PDF created at Gallica, downloaded from Wilbourhall.org

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER

SERIES PRIMA · OPERA MATHEMATICA · VOLUMEN UNDEVICESIMUM

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM INTEGRALIUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM

EDIDERUNT

ALEXANDER LIAPOUNOFF ADOLF KRAZER
GEORG FABER

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

TURICI MCMXXXII

TYPIS EXCUSSIT ATQUE VENDITAT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES PRIMA

OPERA MATHEMATICA

VOLUMEN UNDEVICESIMUM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

TURICI MCMXXXII

TYPIS EXCUSSIT ATQUE VENDITAT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM INTEGRALIUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM

EDIDERUNT

ALEXANDER LIAPOUNOFF ADOLF KRAZER
GEORG FABER

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

TURICI MCMXXXII

TYPIS EXCUSSIT ATQUE VENDITAT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI

VORWORT

Auch der vorliegende Band I_{19}, der die zweite Gruppe von EULERS analytischen Abhandlungen, nämlich die *Commentationes analyticae ad theoriam integralium pertinentes,* zum Abschluß bringt, hat mit mancherlei schweren Fügungen des Schicksals zu kämpfen gehabt. Ursprünglich war diese Gruppe von AUGUST GUTZMER und ALEXANDER LIAPOUNOFF zur Bearbeitung übernommen worden; das Vorwort zum vorhergehenden Bande I_{18} gibt hierüber näheren Aufschluß. Leider aber war es keinem der beiden Herausgeber beschieden, die Vollendung der übernommenen Aufgabe zu erleben. Am 3. November 1918 starb LIAPOUNOFF und am 10. Mai 1924 folgte ihm GUTZMER nach. Dieser hatte zwar, zusammen mit ADOLF KRAZER und mir, noch dabei helfen können, den Band I_{18} zu Ende zu führen, aber für den von LIAPOUNOFF vorbereiteten Schlußband I_{19} fehlte nun die letzte ordnende Hand und vor allem die Überwachung und Leitung des Druckes. Mit der Uneigennützigkeit, die er so oft schon für die Eulerausgabe bekundet hatte, trat aber jetzt KRAZER für die verstorbenen Kollegen ein. Er erklärte sich auch bereit, in zusammenfassender Darstellung eine Übersicht über den Gesamtinhalt der Bände I_{17}—I_{19}, also der ganzen zweiten Gruppe der *Commentationes analyticae,* zu verfassen, um dadurch diese Gruppe als ein in sich abgeschlossenes Ganzes erscheinen zu lassen. Diese Übersicht, die man im folgenden abgedruckt findet, ist KRAZERS letzter Beitrag zur Eulerausgabe und überhaupt seine letzte wissenschaftliche Leistung. Es war ein schmerzliches Verhängnis, daß er den Druck der Arbeit, der er seine letzten Kräfte gewidmet hatte, nicht mehr erleben sollte: Ein rasch verlaufendes Leiden entriß ihn am 7. August 1926 seiner segensreichen Wirksamkeit. Sein Tod bedeutet für die Eulerausgabe einen schwer zu verwindenden Verlust — nach STÄCKEL nun auch noch KRAZER! Die Eulerausgabe aber und mit ihr die ganze mathematische Welt wird die nachfolgende Darstellung als ein köstliches Vermächtnis KRAZERS alle Zeit in Ehren halten und ihres Verfassers mit Dankbarkeit gedenken.

An KRAZERS Stelle hat es nun GEORG FABER, der schon die Bearbeitung des Bandes I 15 und eines Teiles von I 14 durchgeführt hatte, übernommen, an den mehrfach verwaisten Band die letzte Hand anzulegen und ihn zu Ende zu führen[1]), wofür ihm an dieser Stelle der herzlichste Dank ausgesprochen sei. FABER hat sich auch der nicht leichten, aber darum um so verdienstvolleren Aufgabe unterzogen, die von KRAZER zurückgelassene aber noch ungeordnete „Übersicht", von der schon die Rede war, zu redigieren und in druckfertigen Zustand zu bringen. So hat er das Erbe KRAZERS in doppelter Hinsicht geordnet. Bei dieser Arbeit hat er sich von größter Pietät leiten lassen und nichts geändert, was nicht durch die Aufgabe selbst gefordert wurde. Von größeren Änderungen sei nur die folgende hervorgehoben. KRAZER hatte den ganzen Stoff der Bände 17, 18, 19 zunächst in sechs Gruppen zusammengefaßt. Es zeigte sich aber, daß sich die Abhandlungen 391, 594, 651 670, 672, 673 und 674 scheinbar in keine der sechs Gruppen einordnen ließen, so daß KRAZER für diese eine besondere Gruppe, die siebente, zu bilden sich veranlaßt sah. Es gelang nun aber FABER, diese siebente Gruppe aufzulösen und ihren Inhalt unter die zuerst vorgesehenen sechs zu verteilen. Der Leser wird darin eine Vereinfachung und eine bessere Übersicht erblicken, für die der Redaktor dieser mühevollen Arbeit unsern Dank verdient.

Zollikon bei Zürich, November 1927.

FERDINAND RUDIO.

---

1) Die Fußnoten, die der Band aufweist, stammen teils von A. LIAPOUNOFF, teils von A. KRAZER, teils von G. FABER und sind durch die Initialen A. L., A. K., G. F. gekennzeichnet.

ÜBERSICHT
ÜBER DIE BÄNDE 17, 18, 19 DER ERSTEN SERIE

EINLEITUNG

EULER hat das Erscheinen des ersten Bandes seiner *Institutiones calculi integralis*, der die Theorie der unbestimmten und bestimmten Integrale umfaßte, um 15 Jahre überlebt und in dieser Zeit (1768—1783) 47 Abhandlungen über Gegenstände der Integralrechnung verfaßt. In unserer Ausgabe sind diese Abhandlungen zusammen mit 7 schon vor 1768 erschienenen in den Bänden I_{17-19} vereinigt.

