit in ſubiecto plano, quadam vero in alio. quod abſurdũ eſſe oſtendimus. Triangulum igitur EBC in vno eſt plano. in quo autem plano eſt BCE triangulum, in hoc eſt vtraque ipſarum EC EB: in quo autem vtraque ipſarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno ſunt plano, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

SCHOLIVM.

Propoſitum eſt oſtendere rectas lineas, quę ſe mutuo ſecant in vno plano eſſe. quoniam autem hoc per triangulum oſtenditur, illud appoſuit, & omne triangulum in vno plano conſiſtit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana ſe inuicem ſecent, cõmunis ipſorum ſectio recta linea erit.

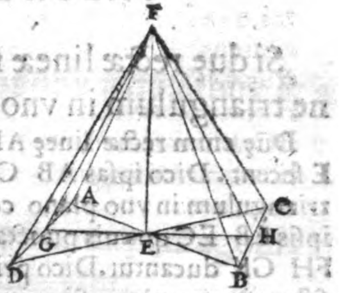


Duo enim plana AB BC ſe inuicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit DB linea. Dico lineam DB rectam eſſe. ſi enim non ita ſit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtique duarum rectarũ linearum DEB DFB ijdem termini, & ipſę ſpacium cõtinebunt, quod eſt abſurdum. non igitur DEB DFB rectæ lineæ ſunt. Similiter oſtendemus neque aliam quãpiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam eſſe, pręter ipſam DB, communem ſcilicet planorum AB BC ſectionem. ſi igitur duo plana ſe inuicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiã ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

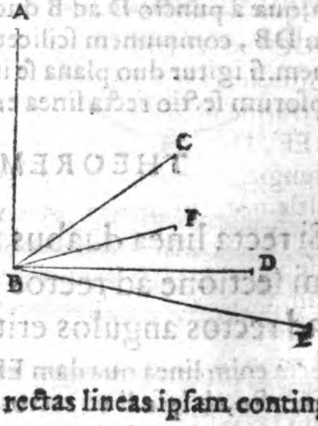
Recta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD ſe inuicem ſecãtibus in E puncto, ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat. Dico EF etiam plano per AB CD



ducto ad rectos angulos esse. ſumantur enim rectæ
lineæ AE EB CE ED inter ſe ęquales: perq́; E ducatur
recta linea GEH vtcumque, & iungantur AD
CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA FG
FD FC FH FB. Et quoniam duæ rectę lineæ AE
ED duabus rectis lineis CE EB ęquales ſunt, &
4.primi. angulos æquales continent, erit AD baſis baſi CB ęqualis,
& triangulum AED triangulo CEB æquale.
ergo & angulus DAE æqualis eſt angulo EBC. eſt
aũt & angulus AEG ęqualis angulo BEH. Duo igitur
triangula ſunt AGE BEH duos angulos duobus
angulis ęquales habẽtia, alterũ alteri, & vnũ latus AE vni lateri EB ęquale. quod eſt
26.primi. ad ęquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebũt, ergo
GE quidem eſt æqualis EH; AG vero ipſi BH. Quod cum AE ſit æqualis EB, communis
4.primi. autem & ad rectos angulos FE; erit baſis AF baſi FB æqualis. Eadem quoq;
ratione & CF ęqualis erit FD. Pręterea quoniam AD eſt æqualis CB, & AF ipſi FB;
erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & oſtẽſa eſt baſis DF ęqualis
8.primi. baſi FC. angulus igitur FAD angulo FBC eſt æqualis. Rurſus oſtenſa eſt AG æqualis
BH. ſed & AF ipſi FB eſt æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales
4.primi. ſunt, & angulus FAG æqualis eſt angulo FBH, vt demonſtratum fuit. baſis igitur
GF baſi FH eſt æqualis. Rurſus quoniam GE oſtenſa eſt æqualis EH, communis
autem FE; erunt duæ GE EF ęquales duabus HE EF; & baſis HF eſt æqualis baſi FG.
angulus igitur GEF angulo HEF eſt æqualis, & idcirco rectus eſt vterque angulorum
GEF HEF. ergo FE ad GH vtcumque per E ductam rectos efficit angulos.
Similiter oſtendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, &
3.diffi. in ſubiecto ſunt plano, rectos angulos efficere. recta autẽ ad planum recta eſt, quando
ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, & in eodem exiſtentes plano rectos
efficit angulos. quare FE ſubiecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubiectum planum
eſt quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto
per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus
in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano
ad rectos angulos erit.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis ſe ſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineę in vno plano erunt.

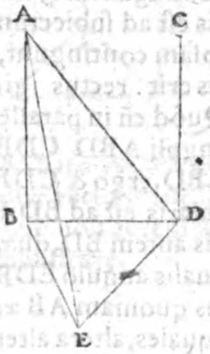


Recta enim linea quædam AB tribus rectis
lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos
inſiſtat. Dico BC BD BE in vno plano
eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD BE
quidẽ in ſubiecto plano, BC vero in ſublimi,
3.huius. & planum per AB BC producatur. cõmunẽ
vtique ſectionem in ſubiecto plano faciet rectam
lineam. faciat BF. in vno igitur ſunt plano
per AB BC ducto tres rectę lineæ AB BC
BF. & quoniam AB vtrique ipſarum BD BE
Ex antecedente. ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas
DB BE plano ad rectos angulos erit. planum
3.diffi. autem DB BE eſt ſubiectum planum. ergo AB
ad ſubiectum planum recta eſt. quare & ad omnes rectas lineas ipſam contingentes,

tes,quæ in eodem plano ſunt,rectos faciet angulo; ſed ipſam tangit BF in ſubiecto exiſtens plano. ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem & ABC angulus rectus.ęqualis igitur eſt angulus ABF angulo ABC,& in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt.recta igitur linea BC non eſt in plano ſublimi. quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſe ſe tangẽtibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos inſiſtat,tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

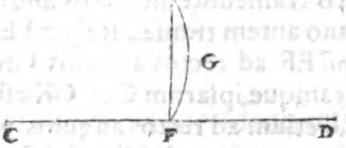
Si duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, illę inter ſe ſe parallelæ erunt.



Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſubiecto plano ſint ad rectos angulos. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe. occurrant enim ſubiecto plano in punctis BD,iungaturq; BD recta linea,cui ad rectos angulos in ſubiecto plano ducatur DE, & poſita DE ipſi AB ęquali,iũgantur BE AE AD.Qm̃ igitur AB recta eſt ad ſubiectum planum, & ad omnes rectas lineas,quę ipſam cõtingunt, & in ſubiecto ſunt plano, rectos angulos efficiet. Diffi. 3. contingit autem AB vtraque ipſarum BD BE exiſtens in ſubiecto plano. ergo vterque angulorum ABD ABE rectus eſt. Eadem ratione rectus etiam eſt vterq; ipſorum CDB CDE.& quoniam AB ęqualis eſt ipſi DE,cõmunis autem BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, 4.primi. & rectos angulos continent.baſis igitur AD baſi BE eſt æqualis. rurſus quoniam AB eſt æqualis DE, & AD ipſi BE,duę AB BE duabus ED DA æquales ſunt,& baſis ipſarum AE communis. 8.primi. ergo angulus ABE angulo EDA eſt ęqualis.ſed ABE rectus eſt.rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA eſt perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad vtramque ipſarum BD DC.quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos inſiſtit angulos.tres igitur rectæ lineę BD DA DC in vno ſunt plano. Ex antecedente. in quo autem ſunt BD DA,in hoc & AB:omne enim triangulum in vno eſt plano. ergo AB BD DC in vno plano ſint neceſſe eſt, 2.huius. atque eſt vterque angulorum ABD BDC rectus. 28.primi. parallela igitur eſt AB ipſi CD. quare ſi duæ rectæ lineæ eidẽ plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter ſe ſe parallelæ erunt.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

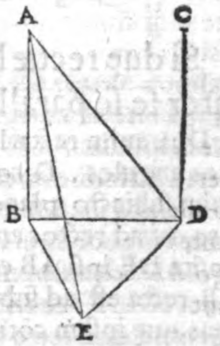
Si duę rectæ lineę parallelæ ſint,ſumantur autem in vtraque ipſarum quælibet puncta; quę dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano,in quo & parallelę.



Sint duæ rectę lineæ parellelæ AB CD, & in vtraque ipſarum ſumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F cõiungit,in eodem plano eſſe,in quo ſunt parallelę.non enim,ſed ſi fieri poteſt,ſit in ſublimi,vt EGF, & per EGF planũ ducatur, 3.huius. quod in ſubiecto plano ſectionem faciet, rectam lineam.faciat vt EF.ergo duæ rectæ lineæ EGF E F ſpacium continebunt, 10.com. no. primi libri. quod fieri non poteſt. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt plano, quare erit in eo,quod per AB CD parallelas tranſit.ſi igitur duæ rectæ lineæ parallelę ſint, & reliqua, quæ ſequuntur.quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si duę rectę lineæ parallelę ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

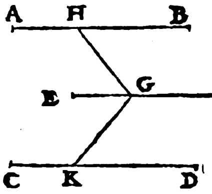


Sint duę rectę lineæ parallelę AB CD, & altera ipſarum AB ſubiecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe. occurrãt enim AB CD ſubiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo AB CD BD in vno ſunt plano. Ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubiecto plano DE: & ponatur DE ipſi AB æqualis: iunganturq; BE AE AD. Et quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, ſuntq; in ſubiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur eſt vterque angulorum ABD ABE. Quòd cũ in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD, erũt anguli ABD CDB duobus rectis ęquales. rectus autem eſt ABD. ergo & CDB eſt rectus; ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. Et quoniam AB eſt ęqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales ſunt; & angulus ABD eſt æqualis angulo EDB, rectus enim vterq; eſt. baſis igitur AD baſi BE eſt ęqualis. Rurſus quoniam AB æqualis eſt DE, & BE ipſi AD; erunt duę AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & baſis earum communis AE. quare angulus ABE eſt æqualis angulo EDA. rectus autem eſt ABE. ergo & EDA eſt rectus, & ED ad DA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BD. ergo ED ẽt ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem exiſtentes plano ipſã contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD eſt DC, quoniam in plano per BD DA ſunt AB BD: in quo autem ſunt AB BD in eodem eſt ipſa DC. quare ED ipſi DC eſt ad rectos angulos; ideoq; CD ad rectos angulos eſt ipſi DE. ſed & CD ipſi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB ſe mutuo ſecantibus in cõmuni ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE DB eſt ad rectos angulos. planum autem per DE DB eſt ſubiectum planum. ergo CD ſubiecto plano ad rectos angulos erit.

Ex antecedente.
3.diffi.
29.primi.
4.primi.
8.primi.
4.huius.
3.diffi.
2.huius.
4.huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Quæ eidem rectę lineę ſunt parallelę, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano; etiam inter ſe parallelæ erunt.

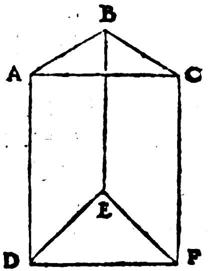


Sit enim vtraque ipſarum AB CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem, in quo ipſa, plano. Dico AB ipſi CD parallelã eſſe. ſumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipſi EF in plano quidem per EF AB tranſeunte ad rectos angulos ducatnr GH; in plano autem tranſeunte per FE CD rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. Et quoniam EF ad vtramque ipſarum CH GK eſt perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK tranſeunte. atque eſt EF ipſi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos eſt. eadem ratione & CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. vtraq; igitur ipſarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter ſe ſe. ergo AB ipſi CD eſt parallela.

4.huius.
Ex antecedente.
6.huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

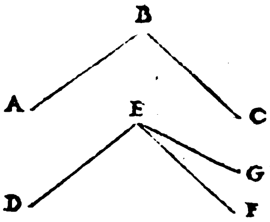


Duæ enim rectę lineæ ſe ſe contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF ſe ſe contingentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF ęqualem eſſe. Aſſumantur enim BA BC ED EF inter ſe æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipſi ED æqualis eſt & parallela, erit & AD æqualis & parallela ipſi BE. Eadẽ ratione & CF ipſi BE ęqualis & parallela erit. 32.primi. Vtraque igitur ipſarum AD CF ipſi BE ęqualis eſt & parallela. Quę autem eidem rectę lineę ſuut parallelę, nõ exiſtentes in eodem, in quo ipſa plano; & inter ſe parallelę erũt. ergo AD parallela eſt ipſi CF, & æqualis. Ex antecedente. atque ipſas coniungunt AC DF. & AC igitur ipſi DF æqualis eſt & parallela. 33.primi. & quoniã duæ recte lineę AB BC duabus DE EF æquales ſunt, & baſis AC eſt æqualis baſi DF; erit angulus ABC angulo DEF ęqualis. 8.primi. ſi igitur duæ rectæ lineæ ſe ſe contingentes duabus rectis lineis ſe ſe contingẽtibus ſint parallelę, non autem in eodem plano; ęquales angulos continebunt. quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non exiſtentibus, & earum vna parallella ſit uni continentium ęqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIVS.

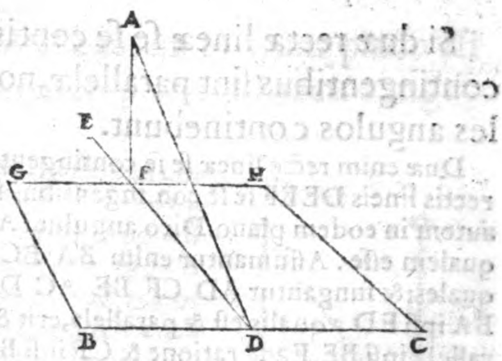


Sint duo anguli aequales ABC DEF: & rectae lineae AB BC angulum ABC continentes nõ ſint in eodem plano, in quo DEF. ſit autem DE parallela ipſi A B. Dico & E F ipſi BC parallelam eſſe. Si enim nõ eſt EF parallela ipſi BC, erit alia ipſi parallela, ſit EG. Itaque quoniam duae rectae lineae ſeſe contingentes AB BC duabus rectis lineis ſeſe cõtingentibus DE EG ſunt parallelae, nõ autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC eſt aequalis. Sed et angulus DEF ponitur aequalis angulo A B C. angulus igitur D E F angulo D E G aequalis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. non igitur EG parallela eſt ipſi BC. ſimiliter oſtendemus neque aliam vllam eidem B C parallelam eſſe pręter ipſam EF. ergo EF ipſi BC eſt parallela. quod demonſtrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

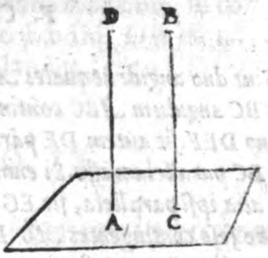
Sit datum quidem pũctum ſublime A, datum autem ſubiectum planum. oportet à puncto A ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineã ducere. In ſubiecto enim plano ducatur quędam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad B



C perpendicularis agatur A D. Si quidem igitur AD perpẽdicularis ſit etiam ad ſubiectum planum; factum iam erit, quod proponebatur: ſin mi-
11. primi. nus, ducatur à puncto D ipſi B C in
12 primi. ſubiecto plano ad rectos angulos D E: & à pũcto A ad DE perpendicularis ducatur AF. deniq; per F ducatur GH ipſi BC parallela. Et qm̃ BC vtrique ipſarum DA DE eſt ad rectos an-
4. huius. gulos, erit & B C ad rectos angulos plano per ED DA tranſeunti, atq; eſt ipſi parallela GH. Si aũt ſint duæ re-
8 huius. ctæ lineę parallelæ, quarum vna pla-
3. diffi. no alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA tranſeunti ad rectos angulos eſt: ac propterea ad omnes rectas lineas, quę in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt, eſt perpendicularis. contingit aũt ipſam AF exiſtẽs in plano per ED DA. ergo G H perpendicularis eſt ad F A. & ob id F A eſt perpẽdicularis ad GH: eſt autem AF & ad DE perpẽdicularis. ergo A F perpendicularis eſt ad vtrãq; ipſarum HG DE. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe contingentibus in cõmuni ſectione ad rectos angulos
4. huius. inſiſtat, etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per E D GH ducto eſt ad rectos angulos. planum autem per ED GH eſt ſubiectum planum. ergo AF ad ſubiectum planum eſt perpẽdicularis. A' dato igitur puncto ſublimi A ad ſubiectum planum perpendicularis recta linea ducta eſt AF. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

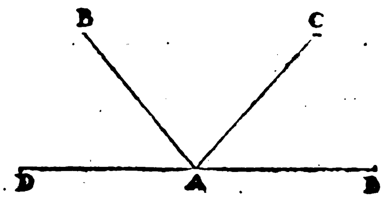
Dato plano à puncto, quod in ipſo datum, eſt ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.



Sit datum quidem planum ſubiectum, punctum autẽ, quod in ipſo ſit A. oportet à puncto A ſubiecto plano ad rectos angulos rectã lineam conſtituere. Intelligatur ali-
Ex antecedente. quod punctũ ſublime B, à quo ad ſubiectũ planum agatur perpendicularis B C; & per A ipſi BC parallela ducatur AD. Qm̃ igitur duę rectæ lineæ parallelæ ſunt A D CB, vna autem ipſarum B C ſubiecto plano eſt ad rectos
8 huius. angulos; & reliqua AD ſubiecto plano ad rectos angulos erit, Dato igitur plano à puncto, quod in ipſo eſt datum ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à pũcto, quod in ipſo eſt, duæ rectę lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte.



Si enim fieri poteſt, dato plano à puncto quod in ipſo eſt A, duæ rectę lineę AB AC ad rectos angulos conſtituantur ex eadem
8. huius: A parte: & ducatur planũ per BA AC, quod faciet ſectionem per A in ſubiecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in vno ſunt plano. Et quoniam CA ſubiecto plano ad rectos angulos
3. diffi. eſt, & ad omnes rectas lineas, quę in ſubie-

cto plano

cto plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam D A E, quę eſt in ſubiecto plano. angulus igitur CAE rectus eſt. Eadem ratione & rectus eſt B A E. ergo angulus C A E ipſi B A E eſt æqualis, & in vno ſunt plano, quod fieri non poteſt. B Non igitur dato plano à puncto, quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtituentur ex eadē parte. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

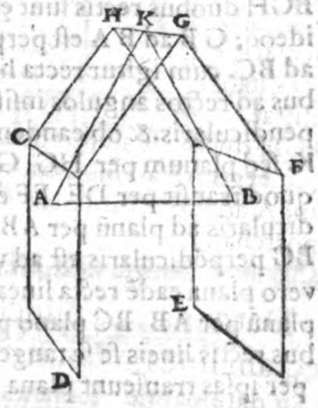
A Et ducatur planum per B A A C] *Sunt enim ex ſecunda huius rectae lineae B A A C in vno plano.*

SCHOLIVM.

B Quod fieri non poteſt] *Eſſent enim & parallelae, eidem plano ad rectos angulos exiſtentes; & inter ſe conuenirent. quod eſt abſurdum, parallelae autem eſſent ex ſexta huius.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.



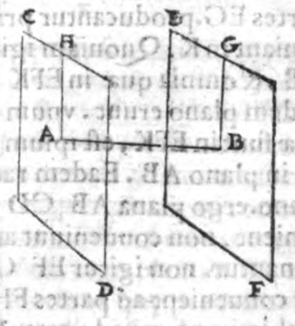
3. diffi.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumque ipſorum planorum CD EF ſit perpendicularis. Dico ea plana parallela eſſe. ſi enim non ita ſit, producta conuenient inter ſe, cōueniāt; & cōem ſectionē faciāt rectā lineā GH; & in ipſa GH ſumpto quouis pūcto K, iungantur AK BK. Qm̄ igitur AB perpēdicularis eſt ad EF planū, erit & perpēdicularis ad ipsā BK rectā lineā in plano EF producto exiſtētē. quare angulus A B K rectus eſt. Eadē ratione & BAK eſt rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis ſunt æquales, quod fieri non poteſt. non igitur plana C D E F producta inter ſe conuenient. quare CD EF parallela ſint neceſſe eſt. Ad quę igitur plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipſorum eſt perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

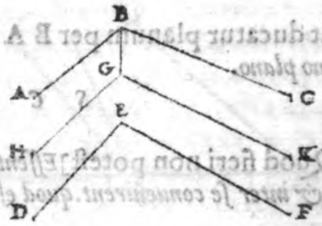


Sint duo plana paralleia CD EF, & recta quędam linea AB ad planum C D ſit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem eſſe. Si enim non eſt perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis ſectio ſit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG eſt acutus, productis planis conuenient tandem inter ſeſe rectae lineae BG AH. quare & ipſa plana conuenient. atqui parallela ponuntur. quod fieri non poteſt. non igitur AB ad planum EF non eſt perpendicularis. ergo perpendicularis ſit neceſſe eſt. quod demonſtrandum propoſuimus.

THEO-

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XV.

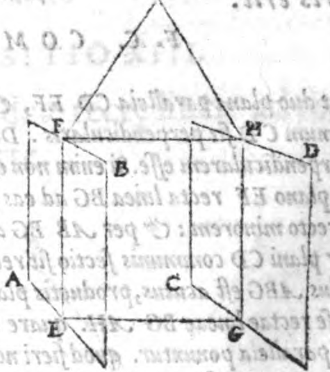
Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.



Duæ enim rectæ lineę ſeſe tangẽtes AB BC duabus rectis lineis ſeſe tangẽtibus DE EF parallelæ ſint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF tranſit perpendicularis BG, quę plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. Itaque 3.diff. quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam vtraque earum GH GK, quę eſt in eodem plano. rectus igitur eſt v- 29.primi. terque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela eſt ipſi GH, anguli GBA BGH duobus rectis ſunt ęquales. rectus autem eſt BGH. ergo et GBA rectus erit; ideoq; GB ad BA eſt perpendicularis. Eadem ratione & GB eſt perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC ſe inuicem ſecanti- 2.huius. bus ad rectos angulos inſiſtat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem cauſſam BG eſt perpendicularis ad planum per HG GK. ſed planum per HG GK eſt illud, quod per DE EF tranſit. quare BG ad planũ, quod tranſit per DE EF eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt BG etiam perpendicularis ad planũ per AB BC: atq; eſt ad planũ per DE EF perpẽdicularis. ergo BG perpẽdicularis eſt ad vtrũq; planorũ, quæ per AB BC DE EF traſeũt. Ad quæ Ex antecedente. vero plana eadẽ recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. parallelũ igitur eſt planũ per AB BC plano per DE EF. Quare ſi duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVI.

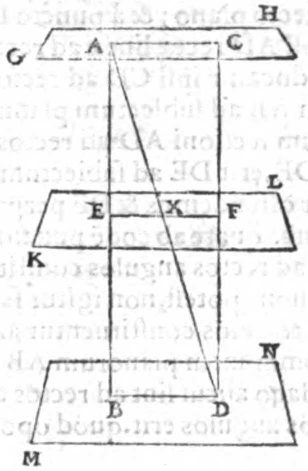
Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelę erunt.



Duo enim plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH ſecentur: communes autem ipſorũ ſectiones ſint EF GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe. ſi enim non eſt parallela, productæ EF GH inter ſe conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, vt ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK eſt in plano AB, & omnia quæ in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt. vnum autem punctorum, quæ ſunt in EFK, eſt ipſum K punctum. ergo K eſt in plano AB. Eadem ratione & K eſt in CD plano. ergo plana AB CD producta inter ſe cõuenient. non conueniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectę lineę productę conuenient ad partes FH. ſimiliter demonſtrabimus neque ad partes EG conuenire, ſi pro ducantur : quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelę ſunt. ergo EF ipſi GH eſt parallela. ſi igitur duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelæ erunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

Si duæ rectę linęę à parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur.



Duæ enim rectæ lineę AB CD à parallelis planis GH KL MN ſecentur in punctis A E B C F D. Dico vt AE recta linea ad ipſam EB, ita eſſe CF ad FD. Iungantur enim AC BD AD: & occurat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX ſecantur, communes ipſorum ſectiones EX BD parallelę ſunt. Eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC ſecantur, communes ipſorũ ſectiones AC FX ſunt parallelæ. Et quoniã vni laterum trianguli ABD, videlicet ipſi BD parallela ducta eſt EX, vt AE ad EB, ita erit AX ad XD. Rurſus quoniam vni laterum trianguli ADC, nempe ipſi AC parallela ducta eſt XF, erit vt AX ad XD, ita CF ad FD. oſtenſum autem eſt & vt AX ad XD, ita eſſe AE ad EB. & vt igitur AE ad EB, ita eſt CF ad FD. Quare ſi duę rectę lineæ à parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

2. ſexti.

11. quinti.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quædam AB ſubiecto plano ſit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipſam AB tranſeunt, ſubiecto plano ad rectos angulos eſſe. producatur enim per AB planum DE, ſitq; plani DE, & ſubiecti plani communis ſectio CE: & ſumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipſi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad ſubiectũ planum eſt perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quę ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano perpendicularis erit. quare ẽt ad CE eſt perpendicularis. angulus igitur ABF rectus eſt. ſed & GFB eſt rectus. ergo AB parallela eſt ipſi FG. eſt autem AB ſubiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos angulos erit. At planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductę rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos ſint: & communi planorum ſectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, oſtenſa eſt ſubiecto plano ad rectos eſſe angulos. ergo planum DE rectũ eſt ad ſubiectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur, & omnia quę per AB trãſeũt plana ſubiecto plano recta eſſe. ſi igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

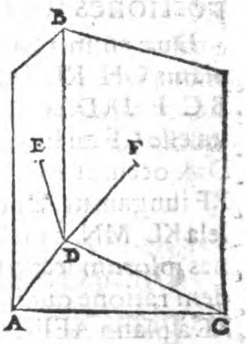
3. diffi.

8 huius.

4. diffi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana ſe inuicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.



Duo enim plana ſe inuicem ſecantia AB BC ſubiecto plano ſint ad rectos angulos: communis autem ipſorum ſectio ſit BD. Dico BD ſubiecto plano ad rectos angulos eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt; non ſit BD ad rectos angulos ſubiecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipſi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autē BC ducatur ipſi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad ſublectum planum rectum eſt, & communi ipſorum ſectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta eſt DE, erit DE ad ſubiectum planum perpendicularis. ſimiliter oſtendemus & DF perpendicularem eſſe ad ſubiectum planū. quare ab eodē puncto D ſubiecto plano duę rectæ lineę ad rectos angulos conſtitutę ſunt ex eadem parte, quod fieri non poteſt. non igitur ſubiecto plano à puncto D ad rectos angulos conſtituentur aliæ rectæ lineæ, pręter ipſam DB, communem planorum AB BC ſectionem. Ergo ſi duo plana ſe inuicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidē plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonſtrare.

13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis apparet conuerſum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Fit enim recta linea dictorum planorum communis ſectio. quare cum ea plana plano cuipiam ad rectos angulos eſſe ponantur, & recta linea quae ipſorum communis ſectio eſt eidem plano ad rectos angulos erit.

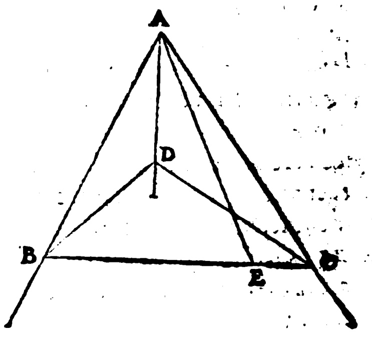
Conuerſum vero pręſentis theorematis apparet ex antecedente. quod huiuſmodi eſt.

Quorum planorum ſe ſe mutuo ſecantium communis ſectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & ſecantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum ſectio eſt recta linea, per quam dicta plana tranſeunt. quod cum recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipſa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores ſunt, quomodocumq; ſumpti.



Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores eſſe, quomodocumque ſumptos. ſi enim BAC CAD DAB anguli inter ſe ęquales ſint, perſpicuum eſt duos quoslibet reliquo maiores eſſe, quomodocumque ſumptos. Sin

minus

minus,ſit maior BAC.& ad rectam lineam AB,& ad punctum in ipſa A conſtituatur angulo DAB in plano per BA AC tranſeũte,æqualis angulus BAE; ponaturq́; ipſi AD æqualis AE;& per E ducta BEC ſecet rectas lineas AB AC in punctis BC & DB DC iungantur.Itaque quoniam DA eſt æqualis AE, communis autem AB, duę DA AB duabus BA AE æquales ſunt:& angulus DAB æqualis eſt angulo BAE.baſis igitur DB baſi BE eſt æqualis.Et quoniam duę DB DC ipſa BC maiores ſunt,quarum DB æqualis oſtenſa eſt ipſi BE;erit reliqua DC quàm reliqua EC maior.Quòd cum DA ſit ęqualis AE, communis autem AC & baſis D C maior , baſi EC;erit angulus DAC angulo EAC maior. oſtenſus autem eſt & DAB angulus æqualis ipſi BAE.quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores ſunt. ſimiliter demonſtrabimus & ſi duo quilibet alij ſumantur,eos reliquo eſſe maiores.ſi igitur ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur , duo quilibet reliquo maiores ſunt, quomodocumque ſumpti.quod demonſtrare oportebat.

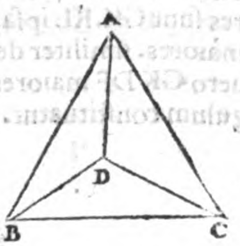
23. primi.

4. primi.

[illegible]. primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis ſolidus angulus minoribus,quàm quattuor rectis angulis planis continetur.

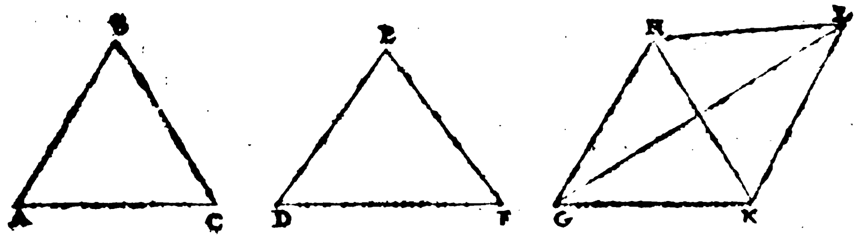


Sit ſolidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB cõtẽtus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor rectis eſſe minores.ſumãtur enim in vnaquaq; ipſarũ AB AC AD quęuis pũcta B C D,& BC CD DB iũgãtur.Quoniam igitur ſolidus angulus ad B tribus angulis planis cõtinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores ſunt.anguli igitnr CBA ABD angulo CBD ſunt maiores. Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores ſunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB.quare ſex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB ſunt maiores . ſed tres anguli CBD BDC DCB ſunt ęquales duobus rectis.Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores ſunt.Quòd cũ ſingulorũ triãgulorum ABC ACD ADB tres anguli ſint ęquales duobus rectis,erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD ęquales ſex rectis.quorũ ſex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis ſunt maiores.reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli,qui ſolidum continent angulum quattuor rectis minores erunt.Quare omnis ſolidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur.quod oportebat demonſtrare.

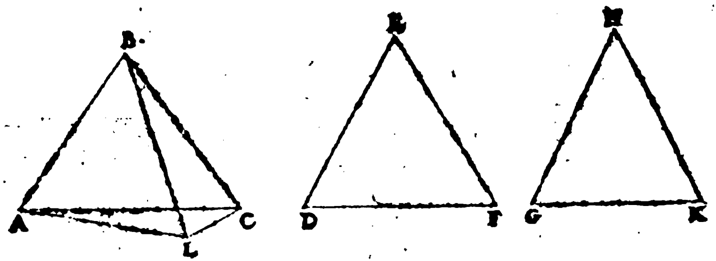
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si ſint tres anguli plani,quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti,contineant autem ipſos rectæ lineæ æquales fieri poteſt, vt ex ijs, quæ rectas æquales coniungunt triangulum conſtituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores,quomodocumque ſumpti,videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC;& prætcrea anguli GHK ABC angulo DEF: maiores ſintq́; æquales rectæ lineę AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungãtur.Dico fieri poſſe, vt ex ęqualibus ipſis AC DF GK triangulũ cõſtituatur;hoc eſt ipſarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua eſſe maiores, quomodocumq; ſumptas . ſi quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter ſe æquales ſint ; manifeſtũ



est & æqualibus factis AC DF GK ex ęqualibus ipſis triangulum conſtitui poſſe.
23.primi. ſin minus, ſint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipſa H, angulo
ABC ęqualis angulus conſtituatur KHL, & ponatur vni ipſarum AB BC DE
EF GH HK æqualis HL: & GL KL iungantur. Itaque quoniam duę AB BC duabus
4.primi. KH HL æquales ſunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit baſis AC ęqualis
baſi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF ſunt maiores; æqualis autē
eſt angulus A B C angulo K H L: erit G H L angulo D E F maior. Quòd cum
duæ GH HL duabus DE EF æquales ſint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior,
24.primi. baſis GL baſi DF maior erit. Sed GK KL ipſa GL ſunt maiores. multo igitur maiores
20.primi. ſunt GK KL ipſa DF. eſt autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF ſunt
maiores. ſimiliter demōnſtrabimus, & ipſas quidem AC DF maiores eſſe GK, ipſas
uero GK DF maiores AC. fieri igitur poteſt vt ex æqualibus ipſis AC DF GK triāgulum
conſtituatur.

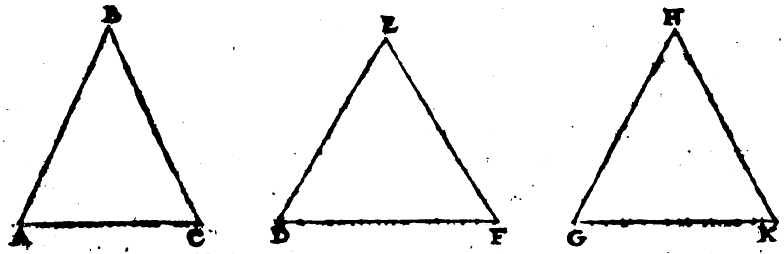


ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo
ſint maiores, quomodocumque ſumpti: cōtineant autem ipſos æquales rectæ lineę
AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri poſſe, vt ex ęqualibus
ipſis AC DF GK triangulum conſtituatur: hoc eſt rurſus duas reliqua maiores
eſſe, quomodocumque ſumptas. ſi igitur rurſus anguli ad B E H ſint æquales,
& AC DF GK æquales erunt, & duę reliqua maiores. ſin minus, ſint inæquales anguli
24.primi. ad B E H, & maior qui eſt ad B vtroque ipſorum qui ad E H. maior igitur
eſt & recta linea AC vtraque ipſarum DF GK. & manifeſtum eſt ipſam AC vnà cū
altera ipſarum DF GK reliqua eſſe maiorem. Dico & DF GK ipſa AC maiores eſſe.
23.primi. conſtituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis
angulus ABL, & vni ipſarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL
LC iungantur. Quoniam igitur duę AB BL duabus GH HK æquales ſunt, altera alteri,
& angulos æquales continent; erit baſis AL baſi GK æqualis. & quoniam anguli
ad E H angulo ABC maiores ſunt, quorum angulus GHK eſt æqualis ipſi ABL;
erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quòd cum duę LB BC duabus DE EF
24.primi. æquales ſint, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC maior; baſis DF baſi LC maior
erit. oſtenſa eſt autem GK ęqualis AL. ergo DF GK ipſis AL LC ſunt maiores.
ſed AL LC maiores ſunt ipſa AC. multo igitur DF GK ipſa AC maiores erūt. quare
rectarum linearum AC DF GK duę reliqua maiores ſunt, quomodocumque
ſumptę; ac propterea fieri poteſt, vt ex ęqualibus ipſis AC DF GK triangulum conſtituatur.
quod oportebat demonſtrare.

PRO-

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis eſſe minores.



Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK; quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumq; ſumpti. ſintq; tres anguli quattuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipſis ABC DEF GHK ſolidum angulum conſtituere. abſcindātur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK iungātur. fieri igitur pōt, vt ex æqualibus ipſis AC DF GK conſtituatur triangulum. Itaque conſtituatur LMN, ita vt AC quidem ſit æqualis LM, DF vero ipſi MN: & pręterea GK ipſi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN deſcribatur: ſumaturq; ipſius cētrum X; quod vel erit intra triangulū LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primū intra: ſitq; X: & LX MX NX iungātur. Dico AB maiorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB erit ęqualis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB eſt ęqualis LX, atque eſt AB ipſi BC æqualis; erit LX ęqualis BC; eſt autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales ſunt: altera alteri; & AC baſis baſi LM ęqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM eſt ęqualis. Eadem ratione & angulus quidē DEF eſt æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL ęquales ſunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis ſunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt æqualis. Dico prætere neque AB minorem eſſe ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ponatur ipſi quidem AB ęqualis XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB eſt æqualis BC, & XO ipſi XP ęqualis erit. ergo & reliqua OL reliquę PM eſt æqualis; ac propterea LM parallela eſt ipſi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. eſt igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX, quàm XO. ergo & LM quàm OP eſt maior. Sed LM poſita eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP ęquales ſunt, & baſis AC maior baſi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonſtrabimus & DEF angulum maiorē eſſe angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN

Ex antecedente.

22. primi.

5. quarti.

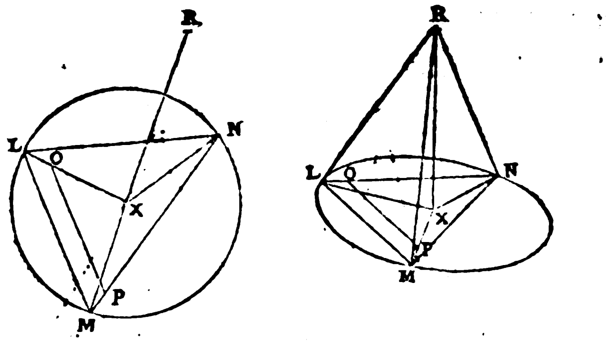
8. primi.

Corol. 15. primi.

2. sexti.

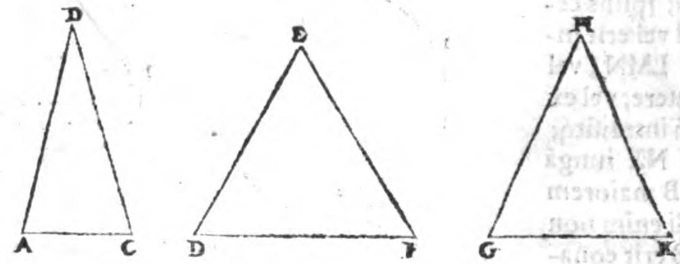
4. sexti.

25 primi.

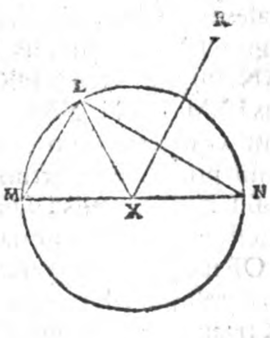


MXN NXL ſunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores ponuntur. Coro.15.primi. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed & ęquales. quod eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt, quàm LX. 12.huius. oſtenſum autē eſt neque eſſe æqualem. ergo maior ſit neceſſe eſt. conſtituatur à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & exceſſui, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ponatur ęquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN iungantur. 5.diffi. Quoniam igitur RX perpendicularis eſt ad planum LMN circuli, & ad vnamquamque ipſarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX eſt æqualis 4.primi. XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit baſis LR æqualis baſi RM. Eadem ratione & RN vtrique ipſarum RL RM eſt ęqualis. Tres igitur rectæ lineę RL RM RN inter ſe æquales ſunt. Et quoniam quadratum XR ponitur ęquale exceſſui, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB qua- 47.primi. dratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR ęquale eſt quadratũ ex RL; rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoq; AB ipſi RL eſt ęqualis. ſed ipſi quidem AB æqualis eſt vnaquæque ipſarum BC DE EF GH HK; ipſi vero RL æqualis vtraque ipſarum RM RN. vnaquæque igitur ipſarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipſarum RL RM RN eſt æqualis. Quòd cum duæ LR RM duabus AB BC ęquales ſint, & baſis LM ponatur 8.primi. æqualis baſi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK eſt æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui ęquales ſunt tribus datis ABC DEF GHK ſolidus angulus conſtitutus eſt ad R, qui angulis LRM MRN LRN cōtinetur.

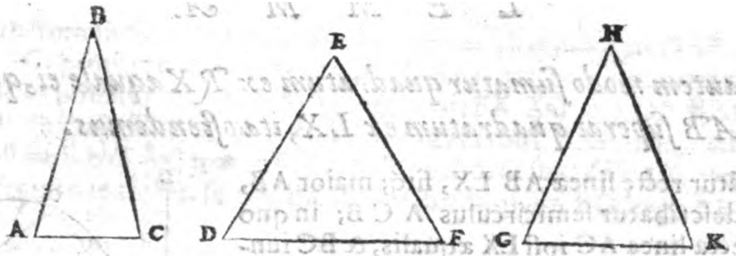
Sed ſit centrum circuli in vno laterum trianguli, videlicet in MN, quod ſit X, & XL iungatur. Dico rurſus AB maiorem eſſe ipſa LX. Si enim non ita ſit, vel AB eſt æqualis LX vel ipſa minor. ſit primum æqualis. duę igitur AB BC, hoc eſt DE EF

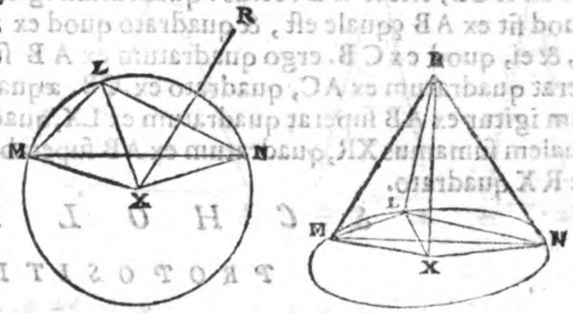


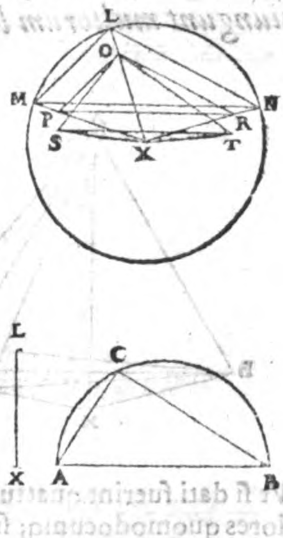
duabus MX XL, hoc eſt ipſi MN æquales ſunt. ſed MN ponitur ęqualis DF. ergo DE EF 20 primi. ipſi DF ſunt ęquales. quod fieri non poteſt. non igitur AB eſt æqualis LX. ſimiliter neq; minor. multo enim magis id quod fieri non poteſt, ſequeretur. ergo AB ipſa LX maior eſt. & ſimiliter ſi exceſſui quo quadratũ ex AB ſuperat quadratũ ex LX ęquale ponatur, vt quadratum ex RX, & ipſa RX circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.



Sed ſit centrum circuli extra triangulum LMN, quod ſit X, & LX MX NX iūgantur. Dico & ſic AB ipſa LX maiorem eſſe. ſi enim non ita ſit, vel æqualis eſt, uel minor. ſit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL ęquales ſunt, altera alteri; 8.primi & baſis AC eſt æqualis baſi ML. angulus igitur ABC æqualis eſt angulo MXL. Eadem







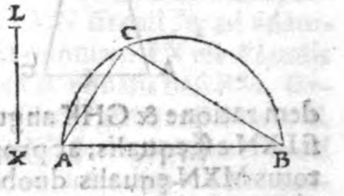
dem ratione & GHK angulus ipſi LXN eſt ęqualis; ac propterea totus MXN ęqualis duobus ABC GHK. ſed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores ſunt. & angulus igitur MXN ipſo DEF eſt maior. Et quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales ſunt, & baſis DF ęqualis baſi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. oſtenſus autem eſt maior, quod eſt abſurdum. non igitur AB eſt æqualis LX. deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare maior neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos cōſtituamus XR, & ipsā ęqualē ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, problema conſtituetur. Itaque dico neque minorem eſſe AB ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB ęqualis ponatur XO, ipſi vero BC ęqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB ipſi BC eſt æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM ęqualis. parallela igitur eſt LM ipſi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX quàm XO. ergo LM quàm OP eſt maior. ſed LM eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duę AB BC duabus OX XP ſunt ęquales, altera alteri; & baſis AC maior eſt baſi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. ſimiliter & ſi XR ſumatur ęqualis vtriq; ipſarum XO XP, & iungatur OR, oſtendemus angulum GHK angulo OXR maiorem. conſtituatur ad rectam lineam LX, & ad punctum in ipſa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK ęqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipſi OX æqualis: iunganturq; OS OT ST. Et quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales ſunt, & angulus ABC ęqualis angulo OXS, erit baſis AC, hoc eſt LM baſi OS æqualis. Eadem ratione & LN eſt æqualis ipſi OT. Quòd cum duæ ML LN duabus OS ST ſint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT; erit et baſis MN baſi ST maior. ſed MN eſt æqualis DF. ergo et DF quam ST maior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales ſunt, et baſis DF maior baſi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autē eſt angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior eſt. ſed et minor. quod fieri non poteſt.

2. ſexti.
4. ſexti.
25. primi.
4 primi.
42. primi.
25. primi.

LEMMA

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ita oſtendemus.

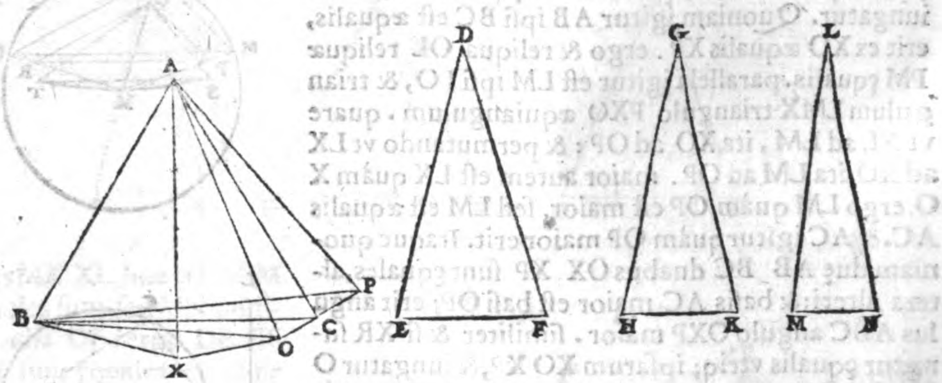


Exponãtur rectę lineæ AB LX, ſitq́; maior AB, & in ipſa deſcribatur ſemicirculus A C B; in quo aptetur recta linea AC ipſi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in ſemicirculo ABC angu
31. tertii. lus eſt AGB, erit A C B rectus. quadratum igitur
47. primi. quod fit ex AB ęquale eſt, & quadrato quod ex A C, & ei, quod ex C B. ergo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem eſt AC ipſi LX. quadratum igitur ex AB ſuperat quadratum ex LX, quadrato ex C B. Quare ſi ipſi C B æqualem ſumamus XR, quadratum ex AB ſuperabit quadratum ex L X, eo quod fit ex R X quadrato.

SCHOLIVM.

PROPOSITIO I.