Schon bei der 10 Jahre nach dem Tode EULERS erschienenen 2. Auflage der *Institutiones calculi integralis* wurde 1794 den drei Bänden ein vierter unter dem Titel

LEONHARDI EULERI Institutionum calculi integralis volumen quartum, continens supplementa partim inedita, partim iam in operibus academiae imperialis scientiarum Petropolitanae impressa

beigefügt, der in 11 Supplementen 27 Abhandlungen umfaßte, von denen aber nur 19 der Integralrechnung im engeren Sinne zuzuzählen sind; 3 handeln von elliptischen Integralen (Supplementa VII und VIII)[1]), vier von Differentialgleichungen (Suppl. IX und X) und eine von der Variationsrechnung (Suppl. XI). Von den 19 Abhandlungen über Integralrechnung waren 11[2])

---

1) Es sind dies die im Bande I_{21} unserer Ausgabe veröffentlichten Abhandlungen 506, 581 und 676.

2) Es sind dies die Abhandlungen 539 (*Opera omnia* I_{18}, p. 83, = *Inst. calc. int.* IV, p. 3, hier unter dem Titel *De integratione formularum differentialium irrationalium*). — 606 (*Op. om.* I_{18}, p. 244, = *Inst. calc. int.* IV, p. 31, hier unter dem Titel *De integratione formulae irrationalis* $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$, mit den einleitenden Worten „*Problema: Invenire integrale huius formulae irrationalis* $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$ *. Solutio:*“ versehen und nur die § 1—9 der Abhandlung 606 umfassend). — 421 (*Op. om.* I_{17}, p. 316, = *Inst. calc. int.* IV, p. 78).

schon früher erschienen, die übrigen 8 wurden im 4. Bande der *Institutiones calculi integralis* zum ersten Male veröffentlicht.[1])

Der nachstehende Bericht über die Abhandlungen der Bände I_{17-19} behält nicht deren chronologische Reihenfolge bei, sondern ordnet sie sachlich in sechs Gruppen, um über Zusammengehöriges auch zusammenhängend berichten zu können.

Die erste Gruppe umfaßt die Abhandlungen über die Integration rationaler Funktionen. Es sind dies im ganzen drei, nämlich die frühen Abhandlungen 162 und 163, die beide ungefähr zu der gleichen Zeit wie die *Introductio in analysin infinitorum*, also 20 Jahre vor den *Institutiones calculi integralis*, verfaßt wurden, sowie die rund 30 Jahre spätere Abhandlung 572 von 1775.

Bei der Integration rationaler Funktionen wird man auf komplexe Zahlen geführt; es sind daher in der zweiten Gruppe jene Abhandlungen der Bände I_{17-19} vereinigt, welche von komplexen Zahlen handeln. An der Spitze stehen die beiden Abhandlungen EULERS, 168 und 807, welche durch den Streit zwischen LEIBNIZ und JOH. BERNOULLI über die Logarithmen negativer Zahlen veranlaßt wurden. Bei den übrigen Abhandlungen, 656, 657, 707 und 721, leitet EULER der Gedanke, daß man eine Funktion, welche wie z. B. arctg x durch ein Integral, $\int \frac{dx}{1+x^2}$, dargestellt ist, auf Grund dieser Darstellung auch für komplexe Werte ihres Argumentes berechnen kann.

Es folgt dann drittens der Bericht über die zahlreichen Abhandlungen EULERS über solche Integrale nicht rationaler Funktionen, welche sich auf rationale reduzieren lassen, oder welche, was auf dasselbe hinausläuft, sich in geschlossener Form, d. h. ohne unendliche Prozesse, durch rationale und Wurzelfunktionen, sowie durch trigonometrische und Exponentialfunktionen und deren Umkehrungen ausdrücken lassen. Davon handeln die Abhandlungen 539, 594, 606, 651 668, 669, 671, 688, 689, 690, 694, 695, 701 und 819.

— 463 (*Op. om.* I_{17}, p. 384, = *Inst. calc. int.* IV, p. 122). — 499 (*Op. om.* I_{18}, p. 23, = *Inst. calc. int.* IV, p. 154). — 464 (*Op. om.* I_{17}, p. 421, = *Inst. calc. int.* IV, p. 260). — 640 (*Op. om.* I_{18}, p. 392 u. p. 424, = *Inst. calc. int.* IV, p. 295 u. p. 326; hier ist im Titel p. 326 das Wort „*praecedentem*" eingeschaltet, das auch im Inhaltsverzeichnis des Bandes 13 der Novi Commentarii, p. V steht, im Titel daselbst, p. 3, und ebenso in *Op. om.* I_{18}, p. 424, fehlt). — 588 (*Op. om.* I_{18}, p. 178, = *Inst. calc. int.* IV, p. 346). — 589 (*Op. om.* I_{18}, p. 190, = *Inst. calc. int.* IV, p. 358). — 594 (*Op. om.* I_{18}, p. 209, = *Inst. calc. int.* IV, p. 378). — 391 (*Op. om.* I_{17}, p. 289, = *Inst. calc. int.* IV, p. 416).

1) Es sind dies die Abhandlungen 668 (*Op. om.* I_{19}, p. 84, = *Inst. calc. int.* IV, p. 36). — 669 (*Op. om.* I_{19}, p. 98, = *Inst. calc. int.* IV, p. 48). — 670 (*Op. om.* I_{19}, p. 110, = *Inst. calc. int.* IV, p. 60). — 671 (*Op. om.* I_{19}, p. 129, = *Inst. calc. int.* IV, p. 183). — 672 (*Op. om.* I_{19}, p. 141, = *Inst. calc. int.* IV, p. 194). — 673 (*Op. om.* I_{19}, p. 168, = *Inst. calc. int.* IV, p. 217). — 674 (*Op. om.* I_{19}, p. 197, = *Inst. calc. int.* IV, p. 242). — 675 (*Op. om.* I_{19}, p. 217, = *Inst. calc. int.* IV, p. 337).

Sind alle bisher betrachteten Abhandlungen als zur Theorie der unbestimmten Integrale gehörig zu bezeichnen, so folgen nun in den Gruppen 4, 5 und 6 die Abhandlungen über bestimmte Integrale. Ihre Theorie ist von EULER begründet worden, und wenn auch nach ihm noch vieles und bedeutendes dazu gekommen ist, so gebührt ihm doch das allergrößte Verdienst.

Von den EULERSCHEN Abhandlungen über bestimmte Integrale sind diejenigen über Betafunktionen (254, 321, 499, 500, 640, 752, 816) und über Gammafunktionen (421, 629, 662, 675) abgesondert worden; über sie wird in den Abschnitten 5 und 6 berichtet. Alle anderen Abhandlungen, welche bestimmte Integrale betreffen (59, 60, 391, 462, 463 464, 475, 521, 587, 588, 589, 620, 621, 630, 635, 653, 670, 672, 673, 674), sind im 4. Abschnitt zusammengefaßt.

Bei dieser Einteilung sind die einzelnen Abhandlungen der Bände 17, 18, 19 den Gruppen zugeteilt worden, denen ihr Hauptinhalt entspricht. Es ist klar, daß nicht wenige Abhandlungen auch auf andere Gruppen übergreifen und daß die Zusammenhänge zwischen den Gruppen 5 und 6 (Beta- und Gammafunktionen) besonders eng und zahlreich sind.

I. INTEGRALE RATIONALER FUNKTIONEN

Die Integration rationaler Funktionen verlangt deren Zerlegung in Partialbrüche. EULER scheint sich mit diesem Probleme, das bereits 1702 gleichzeitig von LEIBNIZ[1]) und JOH. BERNOULLI[2]) behandelt worden war, seit 1742 beschäftigt zu haben. In diesem Jahre hat er den Satz, daß der Zähler A des Partialbruches $\frac{A}{\alpha+\beta x}$ einer rationalen Funktion $\frac{M}{N}$

1) G. LEIBNIZ, *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti, circa summas et quadraturas,* und: *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium*; Acta erud. 1702, p. 210, und 1703, p. 19; *LEIBNIZENS mathem. Schriften,* herausg. von C. I. GERHARDT, 2. Abt., 1. Bd., Halle 1858, p. 350 und 361.

2) JOH. BERNOULLI, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul.* Extrait d'une lettre écrite de Groningue le 5 août 1702, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1702, p. 289; *Opera omnia* t. 1, Lausannae et Genevae 1742, p. 393; lateinisch unter dem Titel *Problema exhibitum a JOH. BERNOULLI* in den Acta erud. 1703, p. 26.

aus $\frac{\beta M dx}{dN}$ erhalten werde, wenn man darin $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ setzt, N. BERNOULLI mitgeteilt, wie wir aus dessen Antwort vom 24. Oktober 1742[1]) ersehen; und an GOLDBACH schrieb EULER am 9. April 1743[2]), daß die Zähler $A, B, C, \ldots$ der Partialbrüche von

$$\frac{M}{(px-q)^m(rx-s)^n\ldots} = \frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \cdots$$

aus den Gleichungen

$$A = Q, \quad B = \frac{1}{1!p}\cdot\frac{dQ}{dx}, \quad C = \frac{1}{2!p^2}\cdot\frac{d^2Q}{dx^2}, \ldots$$

in denen

$$Q = \frac{M}{(rx-s)^n\ldots}$$

ist, erhalten werden, wenn man auf ihren rechten Seiten $x = \frac{q}{p}$ setzt.

Eine ausführliche Darstellung der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen gab EULER 1748 im 2. und 12. Kapitel der *Introductio in analysin infinitorum* (*Opera omnia* I_8, p. 42 und p. 213), wo er die im wesentlichen auch heute noch üblichen Methoden angibt.

Diese Beschäftigung war wohl auch die Veranlassung zu den beiden im gleichen Jahre der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlungen 162

Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes

und 163

Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales,

von denen die erste in ihrer Konzeption aber sicher früher anzusetzen ist (*Opera omnia* I_{17}, p. 70 und p. 149).

EULER nimmt den Fall, daß der Nenner der gegebenen rationalen Funktion für $x = 0$ verschwindet, vorweg. Er gibt für die in diesem Falle eintretende Zerlegung

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots}{x^n(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots)} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \cdots}{x^n} + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \cdots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots}$$

explizite Ausdrücke für die Konstanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ und kann sich daher weiterhin auf den Fall beschränken, daß der Nenner der zu zerlegenden rationalen Funktion für $x = 0$ nicht mehr verschwindet; er sei

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \cdots = (1 + px)(1 + qx)\cdots$$

---

1) *Correspondance math. et phys. publiée* par P. H. Fuss, St.-Pétersbourg 1843, t. 2, p. 694.

2) Ebenda t. 1, p. 216.

Die Bestimmung der Zählerkonstanten $P, Q, \ldots$ in der Gleichung

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots}{1+\alpha x+\beta x^2+\cdots}=\frac{P}{1+px}+\frac{Q}{1+qx}+\cdots$$

wird von EULER durch Koeffizientenvergleichung in den Entwicklungen der linken und rechten Seite nach steigenden Potenzen von x erreicht und es werden *„per inductionem certam"* für $P, Q, \ldots$ die Ausdrücke

$$P=\frac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{p^2}C-\frac{1}{p^3}D+\cdots}{\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{r}{p}\right)\left(1-\frac{s}{p}\right)\cdots},\qquad Q=\frac{A-\frac{1}{q}B+\frac{1}{q^2}C-\frac{1}{q^3}D+\cdots}{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\frac{r}{q}\right)\left(1-\frac{s}{q}\right)\cdots}\cdots$$

erschlossen. Den gleichen Ausdruck für P leitet EULER sodann nochmals ab, indem er in der aus

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots}{1+\alpha x+\beta x^2+\cdots}=\frac{P}{1+px}+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\cdots}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\cdots}$$

durch Wegschaffen der Nenner entstehenden Gleichung die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x vergleicht, wobei er

$$P=\frac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{p^2}C-\cdots}{\frac{1}{p}\alpha-\frac{2}{p^2}\beta+\frac{3}{p^3}\gamma-\cdots}$$

erhält.