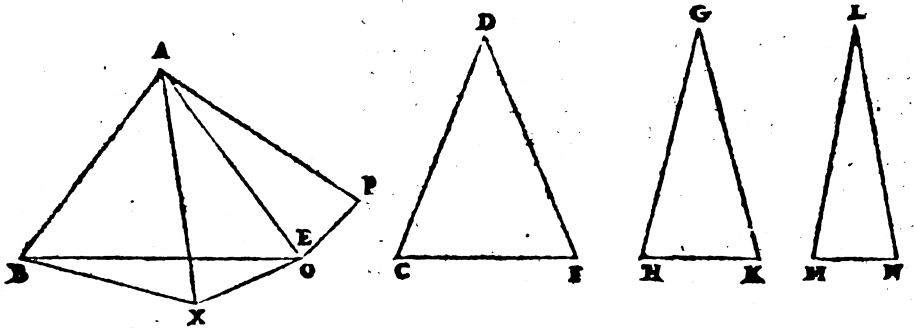
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorũ vno reliqui ſint maiores quomodocumque ſumpti, contineant autem ipſos rectæ lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos ſubtendentium, vna reliquas maiores eſſe quomodocũque ſumptas: hoc eſt fieri poſſe, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura conſtituatur.

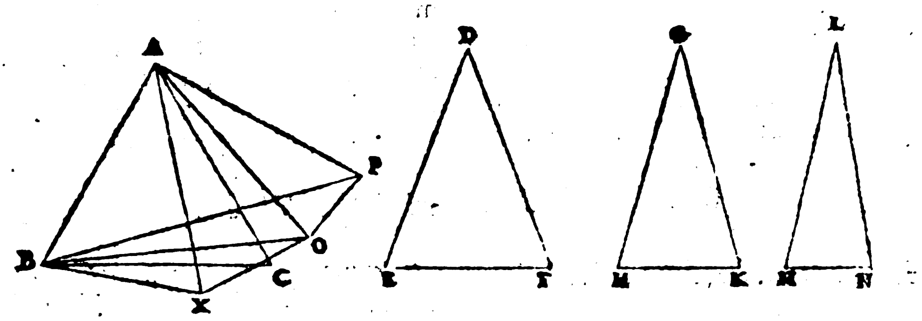


Vt ſi dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorum tres reliquo ſint maiores quomodocumq; ſumpti: æquales autem ſint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN: & iungantur BC EF HK MN. Dico ipſarum BC EF HK MN tres reliqua maiores eſſe, quomodocumque ſumptas. ſi enim æquales ſint anguli ad puncta A D G L, & latera BC EF HK MN ęqualia erunt. & manifeſtum eſt tres vna reliqua eſſe maiores, quomodocumque accipiãtur. ſi vero inęquales ſint, ſit ma
24. primi. ior qui ad A. baſis igitur BC ſingulis ipſarum EF HK MN maior eſt. quare BC cũ vna earum reliquis quibuslibet eſt maior: & cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam EF HK MN ipſa BC maiores eſſe. Quoniam enim angulus ad A ma
23. primi. ior eſt ſingulis ipſorum D G L, conſtituatur ad BA rectam lineam, & ad pũctum in ipſa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX, & ad rectam lineam AX, & ad pũctũ in ipſa A angulo, qui ad G æquali cõſtituto angulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipſam, vel extra ipſam. Cadat primũ intra, & ad rectam lineam OA,

& ad

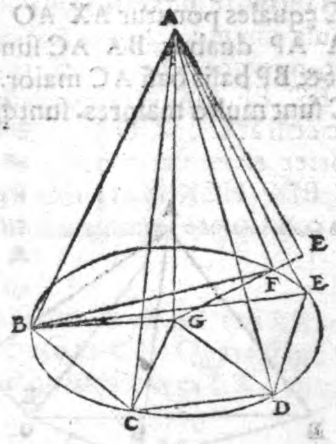
& ad punctum in ipſa A angulo qui ad L ęqualis fiat angulus OAP. cadet AP extra
lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo ſunt maiores. & ipſis AB
AC ęquales ponatur AX AO AP: iungãturq́; BX XO BO OP BP. Qm̃ igitur duę
BA AP duabus BA AC ſunt æquales, angulus aũt BAP maior eſt angulo BAC;
erit & BP baſis baſi AC maior. Sed ipſa BP maiores ſunt BO OP. quare BO OP ipſa 24. primi.
BC ſunt multo maiores. ſuntq́; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP multo
maiores ſunt ipſa BC. atque eſt BX quidem ęqualis ipſi EF, quoniam & angulus 4. primi.
BAX æqualis eſt angulo EDF; XO vero eſt ęqualis HK, & OP ipſi MN. quare EF HK
MN ipſa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum
æqualem angulo G cadat in ipſam AC, vt in ſecunda figura: & BX XC CP iungantur.
Itaque quoniam BX XC ipſa BC maiores ſunt, & ſunt BX XC CP æquales ipſis
EF HK MN, erunt EF HK MN ipſa BC multo maiores. Denique recta linea
AO, quæ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, ut in tertia
figura: ponaturq́; æqualis ipſi AP: & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam
igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales ſunt, angulus autem BAP maior eſt
angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rurſus quoniam BO OP maiores ſunt quã 24. primi.
BP; & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed
BP eſt maior BC. quare BX XO OP multo maiores ſunt ipſa BC: ſũtq́; BX XO OP
ipſis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipſa BC multo maiores ſunt. Et quoniam
tres reliqua maiores ſunt, quomodocumque ſumptæ, fieri poteſt, vt ex ipſis
quadrilaterum ipſam conſtituatur.





PROPOSITIO II.

Si in aliquod planũ à quodam ſublimi puncto æquales rectę lineę cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.



A' puncto enim A in ſubiectum planum æquales rectæ lineę cadãt AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia eſſe. Iungantur enim in ſubiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triãgulum circulus deſcribatur BCDF. ergo puncta BCD in circũli circumferentia ſunt. Dico etiam ipſum E in circumferẽtia eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & ſumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectę lineæ ducantur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F ſecet, & iungantur AE AG. Quoniã igitur AB ipſi AC eſt æqualis, eſt autem & BG ęqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æquales ſunt. & baſis AG eſt vtrique communis. angulus igitur ABG angulo ACG eſt æqualis, triangulumq́; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus AGB æqualis eſt angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æqualis erit. Quòd cum AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem exiſtentes plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipſas ducitur perpendicularis erit. quare ad circulum ipſum. Itaque quoniam GD ipſi GF eſt æqualis, communis autem & ad rectos angulos GA; erit baſis AD baſi AF ęqualis. ergo & vnaqueque ipſarum AB AC AE æqualis eſt ipſi AF. Et quoniam angulus AFE maior eſt recto AGF, quòd exterior ſit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF angulus qui eſt ad F maior eſt angulo qui ad E. quare & latus AE maius eſt latere AF. ſed & oſtenſum eſt æquale. quod eſt abſurdum. non igitur punctum E extra circũli circumferentiam cadit. ſimiliter oſtendemus neque cadere intra. ducentes enim ad ipſum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rurſusq́; ab A ad dictũ punctum rectam lineam iungentes, oſtẽdemus ipſam & ęqualem eſſe, & minorem. quod eſt abſurdum. At ſi neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipſam circumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli ſunt circumferentia, & AG ad ipſum circulum eſt perpendicularis. quod demonſtrare oportebat.

8.primi.
4.huius.
4.primi.
16.primi.
19.primi.

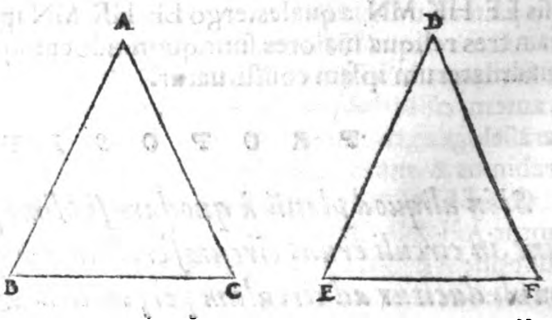
COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi.

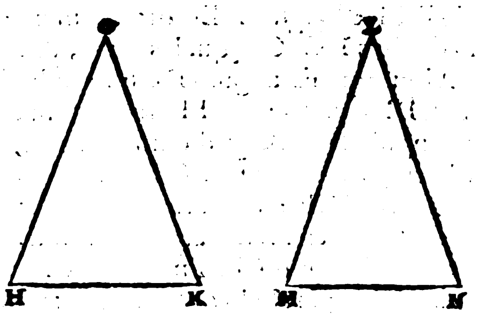
PROPOSITIO III.

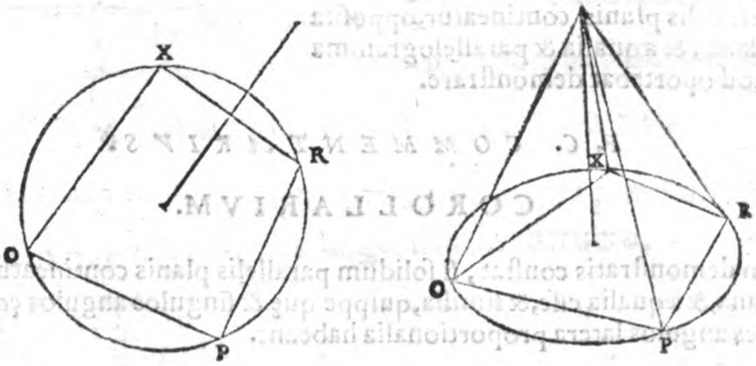
Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui ſint maiores quomodocũq; ſumpti, ſolidũ angulũ cõſtituere. oportet aũt datos angulos quattuor rectis eſſe minores.

Sint dicti anguli BAC EDF HGK MLN. oportet ex angulis qui ſunt ad puncta A D G L ſolidum angulum conſtituere. ſumantur æquales rectæ



lineæ, quę ipſos angulos continent, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur ſunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque ſumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiēt. fiat & ſit X O P R. Et quoniã oportet ex æquicruribus triangulis BAC EDF HGK MLN ſolidum angulum conſtituere: omnis autem ſolidi Ex corol. antecedenti.

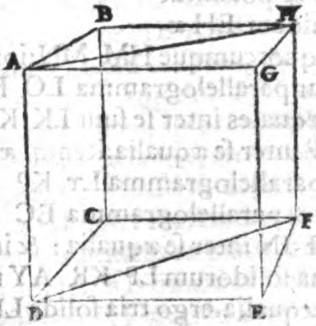




anguli, qui æquicruribus triangulis continetur baſim circumſcribit circulus; & anguli ſolidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, baſim circulus circumſcribet. dicti vero anguli baſis conſtat ex baſibus ipſorum triangulorum, videlicet XOPR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circũſcribit. Et deinceps eadem conſtruentes ijs, quę dicta ſunt in angulo ſolido pro baſi triangulum habente propoſitum efficiemus.

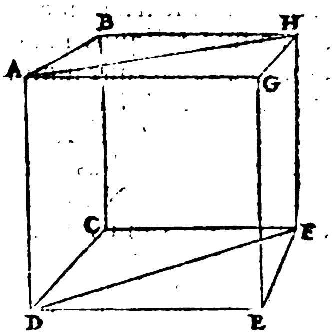
THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.



Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico oppoſita eius plana, & æqualia & parallelogramma eſſe. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC ſecantur, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. 16. huius. ergo AB ipſi CD eſt parallela. Rurſus quoniã duo plana parallela BF AE ſecantur à plano AC, cõmunes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. parallela igitur eſt AD ipſi BC: oſtẽſa autem eſt & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, & vnumquodque ipſorum DF FG GB BF AE parallelogrammum eſſe. Iũgantur AH DF. Et quoniam parallela eſt AB quidem ipſi DC; BH vero ipſi CF, erunt duę AB BC ſe ſe tangentes duabus DC CF ſe ſe tangentibus parallelæ, & non in eodem plano. quare ęquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an- 10. huius.

gulo DCF eſt ęqualis. Et quoniam duę AB 34.primi. BH duabus DC CF ęquales ſunt, & angu- 4.primi. lus ABH æqualis angulo DCF, erit baſis AH baſi DF ęqualis: & ABH triãgulum æquale triangulo DCF. Quòd cum ipſius quidem 41.primi. ABH triãguli duplũ ſit BG parallelogrãmũ, ipſius vero DCF trianguli duplum parallelogrãmũ CE: erit BG parallelogrãmũ æquale parallelogrãmo CE. ſimiliter demonſtrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale eſſe. Si igitur ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia & parallelogramma ſunt, quod oportebat demonſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

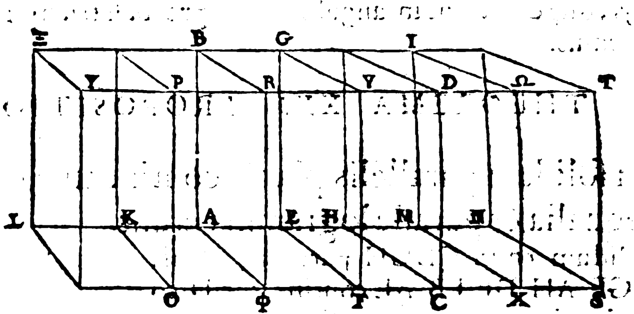
COROLLARIVM.

Ex iam demonſtratis conſtat, ſi ſolidum parallelis planis contineatur oppoſita e diffi. ſexti. ipſius plana, & æqualia eſſe, & ſimilia, quippe quę & ſingulos angulos ęquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit vt baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

Solidũ enim parallelepipedum ABCD plano YE ſecetur, oppoſitis planis RA DH parallelo. Dico vt AEFΦ baſis ad baſim EH CF, ita eſſe ABFY ſolidum ad ſolidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponantur ipſi quidem EH æquales quotcumque HM MN; ipſi uero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & ſolida LP KR DM MT. Quoniã 1.sexti. Ex antecedente. igitur æquales inter ſe ſunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter ſe æqualia: itemq; æqualia inter ſe parallelogramma KX KB AG, & adhuc parallelogramma LΥ KP AR inter ſe æqualia; oppoſita enim ſunt. Eadem ratione & parallelogramma EC HX MS ęqualia inter ſe; itemq; parallelogrãma HG HI IN inter ſe æqualia: & inſuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana ſolidorum LP KR AY tribus planis æqualia ſunt, ſed tria tribus oppoſitis ſunt æqualia. ergo tria ſolida LP KR AY inter ſe æqualia erunt. Eadem ratione & tria ſolida ED DM MT ſunt æqualia inter ſe. quotuplex igitur eſt baſis LF ipſius AF baſis, totuplex eſt & LY ſolidum ſolidi AY. Et eadem ratione quotuplex eſt NF baſis ipſius baſis HF, totuplex eſt & ſolidum NY ipſius HY ſolidi: & ſi baſis LF



eſt

eſt æqualis baſi NF, & ſolidum LY ſolido NY ęquale erit. & ſi baſis LF ſuperat NF baſim, & LY ſolidum ſolidum NY ſuperabit, & ſi minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, duabus ſcilicet baſibus AF FH, & duobus ſolidis AY YH ſumpta ſunt æque multiplicia, baſis quidem AF, & AY ſolidi, videlicet baſis LF, & ſolidum LY: baſis vero HF, & HY ſoiidi, nempe baſis NF & ſolidum NY. & demõſtratum eſt ſi baſis LF ſuperat baſim NF, & LY ſolidum ſolidum NY ſuperare, & ſi ęqualis æquale, & ſi minor minus. eſt igitur vt AF baſis ad baſim FH, ita AY ſolidũ ad ſolidum YH. Quare ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, oppoſitis planis parallelo; erit vt baſis ad baſim, ita ſolidũ ad ſolidũ. quod oportebat demonſtrare.

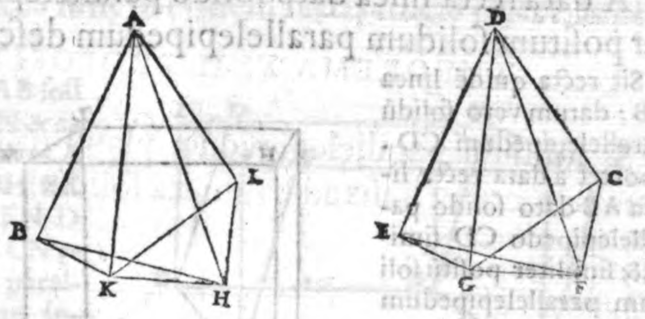
F. C. COMMENTARIVS.

Quod ſi ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus parallelo; erit ſolidum ad ſolidum, vt altitudo ad altitudinem.

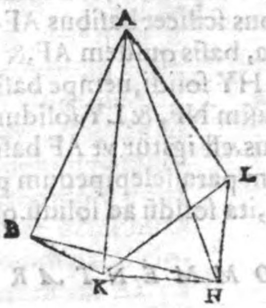
Hoc enim nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum propoſitione XVIII.

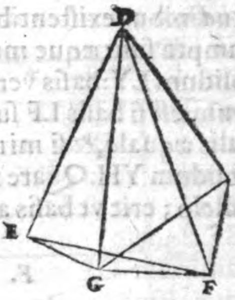
PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVI.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualem ſolidum angulum conſtituere.



Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipſa pũctum A, & datus ſolidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis cõtineatur. oportet ad datam rectam lineã AB, & ad datum in ipſa punctum A, dato angulo ſolido ad D æqualẽ ſolidum angulum conſtituere. ſumatur enim in linea DF quod vis
punctum F, à quo ad planum per ED DC tranſiens ducatur perpendicularis FG, 11.huius.
& plano in puncto G occurrat; iungaturq́; DG, & ad rectam lineam AB, & ad da- 23.primi.
tum in ipſa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus conſtituatur BAL;
angulo autem EDG conſtituatur æqualis BAK. deinde ipſi DG ponatur ęqualis A
K, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq́; ipſi GF 12.huius.
ęqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum ſolidum ad A, qui angulis BAL BAH
HAL continetur, æqualem eſſe ſolido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contẽ
to. ſumantur enim æquales rectę lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quo
niam igitur FG perpendicularis eſt ad ſubiectũ planum; & ad omnes rectas lineas, 3.diff.
quę ipſam contingunt, ſuntq́; in ſubiecto plano rectos faciet angulos. Vterqne ig-
tur angulorũ FGA FGD FGE rectus eſt. Eadẽ ratione, & vterq; ipſorum HKA HK
B eſt rectus. Et quoniam duę KA AB duabus GD DE ęquales ſunt altera alteri, &
angulos æquales continent; erit baſis BK baſi EG ęqualis. eſt autem & KH ęqua is 4.primi.
GF, atque angulos rectos continent. ęqualis igitur et HB ipſi FE. Rurſus quoniam
duæ AK KH duabus DG GF æquales ſunt, et rectos continent angulos; erit baſis 4.primi.
AH baſi DF æqualis: eſtq́; AB æqualis DE. duę igitur HA AB duabus FD DE ſunt
ęquales; et baſis HB eſt ęqualis baſi FE. ergo angulus BAH angulo EDF ęqualis 8.primi.
erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC eſt æqualis, quandoquidem ſi aſ
ſumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL eſt
ęqualis

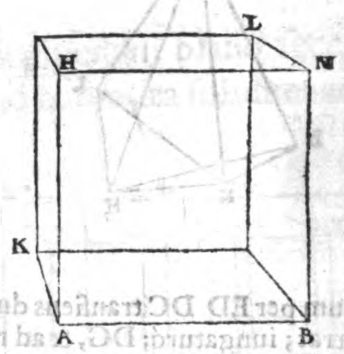


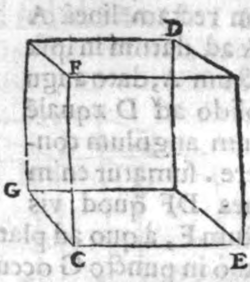


ęqualis toti EDC, quorum BAK ipſi EDG ponatur ęqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. Et quoniã duæ KA AL duabus G D DC æquales ſunt, et angulos æquales continent; 4.primi. baſis KL baſi GC æqualis erit. eſt autem et KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus DC GF ſunt æquales; anguloſq; rectos continent. ergo baſis HL æqualis eſt baſi FC. Rurſus quoniam duæ HA AL duabus FD 8 primi. DC æquales ſunt, & baſis HL æqualis baſi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atque eſt angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido ęqualis angulus ſolidus conſtitutus eſt. quod facere oportebat.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.





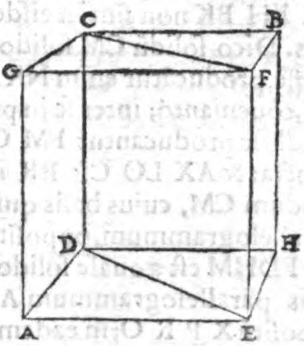
Sit recta quidẽ linea AB; datum vero ſolidũ parallelepipedum CD. oportet à data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcribere. Ex antecedente. conſtituatur enim ad rectam lineam AB, & ad datum in ipſa punctum A angulo ſolido ad C æqualis angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita vt angulus quidem BAH æqualis ſit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angulo GCF, 12.sexti. & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK; vt autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex ęquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL ſolidum. Quoniam igitur eſt vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales an 1.diffi. sexti. gulos ECG BAK latera ſunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE ſimile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH ſimile eſt parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur pa 24.huius. rallelogrãma ſolidi AL tribus parallelogrãmis ſolidi CD ſimilia ſunt. ſed tria tribus oppoſitis ſunt ęqualia, & ſimilia: Ergo totũ AL ſolidum toti ſolido CD ſimile erit. A data igitur recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum AL deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum

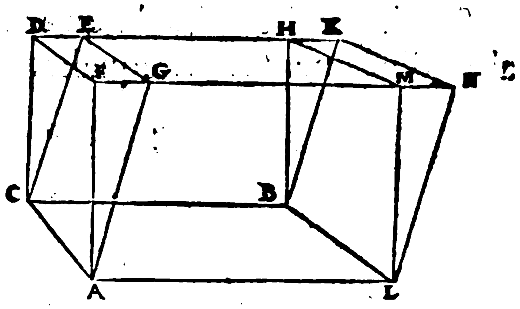
poſitorum planorum ab ipſo plano bifariam ſecabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF ſecetur per diagonales oppoſitorũ planorum, videlicet CF DE. Dico ſolidum AB à plano CDEF bifariam ſecari. Quoniam enim æquale eſt CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; eſt autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppoſitum enim eſt, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH: erit priſma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale priſmati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim ęqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB ſolidum à plano CDEF bifariã ſecatur. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quę in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

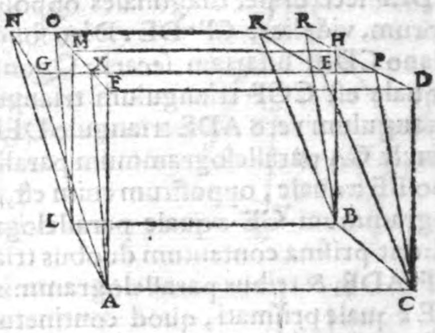


Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum ſtãtes AF AG LM LN CD CE BH BK ſint in eiſdem rectis lineis FN DK. Dico ſolidum CM ſolido CN ęquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt vtrumque ipſorum CH CK; erit CB vtrique ipſarum DH EK æqualis, ergo & 34.primi. DH eſt æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE ęqualis eſt reliquæ HK. quare & DEC triangulum eſt ęquale triangulo HKB. parallelogrammum autē 1.sexti. DG eſt æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum ęquale eſt triangulo LMN. eſt autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & pa- 24.huius. rallelogrammũ CG parallelogrammo BN æquale: oppoſita enim ſunt. ergo & priſma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC eſt æquale priſmati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur ſolidum, cuius baſis quidem parallelogrammum AB, oppoſitum autem ipſi GEHM. ergo totum CM ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo CN eſt ęquale. ſolida igitur parallelepipeda, quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

Sint

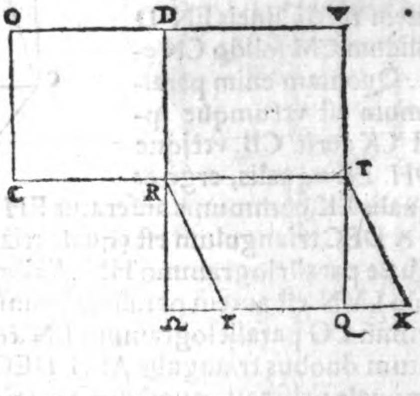


Sint in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum ſtantes AF AG LM LN CD CE BH BK non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidũ CM ſolido CN ęquale eſſe. producãtur enim NK DH & GE FM, cõueniantq́; inter ſe in punctis RX: & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. ſolidum CM, cuius baſis quidẽ ACBL parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi FDHM eſt æquale ſolido CO, cuius baſis parallelogrammum ACBL, & ei oppoſitũ X P R O; in eadem enim ſunt baſi ACBL, & ipſorum ſtantes AF AX LM LO CD CP BH BR ſunt in eiſdem rectis lineis FO DR. Sed ſolidum CO, cuius baſis quidem parallelogrãmum ACBL, oppoſitum autem ipſi XPRO eſt æquale ſolido CN, cuius baſis ACBL parallelogrãmum, & ipſi oppoſitum GE KN. etenim in eadem ſunt baſi ACBL, & eorum ſtantes AG AX CE CP LN LO BK BR ſunt in eiſdem rectis lineis GP NR. quare & CM ſolidum ſolido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadẽ ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdẽ rectis lineis, inter ſe ſunt ęqualia. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus, & eadẽ altitudine inter ſe ſunt æqualia.



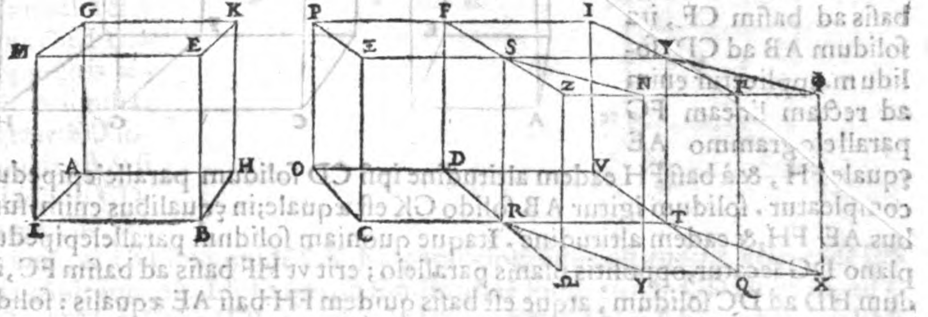
Sint in æqualibus baſibus AB CD ſolida parallelepipeda AE CF, & eadẽ altitudine. Dico ſolidum AE ſolido CF æquale eſſe. ſint autem primum ſtantes HK BE AG LM OP DF CΞ RS ad rectos angulos baſibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD ſit inæqualis, & producatur ipſi CR in directum RT: conſtituaturq́; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipſa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipſi quidem AL æqualis RT, ipſi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipſi RT parallela ducatur XY, compleaturq́; baſis RX, & ϯY ſolidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales ſunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX ęquale & ſimile parallelogrammo HL. Et quoniam rurſus AL eſt æqualis RT, & LM ipſi RS, anguloſq́; ęquales continẽt, parallelogrammum Rϯ parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipſi SY ęquale eſt & ſimile. tria igitur parallelogrãma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſolidi ϯY æqualia & ſimilia ſunt. Sed & tria tri

23.primi.

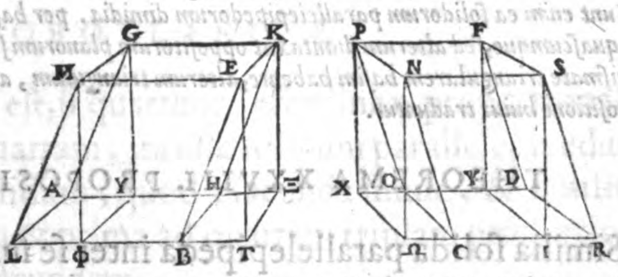
1.diffi. ſexti.

bus

bus oppoſita & æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedũ 24. huius toti ſolido parallelepipedo Ψ Y eſt ęquale. producantur DR XY, coueniantq́; inter ſe in pũcto Ω, & per T ipſi D Ω parallela ducatur TQ, & producãtur TQ OD, & cõueniant in V, compleanturq́; ſolida ΩΨ RI. ſolidum igitur Φ Ω cuius baſis eſt RΨ parallelogrammum, oppoſitum autem ipſi ΩΓ eſt æquale ſolido Ψ Y, cuius baſis 29. huius. eſt RΨ parallelogrammum, & oppoſitum ipſi ϒΦ, in eadem enim ſunt baſi RΨ, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΦΓ ΨΦ in eiſdẽ ſunt rectis lineis ΩXZΦ. Sed ſolidum Ψ ϒ æquale eſt ſolido AE. ergo & Ψ Ω ſolido AE eſt



æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT eſt ęquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD eſt ęquale, quoniam & ipſi AB; parallelogrammumq́; ΩT æquale parallelogrammo CD: aliud autem parallelogrammum DT. eſt igitur vt CD baſis ad baſim DT, ita ΩT ad ipſam DT. Et quoniam ſolidum parallelepipedum CI plano RF ſecatur planis oppoſitis parallelo; erit vt 25. huius. CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidum. Eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano RΨ oppoſitis planis parallelo, vt ΩT baſis ad baſim CD, ita erit ſolidum ΩΨ ad RI ſolidum. ſed vt CD baſis ad baſim DT, ita baſis ΩT ad ipſam TD. Vt igitur ſolidum CF ad RI ſolidum, ita ſolidum ΩΨ ad ſolidum RI. Quòd cum vtrumque ſolidorum CF ΩΨ ad ſolidum RI eandẽm habeat proportionem, ſolidum CF ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum 9. quinti. eſt æquale ſolido AE. ergo & AE ipſi CF ęquale erit. ſed non ſint ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE ęquale eſſe ſolido CF. Ducãtur à punctis K E G M P F N S ad ſubiectum pla- 11. huius. num perpendiculares KΞ ET GY MΦ PX FΨ NΩ SI, & plano in punctis Ξ T Y Φ X Ψ Ω I occurãt, & iungantur Ξ



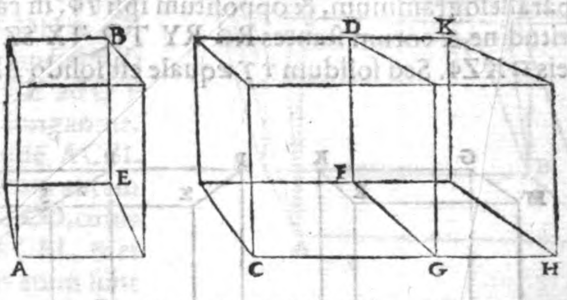
T YΦ XY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur eſt KΦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eadem altitudine; quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed KΦ ſolidum ſolido AE eſt æquale: ſolidum vero PI æquale ſolido CF. ſi quidem in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quę in æqualibus ſunt baſibus, & eadem altitudine, inter ſe ſunt ęqualia. quod demonſtrare oportebat.

Ex proxime demõſtratis.

30. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quę eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes.



Sint ſolida parallelepipeda AB CD, quæ eadem altitudinem habeant. Dico inter ſe eſſe vt baſes. hoc eſt vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad CD ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE ęquale FH, & à baſi FH eadem altitudine ipſi CD ſolidum parallelepipedum GK **Ex antecedente** compleatur. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt æquale; in ęqualibus enim ſunt baſibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam ſolidum parallelepipedum CK **25. huius.** plano DG ſecatur, oppoſitis planis parallelo; erit vt HF baſis ad baſim FC, ita ſolidum HD ad DC ſolidum, atque eſt baſis quidem FH baſi AE æqualis: ſolidum vero GK æquale ſolido AB. eſt igitur & vt AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad ſolidum CD. Quare ſolida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Conſtat etiam ſolida parallelepipeda in eadem baſi, vel in ęqualibus baſibus conſtituta eam inter ſe proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum, propoſitione XIX.

COROLLARIVM.

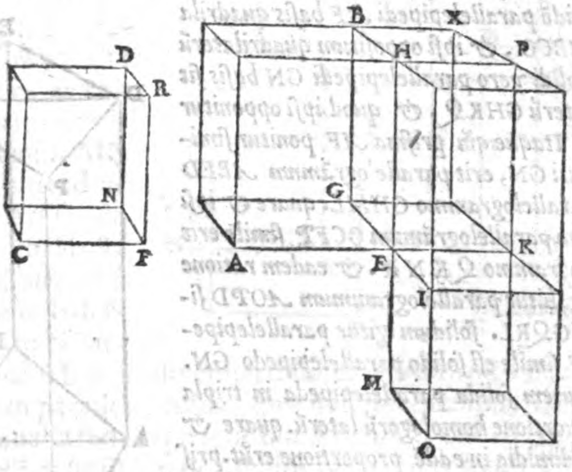
Ex his igitur & iam demonſtratis ſequitur priſmata triãgulares baſes habentia, quę vel in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituũtur, & eadem altitudine inter ſe æqualia eſſe. Et inſuper quæ eandem habent altitudinem inter ſe eſſe, vt baſes. Et quę vel in eiſdem vel æqualibus baſibus conſtituuntur, inter ſe eſſe, vt altitudines.

28. huius. *Sunt enim ea ſolidorum parallelepipedorum dimidia. per baſes autem priſmatis intelligimus non quaſcumque, ſed alterum dumtaxat oppoſitorum planorum ſimilium & parallelorum, vt nũc in priſmate triangularem baſim habente, alterum triangulum, alioquin obſtarent, quae in vltima propoſitione huius traduntur.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplam proportionem habere eius, quã habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipſis AE GE HE: & ipſi quidem CF æqualis ponatur EK, ipſi vero FN ęqualis EL; & adhuc ipſi FR ęqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO ſolidum compleatur. Quoniam igitur duę KE EL duabus CF FN æquales ſunt; ſed & angulus KEL angulo CFN eſt ęqualis; quod & angulus AEG ipſi CFN ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum ſimile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum



mum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipſi DF parallelogrammo. tria igitur parallelegrammma ſolidi KO tribus parallelogrammis CD ſolidi æqualia & ſimilia ſunt. 24 huius. Sed tria tribus oppoſitis æqualia ſūt & ſimilia. totum igitur KO ſolidum ęquale eſt & ſimile toti ſolido CD. compleatur GK parallelogrāmū; & à baſibus quidē GK KL parallelogrāmis, altitudine vero eadē ipſi AB ſolida cōpleātur AX LP. Et qm̄ ob ſimilitudinē ſolidorū AB CD eſt vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; ęqualis aūt FC ipſi EK, & FN ipſi EL, & FR ipſi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. ſed vt AE quidē ad EK, ita AG parallelogrammum 1. sexti. ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. ſed vt AG quidem ad GK, ita AB ſolidum ad ſolidū Ex antecedente. EX: vt autem GK ad KL, ita ſolidum XE ad PL ſolidum: & vt PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. & vt igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, & PL ad 11. quinti. KO. ſi autem quattuor ſint magnitudines deinceps proportionales prima ad quar- 11. diffi. quinti. tam triplam proportionem habet eius, quàm ad ſecundam. ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. Ex antecedente. ſed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipſam 1. sexti. EK. quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam proportionem habebit eius, quā AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, & recta linea EK rectæ CF eſt æqualis. ergo & AB ſolidum ad ſolidum CD triplam habet proportionē eius, quam latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

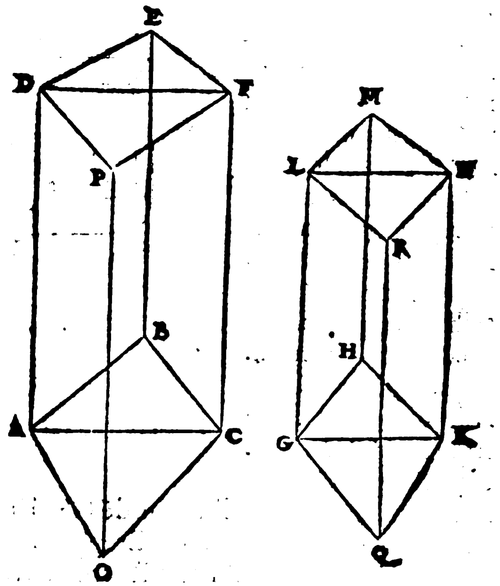
Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod fit à prima ad ſolidum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionē habet eius, quam ad ſecundam.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis, ſequitur priſmata ſimilia, quę triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia priſmata triangulares baſes habentia, & ſimiliter poſita AF GN, & priſmatis quidem AF baſis ſit triangulum ABC, & quod ipſi opponitur DEF: priſmatis uero GN baſis ſit triangulum GHK, & ipſi oppoſitum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Dico priſma AF ad priſma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Com-

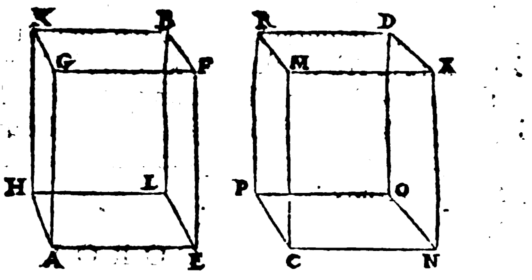
pleantur enim ſolida parallelepipeda, & ſit ſolidi quidẽ parallelepipedi AF baſis quadrilaterum ABCO, & ipſi oppoſitum quadrilaterũ DEFP ſolidi vero parallelepipedi GN baſis ſit quadrilaterũ GHKQ, & quod ipſi opponitur LMNR. Itaque qm̃ priſma AF ponitur ſimi-
9.diff.huius *le priſmati GN, erit parallelogrãmum ABED*
24.huius. *ſimile parallelogrammo GHML. quare & ipſi oppoſitum parallelogrãmum OCFP ſimile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonſtrabitur parallelogrammum AOPD ſimile ipſi GQRL. ſolidum igitur parallelepipedum AF ſimile eſt ſolido parallelepipedo GN. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in tripla ſunt proportione homologorũ laterũ. quare & ipſorum dimidia in eadẽ proportione erũt. priſma igitur AF ad priſma GN triplã proportionẽ habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonſtrare.*



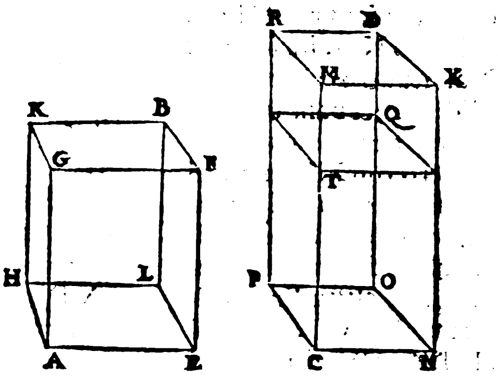
THEOREMA XXIX.

PROPOSITIO XXXIIII.

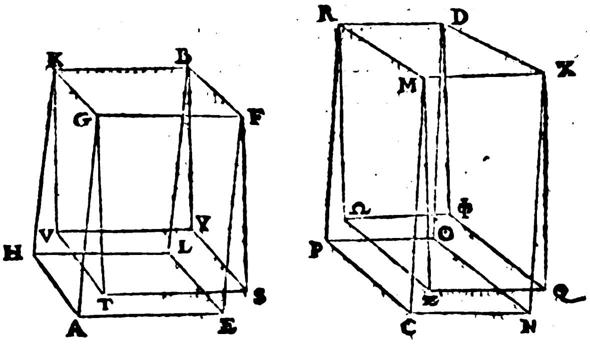
Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.



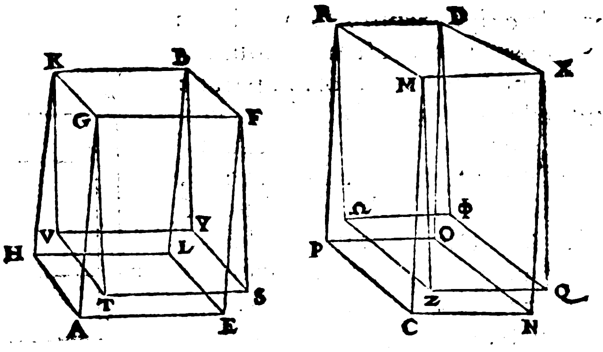
Sint æqualia ſolida parallelepipeda AB CD. Dico ipſorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpõdere: hoc eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Sint enim primũ ſtantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos baſibus ipſorũ. Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. Si igitur baſis EH baſi NP ſit ęqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido CD; erit & CM æqualis ipſi AG. ſi enim baſibus EH NP æqualibus exiſtentibus non ſint AG CM altitudines ęquales, neque AB ſolidum ſolido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis eſt altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis ſit neceſſe eſt; ac propterea vt EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG. ex quibus conſtat ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere. At vero non ſit baſis EH æqualis baſi NP. Sed EH ſit maior. eſt autem & AB ſolidum ſolido CD æquale. ergo maior eſt CM ipſa AG; alioqui rurſus ſequeretur ſolida AB CD æqualia non eſſe, quæ ponuntur ęqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipſi AG: & à baſi quidem NP, altitudine autem CT ſolidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur ſolidum AB ſolido CD eſt æquale, aliud autem aliquod eſt VC, & æqualia ad idem eandem habẽt proportionem; erit vt AB ſolidum
7.quinti.
32.huius. ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. ſed vt AB ſolidum ad ſolidum CV,
25 huius. ita baſis EH ad NP baſim ęquealta enim ſunt AB CV ſolida. Vt autem ſolidum
1.sexti. CD ad ipſum CV, ita MP baſis ad baſim PT, & MC ad CT. & vt igitur baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. eſt autem CT æqualis AG. ergo & vt EH baſis ad baſim NP, ita



NP, ita MC ad AG. quarè ſolidorum parallelepipedorum AG CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Rurſus ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; vt EH baſis ad baſim MP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinē ſolidi AB. Dico ſolidum AB ſolido CD æquale eſſe. Sint enim rurſus ſtātes ad rectos angulos baſibus. & ſi quidem baſis EH ſit æqualis baſi NP, eſtq; vt EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem: erit ſolidi CD altitudo altitudini ſolidi AB æqualis. ſolida autem parallelepepida, quæ ſunt in æqualibus baſibus, & ea- 30.huius.
dem altitudine inter ſe æqualia ſunt. ergo ſolidum AB ſolido CD eſt ęquale. ſed nō ſit EH baſis æqualis baſi NP, & ſit EH maior. maior igitur eſt & ſolidi CD altitudo altitudine ſolidi AB, hoc eſt CM ipſa AG. ponatur ipſi AG æqualis rurſus CT, & ſimiliter ſolidum CV compleatur. Itaque quoniam eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita MC ad ipſam AC; æqualis autem eſt AG ipſi CT: erit vt baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed vt baſis EH ad NP baſim, ita AB ſolidum ad ſolidum CV; æquealta enim ſunt ſolida AB CA. vt autem MC ad CT, ita & MP baſis ad baſim PT, & ſolidum CD ad CV ſolidum & vt igitur ſolidum AB ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. Quòd cum vtrumque ſolidorum AB CD ad ipſum CV eandē proportionē habeat; erit AB ſolidū ſolido CD æquale. quod demonſtrare oportebat.



Non ſint autem ſtātes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos baſibus ipſorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana baſium EH NP ducantur perpēdiculares, quę planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurant & cōpleantur ſolida FVXΩ. Dico & ſic ęqualibus exiſtentibus ſolidis AB CD, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, & vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Quouiam enim ſolidum AB ſolido CD eſt ęquale; ſolido autem AB ęquale eſt ſolidum BT; in eadem namq; ſunt 31.huius.
baſi FK, & eadem altitudine; quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis: & ſolidum DC eſt ęquale ſolido DZ, quòd in eadem ſint baſi XR, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis; erit & ſolidum BT ſolido DZ ęquale. ęqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ip- Ex ante de-
ſorum ſunt ad rectos angulos; baſes altitudinibus ex contraria parte reſpondent. monſtratis.
eſt igitur vt FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. atque eſt baſis quidem FK baſi EH æqualis, baſis vero XR æqualis baſi NP. quare vt EH baſis ad baſim NP, ita eſt altitudo ſolidi DZ ad ſolidi BT altitudinem. eędem autem ſunt altitudines ſolidorum DZ BT, itemq; ſolidorum DC BA. eſt igitur vt EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi DC altitudo ad altitudinem ſolidi AB: ergo ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Rurſus ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex cōtraria parte reſpōdeant altitudinibus: ſitq; vt EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Dico ſolidum AB ſolido CD ęquale eſſe. Iiſdem namque conſtructis,

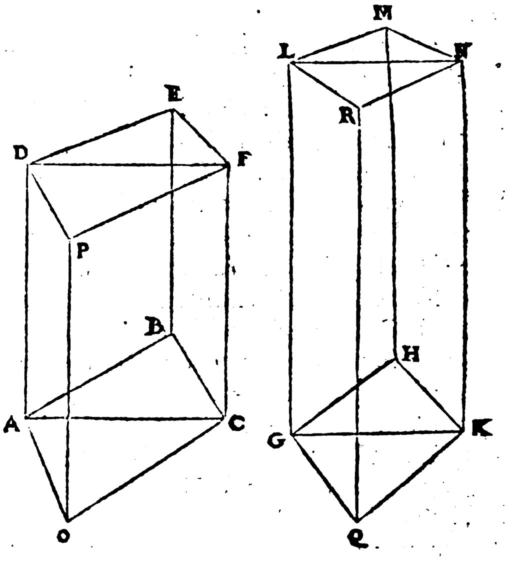


ctis, quoniam vt EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinẽ ſolidi AB;& baſis quidem EH eſt æqualis baſi FK; NP vero ipſi XR: crit vt FK baſis ad baſim XR,ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem.eædẽ autem ſunt altitudines ſolidorum AB CD, & ipſorũ BT DZ. eſt igitur vt FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. quare ſolidorũ BT DZ parallelepipedorũ baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus; quorum autem ſolidorum parallelepipedorum altitudines ſunt ad rectos angulos baſibus ipſorum,& baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.crgo BT ſolidum ſolido DZ eſt æquale. ſed ſolidũ quidem BT ęquale eſt ſolido BA,etenim in eadem ſunt baſi FK,& eadem altitudine,quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis:ſolidum vero DZ eſt æquale ſolido DC, ſi quidem in eadem ſunt baſi XR,& eadem altitudiue ,& non in eiſdem rectis lineis .ergo & ſolidũ AB ſolido CD eſt æquale.quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quę ante dictâ ſunt,illud etiam demonſtrari poteſt.

Aequalium priſmatum & triangulares baſes habentium baſes ex cõtraria partẽ altitudinibus reſpondent:& quorum priſmatum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent,ea inter ſe ſunt ęqualia.



Sint priſmata, quae triangulares baſes habent AF GN inter ſe aequalia. Dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt triangulum ABC ad triangulum GHK,ita eſſe priſmatis GN altitudinem ad altitudinem priſmatis AF. Compleantur enim ſolida parallelepipeda, quę etiam inter ſe ęqualia erũt,cum ſint priſmatum dupla: ęqualium autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent.ergo vt ſolidi parallelepipedi AF baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi GN, hoc eſt vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita eſt ſolidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem. ſolidi parallelepipedi AF.ſed vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum GHK. Vt igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo ſolidi parallelepipedi GN ad altitudinẽ ſolidi parallelepipedi AF, hoc eſt ita priſmatis GN altitudo ad altitudinẽ priſmatis AF.Rurſus priſmatum AF GN baſes ex cõtraria parte reſpondeant altitudinibus,hoc eſt vt triangulũ ABC ad triangulũ GHK,ita ſit priſmatis GN altitudo ad altitudinem priſmatis AF.Dico priſmata AF GN inter ſe aequalia eſſe. compleantur enim rurſus ſolida parallelepipeda,erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ,vt triangulum ABC

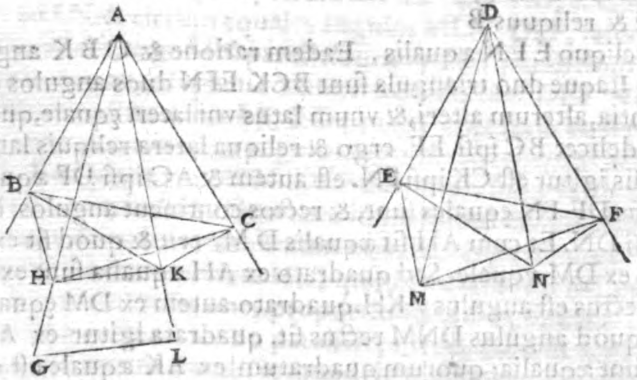
15.quinti,

ad

ad triãgulum GHK. quare vt ſolidi parallelepipedi AF baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi GN, ita erit priſmatis GN altitudo ad altitudinẽ priſmatis AF, hoc eſt, ita ſolidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi AF. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt ęqualia. ergo et ęqualia erunt eorum dimidia. priſma igitur AF priſmati GN eſt ęquale. quod demonſtrare oportebat.