Dieses Verfahren der Koeffizientenvergleichung führt EULER im Falle mehrfacher Linearfaktoren des Nenners der gegebenen rationalen Funktion zu dem Resultate, daß die Zähler der Partialbrüche mit den Nennern $1+px$, $(1+px)^2, \ldots, (1+px)^n$ durch den Ausdruck

$$pn(n-1)\cdots(n-m+1)\frac{d^{n-m}\frac{V}{p}}{dp^{n-m}}$$

für $m=1, 2, \cdots n$ geliefert werden; es wird dabei, wenn $\frac{P}{Q}$ die gegebene rationale Funktion ist, mit V der Wert bezeichnet, den

$$\frac{Pp^{2n-1}}{\frac{d^nQ}{dx^n}}=\frac{Pp^{n-1}(1+px)^n}{n!\,Q}$$

für $x=-\frac{1}{p}$ annimmt.

Auch für den Fall imaginärer Linearfaktoren erhält EULER durch das gleiche Verfahren explizite Ausdrücke für die Konstanten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ im Zähler des Partialbruches

$$\frac{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}x}{1+px+qx^2},$$

gibt aber selbst an, daß man leichter zum Ziele komme, wenn man den trinomischen Faktor in seine konjugiert komplexen Linearfaktoren zerlege und die beiden ihnen entsprechenden Partialbrüche berechne. Bei ihrer Vereinigung zu einem einzigen verschwinde das Imaginäre von selbst. Das gleiche Verfahren empfiehlt EULER für den Fall mehrfacher trinomischer Faktoren.

Den letzten Teil der Abhandlung 162 (§ 44—70) nehmen die Integrale $\int \frac{x^m\,dx}{1 \pm x^n}$ mit der Ausführung zahlreicher spezieller Beispiele und schließlich die Behandlung der Integrale $\int \frac{x^m\,dx}{1+2hx^n+x^{2n}}$ in Anspruch.

Während diese Abhandlung für die Partialbruchzerlegung Methoden angibt, die EULER vermutlich lange vor der *Introductio* ersonnen hatte, schließt sich die Abhandlung 163 ziemlich enge an diese an.

Bei der Zerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{M}{N} = \frac{M}{(p+qx)\,S} = \frac{P}{p+qx} + \frac{T}{S}$$

wird für die Konstante P die doppelte Bestimmung aus den Gleichungen

$$P = \frac{M}{S} \quad \text{und} \quad P = \frac{Mq\,dx}{dN}$$

und bei der allgemeinen

$$\frac{M}{(p+qx)^n S} = \frac{A}{(p+qx)^n} + \frac{B}{(p+qx)^{n-1}} + \cdots + \frac{K}{px+q} + \frac{T}{S}$$

die Bestimmung von $A, B, \ldots$ aus den Gleichungen

$$A = \frac{M}{S}, \quad B = \frac{1}{q\,dx}\,d\frac{M}{S}, \quad C = \frac{1}{2q^2\,dx^2}\,d^2\frac{M}{S}, \ldots$$

durch Einsetzen des Wertes $x = -\frac{p}{q}$ in die rechten Seiten angegeben. Daß diese Größen $A, B, \ldots$ die Koeffizienten in der Entwicklung von $\frac{M}{S}$ nach steigenden Potenzen von $p+qx$ sind, hat EULER später in der 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 540 (*Opera omnia* I_6, p. 370) ausdrücklich betont.

Bei der Behandlung der trinomischen Faktoren $p - 2\sqrt{pq}x\cos\varphi + qx^2$ nimmt die Ausführung der Zerlegung von Funktionen $\alpha \pm \beta x^n$ und $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ und die daran sich knüpfenden Theoreme von COTES und MOIVRE einen breiten Raum ein. Bezüglich der Partialbruchzerlegung wird auf die imaginären Linearfaktoren zurückgegangen, wie es bei diesen Fällen auch heute noch geschieht. Auf diese Weise werden die Integrale

$$\int \frac{x^m dx}{\alpha \pm \beta x^n} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^m dx}{\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}}$$

ausgeführt.

Im wesentlichen den gleichen Standpunkt bezüglich der Partialbruchzerlegung nimmt EULER auch in seinen 1755 erschienenen *Institutiones calculi differentialis* ein, wo er sie im 18. Kapitel des zweiten Teiles (*Opera omnia* I_{10}, p. 648) behandelt.

Der 1768 erschienene erste Band der *Institutiones calculi integralis* nimmt die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen als ausgeführt an und behandelt nur die Integration der einzelnen Partialbrüche (*Opera omnia* I_{11}, p. 28). Auch hier werden insbesondere die Integrale

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{1 \pm x^n}$$

ausführlich behandelt und dabei die Resultate der Abhandlungen 162 und 163 wiedergegeben.

Erst die am 6. März 1775 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 572

Nova methodus integrandi formulas differentiales sine subsidio quantitatum imaginariarum

(*Opera omnia* I_{18}, p. 113) bringt etwas Neues. Während nämlich EULER bisher zur Bestimmung der Zähler der Partialbrüche mit trinomischen Nennern $(x-s)^2 \pm t^2$ stets die komplexen Werte $s \pm ti$ benutzte, gibt er hier eine Methode an, welche das Imaginäre ganz vermeidet.