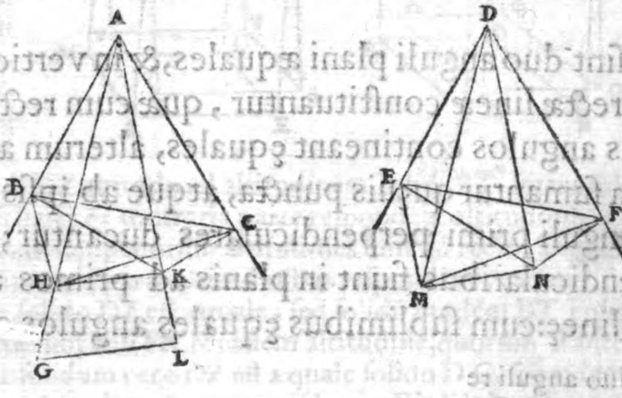
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipſorum ſublimes rectæ lineæ conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant ęquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quęuis puncta, atque ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineę: cum ſublimibus ęquales angulos continebunt.



Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis AD ſublimes rectæ lineæ AG DM conſtituantur, quę cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineat, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & ſumantur in ipſis AG DM quæuis puncta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN, occurrentes planis in punctis L N; & LA ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN ęqualem eſſe. ponatur ipſi DM ęqualis AH, & per H ipſi GL parallela ducatur HK. eſt autem GL perpendicularis ad planum per BAC. ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. 8.huius. Ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale eſt quadratis ex HK KA; 47.primi. quadrato autem ex HA æqualia ſunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC ęquale eſt quadratum 47.primi. ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA ęquale erit: & idcirco angulus HCA eſt rectus. 48.primi. Eadem ratione & angulus DFM rectus eſt. ergo angulus ACH ipſi DFM eſt æqualis. eſt autem & HAC angulus ęqualis angulo MDF. duo igitur triangula ſunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni ęqualium angulorum ſubtenditur; uidelicet HA ipſi DM. 26.primi. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC eſt ęqualis DF. Similiter demonſtrabimus & AB ipſi DE æquale eſſe. iungantur HB ME. Et quoniam quadratum ex AH eſt æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia ſunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed quadratis

dratis ex BK KH æquale eſt ex BH quadratum; rectus enim angulus eſt HKB, propterea
quòd & HK perpendicularis eſt ad ſubiectum planum . quadratũ igitur ex
48.primi. AH æquale eſt quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus eſt. Eadem ratione
& angulus DEM eſt rectus. eſt autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita
26.primi. enim ponitur: atque eſt AH ęqualis DM. ergo & AB ipſi DE eſt æqualis. Quoniam
igitur A C quidem
eſt æqualis DF, AB
vero ipſi DE; erunt
duæ CA AB duabus
FD DE æquales.
Sed & angulus
BAC angulo F D E
4.primi. eſt æqualis . baſis igitur
B C baſi E F, &
triangulum triãgulo,
& reliqui anguli
reliquis ęquales sũt.
ergo angulus ACB
angulo DFE. eſt autem
& rectus ACK
ęqualis recto DFN.
quare & reliquus B



CK reliquo E F N æqualis . Eadem ratione & C B K angulus eſt æqualis angulo
FEN. Itaque duo triangula ſunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales
habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri ęquale, quod eſt ad æquales angulos,
26.primi. videlicet BC ipſi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt.
æqualis igitur eſt CK ipſi FN. eſt autem & AC ipſi DF æqualis. quare duæ AC CK
4.primi. duabus DF FN ęquales ſunt, & rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt æqualis
baſi DN. Et cum AH ſit æqualis D M, erit & quod fit ex A H quadratum quadrato
47.primi. ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia ſunt ex AK KH quadrata; etenim
rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM ęqualia ſunt quadrata ex DN
NM, quòd angulus DNM rectus ſit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN
NM ſunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum
ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt æquale . & ideo recta linea
HK ipſi MN æqualis. quòd cum duæ HA AK duabus MD DN ęquales ſint, altera
alteri, & baſis HK baſi NM oſtenſa ſit ęqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis
8.primi. erit. quod oportebat demonſtrare.

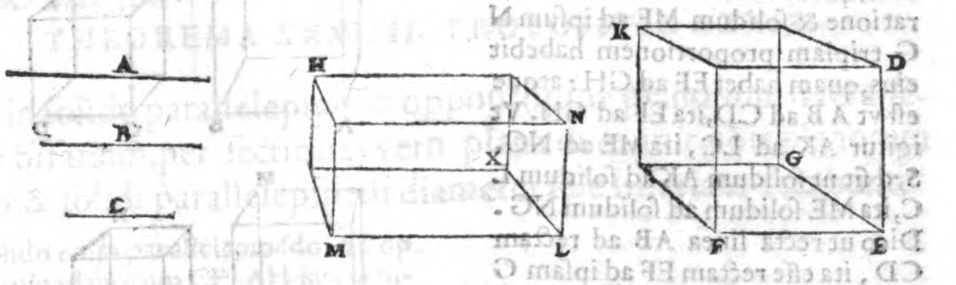
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quę cum rectis lineis à principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quę ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducantur, inter ſe ęquales eſſe.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectę lineę proportionales ſint, ſolidum parallelepipedũ, quod à tribus fit ęquale eſt ſolido parallelepipedo, quod fit à media, ęquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

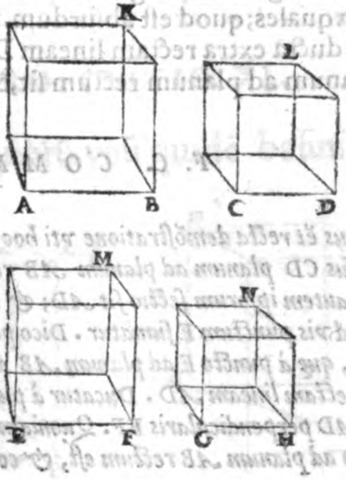
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, ſitq́; vt A ad B, ita B ad C. Dico ſolidum, quod fit ex ipſis ABC æquale eſſe ſolido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur ſolidus angulus ad E contentus tribus an-



gulis planis DEG GEF FED; & ipſi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipſarum DE GE EF, & ſolidum parallelepipedum EK compleatur: ipſi vero A ponatur ęqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipſa L conſtituatur angu 26. huius.
lo ſolido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipſi quidē B æqualis LX, ipſi vero C æqualis LN. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem eſt A ipſi LM, & B vnicuique ipſarum LX EF EG ED, & C ipſi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum ęquales angulos MLN DEF, latera ex cō
traria parte ſibi ipſis reſpondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo 14. ſexti.
DF eſt æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales ſunt DEF NLM, & in ipſis ſublimes rectæ lineæ conſtituuntur LX EG ęquales inter ſe, & cum rectis li
nes à principio poſitis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendi Ex ante-
culares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter ſe æquales. er cedenti.
go ſolida LH EK eadem ſunt altitudine. Quæ vero in ęqualibus baſibus ſunt ſoli- 31. huius.
da parallelepipeda, & eadem altitudine inter ſe ſunt æqualia. ergo ſolidum HL æquale eſt ſolido EK: atque eſt ſolidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, ſolidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectę lineę proportionales ſint, ſolidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale eſt ſolido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, ęquiangulo autem antedicto. quod demonſtrare oportebat.

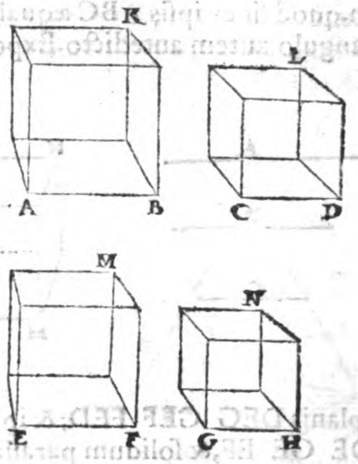
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXVII.

Si quattuor rectę lineæ proportionales ſint, & quæ ab ipſis fiūt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. Et ſi quę ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta ꝓportionalia ſint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



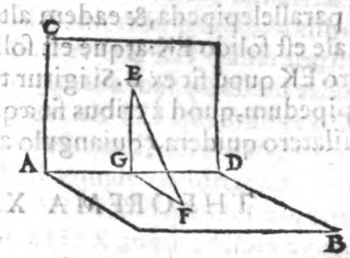
Sint quattuor rectę lineę proportionales AB CD EF GH, ſitque vt AB ad CD, ita EF GH, & deſcribātur ab ipſis AB CD EF GH ſimilia & ſimiliter poſita ſolida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico vt KA ad LC, ita eſſe ME ad NG. Quo-

33.huius. niam enim ſolidum parallelepipedum KA ſimile eſt ipſi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadẽ ratione & ſolidum ME ad ipſum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque eſt vt AB ad CD, ita EF ad GH. Vt igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed ſit ut ſolidum AK ad ſolidum LC, ita ME ſolidum ad ſolidum NG. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH. Quoniam enim rurſus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint & reliqua. quod oportebat demonſtrare.



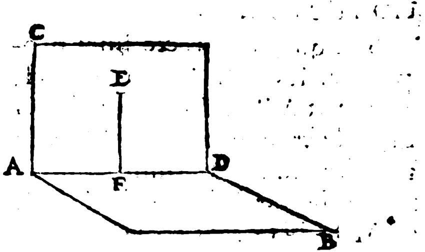
THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum ſit, & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum ſectionem cadet.



Planum enim CD ad planum AB rectum ſit; cõis aũt eorum ſectio ſit AD; & in ipſo CD plano quod uis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AD. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iũgatur. qm̃ igitur FG plano CD eſt ad rectos angulos; contingit autem ipſam recta linea EG, quæ eſt in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. ſed & EF plano AB ad rectos angulos eſt. rectus igitur eſt angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis ſunt æquales; 37.primi. quod eſt abſurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipſam cadat neceſſe eſt. Si igitur planum ad planum rectum ſit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

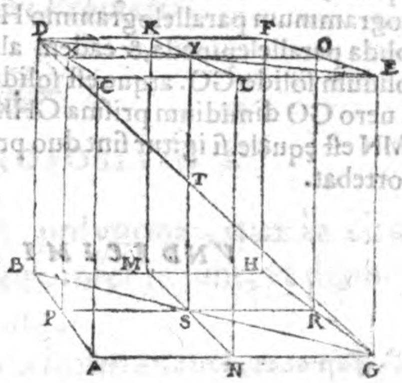
F. C. COMMENTARIVS.



Poſſumus ẽt recta demõſtratione vti hoc modo. Sit rurſus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipſorum ſectio ſit AD; & in plano CD quod vis punctum E ſumatur. Dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipſam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum eſt, & commu *ni planorum ſectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta eſt EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum ſectionem AD cadit. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIX.

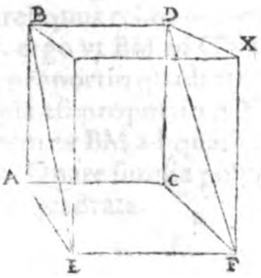
Si in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecētur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur, cōis planorum ſectio, & ſolidi parallelepipedi diameter ſeſe bifariam ſecabunt.

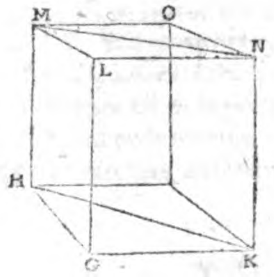


In ſolido enim parallelepipedo AF op
poſitorum planorum CF AH latera bi-
fariā ſecentur in punctis KLMNXPOR.
& per ſectiones plana ducantur KN XR
communis autem planorum ſectio YS,
& ſolidi parallelepipedi diameter ſit D
G. Dico YS DG ſe ſe bifariam ſecare,
hoc eſt YT quidem ipſi TS DT vero ip
ſi TG æqualem eſſe. Iungantur enim D
Y YE BS SG. Quoniam igitur DX pa
rallela eſt ipſi OE, alterni anguli DXY 29 primi.
YOE inter ſe ęquales ſunt. Et quoniam
DX quidem eſt æqualis OE XY vero ip
ſi YO, & angulos ęquales continent; erit 4. primi.
baſis DY ęqualis baſi YE, & triangulum
DXY triangulo YOE, & reliqui anguli
reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD eſt æqualis angulo OYE, & ob id re- 14. primi.
cta linea eſt DYE. Eadem ratione & BSG recta eſt. atque eſt BS ęqualis SG. Et quo-
niā CA ipſi DB ęqualis eſt & parallela, ſed CA eſt æqualis & parallela ipſi EG; erit 9. huius.
& DB ipſi EG æqualis & parallela & ipſas coniungūt rectę lineæ DE GB. parallela 33 primi.
igitur eſt DE ipſi BG. & ſumpta ſunt in vtraque ipſarum quæuis puncta DYGS, &
iunctæ ſunt DG YS, ergo DG YS in vno ſunt plano. Quod cum DE ſit parallela B 7. huius.
G, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim ſunt. eſt autem & DTY 29. primi.
angulus æqualis ipſi GTS. duo igitur ſunt triangula DTY GTS duos angulos duo 15. primi.
bus angulis ęquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni ęqualium
angulorum ſubtenditur, uidelicet DY ipſi GS: dimidia enim ſunt ipſorum DE BG.
ergo & reliquos augulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem eſt 26. primi.
æqualis TG, YT uero ipſi TS. Si igitur in ſolido parallelepipedo, & reliqua. quod
oportebat demonſtrare.

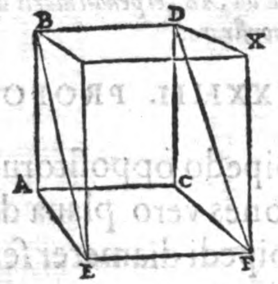
THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

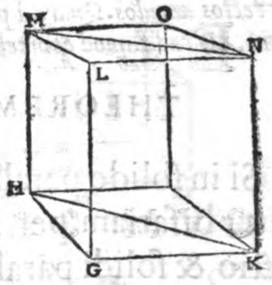
Si ſint duo priſmata æquealta, quorū vnū quidē baſim habeat parallelogrāmū, alterum vero triangulū, & parallelogrammū duplum ſit trianguli; ea inter ſe ęqualia erunt.





Sint priſmata æquealta ABCDEF GHKLMN, &





unum quidem baſim habeat parallelogrammum AF, alterum uero GHK triangulum,& duplum ſit AF parallelogrammũ triãguli GHK.Dico priſma ABCDEF priſmati GHKLMN ęquale eſſe. compleãtur enim AX GO ſolida. Et quoniam parallelogrãmum AF trianguli G HK eſt duplum;eſt autem & HK parallelogrammum duplum triãguli GHK;erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ uero in æqualibus ſunt baſibus ſolida parallelepipeda,& eadem altitudine inter ſe æqualia ſunt. ęquale igitur AX ſolidum ſolido GO. atque eſt ſolidi quidem AX dimidium ABCDEF priſma, ſolidi uero GO dimidium priſma GHKLMN.ergo ABCDEF priſma priſmati GHKLMN eſt ęquale.ſi igitur ſint duo priſmata ęquealta,& reliqua.quod demonſtrare oportebat.

9.huius.

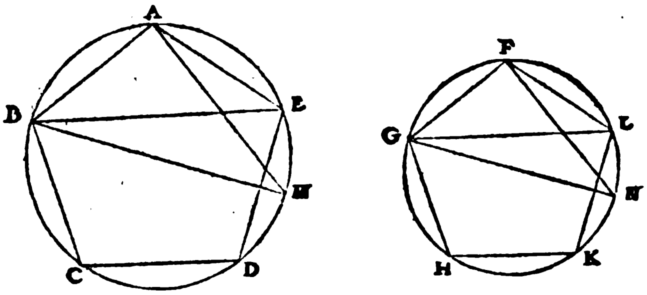
VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER DVODECIMVS
ET SOLIDORVM SECVNDVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
ET COMMENTARIIS.
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SIMILIA polygona, quæ in circulis deſcribuntur, inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipſis ſimilia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum ſint BM GN. Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita eſſe ABCDE polygonum ad polygonum F G H K L. Iungantur enim BE AM GL FN. Et quoniam polygonum A B C D E ſimile eſt polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL eſt æqualis: atque eſt ut B A ad A E, ita G F ad F L. duo igitur triangula ſunt BAE GFL vnum angulum vni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL: circa ęquales autẽ angulos latera proportionalia. quare triangulum A B E triangulo FGL ęquiangulum eſt; ac propterea angulus AEB æqualis eſt angulo F LG. Sed angulus quidem A E B angulo A MB eſt æqualis; in eadem enim circumferentia conſiſtũt. angulus autem FLG æqualis eſt angulo FNG. ergo & AMB angulus eſt æqualis angulo FNG. eſt autem & rectus angulus B A M æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo ęqualis. æquiangulum igitur eſt triãgulum AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. Sed proportionis quidem BM ad GN dupla eſt proportio quadrati ex BM ad quadratũ ex GN; proportionis vero BA ad GF dupla eſt proportio A B C D E polygoni ad polygonum FGHKL: & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum AB CDE ad FGHKL polygonum. Quare ſimilia polygona, quæ in circulis deſcribuntur, inter ſe ſunt, vt diametrum quadrata.



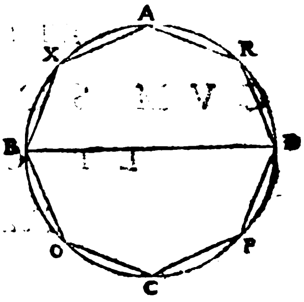
21. tertii.

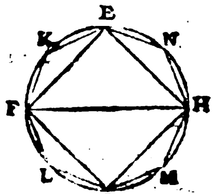
31. tertii.

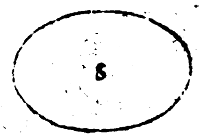
THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Circuli inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata.

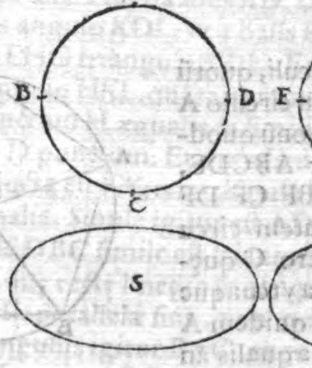






Sint circuli ABCD EFGH: diametri autem ipſorũ ſint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita eſt; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod ſit S: & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. Itaque deſcriptum in circulo quadratum A maius eſt dimidio circuli EFGH; quoniam ſi per puncta EFGH contingentes circulum ducamus; erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH maius eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis KLMN: & EK KF FL LG GM MH HN NE iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE maius eſt dimidio portionis circuli in qua conſiſtit, quoniam ſi per pũcta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę ſunt in rectis lineis EF FG GH HE cõ- B pleamus; erit vnumquodque triãgulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt: ſed portio minor eſt parallelogrammo. quare vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE maius eſt dimidio portionis circuli, in qua conſiſtit. reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & iungentes rectas lineas: atque hoc ſemper facientes relinquemus tandẽ quaſdã circuli portiones, quę minores erũt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis ſi à maiori auferatur maiuſquã dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rurſus maiuſquàm dimidium, & hoc ſemper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquam, quę minori magnitudine expoſita ſit minor. Itaque relictæ ſint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ maiores ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpacium C ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit ſpacio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. Ex antecedenti. eſt igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita 11.quinti. ABCD circulus ad ſpacium S. ergo & vt circulus ABCD ad ſpacium S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipſo eſt, ita ſpacium S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem eſt circulus ABCD eo, quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpacium S maius eſt polygono EKFLGMHN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpacium aliquod minus circulo EFGH. ſimiliter oſtendemus neque eſſe vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD. Dico igitur neque eſſe vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpacium maius circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius ſpaciũ S. erit igitur conuertendo ut quadratum ex FH ad quadratum eſt BD, ita ſpacium S ad ABCD circulum. ſed vt ſpacium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, vt demonſtrabitur. ergo & vt quadratum

ex



ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Nō igitur vt quadratum ex BD ad quadratū ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.

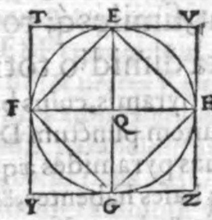
LEMMA

Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH, eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. Dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. Quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFGH, ita ABCD circulus ad ſpacium T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciū S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH] A



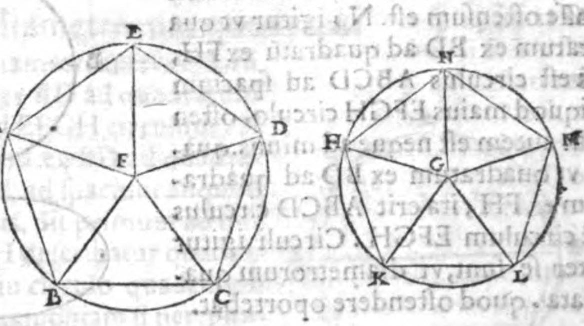
Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH puncta rectis lineis, quae circulum contingant, vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſe ſe in puncto Q ſecantes, quae circuli diametri erunt: atque erit Q circuli cētrum. angulus igitur QEV eſt rectus. 18. tertij. *ſed & rectus EQH; ſi quidē duae FQ QE aequales ſunt duabus HQ QE; & baſis EF aequalis baſi EH. ergo angulus FQE angulo HQE eſt aequalis:* 8. primi. *& ob id vterque rectus. ex quibus ſequitur* 28. primi. *rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelae ipſi EQG: & inter ſe ſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. Quòd cum FQ ſit aequalis QH, erit ēt TE ipſi EV aequalis: ideoq; TV eſt dupla ipſius TE.* 34. primi. *ſimiliter demonſtrabimus & TY ipſius TF duplam. cumq; TY TV aequales ſint, erunt & earum dimidiae FT TE equales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplū erit. ſimiles enim rectilineae figurę in dupla ſunt proportione homologorū laterū.* Cor. 20 sexti. *ſed quadratū ex EF eſt aequale quadratis ex FT TE,* 47. primi. *quae quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare.*

Erit vnumquodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt] B *Ex 41 primi.*

SCHOLIVM.

Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. C

In dato circulo, deſcripto in circulo polygono ſimile polygonum deſcribere.



Sint duo circuli, quorũ centra F G, & in circulo A B C D E polygonũ quodduis deſcribatur ABCDE, iũgãturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quędam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem A F B cõſtituatur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cõſtituatur. ergo reliquus AFE reliquo HGN eſt æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. eſt autem vt A F ad F B, ita HG ad GK; ſimilia enim ſunt AFB LGK triangula, quod oſtenſum eſt in theoremate ſexto ſexti libri elementorum. Vt igitur ſemidiameter circuli ad circuli ſemidiametrum, ita BA ad HK. ſimiliter oſtendemus & vnamquamque ipſarũ BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sũt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales ſunt. polygona igitur ABCDE HKLMN ſingulos angulos ſingulis angulis æquales habẽt: & circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE ſimile eſt polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE ſimile polygonum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.

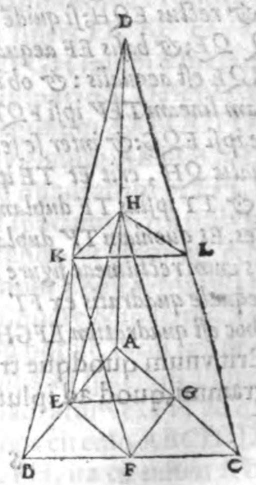
23.primi.

4.sexti.

1. diffi. tertia

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens baſim diuiditur in duas pyramides, æquales & ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimilesq́; toti; & in duo priſmata ęqualia, quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt maiora.



Sit pyramis, cuius baſis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangularesq́; baſes habentes, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia; & duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe maiora. ſecentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem eſt ęqualis EB, AH vero ipſi HD; erit EH ipſi DB parallela. Eadem ratione & HK eſt parallela ipſi AB. parallelogrammum igitur eſt HEBK. quare HK eſt æqualis EB. Sed EB ipſi A E eſt æqualis. ergo & A E ipſi H K æqualis erit. eſt autẽ & AH æqualis HD. duę igitur AE AH duabus KH HD æquales ſunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis angulo KHD. baſis igitur E H baſi K D eſt ęqualis. quare triangulum AEH æquale eſt & ſimile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD ęquale eſt & ſimile. Et quoniam duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes EH HG duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KD DL parallelæ ſunt, non autem in eodẽ plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG eſt æqualis angulo KDL.

2.sexti.

34.primi.

29.primi.

4.primi.

10.undecimi

KDL. Rurſus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales ſunt, altera alteri, & angulus EHC eſt æqualis angulo KDL; erit baſis EG baſi KL æqualis 4. primi. æquale igitur eſt & ſimile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum eſt æquale & ſimile triangulo HKL. quare pyramis, cuius baſis quidē eſt AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis eſt triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipſi AB parallela ducta eſt HK; erit triãgulũ ADB triãgulo DHK ęquiãgulũ, & latera habēt proportionalia. Simile igitur eſt ADB triãgulũ triãgulo DHK: & eadē ratione triangulũ quidē DBC ſimile eſt triangulo DKL; triangulũ vero ADC triangulo DHL. quòd cùm duę rectę lineę ſe ſe tangentes BA AC duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus KH HL parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL eſt æqualis: atque eſt ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum ſimile eſt triangulo HKL; 10. undecimi. ideoq; pyramis, cuius baſis quidem triangulum ABC, uertex autem pũctum D ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum HKL, & uertex pũctum D. ſed pyramis cuius baſis quidem HKL triangulum, uertex autem punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cuius baſis triangulum AEG, & uertex H punctum. Quare & pyramis cuius baſis triangulum ABC & uertex punctum D ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis AEG triangulum, & uertex punctum H. Vtraque igitur ipſarum AEGH HKLD pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF eſt ęqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triãguli GFC. A & quoniam duo priſmata æquealta ſunt, quorum vnum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, eſtq; parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea priſmata B inter ſe æqualia. ergo priſma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrãmis EBFG EBKH KHFG eſt ęquale priſmati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifeſtum eſt vtrumque ipſorum priſmatum, & cuius baſis eſt EBGF parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea: & cuius baſis eſt GFC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum KLH, maius eſſe vtraque pyramidum, quarum baſes quidem AEG HKL triangula, uertices autem puncta H D; quoniam ſi iungamus EF EH rectas lineas, priſma quidem, cuius baſis eſt EBFG parallelogrammum, & oppoſita ipſi recta linea HK maius eſt pyramide, cuius baſis EBF triangulum, uertex autem punctum K. ſed pyramis, cuius baſis triangulum EBF, & uertex K punctũ C eſt æqualis pyramidi, cuius baſis AEG triangulum, & uertex punctum H; ęqualibus enim & ſimilibus planis continentur. 10. diffi. undecimi. quare & priſma, cuius baſis parallelogrammũ EBFG, oppoſita autē ipſi recta linea HK maius eſt pyramide, cuius baſis AEG triãgulum, & uertex punctum H. priſma verò cuius baſis parallelogrammum EBFG & oppoſita ipſi recta linea HK eſt ęquale priſmati, cuius baſis GFC triangulum, & ipſi oppoſitum triangulum HKL: & pyramis cuius baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt æqualis pyramidi, cuius baſis HKL triangulum & uertex pũctũ D. ergo duo priſmata de quibus dictũ eſt, ſunt maiora duabus dictis pyramidibus quorũ baſes triãgula AEG HKL, uertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius baſis ABC triangulum, uertex autem punctum D, diuiſa eſt in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti: & in duo priſmata æqualia; ſuntq; duo priſmata dimidio totius pyramidis maiora. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

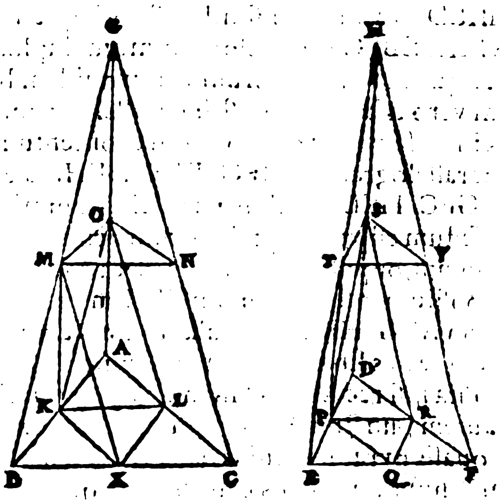
A Et quoniam BF eſt æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC] *Iuncta enim EF quoniam BF eſt aequalis FC, & EG parallela ipſi BC, erit triangulum* 28. primi. *BEF aequales triãgulo FGC. ſed parallelogrammum EBFC duplum eſt trianguli BEF. ergo & ipſius FGC trianguli duplum erit.* 41. primi.

B Erunt in priſmata inter ſe æqualia] *Ex vlt. vndecimi libri.*

C. Priſma quidē cuius baſis eſt EBFG parallelogrāmū. & oppoſita ipſi recta linea H K, maius eſt pyramide, cuius baſis EBF triangulum, vertex autem pūctum K, *velut totum eſt ſua parte maius; eſt enim pyramis ipſius priſmatis pars quędam. ſed inferius ex iis, quae in 7 huius demonſtrantur, apparebit tertiam partē eſſe, cum ſit tertia pars priſmatis, cuius baſis G FC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum KLH.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si ſint duę pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habeant, diuidatur autem vtraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſq; toti, & in duo priſmata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in vna pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.



Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habeāt ABC DEF, uertices autem ſint pūcta GH, & diuidatur vtraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſq; toti, & in duo priſmata ęqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuiſa intelligatur: atq; hoc ſēper fiat. Dico vt ABC baſis ad baſim DEF ita eſſe priſmata oīa, quę ſunt in pyramide ABC ad priſmata omnia, quæ in pyramide DEF multitudine ęqualia. Quoniam enim BX quidem eſt æqualis XC,
2.sexti. AL vero ęqualis LC; erit XL ipſi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC ſimile. Eadem ratione & triangulum DEF ſimile eſt triangulo RQF. Et quoniam BC quidem eſt dupla CX; EF vero dupla ipſius FQ, vt BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & deſcripta ſunt ab ipſis BC CX ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ABC LXC; ab ipſis vero EF FQ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea DEF RQ
22.sexti. F. eſt igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. ſed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita priſma cuius baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma cu-
11.quinti. ius baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY. & ut igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita priſma, cuius baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma, cuius baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY. Et quoniam duo priſmata, quæ in pyramide ABCG inter ſe ęqualia ſunt, ſed & quæ in pyramide DEFH priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma, cuius baſis parallelogrammum KLXB, oppoſita uero ipſi recta linea MO ad priſma cuius baſis LXC triangulum, & oppoſitum ipſi OMN, ita priſma cuius baſis parallelogrammum EPRQ & oppoſita ipſi recta liuea ST ad priſma cuius baſis RQF triangulum, oppoſitum uero ipſi STY. quare cōponēdo vt priſmata KBXLMO LXCMNO ad priſma LXCMNO, ita priſmata PEQRST RQFSTY ad priſma RQFSTY. & permutando ut priſmata KBXLOMN LXCOMN ad priſmata PEQRST RQFSTY; ita priſma LXC

MNO

MNO ad priſma RQFSTY. Vt autem priſma LXCMNO ad priſma RQFSTY, ita oſtenſa eſt baſis LXC ad RQF baſim, & ABC baſis ad baſim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triãgulum DEF, ita quę in pyramide ABCG duo priſmata ad duo priſmata, quæ in pyramide DEFH. ſimiliter autẽ & ſi factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN baſis ad baſim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo priſmata ad duo priſmata, quæ in pyramide STYH. ſed ut OMN baſis ad baſim STY, ita baſis ABC ad DEF baſim. & ut igitur ABC baſis ad baſim DEF, ita quę in pyramide ABCG duo priſmata ad duo priſmata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo priſmata ad duo priſmata, quę in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem oſtendentur & in factis priſmatibus ex diuiſione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium ſimpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita eſſe priſma, cuius baſis triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma, cuius baſis RQF triangulum, & oppoſitum ipſi STY, hoc modo oſtendemus.

In eadẽ enim figura intelligãtur ab ipſis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorũ plana, quę inter ſe ęquales erunt; propterea quod pyramides ipſæ ęquealtę ponuntur. Et quoniam duę rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta ſecantur à parallelis planis ABC OMN, in eaſdem proportiones ſecabuntur. & ſecatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G 17. undecimi. ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam ſecabitur à plano OMN. Eadẽ ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam ſecabitur. & ſunt æquales perpendiculares, quę ab ipſis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quę à triangulis OMN STY ad ipſa ABC DEF perpendiculares ducuntur. ęquealta igitur ſunt priſmata, quorum baſes triangula LXC RQF. oppoſita autem ipſis OMN STY. quare & ſolida parallelepipeda, quæ à dictis priſmatibus deſcribuntur ęquealta, inter ſe ſunt ut baſes, & eorũ dimidia ut LXC baſis ad baſim RQF, ita inter ſe dicta priſmata erũt. quod demonſtrare oportebat. 15. quinti.

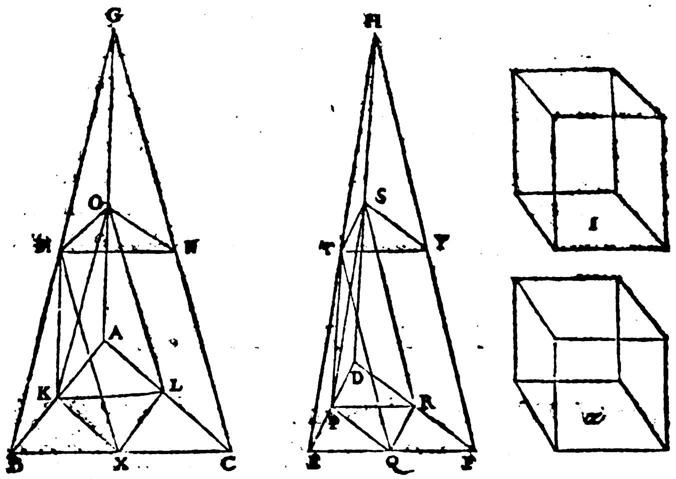
F. C. COMMENTARIVS.

Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita priſma cuius baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma cuius baſis RQF triãgulum & oppoſitum ipſi STY] *Hoc ẽt cõſtare põt ex corollario, quod nos ad 32 vndecimi conſcripſimus.*

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Pyramides, quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent, inter ſe ſunt vt baſes.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum baſes quidem triãgula ABC DEF, uertices autem puncta G H. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ſic eſſe pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita ſit, erit ut ABC baſis ad baſim DEF, ſic ABCG pyramis, uel ad ſolidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Sit primum ad ſolidum minus, ſitq; Z: & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia. ſunt igitur duo priſmata dimidio totius pyramidis maiora. & rurſus pyramides ex diuiſione factæ ſimiliter diuidantur, atque hoc ſemper fiat, quo ad ſumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, de DEFH, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis DEFH ſolidum Z ſuperat. Itaque ſumantur, & ſint exempli cauſſa pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in



Ex ante-cedenti.

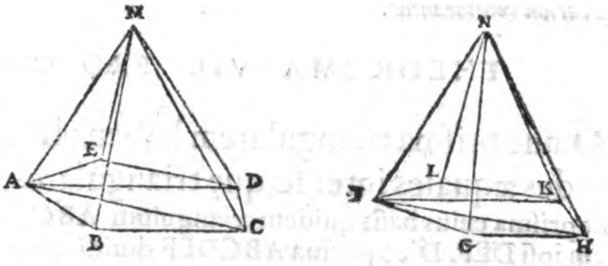
pyramide DEFH priſmata ſolido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes ſimiliter pyramidi DEFH. ergo vt ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quæ in pyramide DEFH; ſed vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramis ABCG ad ſolidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad priſmata, quæ in ipſa ſunt, ita ſolidum Z ad priſmata, quę in pyramide DEFH. maior autem eſt pyramis ABCG priſmatibus, quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide DEFH eſt maius. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad ſolidum aliquod minus pyramide DEFH. ſimiliter oſtendemus neque ut DEF baſis ad baſim ABC, ita eſſe pyramidem DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque eſſe vt ABC baſis ad baſim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod ſolidū maius pyramide DEFH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad maius, uidelicet ad ſolidum I. erit igitur conuertendo vt DEF baſis ad baſim ABC, ita ſolidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem ſolidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime oſtenſum fuit. & ut igitur DEF baſis ad baſim ABC, ita pyramis DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. quod eſt abſurdum. non igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt ABCG pyramis ad ſolidum aliquod maius pyramide DEFH. oſtenſum autem eſt, neque ad minus. quare vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent inter ſe ſunt vt baſes. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem ſunt altitudinę, & multiangulas baſes habent, inter ſe ſunt, vt baſes.

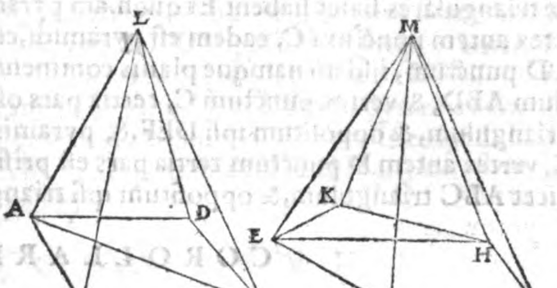
Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas baſes habeant ABCDE FGHKL: uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; baſis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ ac pyramides, quę à principio. Quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangulum

Ex antecedente.



lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyramidẽ ACDM: & componendo ut ABCD trapeziũ ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidẽ ACDM. ſed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex ęquali ut ABCD baſis ad baſim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADFM: & rurſus componendo ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem ratione & ut FGHKL baſis ad baſim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides ſunt ADEM FKLN, quæ triangulares baſes habent & eadem ſunt altitudine; erit ut ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidem FKLN. Quòd cũ ſit ut ABCDE baſis ad baſim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidẽ ADEM; ut aũt ADE baſis ad baſim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidẽ FKLN: erit ex ęquali ut baſis ABCDE ad FKL baſim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. ſed et ut FKL baſis ad baſim FG HKL, ita erat et FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rurſus ex ęquali ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſt ABCDEM pyramis ad pyramidẽ FGHKLN. Pyramides igitur, quæ eadem ſunt aititudine, et multiangulas baſes habent inter ſe ſunt, ut baſes. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.



Idem etiam demonſtrabitur, ſi baſes inęqualibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides aequealtae ABCDL EFGHKM, ſitq́ pyramidis ABCDL baſis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM baſis ſit pentagonum EEGHK, & vertex L. Dico vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Iungantur AC EG EH. erit quadrilaterum ABCD diuiſum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuiſum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligantur ab vnoquoque triangulo pyramides aequealtę primis pyramidibus. Et quoniam eſt ut triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonſtrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita eſſe pyramidem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita eſt pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. quare ex ęquali vt quadrilaterum EFGH ad triaugulum EHK, itn eſt pyramis EFGHM ad piramidem EHKM: & rurſus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM: conuertendoq́ vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulom ACD ad triangnlum EHK, ita eſt pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem ut quadrilaterum ABCD ad triangulũ ACD ita pyramis AB CDL ad pyramidem ACDL. Ex antecedenre.

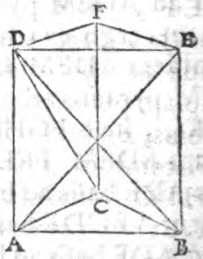
Quare rurſus ex ęquali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis A Ex autecedenti.

BCDL

BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonſtrabitur, quotcumque lateribus baſes earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne priſma triangularem habens baſim diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, quę triangulares baſes habent.



Sit priſma cuius baſis quidem triangulum ABC, oppoſitũ autem ipſi DEF. Dico priſma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes. Iungantur enim BD EC CD. Et quoniam parallelogrammum eſt ABED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD ęquale. ergo pyramis cuius baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EDB triangulum & vertex punctum C. Sed pyramis cuius baſis EDB triangulum & vertex punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijſdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius baſis triangulũ ABD, vertex autem punctũ C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EBC triangulum, & vertex pũctum D. Rurſus quoniam FCBE parallelogrammum eſt, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE eſt ęquale. ergo & pyramis, cuius baſis BEC triangulum, vertex autem punctum D æqualis eſt pyramidi, cuius baſis triãgulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius baſis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D oſtenſa eſt æqualis pyramidi, cuius baſis triãgulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius baſis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis eſt pyramidi cuius baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. Priſma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter ſe ęquales, quæ triangularęs baſes habent. Et quoniam pyramis, cuius baſis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem eſt pyramidi, cuius baſis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijſdem namque planis continentur: pyramis aũt, cuius baſis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars oſtenſa eſt priſmatis, cuius baſis ABC triangulum, & oppoſitum ipſi DEF. & pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum DEF.

34 primi.

5. huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualẽ; quoniam etiam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandẽ, diuiditur in priſmata, quę triangulares baſes habent, & quę ipſis opponuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus ſequitur priſmata omnia, quę eadem ſunt altitudine inter ſe eſſe, vt baſes: ſunt enim ea pyramidum eiuſdẽ altitudinis tripla.

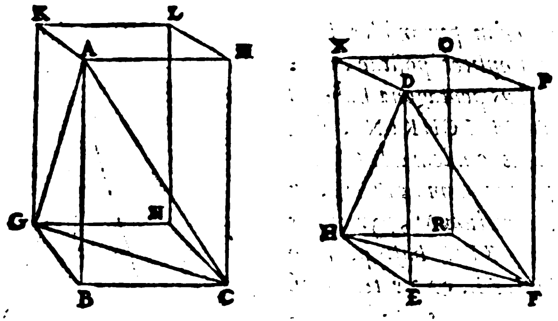
Sed & hęc uera ſunt, quę nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum propoſitione. XX. & XXI.

Priſmata omnia, & pyramides, quę in eiſdem, vel ęqualibus baſibus conſtituuntur eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines.

Et inſuper priſmata omnia & pyramides inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quę triangulares baſes habent in tripla sũt proportione homologorum laterum.



Sint ſimiles, & ſimiliter poſitæ pyramides, quarum baſes quidem triangula ABC DEF, vertices autem GH puncta. Dico ABCG pyramidẽ ad pyramidem DEFH triplam proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleãtur enim BGML EHPO ſolida parallelepipeda. Et quoniam pyramis AB
CG ſimilis eſt pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angu- 9. diffi. Vndecimi.
luſq; GBC ęqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque eſt vt AB
ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur eſt vt AB ad DE, ita BC ad 1. diffi. ſexti.
EF, & circum æquales angulos latera ſunt proportionalia, parallelogrammum BM
parallelogrammo EP ſimile erit. Eadem ratione & parallelogrammum BN ſimile
eſt parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipſi EX parallelogrãmo. Tria
igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER ſunt ſimilia. Sed tria qui- 24. Vndecimi.
dem MB BK BN tribus oppoſitis ęqualia, & ſimilia ſunt, tria vero EP EX ER tri-
bus oppoſitis ęqualia, & ſimilia. quare ſolida BGML EHPO ſimilibus planis & nu-
mero æqualibus continentur; ac propterea ſimile eſt BGML ſolidum ſolido EHP
O. Similia autem ſolida parallelepipeda in tripla ſunt proportione homologorum
laterum. ergo ſolidum BGML ad ſolidum EHPO triplã habet proportionem eius,
quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. ſed vt BGML ſolidum
ad ſolidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim ſexta
pars eſt ipſius ſolidi, cum priſma quod eſt dimidium ſolidi parallelepipedi, ſit pyra-
midis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplam proportio-
nem habebit eius, quam BC habet ad EF.

COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt, & ſimiles pyramides, quæ multiangulas baſes habent inter ſe eſſe in tripla proportione homologorum laterum. ipſis enim diuiſis in pyramides triangulares baſes habẽtes, quoniam & ſimilia polygona, quæ ſunt in baſibus in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens baſim ad pyramidem in altera triangularem baſim habentem, ita & omnes pyramides in pyramide altera triãgulares habentes baſes ad omnes in altera triangulares baſes habentes; hoc eſt ita pyramis ipſa multiangulam habens baſim ad pyramidem, quæ multiangulam baſim habet. Sed pyramis triangularem habens baſim ad py-

ramidem

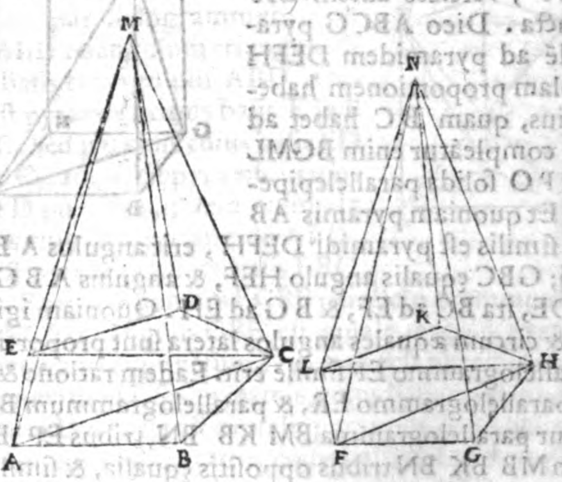
ramidem,quæ triangularem baſim habet eſt in tripla proportione homologorum laterum.& pyramis igitur multiangulam habes baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologam habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint enim pyramides ſimiles & ſimiliter poſitae, quae pro baſibus pentagona habeant ABCDEM FGHKLN, ſitq; pyramidis quidem ABCDEM baſis pentagonum ABCDE, & uertex punctum M, pyramidis vero FGHKLN baſis pentagonum FGHKL, & vertex N pũctum, & ſit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidẽ ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC CE FH HL. & quoniam polygona ſimilia in ſimilia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erit triãgulum ABC ſimile triangulo FGH, triangulumq; ACE triangulo FHL ſimile, & triangulum CDE triangulo HKL. eſt autem ob pyramidum ſimilitudinem triangulum AMB ſimile triangulo FNG. quare vt MA ad AB, ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH. ex aequali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH. non aliter demonſtrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC ſimile eſt triangulo NFH. eſt autem & triangulum MBC ſimle triangulo NGH ob ſimilitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC & vertex M punctum, ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum FGH, & vertex punctum N: quippe quod ſimilibus triangulis contineantur. Eadem ratione demonſtrabitur pyramis ACEM ſimilis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. ſed pyramis quidem ABCM ad pyramidem FGHN triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc eſt quam AB habet ad FG, eſt enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutãdo vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis autem CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK, hoc eſt quam AB ad FG. Quoniã enim vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex aequali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam conſequentium, hoc eſt pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, hoc eſt ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonſtrare oportebat.

20. sexti.

9. diff. und.



COROLLARIVM.

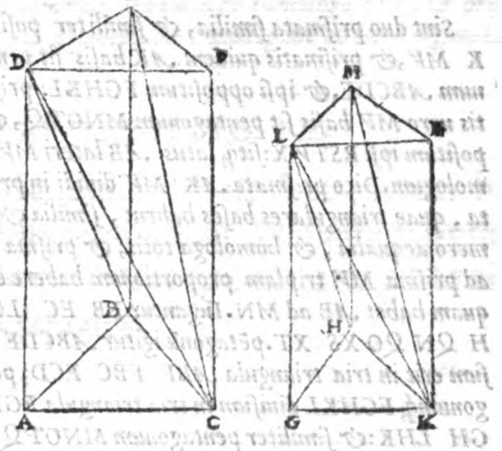
Ex his colligitur pyramides ſimiles, quæ multiangulas baſes habent diuidi in pyramides triangulares baſes habentes ſimiles, & numero æquales & homologas totis.

Sed

Sed quod Euclides demonſtrauit in pyramidibus ſimilibus, nos etiam in ſimilibus priſmatibus demouſtrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonſtratū ſit priſmata ſimilia, quae triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonſtrare in hunc modum.

THEOREMA I.

Priſmata ſimilia, quæ triangulares baſes habēt in pyramides ſimiles, numeroq́; ęquales diuiduntur, & priſma ad priſma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint priſmata ſimilia, & ſimiliter poſita AE GM & priſmatis quidem AE baſis ſit triāgulum ABC, & quod ipſi opponitur triangulum DEF: priſmatis vero GM baſis ſit GHK triangulum & oppoſitum ipſi LMN: ſitq́; latus AB lateri GH homologum. Dico priſmata AE GM diuidi in pyramides ſimiles, numeroq́; aequales, & priſma AE ad priſma GM triplā habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonſtratis priſma AE diuiſum in tres pyramides ęquales inter ſe, & priſma GM ſimiliter diuiſum in totidem pyramides aequales, quae pyramidibus priſmatis AE ſimiles erunt. Quoniam enim ob priſmatum ſimilitudinem parallelogrammum ABED ſimile eſt parallelogrammo GHML, erit vt DA ad AB, ita LG ad GH: atque eſt angulus DAB ęqualis aagulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG eſt ſimile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quae ſunt parallelogrammorum dimidia alijs triangulis, quibus reſpondent ſimilia demonſtrabuntur. Et quoniam vt DC ad CA, ita eſt LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH: erit ex aequali ut DC ad CB, ita LK ad LH. Et ſimiliter demonſtrabitur vt DE ad BC, ita eſſe LH ad HK. quare triangulum DBC ſimile eſt triangulo LHK. Quòd cum triangulum DAB ſimile ſit triangulo LGH, triangnlumq́; DBC ſimile triangulo LHK, & triangulum DAC ipſi LGK; erit pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum ſimilis pyramidi, cuius baſis triangulum GHK, & uertex punctum L. Eandem ob cauſſam erit pyramis cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, ſimilis pyramidi cuius baſis MHK triangulum, uertex autem punctum L, & adhuc pyramis, cuius baſis triangulum ECF, & uertex punctum D ſimilis pyramidi, cuius baſis triangulum MKN, & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD ſimilis eſt pyramidi GHKL, ſimiles autem pyramides ſunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc eſt quam AB habet ad GH; eſt enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & ſimiliter pyramis ECFD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc eſt BC ad HK, hoc eſt AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum priſma AE ad totum priſma GN. ſed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet propoetiouem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & priſmu AE ad priſma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.

9.diffi.undecimi.

6.sexti.

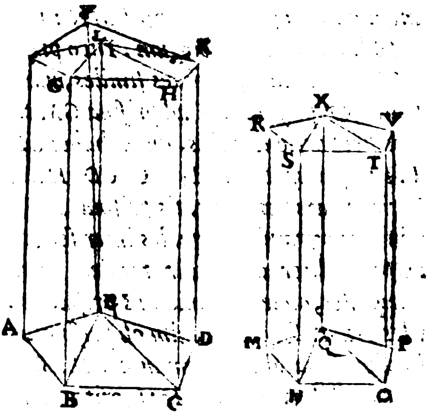
9.diffi.undecimi.

12.quinti.

ALITER. Quoniā igitur pyramis ABCD ſimilis eſt pyramidi GHKL; ſimiles autem pyramides ſunt in tripla proportione homologorum laterum: habebit pyramis ABCD ad pyramidē GHKL triplam proportionē eius, quam AB habet ad GH. ſed vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita priſma AE ad priſma GM, ſunt enim priſmata pyramidum tripla. ergo & priſma AE ad priſma GM triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Priſmata igitur ſimilia, quae triangulares baſes habent, diuiduntur in pyramides ſimiles, numeroq́ aequales, & priſma ad priſma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA. II.

Priſmata ſimilia, quę multãgulas habent baſes in ſimilia priſmata triangulares baſes habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & priſma ad priſma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint duo priſmata ſimilia, & ſimiliter poſita AK MV, & priſmatis quidem AK baſis ſit pentagonum ABCDE, & ipſi oppoſitum FGHKL; priſmatis uero MV baſis ſit pentagonum MNOPQ, & oppoſitum ipſi RSTVX: ſitq́ latus AB lateri MV homologum. Dico priſmata AK MV diuidi in priſmata, quae triangulares baſes habent, ſimilia & numero aequalia, & homologa totis; & priſma AK ad priſma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iũgantur EB EC LG LH QN QO XS XT. pẽtagonũ igitur ABCDE diuiſum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq́ FGHKL diuiſum in tria triangula FGL LGH LHK: & ſimiliter pentagonum MNOPQ diuiſum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: & pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur unumquodque priſmatũ AK MV diuiſũ in tria priſmata triangulares baſes habentia ductis planis per LG GB, perq́ LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur ſimilia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, numeroq́ aequalia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL ſimilia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq́ ECD LHK ipſis QOP XTV ſimilia. Et qm̃ priſma AK ponitur ſimile priſmati MV, parallelogrãmũ ABGF ſimile erit parallelogrãmo MNSR, & parallelogrãmũ AELF ſimile ipſi MQXR. quare vt LE ad EA, ita XQ ad QM: vt aũt AE ad EB, ita MQ ad QN. ex ęquali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq́ vt BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB eſt aequalis angulo XQN ob ſimilitudinẽ priſmatum. ſi enim ſimilibus exiſtentibus priſmatibus AK MV, angulus LEB non eſt aequalis angulo XQN, alter eorum maior erit. ſit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipſa E angulo NQX conſtituatur aequalis angulus BEY, vt recta linea EY terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHKY ſimile pentagono RSTVX. ſed & pentagonum FGHKL ponitur eidem ſimile. pentagonum igitur FGHKL ſimile eſt pentagono FGHKY. quare angulus FLK aequalis eſt angulo FYK. ſed & maior. quod fieri nõ poteſt. Non igitur ſimilibus exiſtentibus priſmatibus angulus LEB inaequalis eſt angulo XQN. quare neceſſario eſt aequalis; & ob id angulus EBG aequalis eſt angulo QNS. ergo & qui ipſis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ ſunt aequales. parallelogrammum igitur BELG ſimile eſt parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonſtrabitur parallelogrammum LECH ſimile parallelogrammo XQOT. ergo priſma AL, cuius baſis triangulum ABE, & ipſi oppoſitum FGL ſimile eſt priſmati MX, cuius baſis triangulum MNQ, & oppoſitum ipſi RSX; ſimilibus enim planis continentur. eſt autem ob priſmatum ſimilitudinem, & parallelogrammum BCHG ſimile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL ſimile ipſi QPVX. ergo & priſma BH, cuius baſis triangulum EBC, & ipſi oppoſitum LGH eſt ſimile priſmati NT, cuius baſis triangulum QNO, et ipſi oppoſitum XST, & denique priſma CL cuius baſis triangulum ECD, & oppoſitum ipſi LSK, ſimile eſt priſmati OX, cuius baſis triangulum QOP, & quod ipſi opponitur XTV. ſimilia autem

10.sexti.

9.diffi.undecimi.

1.diffi.sexti,

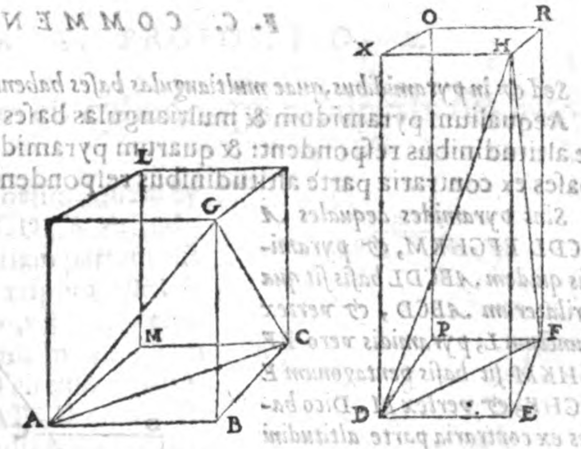
34.primi:

priſmata

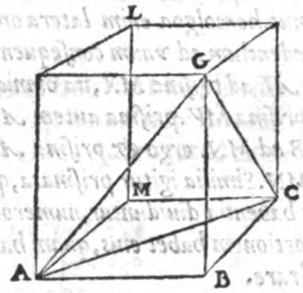
priſmata, quae triangulares baſes habent ſunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34. propoſitionem antecedentis libri, & proxime aliter demonſtrauimus. priſma igitur AL ad priſma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN, & priſma BH ad priſma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc eſt AB ad MN. priſma autem CL ad priſma OX triplam proportionem habet eius, quàm habet CD ad OP, hoc eſt AB ad MN ut ſupra demonſtrauimus. homolgoa enim latera omnia inter ſe eandem habent proportionem. Quare vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedētia ad omnia cōſequentia. Vt igitur priſma AL ad priſma MX, ita omnia priſmata ad omnia priſmata, hoc eſt totum priſma AK ad totum priſma MV. priſma autem AL ad priſma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN. ergo & priſma AK ad priſma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur priſmata, quae multiangulas habent baſes in ſimilia priſmata triangulares baſes habentia diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; & priſmo ad priſma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonſtrare.

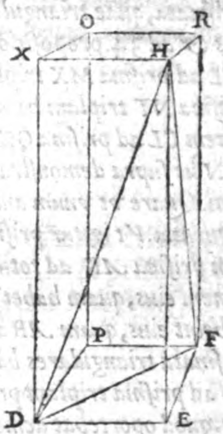
THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Aequalium pyramidum, & triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt ęquales.



Sint enim pyramides ęquales, quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, & vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Cōpleantur enim BGML EHPO ſolida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG eſt ęqualis pyramidi DEFH, atque eſt pyramidis quidem ABCG ſextuplum BGML ſolidum, pyramidis vero DEFH ſextuplum ſolidum EHPO; erit 15.quinti.
ſolidum BGML ſolido EHPO æquale. ęqualium autem ſolidorum parallelepipedo 34.undecimi.
rum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed ut BM baſis ad 15.quinti.
baſim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita ſolidi EHPO altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt altitudini pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt altitudini pyramidis ABCG. eſt igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Sed pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus, ſitq; vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem eſſe. iiſdem enim conſtructis, quoniam vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramimidis ABCG; vt autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrāmū ad parallelogrāmū EP: erit & vt parallelo 15.quinti.
grāmū BM ad EP parallelogrāmū, ita pyramidis DEFG altitudo ad altitudinē pyra





midis ABCG. Sed pyramidis quidē DEFH altitudo eadē eſt altitudini ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt altitudini ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur vt BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallepipedi BGML. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK eſt ęqualis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent illæ ſunt æquales. quod oportebat demonſtrare.

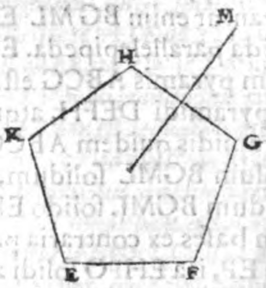
F. C. COMMENTARIVS.

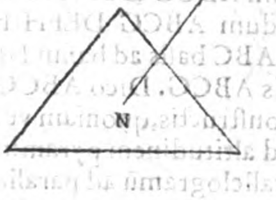
Sed & in pyramidibus, quae multiangulas baſes habent idem demonſtrabitur hoc modo.

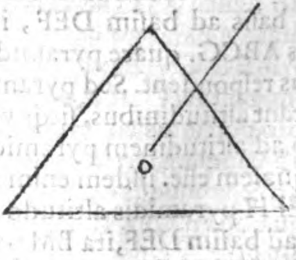
Aequalium pyramidum & multiangulas baſes habentium, baſes ex cōtraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum multiangulas baſes habentiū baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales.

Sint pyramides aequales ABCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL baſis ſit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM ſit baſis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: hoc eſt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinē pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxv. ſexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rurſus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis ęquealta pyramidi ABCDL: à triangulo autem O erigatur alia pyramis aequealta pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: ſunt enim in baſibus aequalibus, & ęqualem habent altitu

6.huius.







dinem

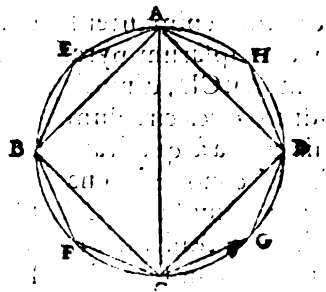
dinem: & ſimili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyramidi O eſt aequalis. aequalium autem pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumque enim vtrique eſt aequale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc eſt altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed iiſdem ſtantibus ſit ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem eſſe. eſt enim ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL, hoc eſt ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illae ſunt aequales. aequalis igitur eſt pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM eſt aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas baſes habentium, & reliqua. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur priſmatum omnium ęqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: & quorum priſmatum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea eſſe æqualia; priſmata enim in eiſdem baſibus conſtituta, & eadem altitudine ſunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

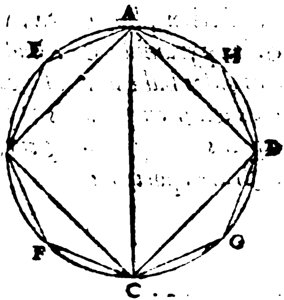


Habeat enim conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus nó ſit triplus coni, vel maior erit, quàm triplus, uel minor. Sit primú maior quàm triplus; & deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius eſt, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur priſma æquealtũ cylindro, quod quidem priſma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti: & ſunt ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æquealta, nimirum priſmata ipſa, quare priſmata inter ſe ſunt vt baſes, & priſma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulũ ABCD deſcribitur, atq; eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulũ ABCD. priſma igitur erectũ à quadrato ABCD ęquealtũ cylindro dimidio cylindri eſt maius. ſecentur circũferentiæ AB BC CD DA bifaria in punctis E F G H, & AE EB BF FC CG GD DH HA iungantur. Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua cõſiſtit, vt ſuperius demonſtratũ eſt, erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA priſmata æquealta cylindro. ergo & vnumquodque erectorum priſmatum maius eſt dimidio portionis cylindri quæ ad ipſum eſt, quoniam ſi per puncta E F G H parallelę ipſis AB BC CD DA ducãtur, & compleãtur in ipſis AB BO CD DA parallelogramma: à quibus ſolida parallele-

Ex corell 7. huius.

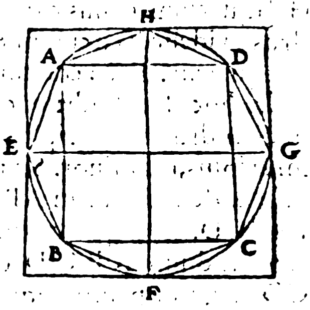
parallelepipeda æquealta cylindro erigantur: erunt vniuſcuiuſque erectorum dimidia priſmata ea, quæ ſunt in triãgulis AEB BFC CGD DHA. & ſunt cylindri portiones erectis ſolidis parallelepipedis minores. ergo & priſmata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora ſunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipſa ſunt. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes priſmata æquealta cylindro, & hoc ſemper faEx 1. decimi. cientes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri, quæ ſint minores exceſſu; quo cylindrus ipſius coni triplum ſuperat. relinquantur iam & ſint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur priſma, cuius baſis quidem polygonũ AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quę cylindri, maius eſt, quàm triplum coni. Sed priſma cuius baſis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum eſt pyramidis, cuius baſis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem, qui coni. & pyramis igitur, cuius baſis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idẽ qui coni, maior eſt cono, qui baſim habet ABCD circulum. Sed & minor; ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico inſuper neq; cylindrum minorem eſſe, quàm triplum coni, ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri.

Ex corol. 7. huius.



Deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius eſt quã dimidiũ ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticẽ habẽs eundẽ quẽ conus. pyramis igitur erecta maior eſt, quàm coni dimidium: quoniam, vt ante demonſtrauimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum deſcriptum eſt: & ſi à quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æquealta cono, quæ & priſmata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto, etenim inter ſe ſunt vt baſes. quare & tertiæ partes ipſarum. pyramis igitur, cuius baſis quadratum ABCD, dimidia eſt eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum, maior eſt cono, ipſum namque comprehendit. ergo pyramis cuius baſis ABCD quadratum, vertex autem idẽ qui coni, maior eſt, quàm coni dimidium. ſecentur circumferentię AB BC CD DA bifariã in punctis EFCH. & iungãtur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius eſt, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit. erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior eſt, quàm dimidium coni portionis, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandẽ quaſdam coni portiones, quę maiores erunt exceſſu, quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. Relinquantur & ſint, quę in ipſis AE EB BF FC CG DH HA. reliqua igitur pyramis cuius baſis polygonum AEBFCGH, & uertex idem qui coni, maior eſt, quàm tertia cylindri pars. ſed pyramis cuius baſis polygonum AEBFCDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis, cuius baſis polygonũ AEBFCDH, altitudo autem eadem quę cylindri. priſma igitur, cuius baſis AEBFCGH polygonum, & altitudo eadem, quę cylindri, maius eſt cylindro, cuius baſis eſt

5. quinti.



eſt circulus ABCD.ſed & minus,ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt.Non igitur cylindrus minor eſt,quàm triplus coni. oſtenſum autem eſt neque maiorem eſſe,quàm triplum.ergo cylindrus coni triplus ſit neceſſe eſt; ac propterea conus eſt tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri,eãdẽ, quam ipſe baſim habentis,& altitudinem æqualem. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

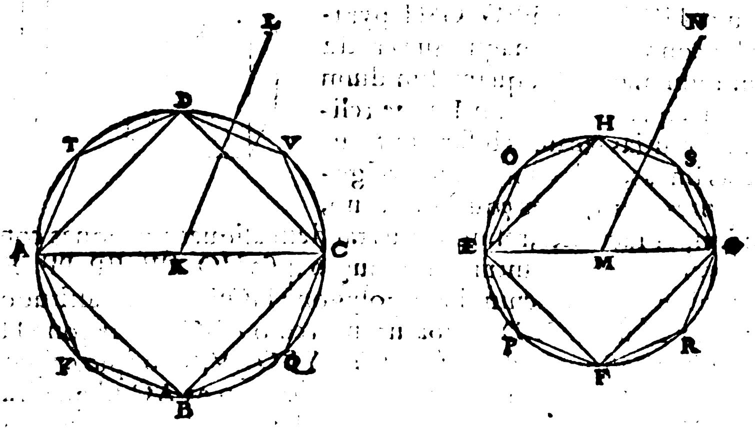
Eodem modo illud etiam demonſtrabitur in conis & cylindris ſcalenis.

COROLLARIVM.

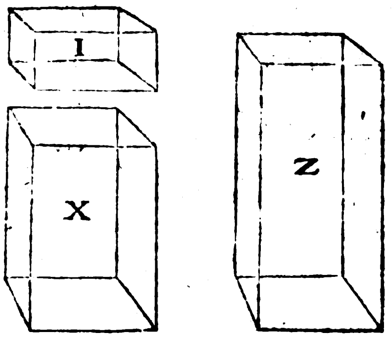
Ex quibus conſtat omnem conum ſiue rectum,ſiue ſcalenum tertiam partem eſſe cylindri ſiue recti ſiue ſcaleni,qui eandem baſim habet, & æqualem altitudinem.

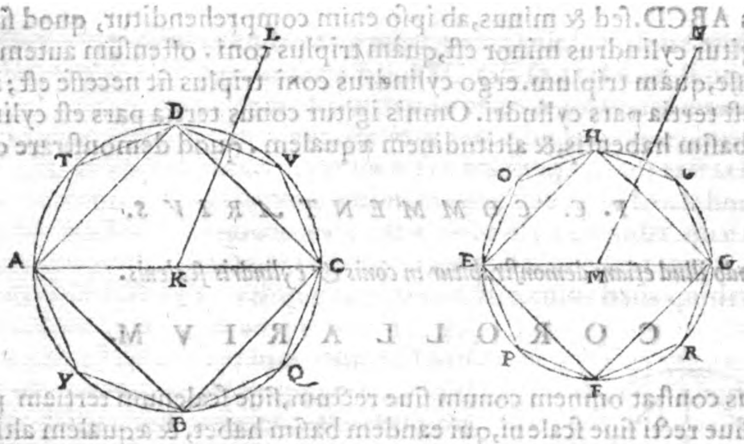
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

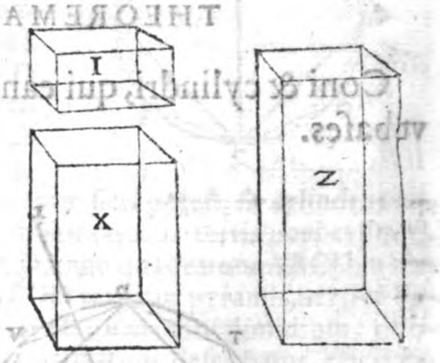
Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes.



Sint eadem altitudine coni,& cylindri,quorum baſes circuli ABCD EFGH axes autem KL MN, & diametri baſiũ AC EG.Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH,ita eſſe conum AL ad EN conum.ſi enim non ita ſit;erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidũ minus cono EN, vel ad maius. ſit primũ ad minus,quod ſit X,& quo minus eſt ſolidum X cono EN,ei æquale ſit I ſolidum.conus igitur EN,ipſis ſolidis X I eſt æqualis.Deſcribatur in EFGH circulo quadratũ EFGH. ergo quadratum maius eſt, quàm dimidium circuli.erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. pyramis igitur erecta maior eſt,quàm coni dimidium; nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus,& ab ipſo erigamus pyramidem æquealtam cono ; erit inſcripta pyramis pyramidis circumſcriptę dimidia; etenim inter ſe ſunt vt baſes: conus autem circumſcripta pyramide eſt minor.ergo pyramis, cuius baſis quadratum EFGH, uertex autem







autem idem qui coni, maior eſt quàm coni dimidium. ſecentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis OPRS; & OE EP PF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius eſt, quàm dimidiũ portionis circuli, in qua conſiſtit. erigatur ab vnoquoque triangulorum HOE EPF FEG GSH pyramis æquealta cono. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior eſt, quàm dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. Itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam; & iũgentes rectas lineas, & ab vnoquoque triãgulorum erigentes pyramides ęquealtas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ ſolido I minores erunt. relinquantur & ſint quę in ipſis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius baſis polygonũ HOEPFRGS, altitudo autẽ eadẽ, quę coni, maior eſt ſolido X. Deſcribatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS ſimile & ſimiliter poſitum polygonum DTAYBQCV, & ab ipſo erigatur pyramis æquealta cono AL. Quoniam igitur eſt vt quadratum ex AC ad quadratum ex EG
1 huius. ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; vt autem quadratum
2. huius. ex AC ad quadratũ ex EG, ita ABCD circulus ad circulũ EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. ſed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X ſolidum: & vt polygonũ DTAYBQCV ad polygonũ HOEPFRGS, ita pyramis cuius baſis DTAYBQCV polygonũ, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & uertex punctum N. Vt igitur conus AL ad X ſolidum, ita pyramis, cuius baſis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & uertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidem, quæ in ipſo eſt, ita ſolidum X ad pyramidẽ, quę in cono EN. conus autem AL maior eſt pyramide, quæ in ipſo. maius igitur eſt ſolidum X pyramide, quæ in cono EN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt AL conus ad ſolidum aliquod minus cono EN. Similiter demonſtrabitur neque vt EFGH circulus ad circulum ABGD, ita eſſe conum EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. Dico præterea neque eſſe vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod ſolidum maius cono EN. Si enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum maius, quod ſit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit ſolidum Z ad AL conum. ſed ut ſolidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulũ ABCD, ita onus EN ad aliquod ſolidum

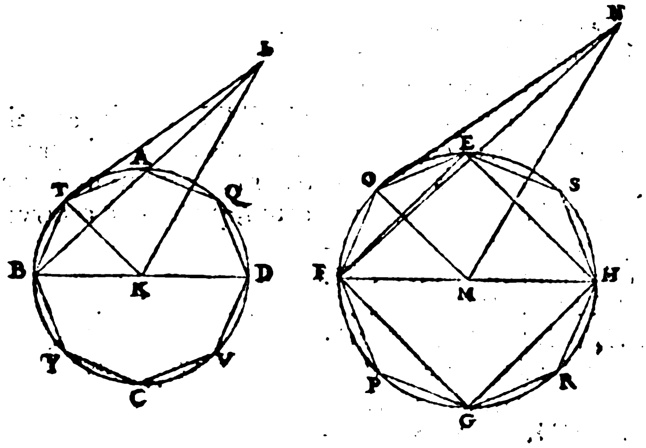
minus cono AL, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur vt ABCD circulus ad circulnm EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum maius cono EN. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus. ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt conus AL ad EN conum. ſed vt conus ad conum, ita eſt cylindrus ad cylindrum, eſt 15. quinti. enim vterque utriuſque triplus. & ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH, ita Ex antecedente. in ipſis cylindri æquealti conis. ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinẽ inter ſe ſunt ut baſes. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

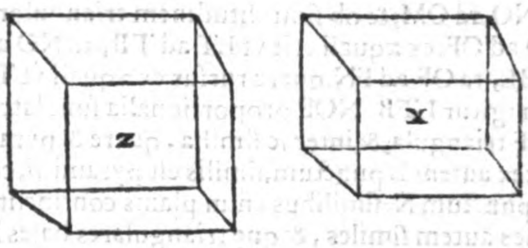
Et hoc in conis & cylindris ſcalenis ſimiliter demonſtrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

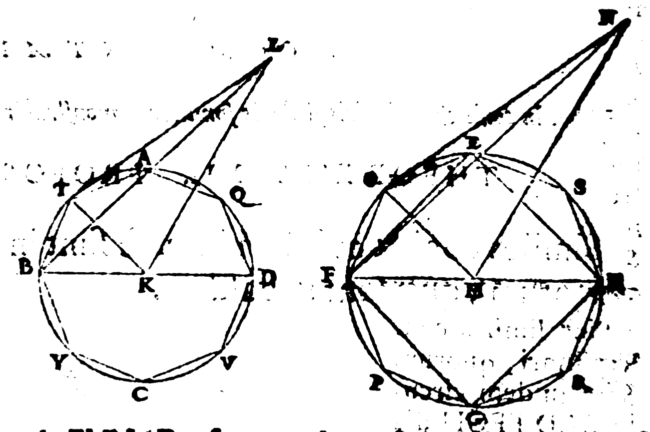
Similes coni & cylindri inter ſe ſunt in tripla proportione diametrorum, quæ ſunt in baſibus.

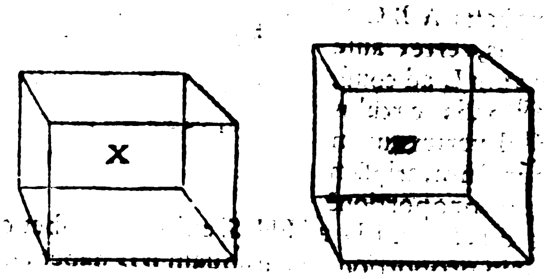


Sint ſimiles coni & cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD EFGH; diametri vero baſium BD FH: & axes conorum, vel cylindorum HK MN. Dico conũ cuius baſis A B C D circulus, vertex autẽ punctum L ad conũ, cuius baſis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplam habere proportionẽ eius, quã habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod ſolidum minus cono EFGHN triplam proportionem, uel ad maius. habeat primum ad minus, quod ſit X; & deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius eſt, quàm dimidium E F C H circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. ergo erecta pyramis maior eſt, quàm coni dimidia. Itaque ſecẽtur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungãtur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorũ EOF FPG GRH HSE maius eſt quàm dimidium portionis circuli EFGH, in qua conſiſtit. & erigatur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem uerticẽ habẽs, quem conus. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior eſt quàm dimidia portionis coni, quæ eſt ad ipſam. ſecantes igitur reliquas circumferentias bifariam, iũgenteſq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem, quem conus; atque hoc ſemper facientes tãdem relinquemus quaſdam coni portiones, quę minores erũt exceſſu, quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. Relinquãtur & ſint quę in ipſis EO OF FP PG GR RH



[illegible] Reliqua igitur pyramis, cuius baſis quidem polygonum EOFPGRHS, uertex autem N punctum, maior eſt ſolido X. Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EOFPGRHS ſimile, & ſimiliter poſitum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus; & triangulorum continẽtium pyramidem, cuius baſis quidem eſt polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, vnũ ſit LBT; triangulorũ vero continentiũ pyramidem, cuius baſis EOFPGRHS polygonũ, & vertex punctũ N, vnum ſit NFO, & iũgãtur KT MO. Qm̃ igitur conus ABCD ſimilis eſt cono EFGH, erit vt BD ad FH, ita KL axis ad axẽ MN. vt aũt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN, & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. perpẽdicularis enim vtraque eſt, & circa ęquales angulos BKL FMN latera sũt proportionalia. Simile igitur eſt BKL triangulum triangulo FMN. Rurſus quoniam eſt vt BK ad KT, ita FM ad MO, & circa ęquales angulos BKT FMO latera ſunt proportionalia; etenim quę pars eſt angulus BKT quattuor rectorum, qui ſunt ad K centrũ, eadem eſt pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui ſunt ad centrum M: erit triangulum BKT triãgulo FMO ſimile. Et quoniã oſtenſum eſt vt BK ad KL ita eſſe FM ad MN; ęqualis aũt eſt BK ipſi KT, & FM ipſi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN: & circa ęquales angulos TKL OMN latera ſunt proportionalia; recti enim ſunt. triangulum igitur LKT ſimile eſt triangulo NMO. Quòd autem ob ſimilitudinem triangulorum BKL FMN, ſit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob ſimilitudinem uero triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO. Rurſus cum ob ſimilitudinem triangulorum LTK NOM, ſit vt LT ad TK, ita NO ad OM; & ob ſimililitudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. oſtenſum autem eſt & vt TB ad BL, ita OF ad FN. quare rurſus ex æquali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia ſunt latera, ideoque æquiangula ſunt LTB NOF triangula, & inter ſe ſimilia. quare & pyramis, cuius baſis triangulum BKT, uertex autem L punctum, ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis FMO triangulum, & uertex punctum N; ſimilibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem ſimiles, & quę triangulares baſes habent in tripla ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDVCY ad K, à punctis vero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eoſdẽ habentes, quos coni, oſtendemus & vnãquamque pyramidũ eiuſdẽ ordinis ad vnãquãq; alterius ordinis triplã proportionẽ habere eius, quã hẽt BK latus homologũ ad homologũ latus FM, hoc eſt quã BD ad FH. Sed vt vnũ antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia





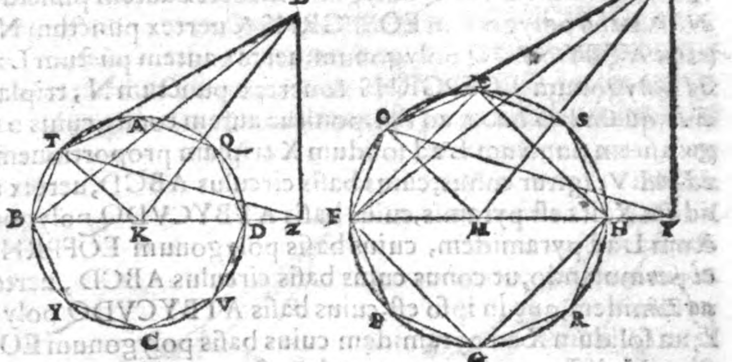
quentia. eſt igitur & vt BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuiusbaſis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidẽ cuius baſis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius baſis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem pũctum L ad pyramidem cuius baſis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius baſis circulus ABCD uertex autem punctum L ad ſolidum X triplam proportionem habere eius, quam BD ad FH. Vt igitur conus, cuius baſis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad ſolidum X, ita eſt pyramis, cuius baſis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum EOFPRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus cuius baſis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quę in ipſo eſt, cuius baſis ATBYCVDQ polygonũ, uertex aũt punctũ L; ita ſolidum X ad pyramidem cuius baſis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N. dictus autem conus maior eſt pyramide, quę in ipſo; etenim eam comprehendit. maius igitur eſt & ſolidum X pyramide, cuius baſis polygonum EOFPGRHS, uertex autem punctum N. ſed & minus, quod fieri non poteſt. non igitur conus, cuius baſis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod ſolidum minus cono, cuius baſis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionẽ habet eius quam BD habet ad FH. ſimiliter demonſtrabimus neque conum EFGHN ad aliquod ſolidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad ſolidum maius cono EFGHN triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. ſi enim fieri poteſt habeat ad aliquod ſolidum maius, quod ſit Z. conuertendo igitur ſolidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD: ut autem ſolidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod ſolidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad ſolidum aliquod minus cono ABCDL triplã proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt. non igitur ABCDL conus ad ſolidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus 15. quinti.
enim in eadem exiſtẽs baſi, in qua conus, & ipſi æquealtus coni triplus eſt. cum oſtẽ 10. huius.
ſum ſit omnem conum tertiam partem eſſe cylindri, eandem quam ipſe baſim habẽtis, & aequalem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionẽ habebit eius, quam BD habet ad FH. ſimiles igitur coni, & cylindri inter ſe ſunt in tripla proportione diametrorũ, quæ ſunt in baſibus. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

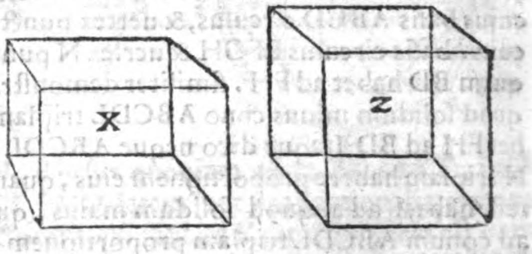
Pręcedens demonſtratio In conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos uniuerſe ad omnes tam rectos quam ſcalenos accõmodabimus hoc pacto.

Similes coni & cylindri omnes interſe in tripla ſunt proportionem diametrorũ, quę ſunt in baſibus.

Sint ſimiles coni & cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos baſibus, quae baſes ſecent, ſintq́; eorum planorum & baſium communes ſectiones BD FH, quae circulorũ diametri erunt. Dico conum cuius baſis ABCD circulus, et vertex punctum L ad conum cuius baſis circulus EFGH, vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. ſi enim non ita ſit, habebit conus ABCDL ad aliquod ſolidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad ſolidum minus, quod ſit X, & deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quàm dimidium EFGH circuli. Erigatur à quadrato EFGH pyramis aequealta cono, quae maior erit, quàm coni dimidia, & ſecentur EF FG GH HE circumferentiae biſariam in punctis OPRS, iunganturq́; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius eſt, quàm



dimidiũ portionis circuli EFGH, in qua cōſiſtit: & erigatur ab unoquoque triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus vertirem habens. ergo et vnaquęque erectarũ pyramidũ maior eſt, quã dimidia coni portionis, quae eſt ad ipſam ſecãtes igitur reliquas circũferentias bifariam, iungẽteſq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramides, eundem habentes verticem, quem cōnus: atque hoc ſemper facientes tandem relinquemus quaſdã coni portiones, quę minores erunt exceſſu, quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. relinquantur, & ſint quae in ipſis EO OF FP PG GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis, cuius baſis polygonum EOFPGRHS, vertex autem pũctum N ſolido X eſt maior.



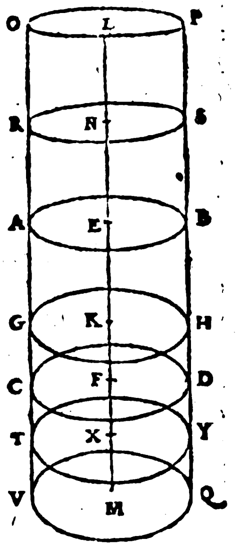
Deſcribatur etiam in circulo ABCD ipſi EOFPGRHS polygono ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ATBYCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundem, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius baſis polygonum ATBYCVDQ; & vertex punctum L, vnum aliquod ſit LBT: triangulorũ vero continentium pyramidem, cuius baſis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum ſit NFO: & KT MO iungantur Quoniã igitur conus ABCD ſimilis eſt cono EFGH, erit ex diffinitione conorum ſimilium, quã nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axē: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atque eſt angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione co-
6.sexti. *norum ſimilium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera ſint proportionalia; erit BKL triangulum ſimile triangulo FMN. Et quoniam vt BK ad KT, ita eſt FM ad MO; angulus autem BKT eſt aequalis angulo FMO: etenim quę pars eſt angulus BHT quattuor rectorũ, qui ſunt ad centrum K, eadem eſt pars angulus FMO quattuor rectorum, qui ſunt ad M centrum. rurſus erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO eſt ſimile. Itaque quoniam oſtenſum eſt vt BK ad KL, ita FM ad MN; aequalis autem eſt BK ipſi KT, & FM ipſi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN. & ſunt in conis rectis anguli TKL OMN inter ſe aequales, quòd recti ſint. ergo in ipſis cum circa aequales angulos TKL OMN latera ſint proportionalia; erit triangulum LKT ſimile triangulo NMO. At in conis ſcalenis hoc modo demonſtrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis baſium rectae lineae LΦ NϮ, quae cadent in communes planorum & baſium ſectiones BD FH ex 38. antecedentis libri. & iungantur TΦ OϮ. Cum igitur ex diffinitione conorum ſimilium angulus LKΦ ſit ęqualis angulo N M Ϯ, & anguli LΦK NϮM utrique recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNϮ aequalis, & triangulum LΦK ſimile triangulo NϮM. rurſus cum angulus BKT ſit ęqualis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ aequalis erit reliquo OMϮ. eſt autem ob ſimilitudinem triangulorum LΦK NϮM, ut ΦK ad KL, ita ΦM ad MN, & ob ſimilitudinem triangulorũ BKL FMN, ut LK ad KB, hoc eſt ad KT ipſi aequalem, ita NM ad MF, hoc eſt ad MO. ergo ex aequali vt ΦK ad KT, ita ϮM ad MO. & cum circa aequales angulos TKΦ OMϮ latera ſint proportionalia, erit & triangulum KTΦ triangulo MOϮ ſimile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita NϮ ad ϮM: & vt ΦK ad ΦT, ita ϮM ad MO. quare ex aequali vt LΦ ad ΦT, ita NϮ ad ϮO. & ſunt anguli LΦT NϮO*

inter ſe aequales, quòd vtrique recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum recta eſt. cum igitur circa aequales angulos LΦT NϒO latera ſint proportionalia, ſequitur triãgula quoq; LTΦ NOϒ inter ſe ſimilia eſſe. ideoq́; vt LT ad TΦ, ita NO ad Oϒ: & vt TΦ ad TK, ita Oϒ ad OM. ex aequali igitur vt LT ad TK, ita eſt NO ad OM. demonſtratum autem eſt vt LK ad KT, ita eſſe NM ad MO. quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN. rurſus igitur ex aequali vt TL ad LK, ita eſt ON ad NM. quòd cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, aequiangula ſunt, & ob inter ſe ſimilia. Itaq; quoniam ob ſimilitudinem triangulorum BKL FMN eſt vt LB ad BK. ita NF ad FM, & ob ſimilitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO, erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN. Rurſus quoniam ob ſimilitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita eſt NO ad OM, & ob ſimilitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF; ex aequali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. oſtenſum autem eſt & vt TB ad BL, ita OF ad FN. rurſus igitur ex aequali vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera ſunt proportionalia, ob eamq́; cauſſam & aequiangula & inter ſe ſimilia erunt. pyramis igitur, cuius baſis triangulum BKT, vertex autem punctum L ſimilis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum FMO, & vertex N punctum, ſimilibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem ſimiles in tripla ſunt proportione humologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua ſimiliter vt in antecedente demonſtrabimus.

6. ſexti.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH ſecetur oppoſitis planis AB CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita eſſe EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipſi quidẽ EK axi exponantur æquales quotcumq; EN NL; ipſi vero FK ęquales quotcumque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipſis AB CD parallela; atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ ęquales ipſis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligãtur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter ſe ſunt ęquales, erunt cylindri PR RB BG inter ſe vt baſes: baſes autem æquales ſunt. ergo & cylindri PR RB BG ſunt æquales. Quòd cum axes LN NE EK inter ſe æquales ſint, itẽq; cylindri PR RB BG inter ſe æquales; ſitq́; ipſorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipſorum PR RB BG: quotuplex eſt axis KL ipſius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratione & quotuplex eſt MK axis ipſius axis KF, totuplex eſt & QG cylindrus cylindri GD. & ſi quidem axis LK ſit ęqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si autem axis LK maior ſit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, & ſi minor minor. quattuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, uidelicet axibus EK KF, & cylindris BG GD ſumpta ſunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nẽpe axis KL, & cylindrus PG; axis uero KF, & cylindri GD ęquemultiplicia, axis ſcilicet KM, & GQ cylindrus, & demonſtratum eſt ſi LK axis ſuperat axem KM & PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ, & ſi æqualis æqualis, & ſi minor minor. eſt igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. quod demonſtrare oportebat.

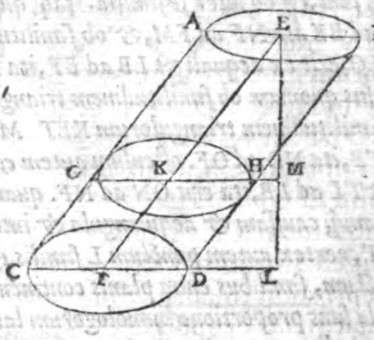
11. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro ſcaleno; quod eadem ratione demonſtrabitur.

Ex quibus conſtat ſi quilibet cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita eſſe altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

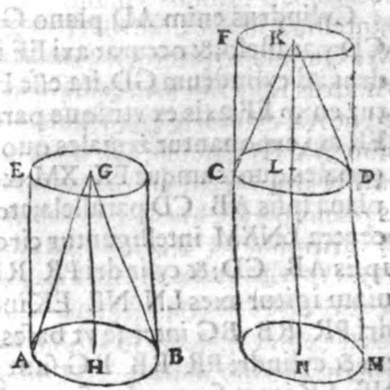
In cylindris enim rectis illud perſpicuum eſt, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in ſcalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad baſis planum perpendiculari, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duę rectę lineę EF EL ſecantur à planis parallelis, in eaſdem proportiones ſecabūtur. 15.undecimi *quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita cylindri BG altitudo FM ad ML altitudinem cylindri GD, quod propoſitum fuerat demonſtrandum.*



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri inter ſe ſunt vt altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB CD cylindri EB FD. ✽ Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL. producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturq; ipſi GH axi ęqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes: 11.huius. baſes autem ſunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter ſe æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM plano ſecatur CD, oppoſitis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. Ex antecedente. æqualis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur vt EB cylindrus ad cylindrū FD, ita axis GH ad KL axem: 15.quinti. vt autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conū CDK; 1.huius: cylindri enim ſunt conorum tripli. ergo & vt GH axis ad axem KL, ita eſt ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri inter ſe ſunt, ut altitudines. quod oportebat demonſtrare.

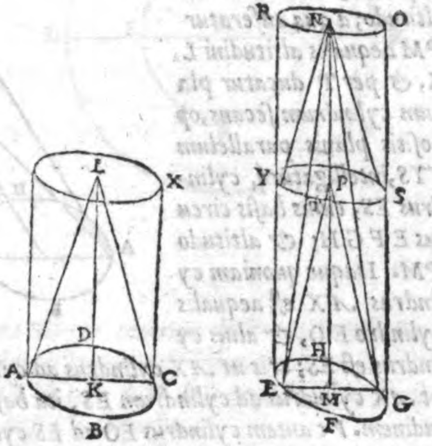


F. C. COMMENTARIVS.

✽ Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL] *Hoc eſt ita eſſe altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, altitudo ipſa axis eſt, ſiue ab axe determinatur; in ſcalenis uero non item. ſed tamen nihilominus demonſtrabitur conos & cylindros in aequalibus baſibus conſtitutos inter ſe eſſe vt axes, & ob id, vt eorum altitudines ex iis, quae nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quorum conorum & cylindrorũ baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt æquales.



Sint æquales coni & cylindti, quorum baſes quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum ſunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinẽ MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non ęqualis. Sit primum ęqualis: atque eſt AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter ſe ſunt vt baſes. ęqualis igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH, ac propterea ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. eſtq; vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed maior ſit MN, & auferatur ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM, & per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus ęqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrũ. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrũ, ita MN altitudo ad altitudinẽ MP. nam cylindrus EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autẽ eſt MP altitudo altitudini KL. quare vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. ęqualium igitur cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent.

11. huius.

11. huius.

13. huius.

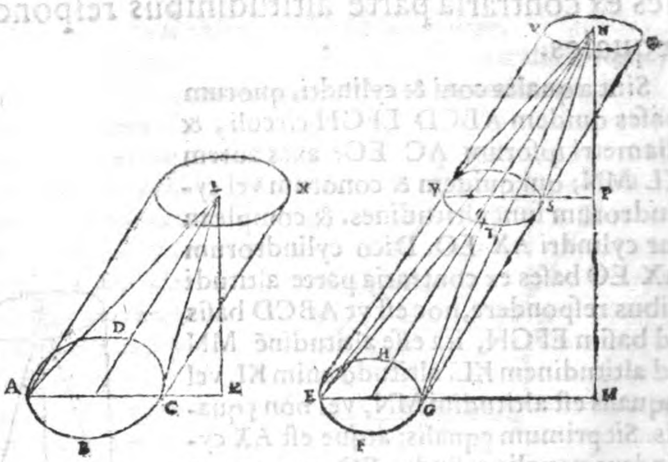
Sed cyiindrorũ AX EO baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinẽ. Dico AX cylindrũ cylindro EO ęqualẽ eſſe. ijſdẽ enim cõſtructis quoniã vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL ęqualis eſt altitudini MP: erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. eſt igitur vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt æqualis. ſimiliter autem & in conis. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonſtrauit. Sed & in omnibus demonſtrabitur hoc modo.

Sint aequales coni, & cylindri ſiue recti ſiue ſcaleni, quorum baſes circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere; hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM ſunt aequales vel inaequales; ſi aequales, cum aequales ſint cylindri, erunt & baſes aequales inter ſe: cylindri enim & coni qui

eandem



eandem habẽt altitudinẽ, inter ſe ſunt vt baſes. quare baſes ex contraria parte altitudinibus reſpõdẽt. Si vero altitudines nõ ſint aequales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur TM aequalis altitudini LK, & per T ducatur planum cylindrum ſecans, oppoſitis planis parallelum TYS, intelligaturq́, cylindrus ES, cuius baſis circulus E F G H; & altitudo TM. Itaque quoniam cylindrus AX eſt aequalis cylindro E O, & alius cylindrus eſt ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFCH baſim, cum eandem habeant altitudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP; cylindrus enim EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita eſt NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur baſis ABCD ad EFGH baſim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem eſt altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſt altitudo NM ad LK altitudinem.

11. huius.
13. huius.

Sed cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondeant, ſitq́, vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro E O aequalem eſſe. ijſdem enim conſtructis quoniam vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK eſt aequalis ipſi PM altitudini; erit vt ABCD baſis ad baſim EFCH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quòd eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO eſt aequalis. ſimiliter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quorum conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt aequales. quod demonſtrare oportebat.

11. huius.

Sed & illud uerum eſt, quod nos demonſtrauimus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & ſpheroidibus ad propoſitionem XI.