Wenn er dabei die rationale Funktion in die Form $\frac{P}{xQ}$ bringt, wobei aber P durch x teilbar ist, so geschieht dies nur mit Rücksicht auf die späteren Beispiele, bei denen $Q = 1 \pm x^n$ ist und deshalb $\frac{x\,dQ}{dx}$ für alle Werte von x, für welche $Q = 0$ ist, den gleichen Wert $-n$ annimmt. Der trinomische Faktor wird, auch mit Rücksicht auf diese Beispiele, in der speziellen Form $x^2 - 2x\cos\omega + 1$ angenommen, und es handelt sich um die Bestimmung von $\alpha x + \beta$ in der Zerlegung

$$\frac{P}{xQ} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2x\cos\omega + 1} + R,$$

aus der

$$\alpha x + \beta = \frac{P}{x} \cdot \frac{x^2 - 2x\cos\omega + 1}{Q} - R(x^2 - 2x\cos\omega + 1)$$

folgt. Nun beweist EULER den Satz, daß für alle Werte von x, für welche $x^2 - 2x\cos\omega + 1 = 0$ ist, nicht nur jede ganze, sondern auch jede gebrochene rationale Funktion von x, also auch

$$\frac{P}{x} \cdot \frac{x^2 - 2x\cos\omega + 1}{Q}$$

und die für alle solchen Werte von x mit ihr gleichwertige Funktion

$$P \cdot \frac{dx}{x\,dQ} \cdot 2(x - \cos\omega)$$

sich auf eine ganze lineare Funktion $ax + b$ reduzieren läßt, mit welcher dann, wie EULER schließt, der gesuchte Zähler $\alpha x + \beta$ identisch ist.

Diese Schlußweise wird von EULER ohne nähere Begründung wiederholt angewendet, so in den Abhandlungen 656 und 657 (s. S. XIX) und bei der Bestimmung der Zählerfunktion in Partialbrüchen mit Nennern beliebig hohen Grades in der Abhandlung 728 (*Opera omnia* I$_6$, p. 465). Mit den EULERSCHEN Abhandlungen über Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen hat sich später CRELLE[1]) eingehend beschäftigt.

---

1) A. L. CRELLE, *Bemerkungen über die Zerlegung gebrochener, polynomischer Functionen,* Math. Abh. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1831, p. 1, und *Mémoire sur la décomposition des fonctions algebriques rationnelles,* J. f. Math. **9** (1832), p. 231, und **10** (1833), p. 42. Auch DIRCKSEN, *Über die Zerfällung einer echt gebrochenen Function in einfache Parzial-Brüche,* J. f. Math. **1** (1826), p. 53, knüpft an die EULERSCHEN Abhandlungen an.

II. KOMPLEXE GRÖSSEN IN DER INTEGRALRECHNUNG

Es müssen hier zunächst die beiden EULERSCHEN Abhandlungen 168

De la controverse entre Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires

(*Opera omnia* I_{17}, p. 195) und 807

Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires

(*Opera omnia* I_{19}, p. 417) erwähnt werden, von denen die letztere, welche der Berliner Akademie am 7. September 1747 vorgelegt wurde, früher verfaßt ist als die Abhandlung 168, die vielmehr als eine zweite Redaktion von 807 erscheint. Obwohl in 168 kein einziges Integral vorkommt, wurde diese Abhandlung doch wegen ihres untrennbaren Zusammenhangs mit 807 in die Bandgruppe eingereiht, welche EULERS Abhandlungen über Integrale umfaßt.

Bekanntlich hatte LEIBNIZ in einem Briefe an JOH. BERNOULLI vom 16. März 1712[1]) behauptet, daß die Logarithmen negativer Zahlen imaginär, d. h. nicht reell seien, während BERNOULLI in seiner Antwort vom 5. Mai[2]) die Behauptung dagegen setzte, daß $\log(-a) = \log a$ sei. Über die Gründe und Gegengründe, welche von beiden in zwölf Briefen vom März 1712 bis zum Juli 1713[3]) vorgebracht wurden, hat EULER in den beiden Abhandlungen ausführlich berichtet; sein großes Verdienst aber ist es, darauf hingewiesen zu haben, daß die Schwierigkeiten, welche bei der Erklärung der Logarithmen negativer Zahlen auftreten, nur dann behoben werden können, wenn man den Logarithmen Vielwertigkeit zuschreibt. EULER gelangt zu den unendlich vielen Werten des Logarithmus in den beiden Abhandlungen auf verschiedene Weisen. In der früheren (807) geht er von den

---

1) *Virorum celeberr. GOT. GUL. LEIBNITII et JOH. BERNOULLII commercium philosophicum et mathematicum*, t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716, Lausannae et Genevae 1745, p. 268; vgl. auch LEIBNIZ, *Observatio, quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores; et de vero sensu methodi infinitesimalis*, Acta erud. 1712, p. 167; *LEIBNIZENS math. Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, 2. Abt., 1. Bd., Halle 1858, p. 387.

2) *Virorum celeberr. etc.* (vide notam praecedentem), p. 275.

3) *Virorum celeberr. etc.*, p. 268—315. Wie wenig sich übrigens BERNOULLI durch die LEIBNIZISCHEN Ausführungen von seiner Ansicht abbringen ließ, zeigt ein Brief vom 9. Februar 1728 an EULER (*Correspondance math. et phys. publiée par P. H. FUSS*, St.-Pétersbourg 1843, t. 2, p. 7; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* III_{12}), in welchem er diese Ansicht wieder ausspricht.

Integralen aus, wobei dann die Vielwertigkeit des Logarithmus aus der Vielwertigkeit der Arcusfunktionen sich ergibt. Durch die Substitution $z = xi$ wird nämlich

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder

$$l(z + \sqrt{1+z^2}) = i \arcsin x.$$

Setzt man nun $x = \sin \varphi$, so folgt daraus zunächst

$$l(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \varphi i$$

und daher, da diese Gleichung für alle Winkel φ gilt, welche den nämlichen Sinus und Cosinus haben, allgemein

$$l(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (\varphi \pm 2n\pi) i,$$

wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Hieraus leitet EULER dann speziell die unendlich vielen Werte von $l1$, $l(-1)$, li, $l(-i)$ und der Logarithmen aller Einheitswurzeln $1^{\frac{\mu}{\nu}}$ ab.

In der anderen Abhandlung (168) knüpft dagegen EULER an die inzwischen erschienene *Introductio* an. Aus der dort im 7. Kapitel (*Opera omnia* I8, p. 132) gewonnenen Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$$

folgt insbesondere, wenn $y = l1$ ist,

$$\lim_{n=\infty} \left(\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1\right) = 0.$$

Indem man nun den links stehenden Ausdruck nach der im 9. Kapitel der *Introductio* (*Opera omnia* I8, p. 159) angegebenen Weise in Faktoren zerlegt und diese Null setzt, erhält man zunächst

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm i \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

und hieraus, wenn n unendlich wird,

$$y = \pm 2\lambda\pi i, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

womit wieder die unendlich vielen Werte von $l1$ gefunden sind, aus denen sich dann sofort diejenigen für jede positive Zahl a ergeben. Derselbe Weg führt aber EULER zu den Logarithmen negativer und komplexer Zahlen, unter denen er wiederum den Einheitswurzeln

besondere Beachtung schenkt. Am Schlusse ist die Bemerkung angeführt, daß für jede komplexe Zahl $f + gi$ diejenige Zahl x, für welche $lx = f + gi$ ist, durch

$$x = e^f(\cos g + i \sin g)$$

gegeben wird.

Die Umformung eines Integrals durch eine imaginäre Substitution, wie sie EULER in der Abhandlung 807 vornimmt, findet sich schon 1702 bei JOH. BERNOULLI in der früher[1]) genannten Abhandlung p. 399, wo dieser angibt, daß durch die Substitution

$$Z = i\frac{t-1}{t+1}$$

das Differential

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{i}{2}\frac{dt}{t}$$

wird, so daß der Logarithmus der komplexen Zahl $t = \frac{i+z}{i-z}$ durch den Arcustangens des reellen z ausgedrückt werden kann. EULER hat diesen Gedanken, den Wert einer Funktion für komplexe Werte ihres Arguments auf dem Wege der Integration zu bestimmen, in den Abhandlungen 656

De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis

und 657

Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$$

casu, quo ponatur $z = v(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

(*Opera omnia* I_{19}, p. 1 und p. 45), von denen die erste und wahrscheinlich auch die zweite am 20. März 1777 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde, aufgenommen.

Wenn Z eine Funktion von z ist, die in geschlossener Form integriert werden kann, und es ist

$$\int Z dz = \Delta(z),$$

so kann man den reellen und lateralen Teil von $\Delta(z) = P + Qi$ dadurch bestimmen, daß man in dem links stehenden Integrale $z = x + yi$ setzt. Wird dadurch $Z = M + Ni$, so ist

$$P = \int(Mdx - Ndy), \quad Q = \int(Ndx + Mdy).$$

Aus der Existenz dieser Gleichungen folgert EULER, daß die auftretenden zweigliedrigen

1) Siehe Anm. 2 S. XI.

Differentiale vollständige sein müssen, wie er sie in seinen *Institutiones calculi integralis* (*Opera omnia* I$_{11}$, p. 282) behandelt hat, daß also M und N den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$$

genügen. In der später (S. XXX) genannten Abhandlung 694 folgert er aus den letzten Gleichungen die nämliche Eigenschaft auch für die Funktionen P und Q.

Nicht immer hält übrigens EULER daran fest, daß die Integration der Funktionen einer komplexen Veränderlichen $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ auf die Integration zweier vollständiger zweigliedriger Differentiale führt, sondern er bemerkt wiederholt (so in den Abhandlungen 694, 707, 721), daß man nach Belieben eine der beiden Variablen x, y oder r, θ bei der Ausführung der Integration konstant halten könne.

Nachdem EULER die Richtigkeit der obigen Formeln an dem Beispiele

$$\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1}$$

geprüft hat, verwendet er sie, um den reellen und lateralen Teil von

$$\text{arc tg } z = \int \frac{dz}{1+z^2}$$

zu bestimmen, indem er in dem rechts stehenden Integrale $z = x + yi$ setzt. Aber schon im folgenden Falle $\int \frac{dz}{1+z^3}$ werden die Ausdrücke von M und N so kompliziert, daß die Ausführung der Integrationen nicht durchführbar erscheint. EULER sieht sich daher genötigt, ein anderes Verfahren aufzusuchen.

Um ein Integral

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$$

für komplexe Werte von z zu berechnen, benutzt EULER nicht die aus dem reellen Gebiete her bekannte Partialbruchzerlegung des Integranden, er setzt vielmehr $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und multipliziert Zähler und Nenner des Integranden mit $1 + v^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$. Den neuen Nenner $1 + 2v^n\cos n\varphi + v^{2n}$ zerlegt er, indem er ihn nur als Funktion von v ansieht, in die trinomischen Faktoren $1 - 2v\cos\omega + v^2$, wo $\omega = \frac{2\nu-1}{n}\pi \pm \varphi$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ ist, und hat jetzt die Aufgabe vor sich, eine rationale Funktion

$$\frac{R}{1 + 2v^n\cos n\varphi + v^{2n}}$$

in ihre Partialbrüche

$$\frac{r}{1 - 2v\cos\omega + v^2}$$

zu zerlegen. Zur Bestimmung der Zähler r bedient er sich nun derselben Methode, die wir oben S. XVI erwähnt haben. Indem er nämlich den Ausdruck

$$\frac{R(1-2v\cos\omega+v^2)}{1+2v^n\cos n\varphi+v^{2n}}$$

für solche Werte von v, für welche $1-2v\cos\omega+v^2=0$ ist, auf eine ganze lineare Funktion $av+b$ reduziert, schließt er, daß auch für alle Werte von v $r=av+b$ ist.