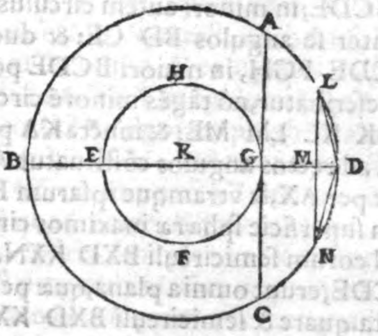
Cylindri omnes, et coni inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium & ex proportione altitudinum.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum exiſtẽtibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum deſcribere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum deſcribere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipſi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam ſecantes, & eius dimidium rurſus bifariam, & hoc ſemper facientes tandem relinquemus circumferentiam

circumferentiam minorem ipſa AB. Relinquatur, ſitq́; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iunganturq́; LD DN LN. ergo LD ipſi DN eſt æqualis. Et quoniam LN parallela eſt AC, & AC tangit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. Quòd ſi ipſi LD ęquales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonũ æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH. quod facere oportebat.

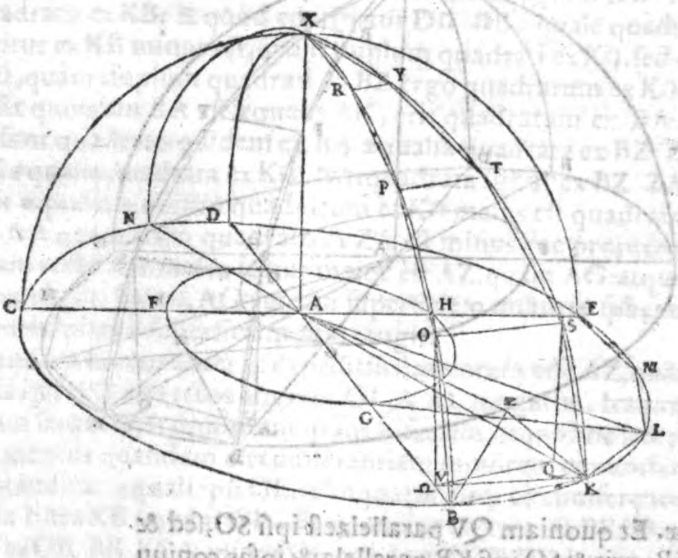


F. C. COMMENTARIVS.

Ergo LD ipſi DN eſt æqualis] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, quare & bifariam ipſam ſecabit.* * 3.terti. *atque erit LM aequalis MN. cum igitur duae LM MD duabus NM MD aequales ſint & angulos aequales contineant, nempe rectos: erit baſis LD baſi LN aequalis.* 4 primi.

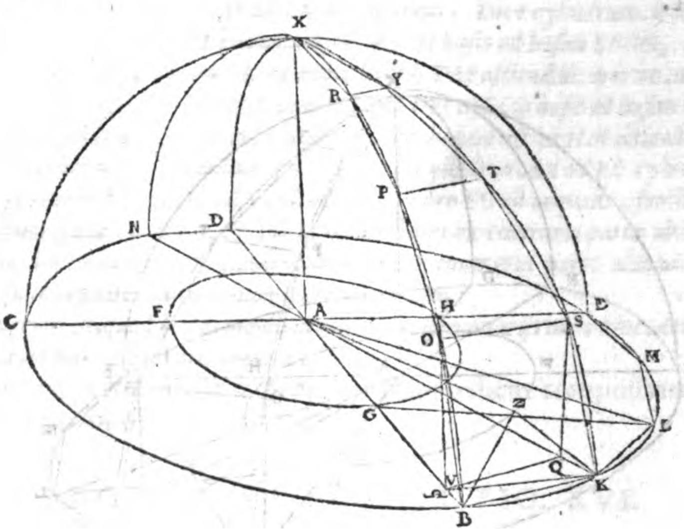
PROBLEMA II. PRPOSITIO XVII.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus in maiori ſolidum polyhedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.



Intelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A. oportet in maiori ſphæra deſcribere ſolidum polyhedrum minoris ſphærę ſuperficiem non tangens. ſecentur ſphæræ plano aliquo per centrum ducto. erunt ſectiones circuli, quoniam diametro manẽte, & ſemicirculo circumducto. ſphæra facta eſt. ergo in quacumque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planũ in ſuperficie ſphęrę circulum efficiet, & conſtat circulum maximum eſſe, cum diame- 16.tertij.

ter ſphæræ,quæ & ſemicirculi,& circuli diameter eſt, maior ſit omnibus rectis lineis,
quæ in circulo vel ſphæra ducūtur.ſit igitur in maiori quidem ſphęra circulus
BCDE;in minori autem circulus FGH:& ducantur ipſorum duæ dimetri ad rectos
inter ſe angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus B
Ex antecedente. CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum
deſcribatur,nō tāgēs minorē circulū FGH;cuius latera ſint in BE circuli quadrāte
BK KL LM ME: & iunctaKA producatur ad N:& à puncto A plano circuli BCD
E ad rectos angulos cōſtituatur AX; quæ ſuperficiei ſphærę in puncto X occurrat:
& per AX,& vtramque ipſarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiēt
in ſuperficie ſphæræ maximos circulos.Itaque efficiant, & ſint in diametris BD K
N eorum ſemicirculi BXD KXN.Quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli B
18.undecimi CDE,erunt omnia plana,quæ per ipſam XA tranſeunt ad planum circuli BCDE recta.
quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum . Et quoniam ſemicirculi;
BED BXD KXN æquales ſunt,in ęqualibus enim cōſiſtūt BD KN diametris;
erūt & eorū quadrantes BE BX KX inter ſe æquales.quot igitur latera polygoni
ſunt in quadrante BE,tot erunt & in quadrantibus BX KX æqualia ipſis BK KL
LM ME . Deſcribantur & ſint BO OP PR RX KS ST TY YX: iunganturq́; SO
38.undecimi. TP YR,& ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendicnlares ducantur. cadēt
hæ in communes planorum ſectiones BD KN,quoniam & plana ſemicirculorum
BXD KXN ad planum circuli BCDE recta ſunt.Itaque cadant,ſintque OVSQ:& V
Q iungatur.Cum igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN æquales circumferētiæ
B ſumptę ſint BO KS,& ductę perpendiculares OV SQ: erit OV quidem ipſi SQ
æqualis,BV vero ęqualis KQ.eſt autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua
2.ſexti. VA reliquæ QA eſt ęqualis.Vt igitur BV ad VA,ita KQ ad QA,ideoq́; VQ ipſi BK
parallela eſt.Quòd cum vtraque ipſarum OV SQ recta ſit ad circuli BCDE planū,
6.undecimi. 33.primi. erit OV ipſi SQ parallela . oſtenſa autem eſt & ipſi ęqualis . ergo QV SO æquales
ſunt & parallelæ. Et quoniam QV parallelaeſt ipſi SO,ſed &
9.undecimi. parallela ipſi KB; erit & SO ipſi KB parallela:& ipſas coniungnnt
C BO KS.ergo & KBOS quadrilaterū eſt in uno plano:nā
ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in vtraque ipſarum quæuis
pūcta ſumantur,quæ dicta puncta coniungit recta linea
in eodem eſt plano, in quo parallelę . Et eadem ratione vtraque
ipſorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno ſunt plano.
2.undecimi. eſt autem in vno plano & triangulum YRX.Si igitur à pūctis
OSPTRYad A ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura



ſolida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus compoſita, quarũ
baſes quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autẽ
punctum A. quòd ſi in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in K
B eadem conſtruamus,& in reliquis tribus quadrãtibus,& in reliquo hemiſphęrio
conſtituetur figura quædam polyhedra in ſphęra deſcripta, & compoſita ex pyramidibus,
quarum baſes ſunt quadrilatera iam dicta,& YRX triãgulum;& quæ eiuſdem
ordinis ſunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non
tãgere ſuperficiem minoris ſphæræ, in qua eſt circulus FGH. Ducatur à puncto A
ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat,& BZ
ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta eſt ad quadrilateri KBSO planum, et ad
omnes rectas lineas, quę ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano rectos angulos 3. diffi. undecimi.
faciet. ergo AZ ad utramque ipſarum BZ ZK eſt perpendicularis. et quoniam AB
eſt æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK ęquale, et ſunt quadrato
quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus eſt: quadrato 47. primi.
autem ex AK ęqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis
ex AZ ZK æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur
quod ex BZ reliquo quod ex ZK eſt ęquale; ideoq; recta linea BZ rectę ZK æqualis.
Similiter oſtendemus,& quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipſarum BZ ZK ęquales
eſſe. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipſarum ZB ZK deſcriptus,
etiam per puncta OS trãſibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniã D
KB maior eſt, quàm QV, æqualis autem QV ipſi SO; erit & KB, quàm SO maior. Sed
KB eſt æqualis vtrique ipſarũ KS BO. ergo vtraque KS BO, quàm SO eſt maior.
cum igitur in circulo quadrilaterum ſit KBOS,& ęquales ſint KB BO KS,& minor
OS; ſitq; ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati E
ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KΩ. Et quoniam BD minor
eſt, quã dupla ipſius DΩ; atq; eſt vt BD ad DΩ, ita rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ ad F
rectangulum, quod DΩ ΩB cõtinetur, nempe deſcripto ex BΩ quadrato,& completo G
parallelogrãmo in ipſo ΩD. quare & rectangulũ contẽtũ DB BΩ minus eſt, quã
duplum eius, quod DΩ ΩB continetur: & iuncta KD, quod DB BΩ continetur eſt H
æquale quadrato ex KB; & quod continetur DΩ ΩB æquale quadrato ex KΩ. quadratum
igitur ex KB minus eſt, quàm duplum quadrati ex KΩ. ſed quadratum ex K
B maius eſt, quàm duplum quadrati ex BZ. ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BZ
eſt maius. Et quoniam BA eſt æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK
æquale.& ſunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato autem
ex AK æqualia quadrata ex KΩ ΩA. quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex K
Ω ΩA ſunt æqualia; quorum quadratum ex KΩ maius eſt quadrato ex BZ. ergo reliquum K
ex ΩA quadratum quadrato ex ZA eſt minus; ac propterea recta linea AZ
maior, quàm recta AΩ. multo igitur maior eſt AZ, quàm AG: atque eſt AZ quidem
ad vnam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphęræ. quare polyhedrum
minoris ſphæræ ſuperficiem non tangit.

Oſtendendum autem aliter & expeditius, maiorem eſſe AZ, quàm AG. Ducatur
à puncto G ipſi AG ad rectos angulos GL,& AL iungatur. Itaque circumferentiã
EB bifariam ſecantes,& dimidiam ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes tandem
relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BC
D, quæ ſubtenditur æquali ipſi GL. relinquatur, ſitq; circumferentia KB. minor igitur
eſt recta linea KB, quàm GL. Et quoniã in circulo eſt BKSO quadrilaterum,&
ſunt æquales OB BK KS,& minor OS; erit angulus BZK obtuſus: ideoq; BK maior,
quàm BZ. ſed GL quàm BK eſt maior. multo igitur maior eſt GL, quàm BZ,& quadratum
ex GL quadrato ex BZ maius.& cum æqualis ſit AL ipſi AB, erit & quadratum
ex AL quadrato ex AB æquale. ſed quadrato quidem ex AL ęqualia ſunt quadrata
ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata
igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia ſunt; quorum quadratum ex BZ minus
eſt quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius eſt quadrato ex A
G:& ob id recta linea ZA, quã recta AG eſt maior. Duabus igitur ſphæris circa idẽ

centrum exiſtentibus, in maiori ſolidum polyhedrum deſcriptum eſt, minoris ſpęræ ſuperficiem non tangens. quod facere oportebat.

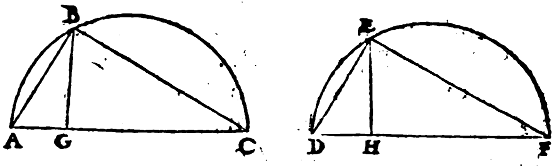
COROLLARIVM.

Quod ſi etiam in altera ſphæra, ſolido polyhedro deſcripto in ſphæra ABCDE ſimile ſolidũ polyhedrum deſcribatur, habebit ſolidũ polyhedrum in ſphæra BCDE ad ſolidum polyhedrum in altera ſphæra triplam proportionem eius, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphęrę diametrũ. diuiſis enim ſolidis in pyramides numero ęquales, & eiuſdem ordinis; erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides inter ſe in tripla ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera ſphæra eiuſdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt, quam habet AB ex centro ſphęrę circa centrum A exiſtentis ad eam, quę eſt ex centro alterius ſphęræ. Similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæra circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiuſdem ordinis, quę ſunt in altera ſphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quę eſt ex cẽtro alterius ſphærę. Et vt vnũ antecedentium ad vnũ conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum A ad totum ſolidum polyhedrum, quod in altera ſphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphęrę, hoc eſt quam habet BD diameter ad alterius ſphærę diametrum.

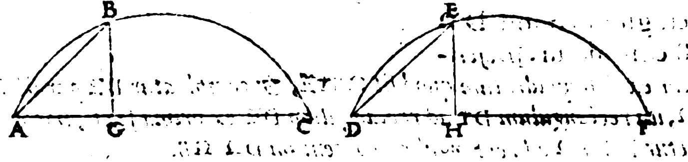
F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt ſectiones circuli.] *Hoc vniuerſe à Theodoſio demonſtratur in prima propoſitione ſphęricorum, nempe quomodocunque plano ſphęra ſecetur, ſemper ſectiones fieri circulos.*

B Erit OV quidem ipſi SQ æqualis. BV vero ęqualis KQ.] *Sint enim duo ſemicirculi aequales ABC DEF, ſumanturq; aequales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipſi EH, & AG ipſi DH aequalem eſſe. Quoniam enim circumferentia AB eſt aequalis circumferentiae DE, quae ſunt aequalium circulorum, erunt rectae lineae AB DE inter ſe aequales. & eadem ratione aequales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque eſt angulus ABC in ſemicirculo rectus aequalis recto DEF. cum igitur circa aequales angulos latera ſint proportionalia* 29.tertij.



lia, erit triangulum ABC ſimile triangulo DEF. ſed triangulum ABG eſt ſimile triangulo ABC, 6.sexti. *ergo & ipſi DEF. triangulum autem DEH eſt ſimile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triã-* 8.sexti. *gulo DEH eſt ſimile. ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad* 9.sexti. *EH. aequalis autem eſt AB ipſi DE. ergo & BG ipſi EH eſt aequalis. & eodem modo demonſtra-* 14.quinti. *bitur AG aequalis ipſi DH, quod demonſtrare oportebat. ſed & illud vniuerſe in omnibus portionibus demonſtratur ſequenti lemmate.*



Sint ęquales portiones ęqualiũ circulorũ ABC DEF; ſumanturq́; circumferẽtiæ ęquales AB DE: & à pũctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipſi EH æqualem eſſe; AG vero ipſi DH. H

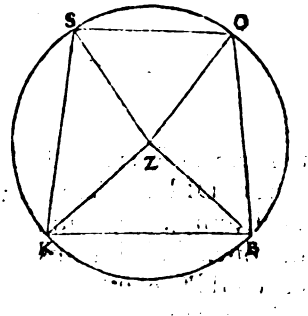
Iungantur AB DE. & quoniam aequales ſunt circumferentiae AB DE, erunt & reliquae B- 27.tertij. *C EF inter ſe aequales. ergo & aequales anguli, qui in ipſis conſiſtunt. quare angulus BAC eſt aequalis angulo EDF. ſed & recti ſunt anguli, qui ad G H. duo igitur triãgula ſunt ABG DEH, quae duos angulos duobus angulis aequales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri* 26.primi. *DE aequale, quod vni aequalium angulorum ſubtenditur. ergo omnia omnibus ſunt aequalia. aequalis igitur eſt AG ipſi DH, & BG ipſi EH. quod demonſtrare oportebat.*

C Nam ſi duæ rectæ lineæ parallelę ſint, & in vtraque ipſarum quæuis puncta ſumantur, quæ dicta puncta coniungit in eodem eſt plano in quo parallelæ.] *Ex VII. vndecimi.*

D Et quoniam KB maior eſt, quam QV] *Eſt enim triangulum AQV triangulo AKB ſimile, cum angulus ad A ſit vtrique communis, anguluſq́; AQV angulo AKB, & angulus AVQ an-* [illegible].primi. *gulo ABK aequalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita K-* [illegible].sexti. *B ad QV. eſt autem AK maior, quàm AQ. ergo & KB, quàm QV maior erit.*

E Erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ.] *Nam cum rectae lineae KB BO KS aequales ſint, & minor ipſis OS; erunt circumferentiae, quas auferunt KB BO KS inter ſe aequales, & reliqua circumferentia OS maiores. quare & anguli KZS KZB BZO ęquales, & maiores angulo OZS. ſunt autem quattuor anguli quattuor rectis aequales. ergo OZS eſt minor recto, videlicet acutus; & vnuſquiſque reliquorum trium obtuſus; ac propterea quadratum quod fit ex KB maius eſt duobus quadratis, quae ex KZ ZB, hoc eſt maius, quàm duplũ quadrati, quod ex BZ. ſunt enim KZ ZB inter ſe aequales, vt demonſtratum eſt. ſed & hoc ſequenti lemmate planius demonſtratur.*

Sit in circulo quadrilaterum KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter ſe ſint ęqualia: ſitq́; BO maior, quàm OS; & ſumpto circuli centro Z, iungatur BZ. Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius eſſe, quàm duplum.



Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ eſt aequalis ZS, & communis ZO; erunt duae BZ ZO duabus SZ ZO aequales, altera alteri, & baſis BO baſi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS eſt maior. & quoniam angulus OZB vnicuique ipſorum BZK KZS eſt ęqualis; in aequalibus namque circumferentijs conſiſtunt OB BK KS; quòd rectae lineę ęquales ſint: erit & vterque angulorum BZK KZS maior angulo OZS. ſed quat- Coroll.15.primi. *tuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis ſunt aequales; etenim circa vnum punctum Z conſiſtunt. vnuſquiſque igitur angulorum OZB BZK KZS eſt obtuſus. ideoq́; obtuſiangulum eſt triangulum BZO. At in obtuſiangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum maius eſt quadratis, quae à lateribus obtuſum angulum continentibus fiunt. ergo quadratum, quod ex BK maius eſt quadratis, quae ex KZ ZB. ſed quadrata ex KZ ZB dupla ſunt quadrati*

drati ex BZ; aequalis enim eſt KZ ipſi ZB. quadratũ igitur ex KB, maius eſt, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonſtrare.

F Et quoniam BD minor eſt quàm dupla ipſius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente conſtat: & cum BD dupla ſit ipſius DA, erit ipſius DΩ minor, quàm dupla.*

G Atque eſt vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectãgulum quod DΩ ΩB continetur.] *Deſcribatur ex ΩB quadratum quod ſit ΩBΥΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit ut BD ad DΩ, ita rectangulum DΥ ad rectangulum DΞ. ex prima ſexti, hoc eſt ita rectangulum, quod continetur DB BΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*

H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur eſt ęquale quadrato KB.] *Eſt enim angulus in ſemicirculo DKB rectus, & ab eo ad baſim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octauę ſexti libri KB eſt proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB: & ob id quadratum quidem ex KB ęquale eſt rectangulo contento DB BΩ; quadratum uero ex KΩ ęquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior eſt AZ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE deſcriptum eſt, non tangens minorem circulum FGH, perpendicularis à puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex ijs, quae in antecedente demonſtrata ſunt. quare AΩ maior erit, quàm AG; & idcirco AZ longe maior, quàm quae à centro minoris ſphęrae ad eius ſuperficiem pertinet.*

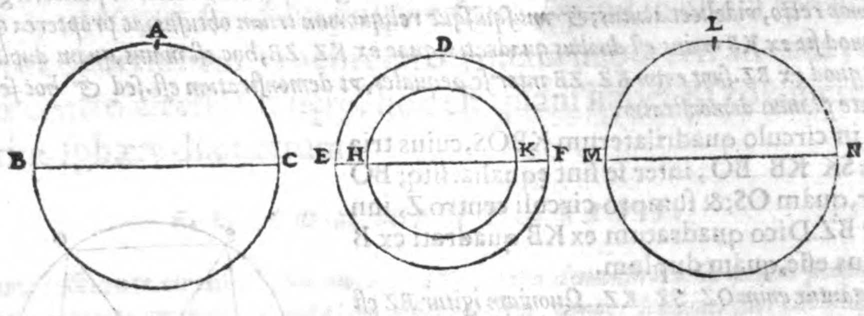
L Et quoniam in circulo eſt BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim deſcriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et ſunt æquales OB BK KS, & minor OS] *Hęc proxime demonſtrata ſunt.*

N Et cum æqualis ſit AL ipſi AB.] *Sunt enim à centro ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Sphæræ inter ſe in tripla ſunt proportione ſuarum diametrorũ.



Intelligantur ſphæræ ABC DEF; quarum diametri BC EF. Dico ABC ſphærã ad ſphęram DEF triplam proportionem habere eius, quã habet BC ad EF. Si enim non ita eſt, ſphęra ABC ad ſphæram minorem ipſa DEF, vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur ſphæra DEF circa idem centrũ, circa quod eſt ſphæra GHK; deſcribaturq; in maiori ſphæra DEF ſolidum polyhedrum non tangẽs minorem ſphæram GHK in ſuperficie; & in ſphæra ABC deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphęra DEF deſcriptum eſt. ſolidum igitur polyhedrum, quod in ſphęra ABC ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphęra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet autem ABC ſphęra ad ſphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC ſphęra ad ſphęram GHK,

Ex antecedente.

Ex corol antecedente.

HK, ita ſolidum polyhedrum in ſphęra A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF; & permutando, vt ABC ſphęra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. maior autem eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphærę polyhedro, quod in ſphęra DEF eſt maior. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neque D E F ſphærã ad ſphæram minorem ipſa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphæram ABC neque ad maiorem ſphæram ipſa DEF triplam proportionem habere eius, quã BC ad EF. Si enim fieri poteſt, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur ſphęra LMN ad ABC ſphæram triplam proportionē habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Vt autem ſphæra LMN ad ABC ſphęram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quãdam minorem ipſa ABC, vt ante demonſtratum fuit; quoniam ſphæra LMN maior eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphęram minorem ipſa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphęram maiorē ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad EF. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo ABC ſphæra ad ſphęram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonſtrare oportebat.

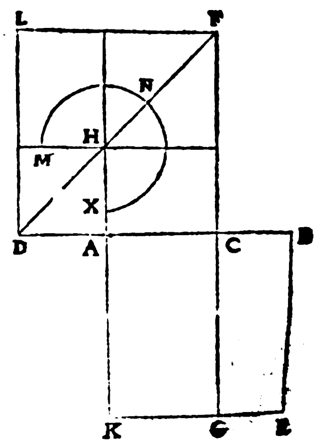
DVODECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER TERTIVSDECIMVS ET SOLIDORVM TERTIVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens dimidiā totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia fit, quadrati.

A Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in puncto C; & ſit AC maior portio: producaturq́; in directum ipſi CA recta linea AD; & ponatur AD ipſius AB dimidia. Dico quadratum ex CD B quadrati ex D A quintuplum eſſe. deſcribantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF deſcribatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atque eſt rectāgulum quidem CE quod continetur AB BC: quadratum vero ex AC eſt FH. ergo rectangulum CE quadrato FH eſt æquale. & quoniam BA dupla eſt ipſius A D; ęqualis autem BA ipſi AK; & DA ipſi AH: erit & KA ipſius AH dupla. ut autem KA ad AH, ita eſt rectangulum KC ad ipſum CH. 1.sexti. duplum igitur eſt KC rectangulum rectanguli CH: C & ſunt rectangula LH HC ipſius CH dupla. ergo rectangulum KC rectāgulis LH HC eſt ęquale. oſtenſum autem autem eſt & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratū eſt æquale gnomoni MNX. Rurſus quoniam BA D dupla eſt ipſius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc eſt quadratum AE quadrati DH. ęquale autem eſt quadratum AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomon quadruplus eſt quadrati DH. & ob id totum DF ipſius DH eſt quintuplum. atque eſt DF quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplū erit. ergo ſi recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, maior portio aſſumens totius dimidiam quintuplum poteſt eius, quòd à dimidia fit quadrati. quod demonſtrare oportebat.



SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Reſolutio eſt ſumptio quæſiti tāquam conceſsi per ea, quæ conſequuntur in aliquod uerum conceſſum.

Compoſitio eſt ſumptio conceſsi per ea, quę conſequuntur in quæſiti concluſionem, ſeu deprehenſionem.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea quædam A B extrema, ac media ratione ſecetur in C, ſitque maior portio A C, & ponatur A D ipſius AB dimidiæ ęqualis. Dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplū eſſe. Quo
niam enim quintuplum eſt quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex 4. ſecundi.
CD æqualia ſunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur:
erunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex
AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnà cum eo, quod bis contine-
tur CA AD quadruplum eſt quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis CA AD con
tinetur æquale eſt rectangulum BAC. eſt enim BA ipſius AD dupla. quadrato au
tem ex A C eſt ęquale rectangulum ABC; namque A B extrema, ac media ratione 17
ſecta eſt in C. rectangulum igitur BAC vnà cum rectangulo ABC quadruplum eſt
quadrati ex AD. ſed rectangulum B A C vnà cum rectangulo ABC eſt id, quod ſit
ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum eſt quadrati ex AD. quod 2. ſecundi. Cor. 10. sexti
quidem ita ſe habet. eſt enim BA ipſius AD dupla.

Compoſitio.

Quoniam igitur quadruplum eſt quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratū autem ex AB eſt rectangulum BAC: vnà cum rectangulo ABC: erit rectangulum B AC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. ſed rectangulum quidem BAC eſt æquale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC eſt æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum eſt quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnà cū eo, quod bis DA AC continetur quintuplum eſt quadrati ex DA. ſed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC eſt id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in pūcto C] *Quomodo hec fiat, docuit in vndecima propoſitioue ſecundi libri, & in 30 ſexti.* A

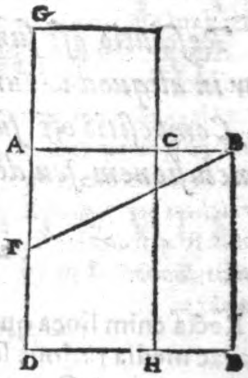
Deſcribantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF deſcribatur figura] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iuncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipſarum DL CF, quae diametrum DF in puncto H ſecet. rurſus per H ducatur recta linea alterutri ipſarum LF DC parallela.* B

Et ſunt rectangula LH HC ipſius HC dupla] *Supplementa enim LH HC inter ſe ſunt aequalia ex 43 primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] *Ex 20 ſexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] *Poſſumus etiam aliter, & fortaſſe expeditius idem demonſtrare in hunc modum.* E

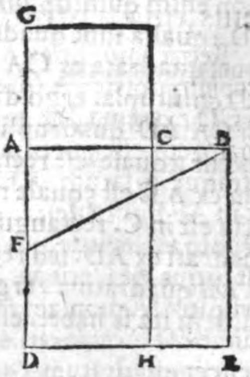
Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ex AB fiat quadratũ ADEB; ſectaq; AD bifariã in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipſi FB ſit aequalis, erit AG equalis AC ex demõſtratis ĩ vndecima ſecũdi libri. quare FG cõſtat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratũ ex FG quintuplũ eſſe quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla eſt ipſius AF, erit quadratũ ex AB quadrati ex AF quadruplũ. ſed quadratum ex FB eſt aequale quadratis ipſarum FA AB, ex 47 primi. quadratũ igitur ex FB, hoc eſt quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplũ erit. quod oportebat demonſtrare. ſed & alia nonnulla demonſtranda ſunt, quae ad hanc ſectioaem attinent. 20.ſexti.



PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione ſecta, & vtraque ipſius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione ſecetur in C. Dico ipſas AC CB datas eſſe. Conſtruantur enim eadem, quę ſupra. & quoniam AB eſt 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratũ eſt 25: quadratũ aũt ipſius AB eſt 100. ergo quadratũ ex FB eſt 125, & ipſa FB, hoc eſt FG ℞125. ſed FA eſt 5. erit igitur AG, hoc eſt AC ℞ 125 minus. Quòd cũ 5. ſit vt BA ad AC, ita AC ad CB, rectangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC. quadratum autem ex AC, hoc eſt quadratum ℞ 125 minus 5 eſt 150 minus ℞ 12500. ſi igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciẽs CB, erit CB 15 minus ℞ 125. ergo AC CB datae ſunt, vt oportebat. 17.ſexti.



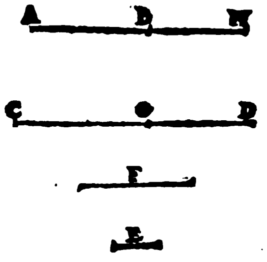
Ex quibus manifeſtum eſt ſi recta linea rationalis, expoſitæ rationali longitudine commẽſurabilis extrema ac media ratione ſecta fuerit, maiorem eius portionẽ apotomen eſſe quintam, & minorem eſſe apotomen primam.

Eſt enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipſi BA longitudine incommenſurabilis; ac propterea FB plus poteſt, quàm FA quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. eſt autem AF, quae ipſi AG congruit, expoſitae rationali longitudine commenſurabilis. quare AC eſt apotome quinta. At vero CB eſſe apotomen primam, manifeſto conſtat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri. 9.decimi. 5.diffi. tertiarum.

PROPOSITIO. II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita vt CD ſit ipſius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis ſit F: & ex CD abſcindatur DG ipſi F aequalis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc eſt ad F, ita AH ad HB. et quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportionales ſunt, erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratum ex F. eſt autem CD quintupla ipſius E. quadratũ igitur ex CD quintuplum eſt quadrati ex F. ergo quadratum ex AH quadrati ex HB eſt quintuplũ. eſtq; AB maior portio Cor.20.ſexti



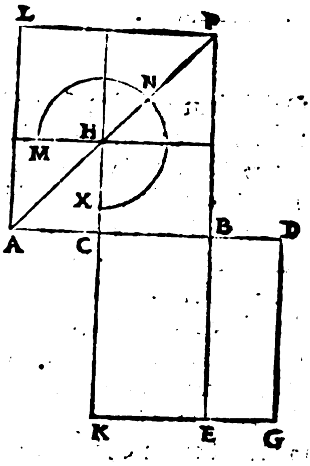
ior portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione ſecatur. quare BH eſt totius dimidia, & dupla ipſius BH eſt tota recta linea, quam nobis inueniendam propoſuimus.

Itaque conſtat, Datæ maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione ſecetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam eſſe.

Sit enim maior portio AB 4, ſicq; CD 5, & E 1. erit F, hoc eſt GD ℞ 5, & CG 5 minus ℞ 5. fiat vt 5 minus ℞ 5 ad ℞ 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum ℞ 5 per 4, producetur ℞ 80. deinde multiplicabimus 5 minus ℞ 5 per eam, quae ex binis nominibus ipſi reſpondet, videlicet per 5 plus ℞ 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus ℞ 80 fiet ℞ 2000 plus ℞ 400. quare ſi ad 20 applicabimus ℞ 2000 plus ℞ 400, latitudinem faciet ℞ 5 plus 1, cuius duplum eſt ℞ 20 plus 2. tota igitur recta linea eſt ℞ 20 plus 2, & minor portio ℞ 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipſius quintuplum poſsit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ lineæ.



Recta enim linea AB partis ipſius AC quintuplum poſsit: & ipſius AC dupla ſit CD. Dico ſi CD extrema, ac media ratione ſecetur, CB maiorem eſſe portionem. Deſcribãtur enim ex vtraque ipſarum AB CD quadrata AF CG: & in AF figura deſcripta, producatur FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum eſt ipſius AH, erit MNX gnomõ ipſius AH quadruplus. & quoniam DC dupla eſt CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum eſt, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH. oſtenſus eſt autem MNX gnomon quadruplus ipſius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG eſt ęqualis. Rurſus quoniam DC dupla eſt CA, æqualis autem eſt DC ipſi CK, & AC ipſi CH; erit KC ipſius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum eſt parallelogrammi BH. & ſunt parallelogramma LH, HB ipſius HB dupla. ergo KB æquale eſt ipſis LH HB. ſed & totus MNX gnomõ toti CG eſt æqualis. & reliquum igitur HF æquale eſt reliquo BG. atque eſt BG quidem quod CD DB cõtinetur; etenim CD eſt ęqualis DG: ipſum vero HF eſt quadratum ipſius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB eſt ęquale. vt igitur DC ad CB, ita eſt CB ad BD. maior autem eſt DC, quàm CB. ergo & CB quàm BD eſt maior. Itaque recta linea CD extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt CB. ſi igitur recta linea partis ipſius quintuplum poſsit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione ſecta, maior portio reliqua pars eſt eius, quę à principio rectę lineæ. quod demonſtrare oportebat.

A

10. ſexti.

A
B
14. ſexti.

At veró duplam ipſius AC maiorem eſſe, quàm CB, ſic demonſtrabitur.

Si enim nõ, ſit, ſi fieri poteſt, BC ipſius CA dupla. quadratum igitur ex BC quadruplum eſt quadrati ex CA; & ob id vtrumque quadratorum, quę fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum eſt. ſed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA ęquale eſt quadratis ex BC CA. quod fieri non poteſt. non igitur BC dupla eſt ipſius CA. ſimiliter demonſtrabimus neque minorem BC ipſius CA duplam eſſe. multo enim maius abſurdum ſequetur. ergo ipſius AC dupla maior eſt quàm BC. quod demonſtrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea quædam CD partis ipſius DA quintuplũ poſſit,& ipſius DA dupla ponatur AB. Dico AB extrema, ac media ratione ſectam eſſe in puncto C,& maiorem portionem eſſe AC, quæ quidem eſt reliqua pars eius,quę à principio rectæ lineę. Quoniam enim AB extrema,ac media ratione ſecta eſt in C,& AC eſt maior portio; erit rectangulum ABC quadrato ex AC ęquale. eſt autem & rectangulum BAC ęquale ei, quod bis DA AC continetur. etenim BA ipſius AD eſt dupla. ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo BAC, quod quidem eſt ipſius AB quadratũ, æquale eſt ei, quod bis DA AC continetur vnà cum quadrato ex AC. quadratum autem ex AB quadruplum eſt quadrati ex AD. ergo quod bis DA AC continetur vnà quadrato ex AC quadruplum eſt eius, quod fit ex AD quadrati. ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC; hoc eſt quadratũ ex CD, quintupla ſunt quadrati ex AD. quod quidem ita ſe habet.

2. secundi.
20. sexti.
4. secundi.

Compoſitio.

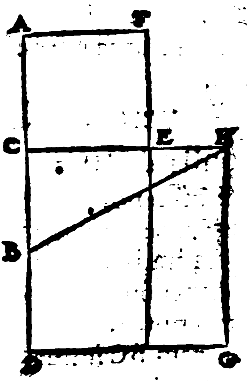
Qm̃ igitur quadratũ ex CD quintuplũ eſt quadrati ex DA; quadrato aũt ex CD ęqualia ſunt quadrata ex DA AC vnà cũ eo, quod bis DA AC cõtinetur; erũt quadrata ex DA, AC vnà cũ eo, quod bis cõtinetur DA AC quintupla ipſius quadrati ex DA. & diuidendo quod bis DA AC cõtinetur vnà cũ quadrato ex AC quadrupla sũt quadrati ex AD. eſt aũt & quadratũ ex AB quadrati ex AD quadruplũ. ergo quod bis cõtinetur DA AC, quod eſt rectãgulũ BAC vnà cũ quadrato ex AC eſt ęquale quadrato ex AB. ſed quadratũ ex AB eſt rectãgulũ ABC unà cũ rectãgulo BAC. rectãgulũ igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC eſt æquale rectangulo BAC vnà cũ quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC, erit reliquũ rectangulũ ABC quadrato ex AC æquale. eſt igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. maior autem eſt BA, quam AC. ergo & AC quam CB eſt maior. quare AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, & AC eſt maior portio. quod demonſtrare oportebat.

[illegible]
2. secundi.
14. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipſius AC quintuplum poſſit] *Hoc eſt quadratum rectę lineę AB quintuplum ſit quadrati partis ipſius AC.*

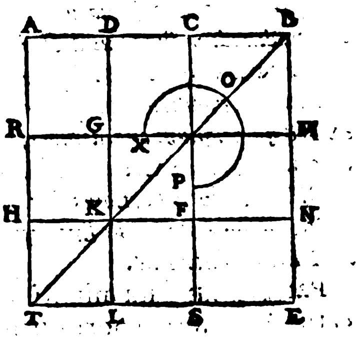
B Maior autem eſt DC, quam CB] *Hoc eſt dupla ipſius AC maior eſt, quam BC, illud uero ipſe mox demonſtrabit. ſed & aliter idẽ demõſtrari poteſt hoc pacto.*



Recta enim linea AB partis ipſius BC quintuplum poſſit, & producatur AB ad D, ita vt DC ipſius CB ſit dupla. Dico ſi CD extrema, ac media ratione ſecetur, maiorem eius portionem eſſe AC. fiãt enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur. itaq; quoniam DC, hoc eſt HC dupla eſt ipſius CB, erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum. ſed quadratum ex BH eſt aequale duobus quadratis, quae fiunt ex HC CB. quadratum igitur ex BH quintuplum eſt quadrati ex CB; ideoq; BH ipſi BA eſt aequalis. ergo ex ijs, quae demonſtrata ſint in vndecima ſecundi libri recta linea CH extrema, ac media ratione ſecatus in E, & CE eſt maior portio. eſt autem CH ipſi CD aequalis, & CE aequalis ipſi CA. ſi igitur recta linea partis ipſius quintuplum poſſit, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, portio minor aſſumens dimidiam maioris portionis quintuplũ poteſt eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.



Recta enim linea quædã AB extrema, ac media ratione ſecetur in C; ſitq́; AC maior portio, & ſecetur bifariam in D. Dico quadratum ex B D quadrati ex DC quintuplũ eſſe. Deſcribatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AC dupla eſt CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc eſt quadratum RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur eſt ęquale quadrato ex AC; atque eſt rectangulum quidem contentũ AB BC ipſum CE; quadratum vero ex AC eſt RS: erit rectangulum CE quadrato RS ęquale. quadruplum autem eſt quadratũ RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum eſt. rurſus quoniam AD. ęqualis eſt DC, erit & HK ip KF æqualis. ideoq; quadratum GF eſt ęquale quadrato HL. ęqualis igitur eſt GK ipſi KL, hoc eſt MN ipſi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE eſt æquale. ſed MF eſt æquale CG. quare & CG ipſi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP eſt æqualis parallelogrammo CE. oſtenſum autem eſt CE quadruplum GF quadrati. & gnomon igitur XOP ipſius GF eſt quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplũ eſt ipſius GF. eſt autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ęx D C. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC eſt quintuplum. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C: & ſit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum eſſe. Quoniam enim quadratum ex BD quintuplum eſt quadrati ex DC; quadratum autem ex BD eſt quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo qnod AB BC continetur vnà cum quadrato ęx DC quintuplũ eſt quadrati ex DG: & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum eſt. Ei vero, quod continetur AB BC eſt ęquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum eſt. quod quidem ita ſe habet eſt enim AC ipſius CD dupla. 6. ſecundi.

Compoſitio.

Quoniam dupla eſt AC ipſius CD, erit quadratũ ex AC quadrati ex CD quadruplum. ſed quadratum ex AC eſt æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum eſt quadrati ex CD: & componendo quod continetur AB BC vnà cum quadrato ex CD, quod quidem eſt quadratum ex BD, quintuplum eſt quadrati, quod fit ex DC. atque hoc eſt, quod demonſtrare oportebat.

Ex iam dictis & alia conſtare poſſumus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.

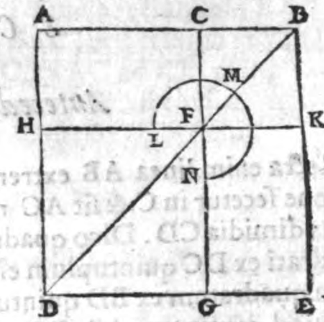
Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E; ſitq; CD ipſius E quintupla: & inter CD E media proportionalis ſumatur F, & alia conſtruantur, quemadmodum ſuperius dictum eſt in propoſitione ſecunda earum, quas nos ad primam huius appoſuimus. ſimiliter demonſtrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum eſſe. atque eſt AB minor portio rectas lineae, quae extrema, ac media raiione ſecatur. ergo BH eſt maioris portiouis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea eſt AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

Patet igitur data minori portione rectæ lineç, quæ extrema ac media ratione ſecatur, & maiorem portionem & totam lineam datam eſſe.

Sit enim minor portio AB 4, & ſit CD 5, & E 1. ſimiliter, vt ſupra eodem in loco, demonſtrabimus, maiorem portionem eſſe ℞ 20 plus 2 quare tota recta linea erit 6 plus ℞ 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla ſunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.



Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla eſſe. Deſcribatur enim ex AB quadratū ADEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, & maior portio eſt AC; erit rectangulum contentū AB BC quadrato ex AC æquale. atque eſt rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG eſt quod fit ex A. C. ęquale igitur eſt AK ipſi HG. & quoniam rectangulum AF eſt æquale FE, commuue apponatur CK, erit totum AK toti CE æquale. ergo rectāgula CE AK ipſius AK ſunt dupla. ſed rectāgula AK CE ſunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla ſunt ipſius AK. rectangulum autem AK oſtenſum eſt æquale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK ipſius HG ſunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla ſunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG ſunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem ſunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH eſt quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC ſunt tripla. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC maior portio

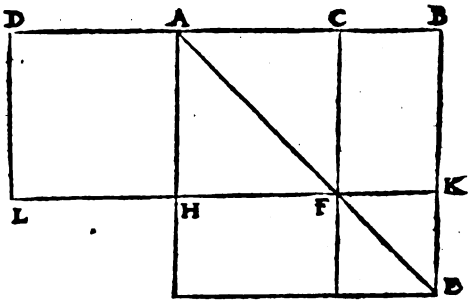
portio. Dico quadrata ex AB BC tripla eſſe quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex AB BC tripla ſunt quadrati ex AC; ſuntque quadrata ex AB BC ęqualia rectãgulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cõtinetur AB BC duplũ quadrati ex AC. ergo quod ſemel AB BC continetur quadrato ex AC eſt æquale. quod quidem ita ſe habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in puncto C. .xxi. A

Compoſitio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, atque eſt AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC ęquale: ergo quod bis continetur AB BC duplum eſt quadrati ex AC: & cõponendo quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum eſt quadrati ex AC. ſed quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC eſt æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC ſunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturque ipſi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quæ à principio poſita eſt recta linea.



Recta enim linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit AC portio maior: ponaturq; ipſi CA æqualis AD. Dico rectam lineam DB extrema, ac media ratione ſecari in puncto A: & maiorem portionem eſſe AB, quę à principio poſita eſt. Deſcribatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, erit rectangulum quod continetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC eſt CE: quadratum vero ex AC eſt CH. ergo EC ipſi CH eſt ęquale. ſed CE eſt ęquale EH, & CH ipſi HD. quare & DH ipſi HE æquale erit. cõmune apponatur HB. totum igitur DK toti AE eſt æquale. atque eſt DK quidem, quod BD DA continnetur; eſt enim AD æqualis DL: quadratũ aũt AE eſt quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur eſt ęquale quadrato ex AB, & ob id. vt DB ad BA, ita eſt BA ad AD. ſed BD eſt maior, quam 14 .ſexti. BA. maior igitur eſt BA quàm AD. ergo DB extrema, ac media ratione ſecta eſt in A, & AB eſt maior portio. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta .n. linea AB extrema, ac media ratione ſecetur in C: & ſit maior portio A C: pona-

C:ponaturq; AD ipſi AC æqualis. Dico DB extrema ac media ratione ſecari in puncto A: & BA maiorem eſſe portionem. Quoniã enim DB extrema, ac media ratione ſecta eſt in A, & maior portio eſt AB; erit vt DB ad BA, ita BA ad AD. æqualis autem eſt DA ipſi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad AC: & per conuerſionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare diuidendo ut BA ad AD, ita AC ad CB. æqualis autem eſt DA ipſi AC. eſt igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. quod quidem ita ſe habet, etenim AB extrema, ac media ratione ſecatur in C puncto.

A.

Compoſitio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, erit vt BA ad AC ita AC ad CB. æqualis autem eſt CA ipſi AD. ergo ut BA ad AD, ita AC ad CB: cõponendoque vt BD ad DA, ita AB ad BC; & per conuerſionem rationis vt DB ad BA, ita BA ad AC. atque eſt CA æqualis AD. eſt igitur vt DB ad BA, ita BA ad AD. quare DB extrema, ac media ratione ſecatur in pũcto A, & BA eſt portio maior.

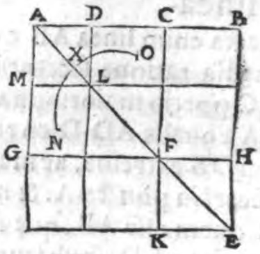
F. C. COMMENTARIVS.

Sed non inutile uiſum eſt hoc loco demonſtrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto libro, quamquam eius demonſtrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, abſcindaturque à maiori portione linea, quę minori ſit ęqualis; erit etiam ea extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit quæ abſciſſa eſt recta linea

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media rõne ſecetur in C, ſitq; AC maior portio: & ab ipſa AC abſcindatur CD, quae ipſi CB ſit aequalis. Dico AC extrema, & media rõne ſecari in D: & CD maiorem eſſe portiorẽ. fiat enim ex AB quadratũ AE: & iuncta AE ducantur per CD rectae lineae CFK DL ipſi BE parallelae, quae diametrum AE ſecent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelae ipſi AB. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C; rectangulũ, quod AB BC continetur, hoc eſt rectangulum CE eſt aequale quadrato AF. ſed ipſi CE aequale eſt rectangulum GE; etenim ſupplementa CH GK inter ſe ęqualia ſunt; & quadratum FE eſt commune vtrique. ergo rectangulum GE quadrato AF eſt aequale. ſi igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum; & à quadrato AF auferatur quadratum LF, quod quidem eſt aequale quadrato FE, cum DE CB ſint aequales, reliquum GK rectangulum, hoc eſt rectangulum MF, hoc eſt ipſum DF gnomoni NXO aequale erit, à quibus ſublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum aequale quadrato LF. at rectangulum quidem DG eſt quod CA AD continetur: quadratum vero LF eſt quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita CD ad DA. ſed AC maior eſt, quàm CD. ergo & CD quàm DA maior erit. recta igitur linea AC extrema, ac media rõne ſecta eſt in D, & maior eius portio eſt CD. quod demõſtrare oportebat.

14.sexti.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB; & ſecetur extrema, ac media ratione i C, ſitque AC maior portio. Dico vtramque portionem AC CB irrationalẽ

eſſe, quæ apotome appellatur. producatur enim BA in D, & ſit ipſius BA dimidia AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quę eſt ipſius AB dimidia; erit quadratum ex CD ex 1. huius quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD com- 6. decimi menſurabile eſt quadrato ex DA. rationale autem eſt quadratum ex DA; etenim DA eſt rationalis, cum ſit ipſius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD 6. dif. decimi eſt rationale; ac propterea ipſa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipſi DA incommenſurabilis eſt longitu- 9. decimi dine. quare CD DA rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & idcir- 74. decimi co AC apotome eſt. Rurſus quoniam AB extrema, ac media ratione ſecta eſt, & maior portio eſt AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. ſed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen 98. decimi primam. ergo BC eſt apotome prima. oſtenſa eſt autem & AC apotome. ſi igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur. atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

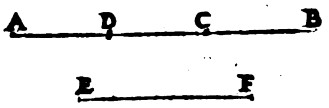
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos ſupra etiam aliter demonſtrauimus. ſed & alia ab his non abhorrentia demonſtrare aggrediemur, quae eiuſmodi ſunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione ſectæ ſit rationalis, expoſitę rationali longitudine commenſurabilis, erit minor portio apotome qninta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit maior portio AC rationalis, expoſitae rationali longitudine commenſurabilis. Dico minorem portionẽ CB eſſe apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam.

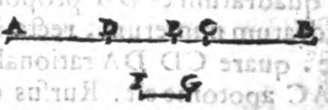


Dimidatur enim AC bifariam in D. & quoniam AB extrema, ac media ratione ſecatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD, quae eſt dimidia portionis maioris; quadratum ex BD quintuplum eſt quadrati 3. huius *ex DC; ac propterea ad ipſum proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atque ipſi commenſurabile erit. rationale autem eſt quadratum ex* 6. decimi *DC, quòd ipſa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD eſt rationale, & ipſa BD ra-* 6. dif. decimi *tionalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipſi DC incommenſurabilis erit lon-* 9. decimi *gitudine. quare BD DC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoque CB apotome eſt. Dico & quintam eſſe. ſit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD ſuperat quadratum ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta li-* 9. decimi *nea BD ipſi EF longitudine eſt incommenſurabilis. quare BD plus poteſt, quàm DC quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine. atque eſt DC longitudine commenſurabilis expoſitae rationali AC. ergo CB eſt apotome quinta. rurſus quoniam AB extrema, ac media ratione ſe-* 5. dif. tertiorum. *catur in C; & AC eſt maior portio, erit rectangulum ABC aequale quadrato ex AC. quadratũ igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. ſed quadratum rationalis ad apotomen appllicatum latitudinem facit eã, quę ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipſa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus eſt quinta. ſi igitur maior portio rectae lineae extrema, ac media ratione ſectae ſit rationalis, expoſitae rationali longitudine commen-*

commenſurabilis, erit maior portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonſtrare oportebat.

PROPOSITIO II.

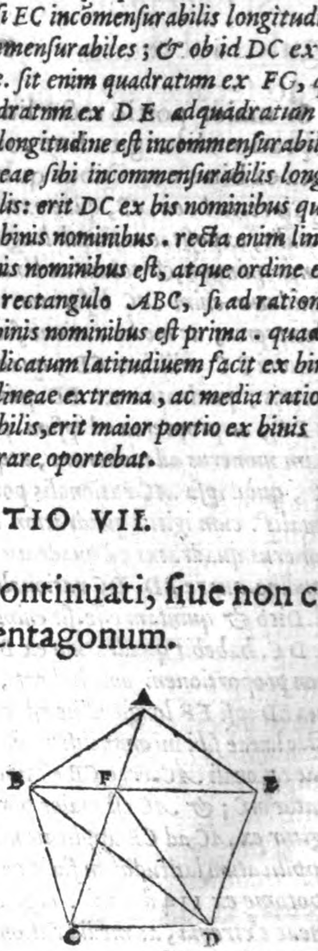
Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectę ſit rationalis, expoſitæq; rationali longitudine commenſurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.



Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione ſecetur in C, & ſit minor portio CB rationalis, expoſitęq; rationali longitudine commenſurabilis. Dico maiorem portionē AC eſſe ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. ſecetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua ſupra, demonſtrabitur quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum eſſe. itaque ſecetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam BD ad D C. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipſi commen-
39.quinti *ſurabile. & quoniam eſt vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, vt BD ad DC, hoc eſt ut DE ad EC. ergo cum tres rectae lineae proportio-*
Cor.20.sexti *nales ſint BE ED EC; erit BE ad E C, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. ſed quadratum ex BE quintuplum eſt quadrati ex ED: eſt enim BE ad ED, ut BD ad DC. quare BE ipſius*
6.dif.decimi *EC quintupla eſt; & idcirco BC eſt quadrupla ipſius CE; eſtq; BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipſi CB longitudine commenſurabilis. & quoniam quadratum ex DE commenſurabile eſt*
9.dif.decimi *quadrato ex EC, atque eſt quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratū ex DE, ipſaq; DE rationalis. quòd cum quadratum ex DE ad quadratū ex EC proportionem non habeat,*
9.decimi *quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit DE ipſi EC incōmenſurabilis longitudine.*
37.decimi *ſunt igitur DE EC rationales, & inter ſe potentia ſolum commenſurabiles; & ob id DC ex binis nominibus eſt, cuius maius nomen DE. Dico & quintam eſſe. ſit enim quadratum ex FG, quo*
9.decimi *quadratum ex D E ſuperat quadratum ex EC. habebit quadratum ex D E ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo F G ipſi D E longitudine eſt incommenſurabilis. itaque quoniam DE plus poteſt quàm E C quadrato rectae lineae ſibi incommenſurabilis longitudine; eſtq; EC expoſitae rationali CB longitudine cōmenſurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. eſt autem AC ipſius CD dupla. ergo & AE eſt quinta ex binis nominibus. recta enim linea commenſurabilis ei, quae eſt ex binis nominibus, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC ſit aequale rectangulo ABC, ſi ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipſam AB. ergo AB ex binis nominibus eſt prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudiuem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. ſi igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione ſectae ſit rationalis, expoſitae rationali longitudine commenſurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni ęquilateri tres anguli ſiue continuati, ſiue non cōtinuati fuerint ęquales, ęquiangulum erit pentagonum.



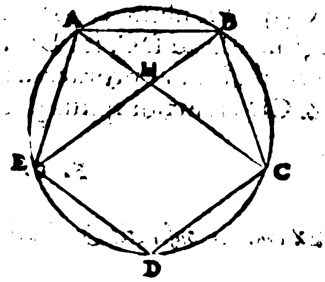
Pentagoni enim ęquilateri ABCDE tres anguli primum cōtinuati, qui ad puncta ABC ęquales inter ſe ſint. Dico pētagonum ABCDE æquiāgulum eſſe. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duę CB BA duabus BA AE æquales ſunt, altera al-
4.primi teri, & angulus CBA eſt ęqualis angulo B A E, erit baſis AC æqualis baſi B E, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera

ſubtenduntur.

ſubtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo
CAB. quare & latus AF eſt ęquale lateri BF. oſtenſa autem eſt & tota AC toti I E
æqualis. ergo & reliqua FC eſt ęqualis reliquæ FE. atque eſt CD æqualis DE. duę
igitur FC CD duabus FE ED æquales ſunt,& baſis ipſorum eſt communis FD.
quare angulus FCD angulo FED eſt ęqualis. oſtenſus autem eſt & angulus BCA æqualis 8. primi
angulo AEB. totus igitur BCD ęqualis. eſt toti AED. ſed angulus BCD poſitus
eſt æqualis angulis, qui ſunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis,
qui ſunt ad AB æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & angulum CDE angulis,
qui ſunt ad AB eſſe æqualem. ęquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum. ſed
non ſint anguli continuuati ſibi ipſis æquales, ſed qui ſunt ad puncta ACD. Dico &
ſic æquiangulum eſſe ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ
BA AE duabus BC CD æquales ſunt, & angulos equales continent; erit baſis BE
ęqualis baſi BD, & ABE triangulum triãgulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis
ęquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. æqualis igitur eſt angulus AEB angulo
CDB. eſt autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE
eſt æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE eſt æqualis. Sed angulus
CDE angulis, qui ſunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis,
qui ſunt ad AC eſt æqualis. Eadem ratione & angulus ABC ęqualis eſt angulis,
qui ſunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum. quod demonſtrare
oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos ſubtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione ſe mutuo ſecant, & maiores ipſarum portiones pentagoni lateri ſunt æquales.

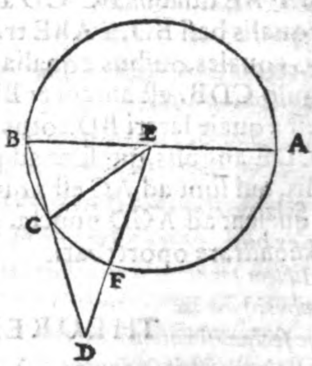


Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABC
DE duos continuatos angulos, qui ſunt ad puncta
AB ſubtendant rectę lineæ AC BE, quæ ſeſe in pũcto
H ſecent. Dico vtramque ipſarũ extrema, ac media
ratione ſecari in puncto H; & maiores earũ portiones
pentagoni lateri æquales eſſe. deſcribatur
enim circa ABCDE pentagonũ circulus ABCDE.
& quoniã duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC 4. primi
ęquales ſunt, & angulos æquales continent; erit baſis
BE baſi AC æqualis, & ABE triangulum ęquale
triangulo A B C, & reliqui anguli reliquis angulis
æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. æqualis igitur eſt BAC angulus
angulo ABE. ergo AHE angulus auguli BAH eſt duplus; etenim extra triãgulum 32. primi
eſt ABH. eſt autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quod & circumferentia 33 ſexti
EDC circumferentiæ CB eſt dupla. ergo HAE angulus æqualis eſt angulo
AHE; & ob id recta linea HE eſt æqualis ipſi EA, hoc eſt ipſi AB. et quoniam BA 6. primi
eſt æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB ęqualis. ſed angulus ABE oſten- 21. tertij
ſus eſt ęqualis angulo BAH, ergo & BEA angulus æqualis eſt angulo BAH. &
communis duobus triangulis, videlicet triangulo A B E, & triangulo A B H eſt
angulus A B E. reliquus igitur B A E reliquo A H B eſt æqualis. ergo triangulum
A B E æquiangulum eſt triangulo ABH; ideoque vt EB ad BA, ita eſt A
B ad BH. ęqualis autem eſt BA ipſi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed
BE maior eſt quàm EH. ergo & EH quàm HB eſt maior. recta igitur linea BE extrema,
ac media ratione ſecta eſt in H, & maior portio H E pentagoni lateri eſt

æqualis. Similiter demonſtrabimus & A C extrema, ac media ratione ſecari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri ęqualem eſſe. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo deſcripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione ſecta, & maior ipſius portio erit hexagoni latus.



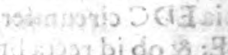
Sit circulus ABC, & deſcriptis in dicto circulo figuris, ſit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum ſibi ipſis conſtituantur. Dico totam rectam lineam BD extrema, ac media ratione ſecari in C, & maiorem eius portionem eſſe CD. Sumatur enim centrum circuli, quod ſit E; iunganturq; EB EC ED, & BE ad A producatur. quoniã igitur decagoni æquilateri latus eſt BC, erit ACB circumferentia circumferentiæ BC quintupla; & ob id circumferentia AC. qua-
Vlt. ſexti. drupla eſt circumferentiæ CB. vt autem circumferentia A C ad ipſam C B, ita A E C angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadru-
5. primi. plus eſt. & quoniã EBC angulus eſt ęqualis angulo E
32. primi. CB, erit angulus AEC. anguli ECB duplus. eſt autem recta linea EC æqualis ipſi C D; vtraque enim eſt æqualis lateri hexago-
5. primi. ni, quòd in circulo A B C deſcribitur. quare & angulus C E D æqualis eſt angulo
32. primi. CDE. eſt igitur angulus ECB anguli EDC duplus. ſed & angulus AEC duplus oſtẽſus eſt anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC eſt quadruplus. oſtenſus autem eſt & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus angulo BEC æqualis erit. atque eſt angulus E B D communis duobus triangulis BEC BED. &
32. primi. reliquus igitur BED reliquo ECB eſt æqualis. ideoq; triangulum E B D triangulo
4. ſexti. EBC ęquiangulum. ergo vt DB ad BE, ita EB ad BC. æqualis autẽ eſt EB ipſi CD. vt igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; eſt BD maior quàm DC. ergo & DC quã CB eſt maior; ac propterea recta linea B D extrema, ac media ratione ſecta eſt in C, & CD eſt maior ipſius portio. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis & alia demonſtrare licet, nempe hęc.

PROPOSITIO I.

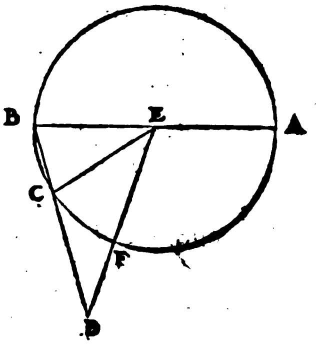
Si latus hexagoni extrema, ac media ratione ſecetur, erit maior eius portio decagoni latus.



Sit recta linea AB, quae ſecetur in C, ita vt AC ſit hexagoni latus, & C B latus decagoni in eodem circulo deſcripti. ergo
Ex antecedente. *AB extrema, ac media ratione ſecatur in C: atque eſt AC maior portio. abſcindatur ab AC linea CD ipſi CB aequalis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione ſecta in D: atque erit CD portio maior ex ijs, quae à nobis demonſtrata ſunt ad quintam huius. eſt autem A C hexagoni latus, & CD latus decagoni. ſi igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione ſecetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonſtrare oportebat.*

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum deſcribatur, erit decagoni latus apotome quinta.



Maneant enim eadem, quae ſupra; & ſit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC eſſe apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB eſt rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc eſt CD rationalis. atq; eſt DC maior portio rectae lineae DB extrema, ac media ratione ſectae; & CB minor portio eiuſdem. Quando autem maior portio rectę lineę, quae extrema, ac media ratione ſecatur ſit rationalis, minor portio eſt apotome quinta. quod à nobis ſupra demonſtratum fuit. ergo latus decagoni BC eſt apotome quinta. quod oportebat demonſtrare. ad 8. huius, Propo. 1.

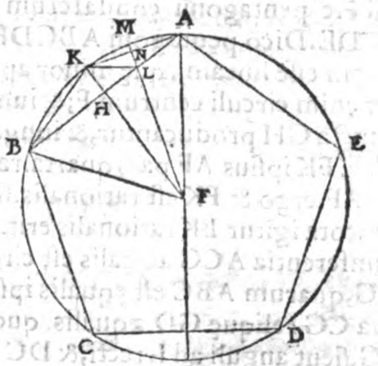
PROPOSITIO. III.

Si latus decagoni ęquilateri in circulo deſcripti, ſit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

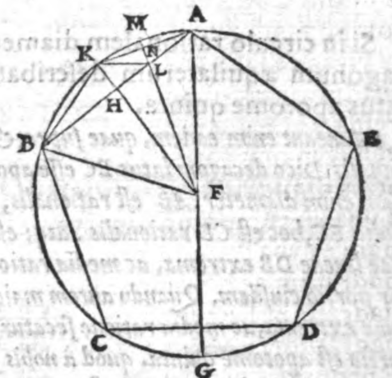
Iiſdem enim manentibus ſit latus decagoni BC rationale, Dico diametrum AB eſſe ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione ſectae eſt rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonſtratum eſt: ipſius autem CD dupla eſt AB; & quae longitudine commenſurabilis eſt ei, quae ex binis nominibus, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. ergo et AB ex binis nominibus eſt quinta. quod demonſtrare oportebat. ad 6. huius, Propo. 2.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, latus pentagoni poteſt, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.



Sit circulus ABCDE, & in ipſo pentagonum ęquilaterum ABCDE deſcribatur. Dico pentagoni ABCDE latus poſſe latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Sumatur enim centrum circuli F, iunctaq; AF ad G producatur, & iūgatur FB; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad K producatur; iunganturque AK KB. & rurſus à pūcto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniam igitur circumferentia ABCG eſt æqualis circumferētiæ AEDG, quarum ABC æqualis eſt ipſi AED, erit reliqua CG reliquæ GD æqualis. Sed CD eſt pentagoni. ergo CG decagoni erit. quòd cum AF ſit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB. quare & circūferētia AK circūferētiæ KB eſt æqualis. dupla igitur eſt circūferētia AB circūferētię BK; & ob id recta linea AK eſt decagoni latus. Eadē rōne & AK eſt dupla KM. & quoniā circumferentia AB dupla eſt circumferentię BK, ęqualis autem CD circumferentia circumferentiæ AB, erit circumferentia CD circumferentiæ BK dupla. eſtque DC dupla ipſius CG. ergo CG eſt æqualis BK, ſed BK ipſius KM eſt dupla, quoniam & 8. primi. 26. tertij.



AK. & CG igitur ipſius KM dupla erit. eſt autem & CB circumferentia circumferentię BK dupla: etenim CB eſt ęqualis BA. ergo & tota GB dupla eſt ipſius BM, & angulus GFB anguli BFM duplus. ſed & angulus GFB eſt duplus anguli FAB: quandoquidem FAB angulus ęqualis eſt angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB eſt ęqualis. communis autem duobus triangulis ABF BFN eſt KBF angulus. reliquus igitur AFB eſt ęqualis reliquo BNF, & triãgulum ABF triãgulo BFN ęquiangulum. ergo vt AB ad BF, ita FB ad BN. rectangulum igitur ABN eſt æquale quadrato ex FB. Rurſus quoniam AL eſt æqualis LK, communis autem, & ad rectos angulos LN; erit baſis KN æqualis baſi NA. ergo & angulus LKN angulo LAN eſt ęqualis. ſed angulus LAN eſt æqualis angulo KBN. & angulus igitur LKN eſt æqualis angulo KBN. angulus autem NAK eſt communis duobus triangulis AKB, & AKN. ergo reliquus AKB *reliquo* KNA eſt æqualis; & triangulum KAB triangulo KNA æquiangulum. vt igitur BA ad AK, ita KA ad AN; ac propterea rectãgulum BAN eſt ęquale quadrato ex AK. oſtẽſum eſt aũt & rectãgulũ ABN quadrato ex BF æquale. rectãgulũ igitur ABN vnà cum rectangulo BAN, quod eſt quadratum ex AB eſt æquale quadraro ex BF vnà cum quadrato ex AK. atque eſt AB quidem pentagoni latus, BF vero latus hexagoni, & AK decagoni. ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. quod demonſtrare oportebat.

Vltimc ſexti 32 primi, uel ex 20 tertij.

4. ſexti.

17. ſexti.

4. primi.

5. primi.

4 ſexti.

17. ſexti.

2. ſecundi.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur, pentagoni latus eſt linea irrationalis, quę minor appellatur.

In circulo enim ABCDE rationalẽ diametrũ habẽte pentagonũ ęquilaterum deſcribatur ABCDE. Dico pentagoni ABCDE latus irrationalem eſſe lineam, quę minor appellatur. ſumatur enim circuli centrum F; & iunctæ AF BF ad puncta GH producantur, & iungatur AC; ponaturq́; FK ipſius AF pars quarta. rationalis autem eſt AF. ergo & FK eſt rationalis. ſed & rationalis BF. tota igitur BK rationalis erit. & quoniam circumferentia ACG æqualis eſt circumferentiæ ADG, quarum ABC eſt ęqualis ipſi AED; erit reliqua CG reliquę GD æqualis. quòd ſi iungamus

6. diffi. decimi.

A AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipſius CL. Eadem ratione & anguli ad M recti ſunt, & AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC eſt æqualis angulo AMF, communis autem duobus triangulis ALC, & AMF eſt angulus LAC; reliquus ACL reliquo MFA æqualis erit; ideoq́; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulũ. ergo ut LC ad CA, ita MF ad FA; & antecedentium dupla. quare vt dupla ipſius LC ad CA, ita ipſius MF dupla ad FA. ſed vt ipſius MF dupla ad FA, ita eſt MF ad dimidiã ipſius FA. & vt igitur dupla ipſius LC ad CA, ita MF ad ipſius FA dimidiã:

B & conſequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipſius CA, ita MF ad quartam partem ipſius FA. atque eſt ipſius quidem LC dupla CD; ipſius vero CA dimidia

4. ſexti.

dimidia CM; & ipſius FA quarta pars FK: eſt igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK: & C
componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo ut quadratum, quod fit
ex vtraque DCM ad quadratum ex CM, ita quadratum ex MK ad id, quod fit ex KF
quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo pentagoni latera ſubtendit, vt AC extrema,
ac media ratione ſecta, maior portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi D
DC; & maior portio aſſumens dimidium totius quintuplum poteſt eius, quod fit à E
totius dimidia; atq; eſt totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam
ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. vt autem quadratum ex DCM tanquam
ex vna linea ad quadratum ex CM, ita oſtendimus eſſe quadratum ex MK ad
quadratum ex KF. quintuplum igitur eſt quadratum ex MK quadrati ex KF: eſtque
quadratū ex KF rationale; quippe cum diameter rationalis ſit. ergo & rationale eſt F
quadratum ex MK; & ipſa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex G
KF proportionem habet, quam numerus ad numerum. & quoniam BF quadrupla
eſt ipſius FK, erit BK ipſius KF quintupla, & quadratum ex BK vigintiquintuplum H
quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum eſt quadrati ex KF. ergo quadratum K
ex BK quadrati ex KM eſt quintuplum; ac propterea ad illud proportionē
non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommenſurabilis L
igitur eſt BK ipſi KM longitudine. atque eſt vtraque ipſarum rationalis. ergo BK
KM rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem à rationali rationalis M
auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, reliqua irrationalis eſt,
quę apotome appellatur. quare MB eſt apotome, & ipſi congruēs MK. Dico & quartam
eſſe. quo enim quadratum ex BK ſuperat quadratum ex KM, illi ſit æquale quadratum
ex N. ergo BK plus poteſt, quàm KM quadrato ex N. & quoniam commenſurabilis N
eſt KF ipſi FB, & componendo KB commenſurabilis ipſi BF; ſed & BF cōmenſurabilis O P
ipſi BH longitudine, erit & KB ipſi BH commenſurabilis. quòd cum Q
quadratum ex BK quintuplum ſit quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad
quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinque ad vnum. Ergo per cōuerſionem
rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet,
quam quinque ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratum
numerum. incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi N: idcircoq; BK plus poteſt, quàm 9. undecimi.
KN quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis. itaque quoniam tota BK plus poteſt,
quàm congruens MK, quadrato rectę lineæ ſibi incommenſurabilis, & tota BK
commenſurabilis eſt expoſita rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem R S
rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale eſt, & ipſum potens
eſt irrationalis, quæ minor appellatur. ſed AB poteſt id, quod continetur HB T
BM, propterea quòd iuncta AH triangulum ABH eſt ęquiangulum triangulo AB
M: atque eſt vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni latus eſt linea irrationalis,
quę minor appellatur. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd ſi iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipſius CL] *Iunctis* A
enim AC ALG, ſi etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG eſt aequalis circum- 27. tertij.
ferentiae GD, erit angulus CAG aequalis angulo GAD. duae igitur CA AL duabus DA AL 4. primi.
aequales ſunt, & angulus CAL eſt aequalis angulo DAL. ergo & baſis CL baſi LD eſt aequalis,
& reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur Diff. 10. primi.
ALC eſt aequalis angulo ALD. & ob id vterque rectus eſt. & cum CL ſit ęqualis LD, erit DC ip-
ſius CL dupla.

Et antecedentium dupla] *Quoniam enim eſt vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem du-* B
pla ipſius LC ad LC, ita dupla ipſius MF ad MF; erit ex aequali vt dupla ipſius LC ad CA, ita du-
pla ipſius MF ad FA.

Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22.* C
ſexti libri.

Maior portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi DC] *Ex 8. huius.* D E

totius

E Et maior portio aſſumens dimidiam totius quintuplum poteſt eius, quod fit à totius dimidia] *Ex 1. huius.*

F Ergo & rationale eſt quadratum ex MK] *Rationali enim commenſurabile, & ipſum rationale eſt ex nona diffinitione decimi libri.*

C Et ipſa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiuſdem libri.*

H Et quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 ſexti libri. eſt enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1. proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadtati ex KM eſt quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF ſit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF ſit vt 5 ad. 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc eſt vt 5 ad 1.*

L Incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, reliqua irrationalis eſt, quę apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*

N Et quoniam commenſurabilis eſt KF ipſi FB] *Intellige commenſurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; poſita eſt enim KF quarta pars ipſius FA, hoc eſt ipſius FB.*

O Et componendo KB commenſurabilis ipſi BF] *Ex 16 decimi.*

P Sed & BF commenſurabilis ipſi BH longitudine] *Eſt enim BF ipſius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipſi BH commenſurabilis] *Ex 12 decimi.*

R Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irralione eſt & ipſum potens eſt irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*

T Sed AB poteſt id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 ſexti, & 17 eiuſdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, trianguli latus potentia triplum eſt eius, quę ex circuli centro.

Sit circulus ABC, & in ipſo triangulum æquilaterum deſcribatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplũ eſſe eius, quę eſt ex circuli ABC cẽtro. ſumatur enim circuli cẽtrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iũgatur. Itaque quoniam æquilaterum eſt ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE eſt ſexta pars circuli circumferentiæ; ideoq́; recta linea BE eſt latus hexagoni, & æqualis ipſi DE, quę eſt ex circuli centro. & quoniam AE eſt dupla ipſius ED, erit quadratũ ex AE quadrati ex ED, hoc eſt quadrati ex EB quadruplũ. quadratũ autem ex AE eſt æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla ſunt quadrati ex BE: & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum: atque eſt BE ęqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex DE. ergo trianguli latus eſt potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonſtrare oportebat.

Corol. 15. quarti.
20. sexti.
47 primi.

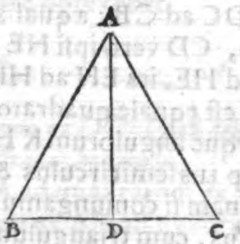
F. C. COMMENTARIVS.

Conſtat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad baſim perdendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulam aequilaterum ABC, cuius baſis BC bifariam ſecetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipſam AC perpendicularis; ſunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD

DC aequalia, & baſis AB eſt aequalis baſi AC . angulus igitur ADB eſt aequalis angulo ADC . & ideo vterque ipſorum rectus, & AD ad BC eſt perpendicularis . Dico quadratum ex BA ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3 . Quoniam enim AB dupla eſt ipſius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque eſt quadratum ex AB aequale quadratis ex AD DB. quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quã 4 ad 3. quod oportebat demonſtrare.

20. sexti.
47. primi.

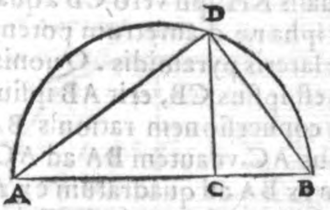


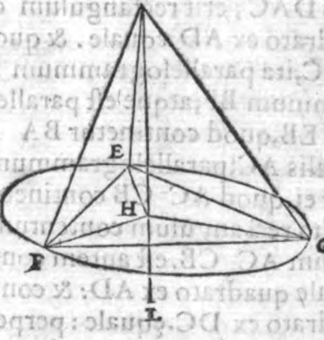
PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem conſtituere, & ſphęrę comprehendere data, ac demonſtrare ſphærę diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis.

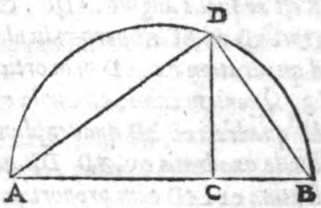
Exponatur enim datæ ſphærę diameter AB, & ſecetur in C, ita vt AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturque in AB ſemicirculus ADB: & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur. exponatur pręterea circulus EFG ęqualem habens eam, quæ ex centro ipſi DC, in quo deſcribatur triangulum ęquilaterum EFG: ſumaturque centrum circuli H, & iungantur EH HF HG: atque à puncto H ipſi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita vt HK ipſi AC ſit ęqualis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta eſt ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano exiſtentes ipſam cõtingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam vnaquæque linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamque ipſarum HE HF HG eſt perpendicularis. & quoniam AC quidem eſt æqualis HK, CD vero ipſi HE, & rectos angulos continent; erit baſis DA æqualis baſi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipſi DA eſt ęqualis. tres igitur KE KF KG inter ſe æquales ſunt. quòd cum AC ſit dupla CB, erit AB ipſius BC tripla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD A ad quadratum ex DC, vt deinceps demonſtrabitur. triplum igitur eſt quadratum ex AD quadrati ex DC. eſt autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum, at- B que eſt DC æqualis EH. ergo & AD ipſi EF eſt C ęqualis. ſed AD oſtenſa eſt æqualis vnicuique ipſarum KE KF KG. & vnaquęque igitur ipſarum EF FG GE vnicuique KE KF KG eſt ęqualis. & ob id ęquilatera ſunt quattuor triangula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cõſtituta eſt ex quattuor triangulis æqualibus & æquilateris, cuius baſis quidem eſt triangulum EFG, uertex autem K pũctum. Itaq; oportet ipſam & ſphæra data comprehẽdere, & oſtẽdere ſphęræ diametrum potentia ſeſquialterã eſſe lateris pyramidis. producatur enim recta linea HL in directum ipſi HK; ponaturque HL

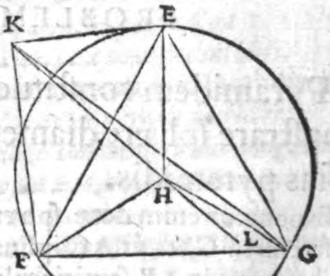
5 diffiniti. undecimi.
4. primi.

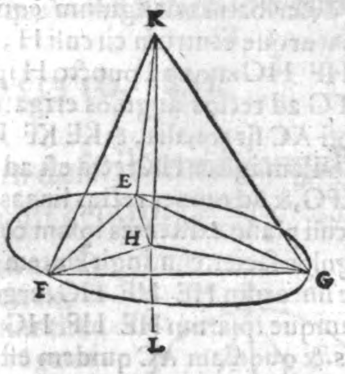




ipſi BC æqualis. & quoniam eſt vt AC ad CD,
ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipſi
KH, CD vero ipſi HE, & CB ipſi KL: erit vt K
17.sexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K
HL eſt ęquale quadrato ex EH. atque eſt rectus
vterque angulorum KHE EHL. ergo in KL de-
ſcriptus ſemicirculus & per punctum E tranſi-
bit. nam ſi coniungamus EL, angulus LEK fiet
8. sexti. rectus, cum triangulum ELK ęquiangulum ſit
vnicuiq; triangulorum ELH EKH. ſi igitur ma
nente KL ſemicirculus cõuerſus in eundem rur
ſus locum reſtituatur, à quo cœpit moueri, etiã
per puncta FG tranſibit, iunctis FL LG; & re-
ctis ſimiliter factis ad puncta FG angulis atque
erit pyramis comprehenſa data ſphæra; etenim
KL ſphæræ diameter eſt ęqualis diametro datæ
ſphærę AB, quoniam ipſi quidem AC ponitur
æqualis KH; ipſi vero CB æqualis HL. Dico igi-
tur ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram
eſſe lateris pyramidis. Quoniam enim AC du-
pla eſt ipſius CB, erit AB ipſius BC tripla. ergo
per conuerſionem rationis BA ſeſquialtera eſt
ipſius AC. vt autem BA ad AC, ita eſt quadra
tum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam
iuncta BD, eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC ob
Cor. 8 sexti. ſimilitudinem triangulorum DAB DAC, &
Cor. 20. sexti. quòd vt prima ad tertiam, ita quadratum ex
prima ad quadratum ex ſecunda. ergo quadra
tum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AD.
atque eſt BA quidem datæ ſphæræ diameter,
AD vero æqualis lateri pyramidis. ſphęræ igi-
tur diameter ſeſquialtera eſt lateris pyrami-
dis. quod demonſtrare oportebat.

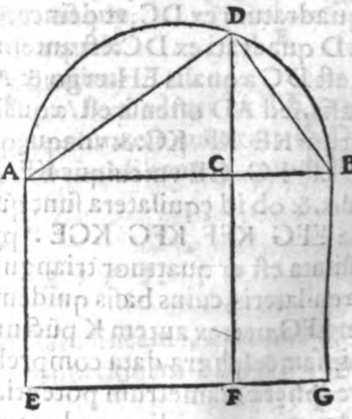






Itaque demonſtrandum eſt vt AB ad BC, ita eſſe quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim ſemicirculi figura; iunga-
turq; DB: & ex AC deſcribatur quadratum EC,
& parallelogrammum FB compleatur. Quoniã
Cor. 8. sexti. igitur eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC, propte-
17. sexti. rea quòd triãgulum DAB æquiangulum eſt triã
1. sexti. gulo DAC; erit rectangulum contentum BAC
quadrato ex AD æquale. & quoniam eſt vt AB
ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelo-
grammum BF; atque eſt parallelogrammũ qui-
dem EB, quod continetur BA AC, eſt enim EA
æqualis AC; parallelogrammum uero BF æqua-
le eſt ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad
BC, ita rectangulum contentum BA AC ad cõ
tentum AC CB. eſt autem contentum BA AC
17. sexti. æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB
Cor. 8. sexti quadrato ex DC. ęquale: perpendicularis enim
DC media eſt proportionalis inter baſis portio-



nes AC CB, cum angulus ADB ſit rectus. ex quibus ſequitur vt AB ad BC, ita eſſe quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps demonſtrabitur, videlicet ad finem huius, ſed in ſcholio aliter demonſtratur, hoc modo.*

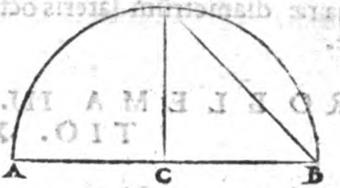
Quoniam enim eſt ut BA ad A C, ita quadratum ex D A ad quadratum ex A C, erit per conuerſionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectae lineae BA AD AC deinceps proportionales ſunt ex corollario 8. ſexti, & quadratum ex AD ſuperat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

B Eſt autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.*

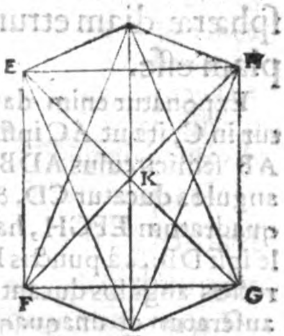
C Ergo & DA ipſi EF eſt ęqualis] *Qm̄ enim quadratum ex AD triplũ eſt quadrati ex DC, et quadratũ DC ex FE triplum quadrati ex EH; eſtq; quadratũ ex DC ęquale quadrato ex EH, quod DC ipſi EH ſit aequalis: erit quadraũ ex AD ęquale quadrato ex EF: ideoq; AD ipſi EF ęqualis.*

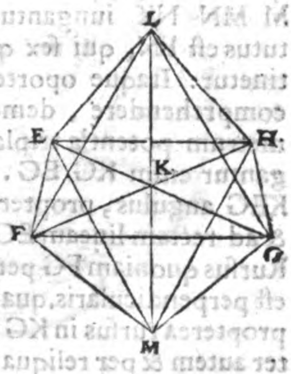
PROBLEMA II. PROPOSITIO. XIIII.

Octaedrum conſtituere, & ſphærã comprehendere, qua & pyramidem: demonſtrareq; ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri.



Exponatur datæ ſphæræ diameter AB: & in C bifariam ſecetur; deſcribaturq; in AB ſemicirculus ADB; & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur C D: & DB iungatur. exponatur prętereа quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipſi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipſi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL; producaturq; ad alteras partes plani, vt K M: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KL KM vni ipſarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL XM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG M H. qm̄ igitur KE eſt æqualis KH, atq; eſt rectus angulus EKH; erit quadratũ ex HE quadrati ex EK duplum: 47. primi Rurſus quoniam LK eſt æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. oſtẽſum eſt autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale eſt quadrato ex EH, & LE ipſi EH ęqualis. Eadẽ ratione & LH eſt ęqualis HE. æquilaterũ igitur eſt LEH triangulum. ſimiliter oſtendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, æquilaterum eſſe. octaedrum igitur conſtitutum eſt, quod octo triãgulis æquilateris continetur. itaq; oportet ipſum & data ſphæra comprehendere: demonſtrareq; ſphęrę diametrum potentia duplam eſſe lateris octahedri. quoniam enim tres rectę lineæ LK KM K E inter ſe æquales ſunt, ſemicirculus in LM deſcriptus, & per punctum E tranſibit. & ob eandem cauſſam ſi manente LM conuerſus ſemicirculus in eundem locum reſtituatur, à quo cœpit

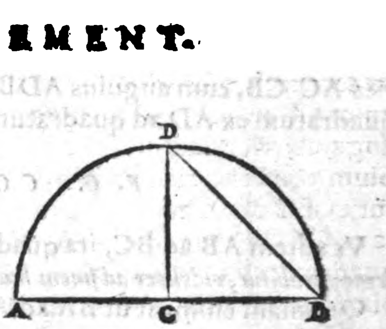


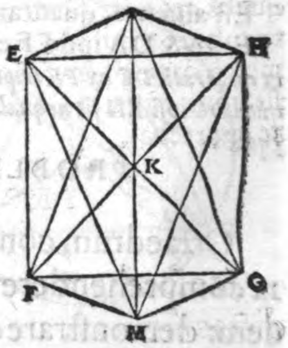


moueri, tranſibit etiam per puncta F G H: atque erit octaedrum ſphæra comprehenſum. Dico etiam comprehenſum eſſe data ſphæra. quoniam enim L K eſt ęqualis K M, communis autem KE, & angulos ęquales cōtinent; erit baſis LE baſi EM æqualis. & quoniam rectus eſt LEM angulus, in ſemicirculo enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rurſus quoniam AC eſt ęqualis CB, erit AB dupla ipſius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur eſt quadratum ex AB quadrati ex BD. oſtenſum eſt autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque eſt quadratum ex B D æquale quadrato ex L E; poſita eſt enim EH ipſi DB ęqualis. ergo quadratum ex A B eſt æquale quadrato ex LM; ac propterea ipſa AB eſt ęqualis LM. eſt autem AB diameter datę ſphærę. quare L M eſt æqualis datę ſphęræ diametro. octaedrum igitur comprehenſum eſt data ſphęra: & ſimul demonſtratum eſt ſphæræ diametrum lateris octaedri potentia duplam eſſe.

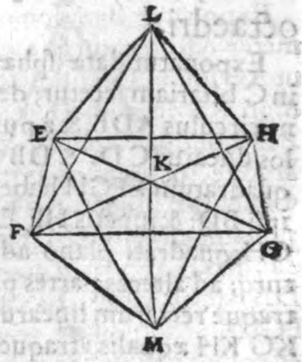
47. primi.

Cor. 8. & 20 ſexti.





PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.

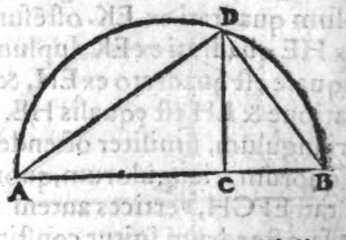


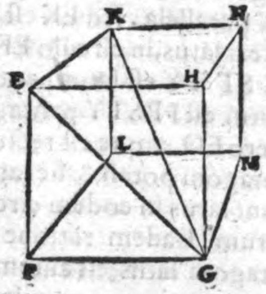
Cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere, qua & priores, demonſtrareque ſphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam eſſe.

Exponatur enim datæ ſphæræ diameter AB: & ſecetur in C, ita ut AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus ADB, & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iūgatur. deinde exponatur quadratum EFGH, habens unumquodque latus ęquale ipſi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab unaquaque rectarum linearum EK FL GM HN uni ipſarum EF FG GH HE æqualis unaquęque EK FL GM HN: & KL LM MN NK iungantur. cubus igitur conſtitutus eſt FN, qui ſex quadratis ęqualibus continetur. Itaque oportet ipſum & ſphæra data comprehendere, demonſtrareque ſphęræ diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. Iungantur enim KG EG. & quoniam rectus eſt KEG angulus, propterea quòd & KE perpēdicularis ſit ad EG planū uidelicet, & ad rectam lineam EG: ſemicirculus in KG deſcriptus & per pūctum E tranſibit. Rurſus quoniam FG perpēdicularis ad utramque ipſarum FL FE, & ad FK planum eſt perpendicularis, quare ſi iungamus FK ipſa FG & ad FK perpendicularis erit; ac propterea rurſus in KG deſcriptus ſemicirculus tranſibit & per punctum F. ſimiliter autem & per reliqua cubi puncta tranſibit. ſi igitur manente KG conuerſus ſemicirculus in eūdem rurſus locum reſtituatur, à quo cępit moueri, erit cubus ſphęra

8. diff. undecimi.

4. Vndecimi





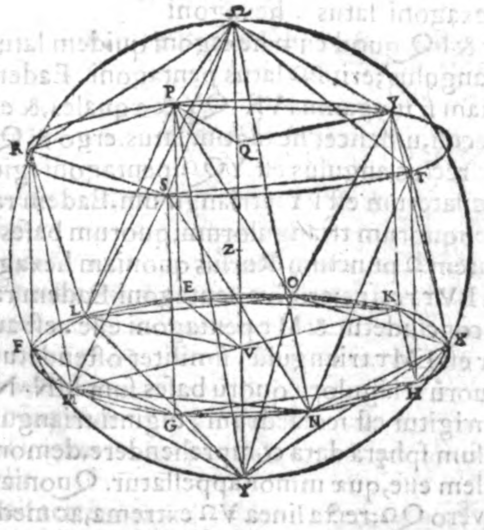
ra comprehenſus. Dico & data ſphæra. Quoniam enim GF eſt æqualis FE, atque eſt rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. ęqualis autem eſt EF ipſi EK. quadratum igitur ex EG duplum eſt quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc eſt quadratum ex GK triplum eſt quadrati ex KE. & quoniam AB eſt ipſius BC tripla: & ut AB ad BC, ita quadratū ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. oſtenſum eſt autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & poſita eſt KE ipſi BD ęqualis. ergo & KG eſt ęqualis AB. atque eſt AB datæ ſphærę diameter. quare & KG æqualis erit diametro datæ ſphęræ. cubus igitur data ſphæra eſt comprehenſus. & ſimul demonſtratum eſt ſphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam eſſe. quod demonſtrare oportebat.

47. prima.

Corell. 8 ſexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

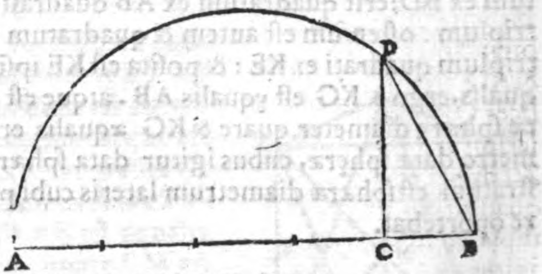
Icoſaedrum conſtituere & ſphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonſtrareque icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam, quę minor appellatur.

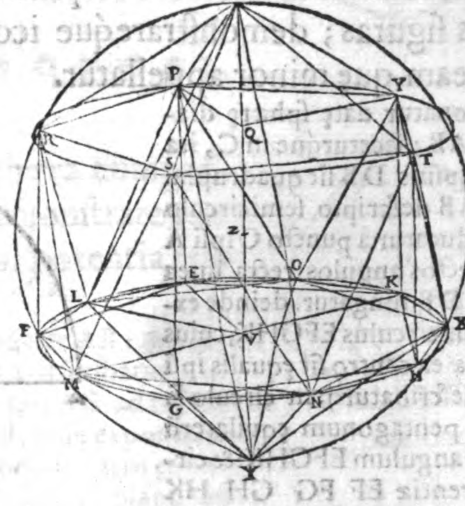


Exponatur datę ſphærę diameter AB; ſeceturque in C, ita ut AC ipſius DB ſit quadrupla: & in AB deſcripto ſemicirculo ADB, ducatur à puncto C ipſi AB ad rectos angulos recta linea CD. & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ea centro ſit ęqualis ipſi DB: deſcribaturq; in circulo EFGHK pentagonum ęquilaterū & æquiangulum EFGHK: & circumferentiæ EF FG GH HK KE biſariam ſecentur in LMNXO punctis; & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE: & ſimiliter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur eſt LMNXO pentagonum; & recta linea EO eſt decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipſi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP FR GS HT KY æquales exiſtentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK, & iungātur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX XY YO OP. Quoniam igitur utraque ipſarum EP KY eidem plano eſt ad rectos angulos, erit EP ipſi KY

parallela

parallela; atque eſt ipſi æqualis. quę autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes 33.primi. coniungunt rectæ linræ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. ergo PY ipſi EK & ęqualis eſt, & parallela. ſed EK eſt latus pentagoni æquilateri. ergo & PY eſt pentagoni æquilateri latus, in circulo EFGHK deſcripti. Eadem ratione & unaquæque ipſarũ PR RS ST TY eſt latus pentagoni ęquilateri in eodem circulo deſcripti. æquilaterum igitur eſt PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus eſt PE, decagoni uero EO, atque eſt rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim B latus pentagoni poteſt & hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum. Eadem ratione & OY eſt pentagoni latus; eſt autem & PY latus pentagoni. ergo æquilaterum eſt triangulum POY. & ob eandem cauſſam vnumquodque triangulorum PLR RMS SNT TXY eſt æquilaterum. & quoniam pentagoni oſtenſa eſt vtraque ipſarum PL PO, atque eſt LO pentagoni; erit PLO æquilaterum triangulum. Eadem ratione & vnumquoq; triãgulorum LRM MSN NTX XYO ęquilaterum eſt. ſumatur cẽtrum circuli EFGHK, quod ſit punctum V; & à puncto V ipſi circuli plano ad rectos angulos erigatur VΩ, & ad alteras partes producatur, vt Vϒ: & auferatur hexagoni quidem latus VQ: decagoni vero vtraque ipſarum Vϒ QΩ, & iungantur PΩ PQ YΩ EV LV Lϒ ϒM. & quoniam vtraque ipſarum VQ PE circuli plano eſt ad rectos angulos, 6 undecimi erit VQ ipſi PE parallela. ſunt autem & ęquales. ergo EV PQ & ęquales sũt, & parallelæ: eſtq́; EV hexagoni latus. hexagoni igitur & PQ. quòd cum hexagoni quidem latus ſit PQ, decagoni vero QΩ, & rectus 10.huius. PQΩ angulus; erit PΩ latus pentagoni. Eadem ratione & YΩ pentagoni eſt latus; quoniam ſi iungamus VK QY & æquales, & ex oppoſito erunt. atque eſt VK ex centro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY eſt latus hexagoni. decagoni autẽ QΩ, & rectus angulus eſt YQΩ. pentagoni igitur eſt YΩ: eſtque PY pentagoni. quare æquilaterum eſt PYΩ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum eſt vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt PR RS ST TY rectæ lineę, uertex autem Ω punctum. Rurſus quoniam hexagoni eſt VL, decagoni vero Vϒ, & angulus LVϒ rectus; erit Lϒ pentagoni. Eadem ratione ſi iungamus MV, quæ eſt hexagoni, concludetur & Mϒ pentagoni eſſe. eſt autem & LM pentagoni. æquilaterum igitur eſt LMϒ triangulũ. ſimiliter oſtendetur & ęquilaterum eſſe unumquodque reliquorũ triãgulorũ quorũ baſes ſunt MN NX XO OL, uertex aũt ϒ punctũ. cõſtitutum igitur eſt icoſaedrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; oportet ipſum ſphęra data comprehendere, demonſtrareq́ue icoſaedri latus lineam irrationalem eſſe, quæ minor appellatur. C Quoniam enim hexagoni latus eſt VQ. decagoni vero QΩ; recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q, & VQ eſt maior portio. eſt igitur ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ. atque eſt VQ ipſi VL æqualis, & QΩ





QΩ ipſi Vϯ.quare ut ΩV ad VL,ita LV ad Vϯ. & ſunt anguli ΩVL LVϯ recti.ſi igitur
iungamns rectam lineam LΩ, erit ϯLΩ rectus angulus, ob ſimilitudinem triangulorum 6.ſexti.
ϯLΩ VLΩ.ergo ſemicirculus in ϯΩ deſcriptus etiam per L tranſibit. Eadem
ratione quoniam eſt ut ΩV ad VQ,ita VQ ad QΩ; & æqualis eſt ΩV quidem ipſi
ϯQ. VQ uero ipſi QP: erit vt ϯQ ad QP,ita PQ ad QΩ: ideoque ſi rurſus iungamus
Pϯ,erit angulus,qui ad P rectus.ſemicirculus igitur deſcriptus in ϯΩ tranſibit
& per P. Quòd ſi manente ϯΩ conuerſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur,
à quo cœpit moueri ,etiam per P, & per reliqua icoſaedri puncta tranſibit:
atque erit icoſaedrum ſphæra comprehenſum. Dico & data.ſecetur enim VQ
bifariam in Z & quoniam recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q,
& ΩQ eſt minor ipſius portio, ipſa ΩQ aſſumens dimidiam maioris portionis,videlicet E
QZ quintuplum poterit quadrati eius,quod à dimidia maioris portionis deſcribitur.
quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum eſt. & ipſius quidē
ZΩ dupla eſt Ωϯ; ipſius vero AQ dupla QV.ergo quadratum ea Ωϯ quintuplum eſt F
quadrati ex VQ. & quoniam AC quadrupla eſt ipſius CB, erit AB ipſius BC quintupla.
ut autem AB ad BC,ita quadratum ex AB ad quaratum ex BD. quadratum G
igitur ex AB quadrati ex BD eſt quintuplum.oſtenſum autem eſt & quadratum ex
Ωϯ quintuplum quadrati ex VQ: atque eſt DB ęqualis VQ: vtraque enim ipſarum
eſt æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK.quare & AB eſt ęqualis ϯΩ,eſtq; AB datę
ſphęræ diameter. & ϯΩ igitur erit diameter datę ſphęrę. ergo icoſaedrum èſt
data ſphæra comprehenſum.Dico icoſaedri latus irrationlem eſſe lineam, quæ minor
appellatur. Quoniā enim rationalis eſt ſphærę diameter,atque eſt potētia quintupla
eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. H
quare & diameter ipſius rōnalis erit.ſi aūt in circulo rationalē diametrū habente K
pentagonū æquilaterū deſcribatur, erit latus pētagoni linea irrationalis,quæ
minor appellatur. ſed pentagoni EFGHK latus eſt icoſaedri. ergo icoſaedri latus L
eſt linea irrationalis, quę minor appellatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſphæræ diametrum potentia quintuplā eſſe eius, quæ ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur: & ſphærę diametrum compoſitam eſſę ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus,quę in eodem circulo deſcribuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam igitur utraq; ipſarum EP KY eidem plano eſt ad angulos rectos, erit EP ipſi KY parallela.] *Ex 6 vndecimi.*

B Erit FO latus pentagoni] *Ex 10 huius.*

C Quoniam enim hexagoni eſt VQ, decagoni uero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione ſecta eſt in Q] *Ex 9 huius.*

D Quare ut ΩV ad VL,ita LV ad Vϯ: & ſuut anguli ΩVL LVϯ recti. ſi igitur iungamus rectam lineam LΩ,erit ϯLΩ angulus rectus ob ſimilitudinem triangulorum ϯLΩ VLΩ] *Quoniam enim eſt vt ΩV ad VL,ita LV ad Vϯ, erit vt ΩV ad Vϯ, videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratum primae ΩV ad quadratum VL ſecundae: componendoq́; vt Ωϯ ad ϯV, ita quadrata ex ΩV VL, hoc eſt quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV: & per conuerſionem rationis vt ϯΩ ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV, quare LΩ eſt media proportionalis inter ϯΩ ΩV, quod deinceps demonſtrabimus. vt igitur ϯΩ ad ΩL, ita LΩ ad ΩV, atque eſt angulus LΩϯ vtrique communis. ergo triangulum ϯΩL ſimile eſt triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus eſt aequalis angulo ϯLΩ. angulus igitur ϯLΩ rectus erit. At vero LΩ inter ϯΩ ΩV mediam eſſe proportionalem ex his apparebit.*

Si ſint tres rectæ lineæ, ſitq́; vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectae lineae A B C; ſitq́; vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC deinceps proportionales eſſe. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratũ ex A ad quadratum ex D, hoc eſt quadratum ex D ad quadratum ex C. ſed vt A ad C, ita poſitum eſt quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale eſt quadrato ex B; ac propterea D ipſi B eſt aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales ſunt. ſed licet expeditius demonſtrare angulum ϒLΩ rectum, eſſe hoc modo. Quoniã enim eſt vt ΩV ad VL, ita LV ad Vϒ; ſuntq; anguli ΩVL LVϒ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVϒ ſimile, & angulus LΩV ęqualis angulo VLϒ. ſunt autem anguli VLΩ LΩV equales vni recto, cum rectus ſit LVΩ: ergo & anguli ΩLV VLϒ vni recto ſunt aequales: & ob id angulus ϒLΩ eſt rectus. quod opo rtebat demonſtrare.

E Ipſa ΩQ aſſumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis deſcribitur] *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex Ωϒ quintuplum eſt quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollario 20 ſexti. eſt enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiuſdem.*

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipſius rationalis erit] *Quoniam enim ſphęrę diameter eſt potentia quintupla eius, quae ex centro circuli, habebit quadratum diametri ſphęrę ad quadratum eius, quae ex centro circuli proportionem eam, quã numerus habet ad numerum: & idcirco ipſi commenſurabile erit. rationale autem eſt quadratum diametri ſphęrę, cum ipſa ſit rationalis. ergo & quadratum eius, quae ex centro circuli, eſt rationale: ideoq; ea, quae ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quae rationali commenſurabilis eſt, & ipſa eſt rationalis.* 6. decimi. 6. diffi. dec.

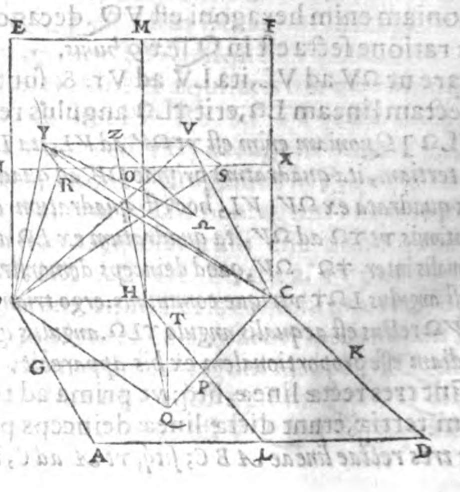
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum ęquilaterum deſcribatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 11. huius.*

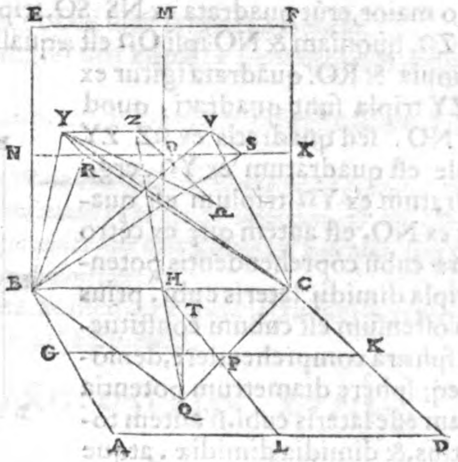
L Sed pentagoni EFGHK latus eſt icoſaedri] *Illud vero ex ia dictis manifeſtiſsime cõſtat.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

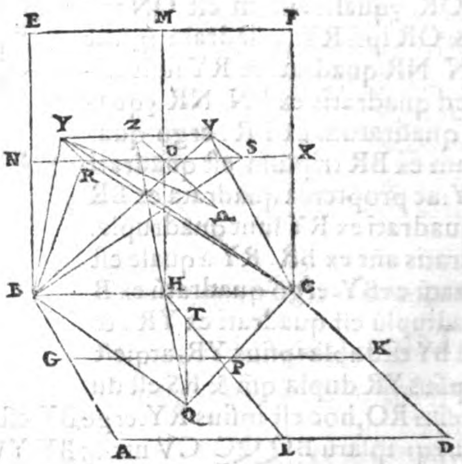
Dodecahedrum conſtituere, & ſphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonſtrareq́ue dodecahedri latus eſſe irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponãtur prędicti cubi duo plana ad rectos angulos inter ſe ſe AB CD CBEF: & ſecetur vnumquodq; ipſorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GHKLMNX, & GK HL MH NX iungantur. deinde ſecentur rectæ lineæ NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: ſintque ipſorũ maiores partiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipſis RO OS TP ęquales ponantur; iunganturq; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV æquilaterũ eſ-





ſe,& in uno plano,& præterea ęquiangulum. Iungantur enim RB SB VB. & quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior ipſius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR. ęqualis autem eſt ON ipſi NB,& OR ipſi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY ſunt tripla.ſed quadratis ex BN NR ęquale eſt quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum eſt quadrati ex RY:ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY ſunt quadrupla. quadratis aũt ex BR RY æquale eſt quadratũ exBY.ergo quadratũ ex BY quadruplũ eſt quadrati ex YR. & ob id BY eſtdupla ipſius YR.atq;eſt VY ipſius YR dupla,qm̃ & RS eſt dupla ipſius RO,hoc eſt ipſius RY.ergoBY eſt ęqualis YV.ſimiliter demõſtrabitur & unaquæq; ipſarũ BQ QC CV utriq; BY YV æqualis.ęquilaterũ igitur eſt BYVCQ pentagonũ. Dico & in vno eſſe plano. ducatur.n.à puncto O ipſa OZ utriq; ipſarũ RY SV parallela ad exteriores cubi partes:& iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectã lineam eſſe. nã cum HP extrema,ac media ratione ſecetur in T, & PT ſit maior ipſius portio, erit ut HP ad PT, ita PT ad TH.ęqualis autem eſt HP quidem ipſi HO, PT vero utrique ipſarum TQ OZ.eſt igitur vt HO ad OZ, ita QT ad TH.atque eſt **B** HO parallela ipſi TQ;utraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos: TH uero eſt parallela OZ,quòd vtraque ipſarum ſit ad rectos angulos plano BF. ſi autẽ **C** duo triangula componantur ad unum angulum,ut ZOH, HTQ, quæ duo latera 32.ſexti. duobus lateribus proportionalia habeant,ita ut homologa latera etiam ſint parallela,reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. ergo ZH eſt in directum ipſi HQ.omnis autem recta linea eſt in uno plano.In uno igitur plano eſt YBQCV pentagonum.Dico & æquiangulum.Quoniam enim recta linea NO extre **D** ma,ac media ratione ſecta eſt in R,& OR eſt maior portio,erit vt utraque NO OR ad ON,ita NO ad OR.æqualis autem eſt RO ipſi OS.quare ut SN ad NO,ita NO ad OS:& ob id NS extrema, ac media ratione ſecta eſt in O; & maior portio eſt NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON ſunt tripla.ęqualis autem eſt ON ipſi N **E** B,& OS ipſi SV.ergo quadrata ex NS SV tripla ſunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB ſunt quadrupla. ſed quadratis ex SN NB eſt æquale quadratum ex BS.quadrata igitur ex BS SV,hoc eſt quadratum ex VB, 47.primi. quòd angulus VSB ſit rectus, quadruplum eſt quadrati ex NB: ideoq; ipſa VB ip- 20.tertij. ſius BN eſt dupla.eſt autem & BC dupla BN.ergo VB eſt ęqualis BC. & quoniam 8.primi. duæ BY YV duabus BQ QC ęquales ſunt.& baſis VB æqualis baſi BC, erit angulus BYV angulo BQC ęqualis.ſimiliter oſtendemus & YVC angulum ęqualem angulo BQC.tres igitur anguli BQC BYV YVC inter ſe æquales ſunt. ſi autem pen **F** tagoni æquilateri tres anguli ſint æquales,pentagonum ęquiangulum erit.ęquiangulum igitur eſt pentagonum BYVCQ. oſtenſum eſt autem & ęquilaterum. ergo pentagonum BYVCQ ęquilaterum eſt,& æquiangulum.atque eſt in uno cubi latere BC.ſi igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem conſtruamus, figura ſolida conſtituetur duodecim pentagonis æquilateris,& æquiangulis contenta.Itaque oportet ipſum & data ſphæra comprehendere; demonſtrareque dodecahedri latus eſſe irrationalem lineam,quæ apotome appellatur:producatur enim ZO,& ſit ZΩ. occurrit igitur ZΩ diametro cubi,& bifariam ſe mutuo ſecant.hoc enim oſtenſum eſt in penultimo theoremate undecimi libri. ſecent in Ω. ergo Ω eſt centrum ſphæræ,quæ cubum comprehendit,& OΩ dimidium lateris cubi. iungatur YΩ. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio maior,erūt quadrata ex NS SO,tripla eius quod fit ex NO.ęqualis aūt eſt NS ipſi ZΩ, quoniam & NO ipſi OΩ eſt æqualis,& ZO ipſi OS. ſed & OS eſt æqualis ZY, quoniā & RO. quadrata igitur ex ΩZ ZY tripla ſunt quadrati, quod fit ex NO. ſed quadratis ex ΩZ ZY æquale eſt quadratum ex YΩ. ergo quadratum ex YΩ triplum eſt quadrati ex NO. eſt autem quę ex cētro ſphæræ cubū cōprehendentis G potentia tripla dimidij lateris cubi. prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere,& ſphæra comprehendere,demōſtrareq; ſphęrę diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi.ſi autem tota totius,& dimidia dimidiæ. atque eſt NO dimidia lateris cubi. ergo YΩ eſt æqualis ei, quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis: eſtque Ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y eſt ad ſphęrę ſuperficiem. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiē ſphæræ.dodecaedrum.igitur eſt data ſphęra comprehenſum. Dico dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam,quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema,ac media ratione ſecta,maior portio eſt RO;erit tota NX extrema, ac media ratione ſecta,maior portio RS.nam cum ſit ut NO ad OR, ita OR ad RN: & 2.quinti. earum duplæ:partes enim eodem modo multiplicium eandem habent proportionem,erit vt NX ad RS,ita RS ad vtramque NR SX. maior autem eſt NX,quàm RS. ergo & RS eſt maior,quàm vtraque NR SX.eſt igitur NX extrema,ac media ratione ſecta; & RS eſt ipſius maior portio.æqualis autem eſt RS ipſi YV.ergo NX extrema,ac media ratione ſecta,maior portio eſt YV. & quoniam rationalis eſt ſphæræ H diameter,atque eſt potentia tripla lateris cubi;erit NX rationalis,quę eſt cubi latus. K ſi autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt,quæ apotome appellatur.ergo YV,quæ eſt latus dodecaedri,irrationalis eſt,quæ apotome appellatur.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt latere cubi extrema,ac media ratione ſecto maiorem portionem eſſe dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque eſt HO parallela ipſi TQ: vtraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos] *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt] *Ex 32 ſexti.*

D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior portio, erit vt vtraque NO OR ad ON, ita NO ad OR] *Ex 5. huius. ſi enim recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturq; ipſi aequalis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quae à principio recta linea. quare vt vtra*

que

que NO OR, hoc eſt ut tota NO unà cum maiori portione OR ad totam NO, ita eſt NO ad OR; ſit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON ſunt tripla] *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni ęquilateri tres anguli ſint æquales pentagonum æquiangulum erit[*Ex 7. huius.* F

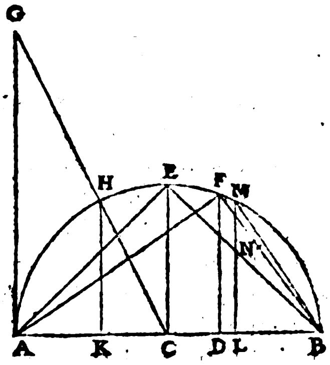
Prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere] *In quinta decima huius.* G

Erit NX rationalis, quę eſt cubi latus] *Nam cum ſphęrae diameter ſit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipſum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipſi commenſurabile erit. quae autem rationali ſunt commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales ſunt, per ſextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur] *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

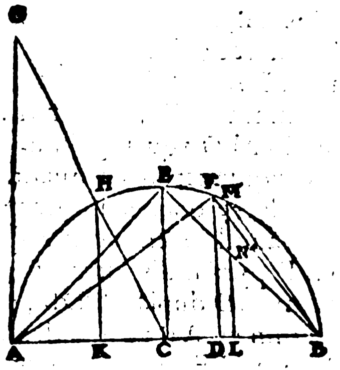
Latera quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.



Exponatur datæ ſphęrę diameter A B, & ſecetur in C quidem, ita vt AC ſit æqualis CB; in D vero ita, vt A D ipſius D B ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus AEB. & à punctis CD ipſi AD ad rectos angulos ducãtur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaq; quoniam A D dupla eſt ipſius DB, erit AB ipſius BD tripla: & per cõuerſionem rationis B A ſeſquialtera ipſius A D. vt autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad
quadratum ex A F. eſt enim triangulum A F B 8 sexti
triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum
ex B A ſeſquialterum eſt quadrati ex AF. eſt au- 13. huius
tem & ſphæræ diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis; eſtque A B ſphæræ diameter. ergo A F pyramidis lateri eſt æqualis. Rurſus quoniam AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. Sed ut AB ad BD, ita quadratum ex A B ad quadratum ex FB. quadratum igitur ex AB triplum eſt
quadrati ex BF. eſt autem & ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: at- 15. huius
que eſt AB ſphæræ diameter. ergo BF eſt cubi latus. & quoniam AC eſt ęqualis CB, erit AB ipſius BC dupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB
ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplum. atque 14. huius
eſt ſphęræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB eſt diameter datę ſphæræ. quare BE eſt octaedri latus. ducatur à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG ęqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis duca-
tur HK. quoniam igitur AG dupla eſt ipſius AC; etenim GA eſt æqualis AB; ut au- 4. sexti
tem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipſius KC dupla. ergo quadratum ex H K 19. sexti
quadruplum eſt quadrati ex K C. quadrata igitur ex HK K C, quod eſt quadratum ex HC quintuplum eſt quadrati ex K C. æqualis autem eſt HC ipſi CB. ergo quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex CK. & quoniam A B eſt dupla
ipſius BC; quarum AD dupla eſt DB; erit reliqua B D dupla ipſius D C: ideoque 19 quinti
B C ipſius CD eſt tripla. nonuplum igitur eſt quadratum ex BC quadrati ex CD. 20. sexti
ſed quadratum ex B C quadrati ex C K eſt quintuplum. ergo quadratum ex K C maius eſt quadrato ex C D. & K C ipſa C D maior. ponatur ipſi K C æqualis C L; & à puncto L ipſi A B ad rectos angulos ducatur LM, & M B iungatur. & quoniam quadratum ex B C quintuplum eſt quadrati ex K C; atque eſt ipſius
quidem G B dupla B A; ipſius uero C K dupla K L: erit quadratum ex A B qua- 15. quinti

Corol.16.huius. drati ex KL quintuplum.ſed & ſphęrę diameter potentia quintupla eſt eius,quæ ex
centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur. atque eſt AB diameter ſphęræ. ergo
Corol.16.huius. KL eſt hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam ſphæræ diameter compoſita
eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo deſcriptorū;
atque eſt AB quidem diameter ſphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK eſt ęqualis
LB: erit vtraque ipſarum AK LB latus decagoni deſcripti in eodem circulo, à quo
14.tertij. icoſaedrum deſcribitur.& quoniam decagoni eſt L B, hexagoni vero M L; eſt enim
æqualis ipſi KL, quòd & ipſi HK; namque æqualiter à centro diſtant;& eſt vtraque
10.huius. HK KL dupla ipſius HC: erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idē eſt,
16.huius. & icoſaedri. ergo MB eſt icoſaedri latus.& quoniam FB eſt latus cubi,ſecetur extre
Ex corol. antecedentis. ma, ac media ratione in N,& BN ſit maior portio; erit NB dodecaedri latus.quòd
cum ſphæræ diameter oſtenſa ſit ipſius quidem A F lateris pyramidis potentia ſeſquialtera; ipſius vero BE octaedri potētia dupla, & ipſius FB cubi potentia tripla, quarum partium ſphæræ diameter potentia eſt ſex,earum pyramidis quidem latus erit quattuor;octaedri vero trium,& cubi duarū. ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia eſt ſeſquitertium,cubi vero potentia duplum: & octaedri latus lateris cubi potentia eſt ſeſquialterum.latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis,octaedri,& cubi inter ſe ſunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo,dico autem icoſaedri, & dodecaedri,neque inter ſe,neque ad iam dicta ſunt in rationalibus proportionibus,nempe minor,& apotome.

At vero M B latus icoſaedri maius eſſe dodecaedri latere B N, ita demonſtrabimus.



8.ſexti Quoniam enim triangulum FDB ęquiangulum eſt triangulo FAB, erit vt D B ad B F, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportio-
Cor.20. ſexti. nales ſint, vt prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum ſecundę: eſt igitur vt DB ad BA,ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt A B ad B D, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD.tripla autem eſt AB ipſius BD. ergo quadratum ex
20.ſexti. FB quadrati ex BD eſt triplum. atque eſt quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; eſt.n. AD ipſius DB dupla. ergo quadratū ex AD maius eſt quadrato ex FB;propterea quòd AD quàm FB eſt maior,multo igitur maior eſt
9. huius. AL quàm FB. & ipſa quidem AL extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt
LK, quoniam KL eſt hexagoni latus,& KA decagoni. ipſa uero FB extrema, ac media ratione ſecta,maior portio eſt BN. maior igitur eſt KL quàm BN,eſt autem KL
19.primi ipſi LM æqualis. ergo LM quàm B N eſt maior.ſed B M eſt maior quàm ML. ergo
MB, quę eſt latus icoſaedri maior erit ipſa BN, dodecaedri latere.

ALITER. Quoniam enim AD dupla eſt DB,erit AB ipſius BD tripla. ut au-
Cor.20.ſexti. tem AB ad BD,ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod trian-
8.ſexti. gulum FAB triangulo FBD ęquiangulum eſt.triplum igitur eſt quadratum ex AB quadrati ex BF.Oſtenſum eſt autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplū. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF ſunt æqualia. ſed tria ex FB maiora ſunt quàm ſex eorum,quæ fiunt ex BN. & quinque igitur ex KL, quàm ſex eorum,quæ ex BN ſunt maiora.ergo & unum ex KL maius eſt vno ex BN;ac propterea KL quàm BN maior:æqualis autem KL ipſi LM. maior igitur eſt LM,quam BN: multo igitur MB quàm BN eſt maior.quod demonſtrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora eſſe,quàm ſex earum,quæ ex BN,hoc modo oſtendemus.

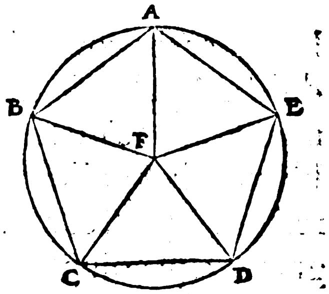
Quoniam

Quoniam enim maior eſt BN quàm NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN. quód igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius eſt, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. ſed quod quidem con- 2. ſecundi.
tinetur FB BN vnà cum contento BF FN eſt quadratum ex FB. contentum autem BF FN eſt æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione ſecta eſt in N, & quod extremis continetur eſt æquale ei, quòd fit à media. quadratum igi- 17. ſexti.
tur ex FB maius eſt, quàm duplum quadrari ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN eſt maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora ſunt, quàm ſex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonſtrare oportebat.

Dico præter iam dictas quinque figuras non conſtitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non conſtituetur angulus ſolidus. ex tribus autem triangulis cõſtituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinque icoſaedri: at ex ſex triangulis æquilateris, & æquiãgulis ad vnum punctum conſtitutis, non eſt angulus ſolidus. cum enim trianguli æquilateri angulus ſit duæ tertiæ recti, erunt ſex quattor rectis æquales. quod fieri non poteſt. om- 21 undecimi
nis enim ſolidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm ſex angulis planis conſtituitur ſolidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non poteſt; eſſent enim rurſus quattuor recti. pentagonis autẽ æquilateris, & æquiãgulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, ſed vt quattuor contineatur fieri non poteſt. nam cum pentagoni æquilateri angulus conſtet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non poteſt. neque uero alijs polygonis figuris conſtituetur angulus ſolidus propter abſurda, quæ conſequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura ſolida conſtituitur æquilateris, & æquiangulis contenta. quod oportebat demonſtrare.

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulũ conſtare ex recto, & recti quinta parte hoc modo oſtendemus.



Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipſum circulus ABCDE deſcribatur: ſumaturque ipſius centrum, quod ſit F; & iungantur FA FB FC FD FE, quæ pẽtagoni ABCDE angulos biſariam ſecabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis æquales ſunt, & inter ſe ſũt æquales, erit unus ipſorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF ſunt unius recti, & quintæ partis. æqualis aũt eſt angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus conſtat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonſtrare.

TERTIIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBER QVARTVSDECIMVS
ET SOLIDORVM QVARTVS.
vt quidam arbitrantur.

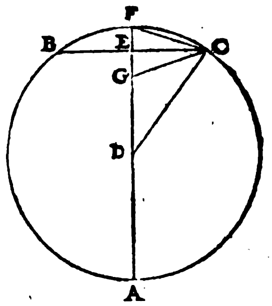
VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

BASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam veniſſet, patri que noſtro ob mathematicarum diſciplinarum ſocietatem commendatus fuiſſet, ipſo peregrinationis tempore, cum eo diu, multumque uerſatus eſt. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio ſcriptum eſt de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione, quam ſcilicet hęc inter ſe proportionem habeant, arbitrati ſunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ, ac litteris prodiderunt. Ego vero poſtea incidi in aliũ librum ab Apollonio editum, qui propoſitę rei demonſtrationem rectę complectebatur; atque ex eius problematis indagatione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ eſt, quilibet facile perſpicere poteſt, cũ in omnium manibus verſetur. quod autem nos poſtea ſummo, quantum conijci licet, ſtudio lucubraſſe videmur, id litteris mandatum tibi dedicandũ cenſuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus diſciplinis mathematicis, & præſertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quę dicturi ſumus: ob eam uero, quę tibi cum patre meo fuit conſuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipſam libenter audias. ſed iam tempus eſt ut proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo deſcripti, perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo deſcribuntur.



Sit circulus ABC, & in eo deſcribatur pentagoui æqui
lateri latus BC; ſumaturque circuli centrum D: & ad BC
ducta DE perpendiculari, producatur in directum ipſi
DE recta linea EF. Dico DE dimidiam eſſe vtriuſque &
hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo deſcrip-
torum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipſi E
F ęqualis: & à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igi
tur circumferentia totius circuli quintupla eſt circnmfe-
rentię BFC: atque eſt totius quidem circuli circumferen
tię dimidia ACF, ipſius vero BFC dimidia FC, erit & cir A
cumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoq́,
circumferentia AC ipſius CF eſt quadrupla. vt autem A B
C ad CF, ita eſt ADC angulus ad angulum CDF. angulus igitur ADC quadruplus
eſt anguli CDF. duplus autem eſt angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC. C
anguli GDC eſt duplus. eſt autem & EFC angulus æqualis angulo EGC. duplus igi D
tur eſt angulus EGC anguli GDC: & idcirco DG ipſi GC eſt ęqualis. ſed GC ęqua E
lis eſt CF. ergo & DG ipſi CF. eſt autem & GE æqualis EF. æqualis igitur eſt DE
vtrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipſius DE
eſt dupla: atque eſt DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri
decagoni. ergo DE eſt dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo
deſcriptorum.

Itaque manifeſtum eſt ex theorematibus tertij decimi libri eã, F
quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli.

F. C. *COMMENTARIVS.*

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] *Ex* 15 *quinti.* A

Vt autem AC ad CF, ita eſt ADC angulus ad angulum CDF] *Ex ultima ſexti.* B

Duplus autem eſt angulus ADC anguli EFC] *Ex* 20 *tertij.* C

Eſt autem & EFC angulus ęqualis angulo EGC] *Poſita enim eſt FE aequalis EG. & EC eſt vtrique communis: anguliq́; ad E recti. baſis igitur FC eſt aequalis baſi CG, & triangulum triangulo aequale; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera ſubtenduntur ex 4. primi.* D

Et idcirco DG ipſi GC eſt æqualis] *Nam cum angulus EGC exterior ſit aequalis duobus* E
interioribus, & oppoſitis GDC GCD, ſitq́; duplus ipſius GDC; erit angulus GCD aequalis angulo 32. primi.
GDC: & ob id latus DG lateri GC aequale. 6. primi.

Itaque manifeſtum eſt ex theorematibus tertijdecimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli. F

Sit circulus ABC, & in ipſo deſcribatur triangulum aequilaterum ABC; ſumptoq́; circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producatur. Dico DF dimidiam eſſe ipſius DE. iungantur enim DB BE. & quoniam BE eſt latus hexagoni, quod ex 12 *tertij decimi libri apparet: & ideo aequalis ei, quae ex centro: erunt DB BE inter ſe aequales, & ipſarum quadra-*

ta

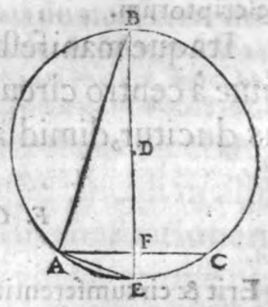
47.primi *ta aequalia. ſed quadratum quidem ex DB eſt aequale quadratis ex BF FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE ſunt aequalia; & dempto communi quadrato ex BF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipſi FE eſt ęqualis, & DF ipſius DE dimidia. quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadē ſphæra deſcriptorum.

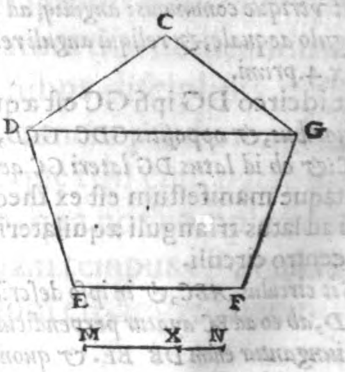
Hoc autem conſcribitur ab Ariſtero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in ſecunda editione comparationis dodecaedri cum icoſaedro, videlicet vt dodecaedri ſuperficies eſt ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe & ipſum dodecaedrum ad icoſaedrum, quòd perpendicularis ducta à centro ſphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem ſit, quæ ad icoſaedri triangulum ducitur. Itaque demōſtrandum eſt eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, hoc præmiſſo.

Si in circulo pentagonum ęquilaterum deſcribatur, quod fit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quę ex circuli centro.



Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: ſumaturque circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla eſſe. iuncta enim AE eſt decagoni latus. & quoniā BE dupla eſt ipſius ED; 47.primi erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE æqualia ſunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla ſunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex EA AE & ED ſunt quintupla quadrati ex ED. A ſed quadrata ex DE EA æqualia ſunt quadrato ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED ſunt quintupla.

Hoc demonſtrato, demonſtrandum eſt eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.



Exponatur ſphæræ diameter AB, & in ipſa ſphęra deſcribatur dodecaedrum, & icoſaedrū: ſitque unum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icoſaedri uero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur DG. B ergo DG eſt cubi latus. & exponatur recta linea quædam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN ſit quintuplum. eſt autem & ſphæ-

ræ diameter potentia quintupla eius, quæ eſt ex cen- C
tro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur. ſecetur MN
extrema, ac media ratione in X: & ſit MX portio ma-
ior. ergo MX eſt decagoni latus. & quoniam quadra-
tum ex AB quintuplum eſt quadrati ex MN, & triplũ D
quadrati ex DG; erunt tria quadrata ex DG quadra-
tis quinque ex MN ęqualia. ut autem tria quadrata E
ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadra-
ta ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur qua
drata ex CG quinque quadratis ex MX ſunt æqualia. quinque autẽ quadrata ex KL F
æqualia sũt quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinq; qua
drata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC ſunt æqualia. ſed
tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC ęqualia ſunt quindecim quadratis
eius, quæ ex centro circuli deſcripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demõ- G
ſtratum eſt quadrata ex DG GC quintupla eſſe quadrati eius, quæ eſt ex centro cir
culi circa pentagonum CDEFG deſcripti. quinque autem quadrata ex KL ſunt æ-
qualia quindecim quadratis eius, quę eſt ex centro circuli deſcripti circa triangulũ
KLH. etenim demonſtratum eſt quadratum ex KL triplum eſſe quadrati eius, quæ H
eſt ex centro circuli circa triangulum KLH deſcripti. quindecim igitur quadrata
eius, quę eſt ex centro circuli quindecin quadratis eius, quæ eſt ex centro circuli
ſunt ęqualia; ac propterea diameter diametro eſt æqualis. ergo idem circulus com-
prehendit & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra
deſcriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sed quadrata ex DE EA æqualia ſunt quadrato ex AC] *Ex decima tertij decimi.*

B Ergo DG eſt cubi latus] *Secta enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior portio erit aequalis lateri pentagoni CD ex 8 tertij decimi. ſi aũt latus cubi extrema, ac media rõne ſecetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertij decimi. ſed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG eſt cubi latus. nam ſi duę rectę lineę extrema, ac media ratione ſecentur, erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonſtrabitur.*

C Secetur MN extrema, ac media ratione in X; & ſit MX portio maior. ergo MX eſt decagoni latus] *Ex ante dictis ſequitur MN eſſe eam, quaę ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur, hoc eſt hexagoni latus. ſi autem hexagoni latus extrema, ac media ratione ſecetur, erit maior portio latus decagoni. quod nos ſupra ad nouam tertij decimi demonſtrauimus.*

D Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertij decimi libri.*

E Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX] *Eſt enim CG maior portio ipſius DG extrema, ac media ratione ſectae, & ſimiliter MX maior portio ipſius MN: & vt tota DG ad totam MN, ita eſt ipſius DG maior portio ad maiorem portionem ipſius MN. quod deinceps demonſtrabitur.*

F Quinque autem quadrata ex KL ęqualia ſunt & quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX] *Ex 10 tertij decimi. eſt enim KL latus pentagoni deſcripti in circulo, à quo icoſaedrum deſcribitur, & cuius ea, quae ex centro eſt MN.*

G Antea enim demonſtratum eſt] *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.*

H Etenim demonſtratum eſt quadratum ex KL triplum eſſe quadrati eius, quę ex centro circuli] *In duodecima tertij decimi libri.*

THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipſum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur ſuperficiei dodecaedri eſt æquale.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipſum circulus: ſumatur autem centrum F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentago-
A nis ABCDE æquale eſſe. Iūgatur enim CF FD. & quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem
B triangulis ęquale. decem autem triangula duo pentagona ſunt, & eorum ſextupla æqualia. ergo quod tricies CD FG continetur eſt æquale duodecim pentagonis. ſed duodecim pētagona ſunt dodecaedri ſuperficies. ergo quod tricies cōtinetur CD FG ſuperficiei dodecaedri æquale erit.

Similiter demonſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipſum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BG DE continetur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.

Quoniam enim rurſus quod BG DE continetur duplum eſt trianguli DBC, erunt duo triangula ęqualia ei, quod cōtinetnr BC DE, & eorum tripla. ſex igitur triangula DBC æqualia ſunt tribus, quæ BC DE continentur. at ſex triangula vt DBC
C ſunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum decupla. ergo quod tricies BC DE continetur eſt æquale viginti triangulis ABC, hoc eſt icoſaedri ſu-
D perficiei. erit igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiē icoſaedri, ita eſſe quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti, in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icoſaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti in ipſum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD] *Ex 41 primi, ex quo ſequitur duo triangula FCD ęqualia eſſe ei, quod CD FG continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona ſunt] *Vnumquodque enim pentagonum quinque eiuſmodi triangula continet.*

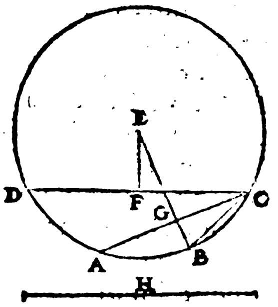
C At ſex triangula vt DBC ſunt ęqualia duobus A B C triangulis] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis DBC conſtat.*

D Erit igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur] *Quoniam enim quod tricies cōtinetur CD FG eſt aequale ſuperficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE ęquale ſuperficiei icoſaedri,*

ſaedri, erit vt ſuperficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita ſuperficies icoſaedri ad id, quod tricies continetur BC DE: & permutando vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. ſed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod ſemel continetur CD FG ad id, quod ſemel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

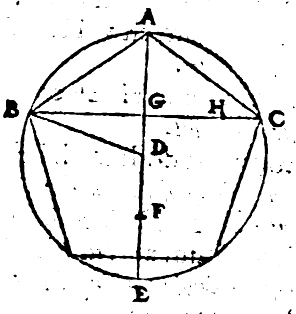
Hoc probato demonſtrandum erit, vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus.



Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: & in ipſo deſcribatur trianguli quidem ęquilateri latus CD: pentagoni vero AC: ſumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipſi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe H ad ipſam CD. quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt EB, & eſt vtriuſque quidem dimidia EG, ipſius vero BE dimidia EF: erit & ipſius EG extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF. eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectę maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit. ut igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF; ideòque contentum H FE eſt ęquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam eſt vt H ad CD, ita quod cõtinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur eſt ęquale cõtentum CA EG: erit vt H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD.

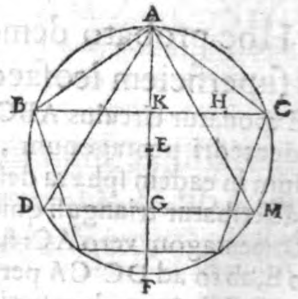
Aliter demonſtrare ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus, hoc pręmiſſo.

Sit circulus ABC, & in eo deſcribantur ęquilateri pentagoni latera AB AC: & iungatur BC; ſumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturq; ipſius AD dimidia DF, & GC ipſius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono ęquale eſſe.



Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla eſt ipſius DF, erit FA ipſius AD ſeſquialtera. rurſus quoniam GC tripla eſt ipſius CH, erit GH ipſius HC dupla. ſeſquialtera igitur eſt CG ipſius GH. quare vt FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentũ AF GH eſt æquale ei, quod AD CG cõtinetur: ſed CG eſt æqualis GB. ergo contentum AD BG eſt æquale ei, quod AF GH continetur. contentum autem AD BG eſt duo triangula, ut ABD. quod igitur AF GH continetur & duo triangula ABD. ergo quinque rectangula contenta AF GH decem ſunt triangula. decem autem triangula duo pentagona ſunt. quinque igitur rectangula conten-

contenta AF GH duobus pentagonis ſunt æqualia.& quoniam GH eſt dupla HC,
erit contentum AF GH duplum eius,quod AF HC continetur. ergo duo rectangula
contenta AF HC ſunt æqualia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla.
decem igitur rectangula contenta AF HC ſunt æqualia quinque,quę AF GH
continentur, hoc eſt duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pentagono
N ſunt æqualia. quinque autem contenta AF HC ſunt æqualia ei, quod continetur
AF BH, quoniam B H quintupla eſt ipſius H C, & communis altitudo eſt
AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono eſt ęquale.



Hoc demonſtrato nunc exponatur circulus cō-
prehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri
triangulum in eadem ſphęra deſcriptorum; &
in circulo ABC deſcribantur æquilateri pentagoni
latera BA AC: & iungatur BC. ſumatur prætereа
circuli centrum E, & iuncta A E ad F producatur:
ſitq; AE quidem dupla ipſius EG; KC vero ipſius
CH tripla: & per G ipſi AF ad rectos angulos ducatur
O DM. ergo DM eſt latus trianguli æquilateri;
P & æquilaterum eſt ADM triangulum. & quoniam
Q rectangulum quidem contentum AG BH eſt ęquale
pentagono,contentum vero AGD æquale triangulo ADM; erit vt rectangulum
R contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt autem
S rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt
igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula,
T hoc eſt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. & duodecim quidē BH
ſunt decem B C: etenim BH quintupla eſt ipſius H C; & B C ipſius C H ſextupla:
ideoq; duodecim BH ſunt æquales decem BC:viginti autem DG ſunt decem DM;
V dupla enim eſt D M ipſius D G. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc eſt vt BC
X ad DM, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque eſt BC quidem
cubi latus, DM vero latus icoſaedri. & vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem
icoſaedri,ita BC ad DM, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraque ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta maior portio eſt EB] *Ex nona tertijdecimi.*

B Et eſt vtriuſque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipſius vero BE dimidia EF] *Ex ijs, quae nos demonſtrauimus ad finem primae huius.*

D Erit & ipſius EF extrema, ac media ratione ſectæ maior portio EF] *Ex 15 quinti.*

E Eſt autem & ipſius H extrema,ac media ratione ſectæ maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit] *In 17 tertijdecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF.] *Hoc autem ita eſſe ad finem huius libri demonſtrabitur.*

G Ideoque contentum H FE eſt ęquale ei,quod CA EG continetur] *Ex 16 ſexti.*

H Et quoniam eſt vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima ſexti.*

K Ei vero quod H EF continetur eſt æquale contentum CA EG] *Quod proxime demonſtratum fuit.*

L Hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonſtratum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur CA EG ad id,quod CD EF continetur.*

M Contentum autem AD BG eſt duo triangula vt ABD] *Hoc eſt contentum AD BG eſt aequale duobus triangulis ABD. eſt enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinque autem contenta AF HC ſunt ęqualia ei,quod continetur AF BH,quoniam BH eſt quintupla ipſius HC:& communis altitudo eſt AF] *Ex prima ſexti.*

Ergo

Ergo DM eſt latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad trianguli aequilateri latus eſt dimidia eius, quae ex circuli centro, ut nos demonſtrabimus ad finem primae huius.* O

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH eſt æquale pentagono] P *Ex ijs, quae proxime demonſtrauit.*

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonſtratis in 42 primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad R DG] *Parallelogramma enim, quae eandem habent altitudinem inter ſe ſunt vt baſes, ex prima ſexti.*

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti S triangula] *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita eſſe pentagonum ad triangulum.*

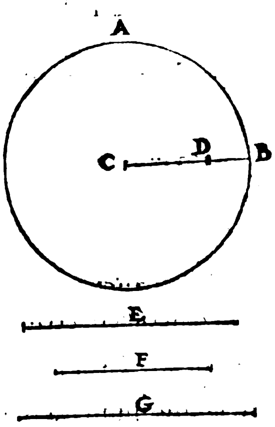
Et duodecim quidem BH ſunt decem BC, etenim BH quintupla eſt ipſius HC, T & BC ipſius CH ſextupla] *Quoniam enim BH eſt quintupla ipſius HC, & BC eſt eiuſdem HC ſextupla, habebit HB ad BC peoportionem eam, quam habet quinque ad ſex. ſed quinque multiplicans duodecim producit 60, & ſex multiplicans decem producit ſimiliter 60. ergo duodecim BH ſunt aequales decem BC.*

Hoc eſt vt BC ad DM] *Ex 15 quinti.* V

Atque eſt BC quidem cubi latus] *Hoc à nobis ſuperius demonſtratũ eſt in ſecundã huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Oſtendendum eſt & qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quę poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri.



Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadē ſphæra deſcriptorum: ſumaturque circuli centrum C; & & ab eo producatur recta linea vtcumque CB: & ſecetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD ſit maior portio. quare CD eſt latus decagoni in eodē A circulo deſcripti. exponatur icoſaedri latus E, dodecaedri F, & cubi G. ergo E eſt trianguli æquilateri latus, F pentagoni in eodem circulo deſcripti: atque B eſt F ipſius G maior portio. & quoniam E eſt æqualis lateri trianguli ęquilateri: trianguli autem ęqui- G lateri latus eſt potentia triplum ipſius BC. ergo quadratum ex E quadrati ex BC eſt triplum: ſuntq; qua- D drata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutãdo. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. ſed vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita eſt quadratum ex G ad quadratum ex F; eſt enim F maior portio ipſius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque. ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex CB BD. quadrato autem ex F ęqualia ſunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus E pentagoni poteſt & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. ſed vt quadrata ex F BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea extrema

extrema, ac media ratione ſecta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque eſt G quidem cubi latus, E vero icoſaedri. ſi igitur recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, erit vt potens totam & maiorem portionem ad eam, quæ poteſt totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icoſaeſtri, in eadem ſphæra deſcriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare CD eſt latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione ſecetur maior portio eſt decagoni latus, in eodem circulo deſcripti, vt nos ſupra demonſtrauimus ad nonam tertijdecimi.*

B Atque eſt F ipſius G maior portio] *Ex corollario 17 tertijdecimi, nimirum ipſa G extrema, ac media ratione ſecta.*

C Trianguli autem æquilateri latus eſt potentia triplum ipſius BC] *Ex duodecima tertijdecimi.*

D Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] *Ex 4. tertijdecimi.*

E Etenim latus pētagoni pōt & hexagoni & decagoni latus] *Ex decima tertijdecimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratũ totius & minoris portionis] *Græcus codex corruptus eſt qui ſic hẽt* ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδβ. ὡς δὲ τό ἀπὸ βγδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδβ, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ᾽ οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτε οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo poſt. etenim hæ uoces ἡ δυναμένη. & τὴν δυναμένην hoc loco ſuperuacaneæ ſunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Oſtendendum nunc eſt vt latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe **A** dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

2 huius. Quoniam enim æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, & **A** icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum; in ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant. nam quę à centro ſphæræ ad plana circulorum per- **B** pendiculares ducuntur & æquales ſunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro ſphæræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum æquales ſunt, videlicet perpendiculares ipſæ: & ob id pyramides, quę baſes habent dodecaedri pentagona, & icoſaedri triangula ę- **C** que altę ſunt. pyramides autem æque altæ inter ſe ſunt vti baſes. vt igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius baſis eſt dodecaedri pentagonum, & vertex centrum ſphęræ ad pyramidem, cuius baſis eſt icoſaedri triangulum, vertex autem ſphæræ centrum. ergo & vt duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares habent baſes. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies, & uiginti triangula ſuperficies icoſaedri. eſt igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ad viginti pyramides, quę triangulares baſes habent. & duodecim pyramides pentagonales baſes habentes ſunt dodecaedri ſolidum: uiginti autem pyramides, quę triangulares habēt baſes ſunt ſolidum icoſaedri. quare & vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita ſolidum dodecaedri ad icoſaedri ſolidum. ut autem dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita oſtenſum eſt eſſe latus cubi ad icoſaedri latus. & vt

igitur

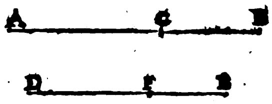
igitur latus cubi ad icoſaedri latus, ita dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

In ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant] *Ex 6. propoſitione pri-* A
mi libri ſphæricorum Theodoſii.
Et in centra circulorum cadunt] *Ex 2 corollario primae eiuſdẽ libri ſphæricorũ Theodoſii.* B
Pyramides autem æque altæ ſunt inter ſe, vti baſes] *Ex quinta & ſexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas ſi extrema, ac media ratione ſectæ fuerint, in ſubiecta eſſe anologia, ita demonſtrabimus.



Secetur enim AB extrema, ac media ratione in
C, cuius maior portio ſit AC: & ſimiliter DE extre-
ma, ac media ratione ſecetur in F, vt DF ſit portio
maior. Dico ut tota AB ad maiorem portionem A
C, ita eſſe totam DE ad DF maiorem portionem.
Quoniam enim rectangulum quidem ABC eſt æ-
quale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt re-
ctangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex D
F; & ut rectãgulum, quod quater cõtinetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod
quater continetur DE EF ad quadratũ ex DF: componendoque vt quod quater cõ
tinetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater
continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & vt quadra- A
tum ex vtraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraque DE EF
ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraque AB BC ad AC, ita vtraque DE E B
F ad DF: & componendo vt vtraque AB BC vnà cum AC ad AC, hoc eſt duę AB
ad AC, ita utraque DE EF vnà cum DF ad DF, hoc eſt duę DE ad DF. & antecedẽ
tium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF.

COROLLARIVM.

Itaque hoc demonſtrato videlicet qualibet recta linea extre-
ma, ac media ratione ſecta, quam proportionem habet potens
quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ poteſt qua
dratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus C
ad latus icoſaedri. atque hoc demonſtrato vt latus cubi ad ico-
ſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem ico- D
ſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. & inſuper hoc cognito vt
dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe dodecae- E
drum ad ipſum icoſaedrum, propterea quòd idem circulus com-
prehendit, & dodecaedri pentagonum, & icoſahedri triangulũ:
conſtat, ſi in ipſa ſphęra deſcribatur & dodecaedrum, & icoſae-
drum, eandem inter ſe proportionem habere, quam ſi recta linea
extrema, ac media ratione ſecetur, habet potens quadratum to-
tius & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius,
ac minoris portionis.

Quoniam enim eſt vt dodecaedrum ad icoſaedrum, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, hoc eſt latus cubi ad icoſaedri latus. vt autem latus cubi ad icoſaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icoſaedrum, quæ in eadem ſphæra deſcribuntur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione ſecta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eã, quę poteſt quadratũ totius & minoris portionis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratũ ex DF] *Ex 8 ſecundi, eſt enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea. & ſimiliter quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea.*

B Et longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF] *Ex 22 ſexti.*

C Eãdem habere cubi latus ad latus icoſaedri] *Ex 5 huius.*

D Ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum] *Ex quarta huius.*

E Ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum] *Ex 6 huius.*

QVARTIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVINTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVINTVS.
vt quidam arbitrantur.

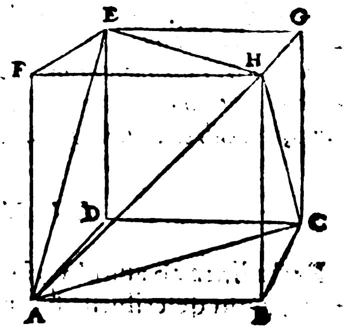
VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

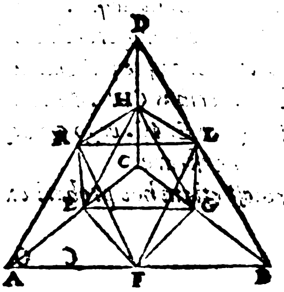
Sit datus cubus ABCDEFGH, in quo oporteat pyramidem deſcribere. iungantur AC AE CE AH EH HC. itaque perſpicuum eſt triangula AEC AHE AHC CHE ęquilatera eſſe. quadratorum enim diametri ſunt latera. pyramis igitur eſt AECH, & deſcripta eſt in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum deſcribere.

Sit data pyramis ABCD, cuius latera ſecentur bifariã in pũctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur AB dupla eſt vtriuſque HK FG, erit HK ipſi GF æqualis, & parallela. Similiter & HG ęqualis, & parallela ipſi FK. æquilaterum igitur eſt HKFG. Dico & rectangulum eſſe. ſi enim ab ipſa KL perpendiculares ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG HKFG ſimiliter demonſtrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera eſſe



F. C. COMMENTARIVS.

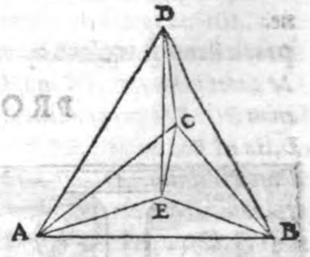
Quoniam igitur AB dupla eſt vtriuſque HK GF, erit HK ipſi GF, ęqualis & parallela] *Eſt enim HK ipſi AB parallela; namque ut DH ad HA, ita eſt DK ad KB. & eadem ra* A 2. ſexti

9.undecimi. *tione demonſtrabitur GF parallela ipſi AB. quae autem uni, & eidem ſunt parallelę, & inter ſe parallelae ſunt. ergo HK ipſi GF eſt parallela. triangula autem DAB DHK aequiangula ſunt.* 29 primi *namque angulus quidem DHK eſt aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipſi DBA,* 4. sexti. *& BAD vtrique communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK. eſtq́; AD dupla ipſius DH.* 9. quinti. *ergo & AB ipſius HK eſt dupla. & eadem ratione erit AB dupla ipſius GF. quare HK ipſi GF* 32. primi. *eſt aequalis, atque eſt parallela, vt demonſtratum fuit. quae autem aequales & parallelas coniungunt & ipſae aequales ſunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela eſt HG ipſi KF. ſuntq́; HK KF inter ſe aequales, cum aequalium ſint dimidiae. ergo HKFG aequilaterum eſt.*

Dico & rectangulum eſſe] *Vt hoc facile demonſtretur duo lemmata pręmittenda ſunt.*

LEMMA PRIMVM.

Si à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur.



Sit pyramis ABCD, cuius baſis triangulum ABC, & vertex D punctum: ducaturq́; à puncto D ad baſim perdendicularis DE. Dico E centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis eſt ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipſam contingunt, queq́; in eodem ſunt plano rectos angulos faciet. recti igi- 47. primi *tur anguli ſunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex AD eſt aequale quadratis ex AE ED. & quadratum ex BD aequale quadratis ex BE ED. ſunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quòd aequales ſint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia ſunt quadratis ex BE ED. & dempto cõmuni quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter ſe aequalia. ideoq́; rectae lineae AE EB* 9. tertij. *aequales ſunt. ſimiliter demonſtrabimus CE aequalem eſſe ipſis AE EB. quare punctum E centrum eſt circuli circa triangulum ABC deſcripti. quod demonſtrare oportebat.*

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim bifariam ſecat.

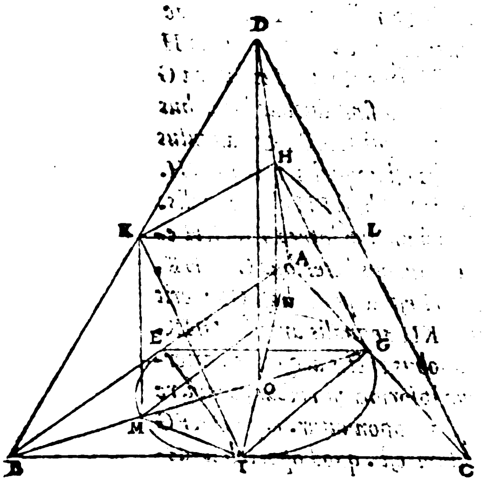
Sit triãgulum aequilaterum ABC, & circa ipſum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD ſecet baſim in puncto E. Dico BE ipſi EC aequalem eſſe: producatur enim AE vſque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum tranſit, circuli erit diameter: ideoq́; circumferentia ABF circumferentiae ACF eſt aequa- 28. tertij. *lis. circumferentia autem AB aequalis eſt circumferentiae AC, quòd recta linea AB ſit aequalis ipſi AC. ergo & reliqua circumferentia* 27. tertij. *BF reliquae circumferentiae FC, & angulus BAE angulo EAC aequalis erit. itaque triãguli ABE duo latera BA AE aequalia ſunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequa-* 8. primi. *lis eſt angulo EAC. ergo & baſis BE baſi EC eſt aequalis. quod oportebat demonſtrare.*

Poteſt etiam hoc probari ex tertia ſexti libri, cum BA ſit ęqualis ipſi AC.

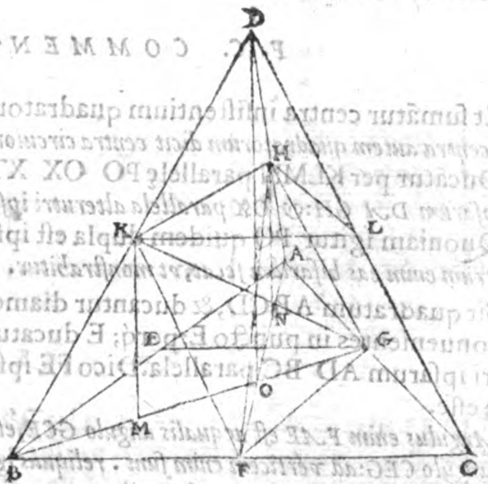
COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij conſtat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.

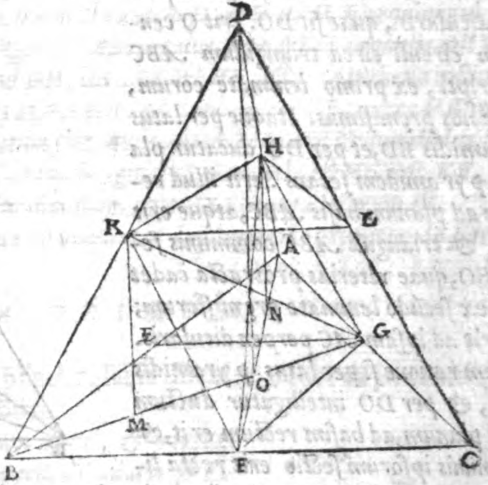
His demonſtratis ducatur à vertice
pyramidis ABCD ad baſis planũ per-
pendicularis, quae ſit DO. erit O cen-
trum circuli circa triangulum ABC
deſcripti, ex primo lemmate eorum,
quae nos pręmiſimus. Itaque per latus
pyramidis BD, et per DO ducatur pla
num pyramidem ſecans. erit illud re- 18. undecimi
ctum ad planum baſis ABC, atque erit
eius, & trianguli ABC communis ſe-
ctio BO, quae vlterius protracta cadet
in G ex ſecũdo lemmate pręmiſſorum;
& erit ad ipſam AC perpendicularis.
Eadem ratione ſi per latus pyramidis
AD, & per DO intelligatur ductum
aliud planum, ad baſim rectum erit, &
communis ipſorum ſectio erit recta li-
nea AOF ad ipſam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC per-
pendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum ſectiones ex 38 vndecimi, hoc eſt K
M cadet in BO, & HN in ipſam AO: & BO AO in punctis MN bifariam diuidentur. Quoniam
enim DO KM perpendiculares ſunt ad idem planum inter ſe parallelę erunt. quare vt BK ad K 6. undecimi.
D, ita eſt BM ad MO. ſed BK eſt aequalis KD. ergo & BM ipſi MO aequalis erit. Eadem ratione 2. ſexti.
demonſtrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus
trianguli aequilateri dimidia eſt eius, quae ex centro circuli, vt ad primam quartidecimi libri de
monſtrauimus; erit OF dimidia ipſius OA, & OG dimidia ipſius OB. & cum FO OG ſint aequa-
les, quoniã et ipſae AO OB quę ex circuli cẽtro; omnes AN NO OF BM MO OG inter ſe ę-
quales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipſarum FO OG circulus deſcriptus etiam per
puncta MN tranſibit. deſcribatur, & NM MF iungantur. quòd cum triangula BDO BKM ſint
aequiangula, propterea quòd linea KM parallela eſt ipſi DO; erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: 4. ſexti.
eſtq; DB dupla ipſius BK. ergo & DO ipſius KM dupla erit. & ita demonſtrabitur DO dupla ip-
ſius HN. quare KM HN inter ſe aequales ſunt. & ſunt parallelae, quippe quòd ad idem planum 9. quinti.
ſint perpendiculares. quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipſae aequales, & paral 6. undecimi.
lelae ſunt. aequalis igitur eſt & parallela MN ipſi KH. ſed FG demonſtrata eſt aequalis, & pa- 33. primi.
rallela eidem KH, ergo MN FG aequales ſunt, & parallelae. angulus autem NMK eſt rectus:
& ſimiliter rectus NMF, quòd in ſemicirculo. quare cũ NM duabus rectis lineis KM MF ſe inui
cẽ ſecantibus in cõi ſectione ad rectos
angulos iſiſtat, ẽt ducto per ipſas plano
ad rectos angulos erit. ergo NM perpẽ- 4. undecimi
dicularis eſt ad planũ trianguli KMF.
Sed demonſtrata eſt FG parallela ipſi
MN. quare & FG ad idem planũ per- 8. undecimi
pendicularis erit. ideoq; angulus GFK
eſt rectus. ſunt autem anguli GFK FG
H duobus rectis aequales. ergo & re- 29. primi.
ctus eſt FGH: & ſimiliter recti, qui ip- 34. primi.
ſis opponũtur. ex quibus ſequitur HK
FG & aequilaterum eſſe, & rectangu
lum. quod oportebat demonſtrare.



ALITER. Ductis KM HN per-
pendicularibus, ut in antecedẽti figura,
iungantur HF KG. & quoniam per-
pendicularis BG eſt aequalis ipſi AF;
eſt enim AB ad vtramq; ipſarũ, vt 4
ad 3, quod nos demonſtrauimus ad 12



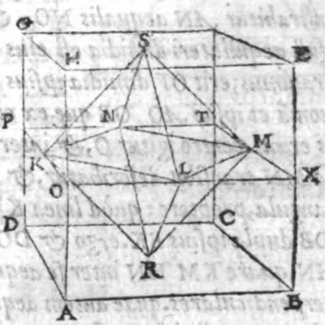
tertijdecimi libri.ſed & BM eſt ęqualis AN: erit & reliqua MG reliquae NF ęqualis: atque eſt KM aequalis HN.trianguli igitur KMG duo latera GM MK ęqualia ſunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF : & angulus GMK rectus eſt aequalis recto FNH. ergo et baſis KG baſi FH eſt aequalis. rurſus.quoniam duo latera FK KH ęqualia ſunt duobus lateribus GH HK, & baſis FH eſt aequalis baſi GK; erit angulus FKH aequalis angulo GHK. & ſunt duobus rectis aequales. vterque igitur ipſorum eſt rectus,itemq; recti,qui ipſis opponuntur. ergo HKFG rectangulum eſt. quod oportebat demonſtrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO. III.

In dato cubo octaedrum deſcribere.

A Sit datus cubus ABCDEFGH : & ſumantur
centra inſiſtentium quadratorum KLMN.Dico
B KLMN quadratum eſſe. ducantur per KLMN
C parallelæ PO OX XT TP. Quoniam igitur P
O quidem dupla eſt ipſius OK, XO autem du-
D pla ipſius OL, ſuntque æquales PO OX; erunt
E & KO OL inter ſe æquales. quadratum igitur
ex KL duplum eſt quadrati ex OL. eadem ratio
ne & quadratum ex ML duplum eſt quadrati
F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM
eſt æquale. æquilaterum igitur eſt KLMN,& cō
H ſtat rectangulum eſſe. ſumantur duo quadrata
BD EG;ipſorūque centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
K perſpicuum eſt triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera eſſe. quod eadem
ratione demonſtrabimus.



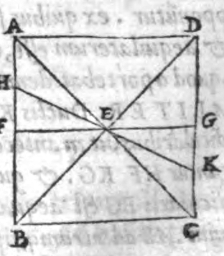
F. C. COMMENTARIVS.

A Et ſumātur centra inſiſtentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum,qui circa quadrata deſcribuntur.*

B Ducātur per KLMN parallelę PO OX XT TP] *Hoc eſt ducatur PO parallela alterutri ipſarum DA GH: & OX parallela alterutri ipſarum AB HE, & ſic in alÿs.*

C Quoniam igitur PO quidem dupla eſt ipſius OK, XO autem dupla ipſius OL] *Centrum enim eas bifariam ſecat, vt monſtrabitur.*

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E: perq; E ducatur FG alterutri ipſarum AD BC parallela. Dico FE ipſi EG ęqualem eſſe.



29 . primi
15.primi.
Angulus enim FAE eſt aequalis angulo GCE, et angulus AEF angulo CEG: ad verticem enim ſunt. reliquus igitur reliquo aequalis, & triangulum triangulo ſimile. quare ut AE ad EF, ita eſt CE, ad EG: & permutando ut AE ad EC, ita FE ad EG.

atque eſt AE aequalis EC, quòd AE ſit circuli diameter, & E centrum eiuſdem. ergo FE ipſi EG ęqualis erit. centrum autem non ſolum ipſam FG bifariam ſecat, ſed & alias omnes, quae in quadrato per ipſum ducuntur. quod eodem modo demonſtrabimus.

Suntq; æquales PO OX] *Eſt enim PO aequalis DA, & OX aequalis AB ex 34 primi. quare PO ad OX eſt vt DA ad AB: & ſunt DA AB inter ſe aequales. ergo & PO OX aequales erunt.* D

Quadratum igitur ex KL duplum eſt quadrati ex OL] *Eſt enim quadratum ex KL ęquale quadratis ex KO OL ex 47 primi.* E

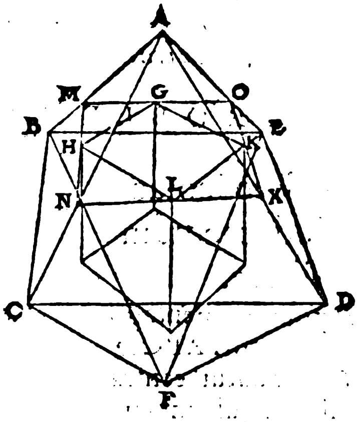
Ergo quadrarum ex KL quadrato ex LM eſt ęquale] *Ex quo ſequitur & rectam lineã KL ipſi LM aequalem eſſe. ſed & aliter demonſtrare poſſumus. Quoniam enim duo latera KO OL ſunt aequalia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus eſt aequalis recto ad X; erit & baſis KL baſi LM aequalis ex 4 primi. et eodem modo demonſtrabitur LM aequalis MN, et OK aequalis KN. quare omnes inter ſe aequales ſint neceſſe eſt.* F

Et conſtat rectangulum eſſe] *Quoniam enim KO eſt aequalis OL, & angulus KOL eſt rectus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem cauſſam angulus MLX eſt dimidius recti. reliquus igitur KLM rectus eſt. ſunt enim tres anguli duobus rectis aequales. Eadem ratione & vnuſquiſque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonſtrabitur.* G

Perſpicuum eſt triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera eſſe, quod eadem ratione demonſtrabimus] *Iiſdem enim argumentis probabimus KSMR NSLR aequilatera eſſe, & latera eorum ipſis KLMN aequalia.* H

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

In dato octaedro cubum deſcribere.



Sumantur centra circulorum, quæ ſunt circa
triangula ABE ABC ACD ADE, quæ ſint G
HKL, & GH GK LK LH iungantur. Dico GH
KL quadratum eſſe. ducantur per GHKL ipſis
EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO.
quoniam igitur æquilaterum eſt ABC triangu- A
lum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H cẽ
trum circuli circa triangulum ABC deſcripti bi
fariam ſecat trianguli angulum, qui eſt ad A,
ęqualis igitur eſt MH ipſi HN. Eadem ratione
& MG eſt æqualis GO. quoniam autem MN eſt B
ęqualis MO, & MO ipſi OX; erit & HM ęqualis
MG, & GO ipſi OK; ſuntq; anguli HMG GOK C
recti. ergo HG ipſi GK eſt ęqualis. Eadem ratio D E
ne & reliquæ æquales erunt. cum igitur paralle-
logrammum ſit GHKL in uno erit plano. & cũ
vterque angulorum MGH OGK ſit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit. ſimi F
liter & reliqui. quadratum igitur eſt GHKL. poſſumus autem à principio ſumentes
centra GHKL, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, &
dicere GHKL quadratum eſſe. quòd ſi ſumentes reliquorum triangulorum centra,
ipſa iungamus, oſtendentur & reliqua quadrata eſſe, habebimusq; in dato octaedro
deſcriptum cubum. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam igitur æquilaterum eſt ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti bifariam ſecat trianguli angulum, qui eſt ad A, ęqualis igitur eſt MH ipſi HN] *Superius enim demonſtratũ eſt rectam lineam ab angulo trianguli ęquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum* *deſcribitur baſim bifariam ſecare. ſequitur etiam hoc ex demonſtratis in decima primi libri. quod ſi per centrum H ducatur MN ipſi BC parallela, demonſtrabitur eadem ratione MH aequalem eſſe ipſi HN, cum MA ipſi AN ſit aequalis, fiunt enim triangula BAC MAN inter ſe ſimilia.*

B Quoniam autem NM eſt æqualis MO, & MO ipſi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipſi OK] *Cum enim rectae lineae NM MO parallelae ſint ipſis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC ſimile, & triaugulum AMO ſimile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA, ita eſt NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali vt CB ad BE, ita NM ad MO. ſed CB eſt aequalis ipſi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipſi MO eſt ęqualis. & eadem ratione MO ipſi OX aequalis demonſtrabitur. eſt autem HM dimidia ipſius MN, & MG dimidia ipſius MO. quare ſequitur HM ipſi MG aequalem eſſe, & ita GO ęqualem ipſi OK.*

C Suntq; anguli HMG GOK recti] *Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae ſunt ipſis CB BE, atque eſt angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 vndecimi.*

D Ergo HG ipſi GK eſt æqualis [*Ex 4 primi.*

E Cum igitur parallelogrammum ſit GHKL in vno erit plano] Omne enim parallelogrammum eſt in vno plano.

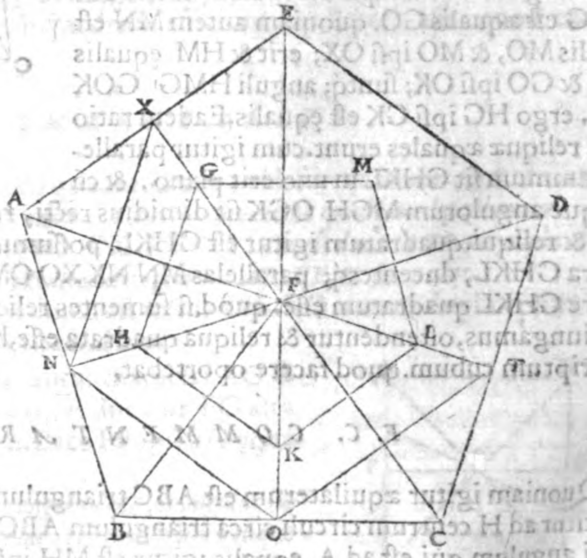
Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae ſe ſe in puncto E ſecent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2 undecimi. itemq; in vno plano. triangulum ACD. ſed et triangulum BCD eſt in vno plano. quare triangulum DEC, hoc eſt totum triangulum ACD eſt in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc eſt ipſum ABC. totum igitur parallelogramum ABCD in uno plano erit. quod oportebat demonſtrare.

F Et cum vterque angulorum MGH OGK ſit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit] *Sunt enim triangula HMG GOK aequicruria, et anguli ad M, et O recti; ut demonſtratum iam eſt.*

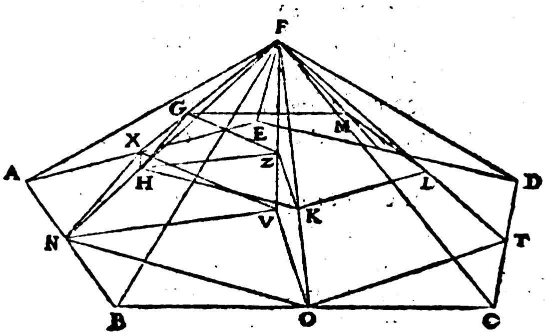
Ex iam demonſtratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis deſcribatur. *Si enim in dato octaedro cubum, et rurſus in cubo pyramidem deſcribamus, et pyramis in dato octaedro deſcripta erit.*

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icoſaedro dodecaedrum deſcribere.



A Exponatur pentagonum icoſaedri ABCD
E, & ſumantur centra
circulorũ, qui ſunt circa triãgula AFE AFB
BFC CFD DFE, uidelicet GHKLM, iunganturq; GH HK KL L
M MG. & rurſus iũctæ
FG FH FK producãtur ad pũcta XNO, quæ
B rectas lineas EA AB B
C in XNO punctis bifariam ſecabũt : atq; erit
C vt XN ad NO, ita GH
D ad HK. ęqualis igitur
eſt & HN ipſi KO. ſimiliter autem & reli-



qua pentagoni GHKLM latera æqualia oſtendentur. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK ęquales E
angulos continent, & reliqua manifeſta ſunt. Intelligatur à puncto F ad planum pētagoni ABCDE ducta perpēdicularis, quæ cadet in centrū circuli circa pētagonū deſcripti. F
ſi igitur à pūcto N ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineā ducamus, & per H ducamus ipſi parallelam, perſpicnum eſt eam perpendiculari G
occurrere, & cum ipſa rectum angulum continere. Rurſus ſi à punctis XO ad cētrum circuli circa pentagonum deſcripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurit ad G K rectas lineas ducamus, manifeſtū H
eſt ipſas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perſpicue cō K
ſtat pentagonum GHKLM in vno eſſe plano.

F. C. COMMENTARIVS.

A Exponatur pentagonum icoſaedri ABCDE] *Hoc eſt pentagonum deſcriptum in circulo, à quo icoſaedrum ortum habet, vt in 16 tertijdecimi.*

B Quę rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam ſecabunt] *Ex ijs, quae nos in antecedente demonſtrauimus.*

C Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniam enim triangula AFE AFB BFC aequilatera ſunt, & aequalia; erunt perpendiculares, qnae ab angulo F ad baſim ducuntur, videlicet FX FN FO inter ſe aequales. latus enim trianguli aequilateri ad perpendicularem, quae ab angulo ad baſim ducitur, eam proportioaem habet, quam 4 ad 3, vt nos demonſtrauimns ad 12 tertijdecimi. Rurſus quoniam GHK ſunt centra circulorum, qui circa triangula deſcribuntur, erūt & ipſae, quae ex centris FG FH FK aequales. ergo & reliquae aequales ſunt, nempe GX HN KO. ſunt autem aequales EA AB BC: & earum dimidiae EX XA AN NB BO OC. cū igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN aequalia ſint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB ſint aequales, ponitur enim pentagonum ABCDE aequilaterum, & aequiangulum: erit & baſis XN baſi NO aequalis. ſed vt FG ad GX, ita eſt FH ad HN: eſt enim vtraque vtriuſque dupla, vt ad primam quartidecimi demonſtratum eſt. ergo GH parallela eſt ipſi XN. & eadem ratione HK ipſi NO eſt parallela. triangulum igitur FGH ſimile eſt triangnlo FXN, & triangulum FHK ſimile ipſi FNO: ideoq; vt NX ad HG, ita eſt NF ad FH. vt autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando vt XN ad NO, ita GH ad HK. ſunt autem aequales XN NO. ergo & GH HK aequales ſint neceſſe eſt.*

D Aequalis igitur eſt & HN ipſi KO] *Vide ne potius legendum ſit aequalis igitur eſt & GH ipſi HK propter ea, quae ſequuntur.*

E Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales augulos continent: & reliqua manifeſta ſunt] *Nam cum duae XN NO ſe ſe contingentes duabus GH HK*
ſe ſe contingentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos contiuebunt. 10. undecimi
ergo angulus GHK eſt aequalis angulo XNO. & ſimiliter bifariam ſecta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL aequalis angulo NOT. ſed anguli XNO NOT ſunt aequales, ut monſtrabitur. ergo & GHK HKL anguli aequales erunt. & ſimiliter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO aequicruria ſunt ſimilia, & aequalia, erūt anguli AXN ANX BNO BON COT inter ſe ęquales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO eſt aequalis reliquo NOT: itemq; reliqui aequales oſtendentur.

F Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonū deſcripti] *Cadat enim in punctum V;*

&

& intelligatur iunctae AV BV CV. Quoniā igitur FV perpēdicularis eſt ad plani pentagoni, erunt anguli AVF BVF CVF recti; & ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex AV VF: & quadratum ex BF ęquale duobus ex BV VF. ſed quadratum ex AF eſt aequale quadrato ex BF, quòd AF ipſi FB ſit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF ſunt aequalia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum quadratum ex AV aequale reliquo ex VB, & recta linea AV ipſi VB aequalis. Eadem ratione & recta linea CV aequalis oſtendetur ipſis AV VB. ergo V eſt centrum circuli circa pentagonum deſcripti. quod demonſtrare oportebat.

3. dif. undecimi.

47. primi.

9. tertij.

G Perſpicuum eſt eam perpendiculari occurrere, & cum ipſa rectum angulum continere] *Nam cum triangulum FNV ſit in vno plano, ſi recta linea à puncto H ducta non occureret perpendiculari, parallela non eſſet ipſi NV, quod non ponitur. ſunt enim purallelę in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurrat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus NVF ſit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.*

2. undecimi.

H Manifeſtum eſt ipſas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] *Quoniam.n. HZ eſt paralleia ipſi NV; erit ut FZ ad ZV, ita FH ad HN. ſed vt FH ad HN, ita FG ad GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FG ad GX. quare GZ eſt parallela ipſi XV; anguluſq́; GZF eſt rectus, nempe ipſi recto XVF aequalis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit: iunctiſq́; LZ MZ ſimiliter demonſtrabitur angulos LZF MZF eſſe rectos.*

2. sexti.

11. quinti.

K Ex quo perſpicue conſtat pentagonum GHKLM in vno eſſe plano] *Ex quinta undecimi. nā recta linea FZ tribus rectis lineis ſe ſe tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos inſiſtit. Si igitur reliquis icoſaedri angulis eodem modo pentagona ſubtendemus in dato icoſaedro dodecaedrum deſcriptum erit.*

De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem ſcire, ſi quis interroget nos, quot latera icoſaedrum habeat, ita reſpondendum eſſe. Patet icoſaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodque triangulum ex tribus rectis lineis conſtare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli, fient ſexaginta; cuius dimidium triginta. ſimiliter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt ſexaginta, cuius rurſus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quòd ſingula latera ſiue ſit triangulum, ſiue pētagonum, ſiue quadratum, vt in cubo, bis ſumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. ſi vero ſingularum quinque figurarum anguli inueniendi ſint, rurſus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum ſolidi angulum continent; vt quoniam incoſaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icoſaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemnr per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. ſimiliter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De inclinatione planorum, quæ ſingulas quinque figuras continent.

Quęſitum eſt quo modo in vnaquaque ſolidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipſam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Iſidorus magnus præceptor noſter, hoc modo ſe habet. In cubo quidem plana, quæ ipſum continent, ad rectos inter ſe angulos inclinari manifeſtum eſt. In pyramide vero expoſito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quę à vertice trianguli ad baſim perpendicularis ducitur, circumferentiæ deſcriptæ ſe mutuo ſecent; & à ſectione ad centra iunctę rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quę pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli deſcripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, inreruallo autem ſimiliter perpendiculari, quæ à uertice trianguli ad baſim ducitur; deſcribantur circumferentiæ; & rurſus rectæ lineę à communi ſectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icoſaedro autem à latere trianguli deſcripto pentagono, iungatur recta linea, quę duobus lateribus ſubtenditur: & centris quidē terminis eius, interualloq; perpendiculari ipſius trianguli deſcriptis circumferentijs rectæ lineę à communi ſectione ad centra iunctę continebunt ſimiliter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipſius icoſaedri. Denique in dodecaedro expoſito vno pentagono, & iuncta ſimiliter recta linea, quę duobus lateribus ſubtenditur, centris quidem terminis ipſius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita ſectione ad latus pētagoni ipſi parallelum ducitur; deſcribantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra ſimiliter iunctæ rectæ lineę continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

Pyramidis.

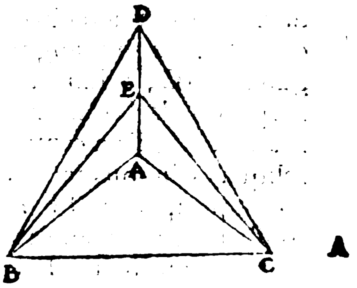
Octaedri planorum inclinatio.

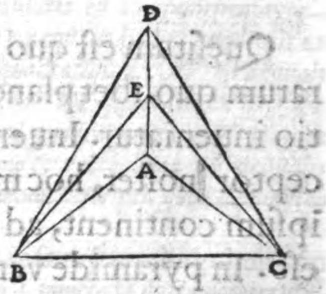
Icoſaedri planorum inclinatio.

Dodecaedri planorum inclinatio.

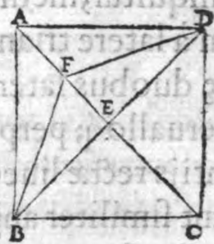
Hunc quidem vir ille clariſsimus de prędictis ſermonem habuit, cum demonſtratio eorum ſibi manifeſta videretur. ſed vt contemplatio demonſtratiua perſpicue appareat, ſermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.

Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius baſis ABC, & vertex D punctum. ſecto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera ſunt ADB ADC triangula, & bifariam ſecta eſt AD, erunt BE EC ad ipſam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum eſſe.

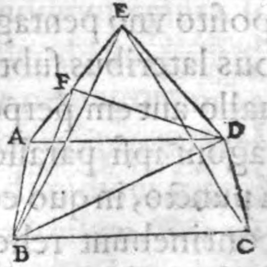




Quoniam enim AC dupla eſt ipſius AE, erit quadratum
ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadratum
47.primi. ex AC æquale eſt quadratis ex AE EC, quorum
B quadratum ex AC ad quadratũ ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque eſt CE ipſi EB æqualis. quadratum
igitur ex BC minus eſt quadratis ex BE EC;
ideoque angulus BEC eſt acutus. quòd cum duorum
planorum ABD ADC communis ſectio ſit AD, &
communi ſectioni ad rectos angulos occurrant in vtroque
planorum rectę lineæ BE EC, quæ acutum angulum
D continent. erit angulus BEC planorum inclinatio,
atque eſt data; datur enim BC latus exiſtens trianguli,
E & utraque ipſarum BE EC eſt perpendicularis trianguli æquilateri. centris
igitur BC, hoc eſt terminis vnius lateris, & interuallo trianguli perpendiculari deſcriptę
circumferentiæ ſe inuicem ſecent in puncto E: & ab eo ad BC iunctæ rectæ
lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem eſt, quod dicebatur. atque
illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari deſcripti circuli
ſe mutuo ſecent,) manifeſtum eſt. vtraque enim BE EC maior eſt, quàm dimidia
ipſius BC: & centris BC, & interuallo ipſius BC dimidia deſcripti circuli
ſe ſe tangunt. ſi autem minor ſit, neque ſe tangunt, neque ſecant: quòd ſi maior
omnino ſecant; & ita de pyramide ſermo & manifeſtus, & demonſtrationibus congruens
apparet.



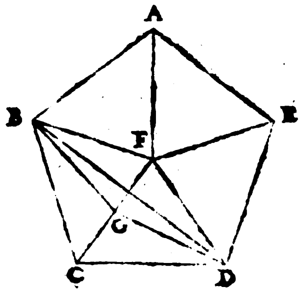
Intelligatur rurſus in quadrato ABCD pyramis verticem
habens punctum E, & continentia ipſam præter baſim
triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis
dimidia octaedri. ſecerur latus vnius trianguli AE bifariam
in F: & BF FD iungantur. ſunt igitur BF FD
& æquales inter ſe, & ad ipſam AE perpendiculares. Dico
angulum BFD obtuſum eſſe. iungatur enim BD; &
quoniam quadratum eſt AC, cuius diameter BD, erit
quadratum ex BD quadrari ex DA duplum. quadratum
autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem
habet, vt proxime dictum eſt, quam 4 ad 3. ergo & quadratum
ex BD ad quadratum ex DF proportiouem habebit,
F quam 8 ad 3. eſt autem DF æqualis FB. quadratum
igitur ex BD maius eſt quadratis ex BF FD, ac propterea
angulus BFD eſt obtuſus. & quoniam duorum planorum
ABE ADE ſe inuicem ſecantium communis ſectio
eſt AE, & ipſi ad rectos angulos in vtroque plano ductæ
G ſunt BF FD, angulum obtuſum continentes; erit angulus
BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum
ABE ADE. ſi igitur angulus BFD datus ſit, &
dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam triangulũ octaedri

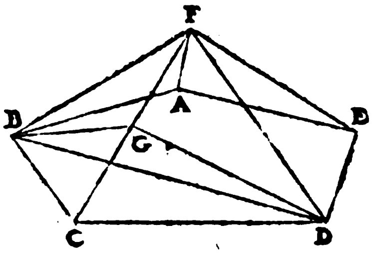


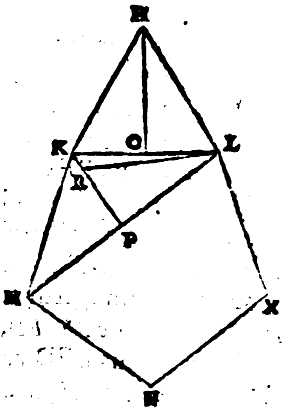
H datum eſt, & unum eius latus eſt AD, à quo quadratum AC deſcribitur; datur
& BD diameter exiſtens quadrati. ſed & BF FD trianguli perpendiculares
datæ ſunt. ergo & angulus BFE dabitur. deſcripto igitur quadrato à latere trianguli,
ut AC, & iuncta diametro BD, ſi centris quidem BD; interuallo autem
perpendiculari trianguli circulos deſcribamus, ſe mutuo ſecabunt in F: & rectę lineæ
à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationem BFD, quæ quidem eſt
reliqua exduobus tectis, vt dictum eſt, inclinationis planorum. & hoc loco patet
vtramque ipſarum BF FD maiorem eſſe, quàm ipſius BD dimidiam. ideoque in
conſtructione organica neceſſe eſt circulos ſe mutuo ſecare. conſtat etiam ex demonſtratione
ipſam BD ad DF potentia proportionem habere, quam habet 8 ad
3, & dimidiæ eius potentia eſſe quadruplam. ergo utraque ipſarum BF FD maior

ior eſt quàm dimidia ipſius BD. & hęc quidem de octaedro dicta ſint.

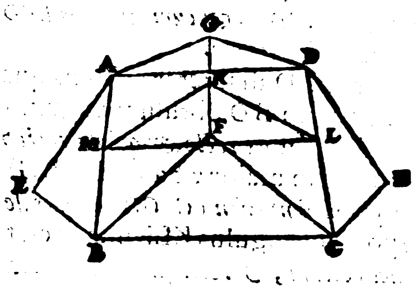
In icoſaedro autem intelligatur pentagonum ęquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis uerticē habens punctum F, ita vt continentia ipſam triangula ſint ęquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icoſaedri pars. ſecetur latus unius trianguli FC biſariam in G, & BG GD iungantur. erunt utique & æquales, & ad ipſam FC perpendiculares. Dico angulum BGD obtuſum eſſe, quod per ſe ſe manifeſto conſtat. Iuncta enim BD obtuſum angulum BCD pentagoni ſubtēdit: hoc autem maior eſt angulus BGD: nam BG GD ipſis BC CD ſunt minores. ſimiliter ijs, quę proxime dicta ſunt, patet angulum BGD eſſe eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis BFC CFD triangulorum. hoc autem dato, dabitur & planorum icoſaedri inclinatio. à latere enim trianguli icoſaedri deſcripto pentagono, & recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, vt in figura eſt BD data: & ſimiliter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam ſi centris quidem terminis ipſius BD, quę duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, interuallo autem perpendiculari trianguli circuli deſcribantur, ſe inuicem ſecabunt, vt in G: & rectæ lineę à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifeſtum eſt vtramque BG GD maiorem eſſe, quàm dimidiam ipſius BD. quamquam ita eſſe ex conſtructione organica demonſtrari poteſt. intelligatur enim ſeorſum triangulum ęquilaterum HKL, & ab ipſa KL pentagonum deſcribatur KMNXL: iunctaque ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem eſſe dimidia ipſius ML, quæ inclinationē planorum ſubtendit. ducta enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniā angulus KLP maior eſt tertia parte recti, hoc eſt maior angulo KHO; conſtituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL eſt perpendicularis æquilateri trianguli, cuius latus eſt RL; ac propterea quadratum ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quam 4 ad 3. ſed maior eſt KL quàm LR. ergo quadratum ex KL ad quadratū ex LP maiorem habet proportionem, quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quam 4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quā ad HO: maior igitur eſt HO quàm LP.

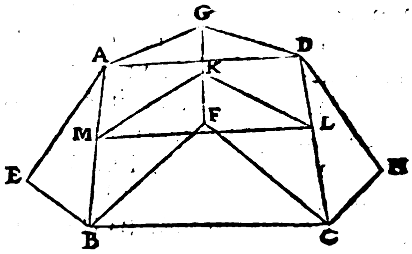






In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum deſcribitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GDHCF. Dico & ſic datam eſſe duorum pentagonorum inclinationem. ſecetur FG biſariam in K; & à puncto K ipſi FG ad rectos angulos ducantur in vtroque planorum KL KM: & ML iungatur. Itaque primum dico angulum MKL obtuſum eſſe. oſtenſum enim eſt in tertiodecimo libro elementorum, & in conſtitutione do-





decaedri, rectam lineam, quæ à puncto K ad quadratum ABCD perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe lateris pentagoni. quare minor eſt quàm dimidia ipſius ML. ideoque angulus MKL eſt obtuſus. ſimul autem demonſtratum eſt in eodem theoremate, quadratum quidē ex KL æquale eſſe & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij lateris pētagoni, ita vt KL, & KM inter ſe æquales maiores ſint, quàm dimidia ipſius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc eſt inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni ſubtenditnr, & datū eſt pentagonum; erit & ML data. data autem eſt & vtraque ipſarum MK KL; perpendiculares enim ſunt à bipartita ſectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus ſubtenditur ad latus pentagoni ipſi paralleinm, ut ad FG. ergo angulus LKM datus eſt, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictū eſt, inclinationis eius, quā inquirimus. pulchre igitur in conſtructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus lateribus ſubtenſam, quæ lateri cubi eſt æqualis: & centris quidem terminis ipſius, interuallo autem perpendiculari, quę à bipartita ſectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura ſunt KL KM, deſcribere circumferentias, atque à pūcto, in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quę continent angulum reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at uero perpendicularem KM maiorem eſſe dimidia ipſius ML iam dictum eſt, vt in elemētis ſimul eſt demonſtratū.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ęquilatera ſunt ADB ADC triangula, & bifariam ſecta eſt AD, erūt BE EC ad ipſam AD perpendiculares] *Ex ijs, quae nos ad 12 tertijdecimi libri demonſtrauimus.*

B Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam 4 ad 3] *Ex demonſtratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus eſt quadratis ex BE, EC] *Eſt enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE, EC, vt 4 ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraque ipſarum BE EC eſt perpendicularis trianguli ęquilateri] *Dato autem latere trianguli aequilateri, & perpendicularis dabitur ex ſecunda libri datorum. eſt enim latus trianguli aequilateri ad perpendicularem, vt 4 ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius eſt quadratis ex BF FD] *Eſt enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8 ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Eſt enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum ſectioni ad vnum ipſius punctum in vtroque planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuſo ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui eſt inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus ſit, & inclinatio planorum detur neceſſe eſt ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter exiſtens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtuſum angulum BCD pentagoni ſubtendit] *Angulus namque pentagoni conſtat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autem maior eſt angulus BGD, nam BG GD ipſis BC CD ſunt minores] *Ex 21 primi. ſunt enim BG GD minores, ſed maiorem angulum continent.*

M Quoniam ~~angulus KLP~~ maior eſt tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL continet rectum, & recti quintam, vt dictum eſt, ergo anguli KML KLM ſunt quattuor quin*

tae

tae recti, & ipſe KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior eſt KL quàm LR] *Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex 21 primi. ergo & dimidia KL quàm dimidia LR maior erit.* N

Maior igitur eſt HO quàm LP] *Ex 10 quinti.* O

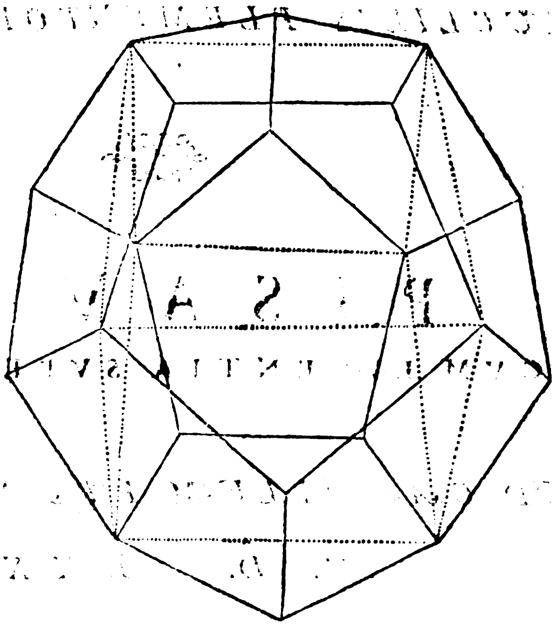
Intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum deſcribitur] *Ad conſtitutionem enim dodecaedri vtitur ipſius cubi quadratis, vt in 17 tertijdecimi apparet.* P

Ex ijs aũt quæ proxime tradita ſunt, & ex demonſtratis in 17 tertjdecimi libri cõſtat, quomodo in dato dodecaedro cubus deſcribatur.

Quoniam enim in dodecaedri conſtitutione cubi planis vtimur, & ad ſingula eius latera ſingula pentagona dodecaedri deſcribimus, ſi in dodecaedro iam facto appoſite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiuſque pentagoni lateribus ſubtendantur, cubus ipſe conſtitutus erit, vt in ſequenti figura apparere poteſt.

Ex quibus iam perſpicuum eſt quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipſa, tum octaedrum deſcribatur.

Nam ſi in dodecaedro cubum, & rurſus in cubo pyramidem vel octaedrum deſcribamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro deſcripta ſint neceſſe eſt.



In dato icoſaedro cubum deſcribere.

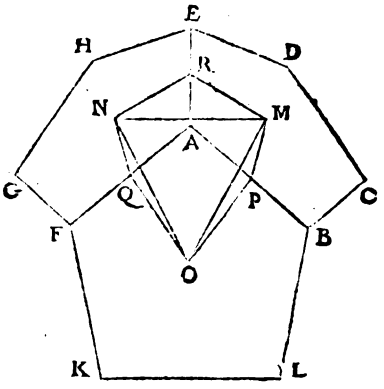
Primum in icoſahedro dodecaedrum deſcribimus, vt in 5 huius dictum eſt; deiude in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icoſaedro deſcriptus erit.

In dato icoſaedro pyramidem deſcribere.

Si enim deſcribamus ex antecedenti in icoſaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icoſaedro deſcripta.

In dato dodecaedro icoſaedrum deſcribere.

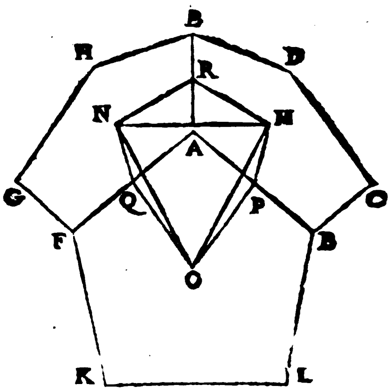
Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: ſumanturq́; centra circulorum, qui circa pentagona deſcribuntur MNO, & ab ipſis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonſtratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipſius dodecaedri, & idcirco inter ſe aequales:



itemq́

4.primi.

itemq́; aequales perpendiculares ipſae. quare trianguli MOP duo latera MP PO aequalia ſunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO eſt aequalis angulo MRN. baſis igitur OM eſt aequalis baſi MN. & ita demonſtrabitur baſis ON ipſi NM aequalis. ex quibus conſtat triangulum MNO aequiangulum eſſe. ergo ſi reliquis dodecaedri angulis triangula aequilatera eodem modo ſubtendantur, deſcriptum erit icoſaedrum. ſunt enim omnes anguli ipſius dodecaedri numera viginti, quot ſunt icoſaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icoſaedrum deſcriptum eſt. quod facere oportebat.



EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.

◆

PISAVRI.
CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMILLVM FRANCISCHINVM.
M. D. LXXII.

◆