In der Abhandlung 656 werden auf diese Weise die Integrale

$$\int\frac{dz}{1+z},\quad \int\frac{dz}{1+z^2}$$

und das allgemeine Integral

$$\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$$

berechnet und aus dem letzten speziell der Wert von

$$\int\frac{dz}{1+z^3}$$

abgeleitet, während im ersten Teile von 657 in der gleichen Weise das Integral

$$\int\frac{z^{m-1}dz}{1-z^n}$$

bestimmt und in den einfachsten Fällen $m=1$, $n=1,2,3,4$ und $m=2$, $n=2$ genauer ausgeführt wird.

Mit § 21 der Abhandlung 657 beginnt EULER eine andere Lösung des Problems. Daß er hier zu falschen Resultaten kommt, rührt daher, daß er das Produkt zweier Linearfaktoren $1-2v\cos\left(\frac{2\nu\pi}{n}-\varphi\right)+v^2=(v-v_1)(v-v_2)$, wo $v_1=\cos\left(\frac{2\nu\pi}{n}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{2\nu\pi}{n}-\varphi\right)$ und $v_2=\cos\left(\frac{2\nu\pi}{n}-\varphi\right)-i\sin\left(\frac{2\nu\pi}{n}-\varphi\right)$ ist, als Faktor von $1-z^n$ behandelt, während doch nur $v-v_1$ Faktor von $1-z^n=1-v^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ ist, $v-v_2$ dagegen den Ausdruck $1-v^n(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$ teilt.[1])

---

1) Mit den Schwierigkeiten, in die EULER in der Abhandlung 657 geraten ist und die ihm durchaus nicht verborgen geblieben sind (vgl. § 24), beschäftigt sich eine Abhandlung von N. FUSS: *Evolutio difficultatis ab Ill. EULERO in dissertatione de integralibus memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis geometris propositae* (Nova acta acad. sc. Petrop. 7 (1789), 1793, p. 175), ohne aber den eigentlichen Grund der Schwierigkeiten zu erkennen oder gar sie zu überwinden.

Den Gedanken, den Wert einer Funktion für komplexe Werte ihres Arguments durch Integration zu bestimmen, verfolgt EULER auch in der Abhandlung 707 vom 3. November 1777

De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali

(*Opera omnia* I19, p. 345). Hier geht EULER von der durch die Substitution $z = ti$ entstehenden Gleichung

$$\frac{dz}{1+z^2} = i\,\frac{dt}{1-t^2}$$

aus, welche durch Integration

$$\operatorname{arc\,tg}\, z = \frac{i}{2}\, l\frac{1+t}{1-t}$$

liefert. Mit Hilfe dieser Gleichung ist es möglich, sowohl den Wert des Arcustangens wie auch des Logarithmus für ein komplexes Argument zu berechnen. Es wird dies insbesondere für die bei der Integration rationaler Funktionen auftretenden Funktionen $l(1 \pm z)$, $l(1 - 2z\cos\alpha + z^2)$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\alpha}{1 - z\cos\alpha}$ ausgeführt.

Endlich behandelt EULER in der Abhandlung 721 vom 21. März 1777

De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt

(*Opera omnia* I19, p. 369) in der gleichen Weise das Integral $\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, bestimmt also den reellen und den imaginären Teil der Funktion $\arcsin z$, indem er in dem Integrale $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt. Die Ausführung der auftretenden Integrale ist aber nur durch wiederholte Substitutionen und nach Überwindung ziemlicher Schwierigkeiten möglich. Der Versuch, das Integral $\int\frac{dz}{\sqrt[n]{1+z^n}}$, von dem EULER weiß, daß es sich durch Logarithmen und Arcusfunktionen darstellen läßt (vgl. S. XXXII), auf gleiche Weise zu behandeln, führt zu dem Ergebnis, daß die Integrale[1])

$$\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\sin n\varphi\,(\sin n(\theta-\varphi))^{\frac{n-1}{n}}},\qquad \int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin n\varphi\,(\sin n(\theta-\varphi))^{\frac{n-1}{n}}}$$

sich auf Integrale rationaler Funktionen müssen reduzieren lassen. Es gelingt aber EULER nicht, dies auch nur in dem speziellen Falle $n = 3$ wirklich auszuführen.

---

1) Diese Integrale sind spezielle Fälle jenes allgemeinen Integrals

$$\int\frac{d\omega}{(\sin n\omega)^{\frac{n-m}{n}}}\cdot\frac{\alpha\sin n\omega + \beta\cos n\omega}{\gamma\sin n\omega + \delta\cos n\omega},$$

auf welches EULER in der Abhandlung 694 geführt wurde, über die im nächsten Abschnitt berichtet werden wird.

III. INTEGRALE NICHTRATIONALER FUNKTIONEN

EULER hatte im 2. Kapitel der *Institutiones calculi integralis* (*Opera omnia* I_{11}, p. 52) einige Integrale irrationaler Funktionen angegeben, welche durch leicht ersichtliche Substitutionen in Integrale rationaler Funktionen einer neuen Integrationsvariable übergeführt werden können.[1]) Dieses Problem hat er in der am 1. Mai 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 539

Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium

(*Opera omnia* I_{18}, p. 83) wieder aufgenommen und hier angegeben, durch welche Substitutionen alle Integrale von der Form

$$\int R(x, s)\, dx,$$

wo

$$s = \sqrt[n]{a + bx} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt[n]{a + b\sqrt[m]{f + gx}} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt[n]{\frac{a + bx^n}{f + gx}}$$

ist und $R(x, s)$ irgendeine rationale Funktion von x und s bezeichnet, und ferner alle Integrale von der Form

$$\int \frac{R(x^n, s)\, dx}{x},$$

---

1) Aus dem Briefwechsel zwischen D. BERNOULLI, EULER und GOLDBACH (s. EULERS Briefe an GOLDBACH vom 17. Oktober und 9. November 1730 und GOLDBACHS Brief an EULER vom 6. November 1730, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. 1, p. 47, 52 und 48, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, ser. III, vol. 12; vgl. aber auch die Briefe zwischen GOLDBACH und DANIEL BERNOULLI, *Correspondance etc.*, t. 2, p. 146 u. f.) sehen wir, daß sich diese schon 1730 mit dem Probleme der Transformation solcher Integrale in rationale beschäftigt haben. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{1 + x^m}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dy}{\sqrt[m]{y^n + y^m}},$$

von denen das letzte durch die Substitution $y^{n-m} = x^m$ in das erste, dieses aber durch die Substitution $\frac{x^m}{1 + x^m} = z^m$ in das rationale Integral $\int \frac{dz}{1 - z^m}$ übergeht. Doch hatte schon lange vorher JOH. BERNOULLI die Zurückführung des ersten dieser Integrale auf das einer rationalen Funktion den Mathematikern als Aufgabe vorgelegt (Acta erud. 1719; *JOHANNIS BERNOULLI Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. 2, p. 417), worauf bald sein Neffe NIKOLAUS BERNOULLI eine Lösung veröffentlichte (Acta erud. 1720; *JOHANNIS BERNOULLI Opera omnia*, t. 2, p. 419). Noch viel früher freilich hatte J. NEWTON die Möglichkeit erkannt, dieses Integral auf ein rationales zurückzuführen; vgl. Anm. 2, S. XXX.

wo

$$s = \sqrt[m]{a + bx^n} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt[m]{\frac{a + bx^n}{f + gx^n}}$$

ist und $R(x^n, s)$ eine rationale Funktion von x^n und s bezeichnet, in Integrale rationaler Funktionen transformiert werden können. Die Abhandlung schließt mit der Aufstellung der vier Integrale

$$\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \frac{\sqrt{1+x^4}\,dx}{1-x^4}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

welche alle durch die nämliche Substitution

$$v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

in Integrale rationaler Funktionen von v übergehen.

Die gleiche Substitution liefert

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \sqrt{2}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

EULER entwickelt links nach Potenzen von v, rechts nach Potenzen von x und integriert beiderseits gliedweise zwischen 0 und 1; so erhält er

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13} + \cdots$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13} + \cdots\right).$$

Um den Zusammenhang der Abhandlung 539 nicht zu zerreißen, wird über diese Überlegung wie überhaupt über die letzten zwei sich auf bestimmte Integrale, z. T. auf Betafunktionen beziehenden Paragraphen von 539 schon hier berichtet. EULER setzt dort ferner

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

und entwickelt den zweiten Faktor nach dem binomischen Satze; reduziert man dann in bekannter Weise alle Integrale

$$\int_0^1 \frac{v^{2n}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

auf das erste unter ihnen

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi}{2},$$

so erhält man die neue Reihenentwicklung

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13} + \cdots$$

und kann somit $\frac{\pi}{2}$ als Quotienten zweier unendlicher Reihen darstellen.

In einem Tagebuch[1]) H_3 (1736—1739) (1, p. 441) setzt EULER ferner

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-v^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1-v^4}},$$

entwickelt wiederum einen dieser beiden Faktoren nach dem binomischen Satze und reduziert die auftretenden Integrale

$$\int_0^1 \frac{v^{4n}\,dv}{\sqrt[4]{1-v^4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

auf das erste unter ihnen

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt[4]{1-v^4}},$$

das als die zu $n = 4$ gehörige Betafunktion (1, 3) den Wert $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ hat. Man erhält so

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2\cdot 5^2}{4^2\cdot 8^2} + \frac{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2}{4^2\cdot 8^2\cdot 12^2} + \cdots\right).$$

Der Abhandlung 651 vom 1. Juli 1776

Quatuor theoremata maxime notatu digna

(*Opera omnia* I18, p. 435) liegt folgende sehr anziehende Fragestellung zu Grunde: Ist

$$x = x(\varphi), \quad y = y(\varphi)$$

1) Von ENESTRÖM „Notizbuch" genannt. Siehe G. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22, 1913, Zweite Abt., p. 197.

in rechtwinkeligen Koordinaten die Parameterdarstellung einer ebenen Kurve, so wird, auch wenn $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ sehr einfache elementare Funktionen sind, die Bogenlänge der Kurve nur selten in geschlossener Form integrierbar sein. Die Aufgabe ist, Fälle zu finden, in denen eine solche Integration möglich ist. EULER packt sie am anderen Ende an, indem er sich die Funktion $f(\varphi)$ in der Gleichung des Bogenelements

$$ds = f(\varphi)\, d\varphi$$

gibt. Die Funktionen $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ müssen dann die folgende Form haben, wo ω noch eine willkürliche Funktion von φ sein kann:

$$x = \int f(\varphi) \cos\omega\, d\varphi, \quad y = \int f(\varphi) \sin\omega\, d\varphi,$$

und die Frage, die EULER sich öfter[1]) gestellt hat, ist die: Kann man $\omega(\varphi)$ auf unendlich viele Weisen so bestimmen, daß diese Integrale sich leicht auswerten lassen, beispielsweise, daß sie sich auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen lassen? EULER hat so algebraische Kurven bestimmt, deren Bogendifferential $ds = f(\varphi)d\varphi$ mit dem eines Kreises, einer Ellipse, einer Parabel übereinstimmt.[1]) In der Abhandlung 651 wählt EULER

$$f(\varphi) = \sin^{n-1}\varphi \quad \text{und} \quad f(\varphi) = \cos^{n-1}\varphi$$

und findet, daß in beiden Fällen die weitere Wahl

$$\omega = (n + 2\nu + 1)\varphi, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

auf Integrale

$$\int \sin^{n-1}\varphi \cos\omega\, d\varphi, \quad \int \sin^{n-1}\varphi \sin\omega\, d\varphi, \quad \int \cos^{n-1}\varphi \cos\omega\, d\varphi, \quad \int \cos^{n-1}\varphi \sin\omega\, d\varphi$$

führt, die sich alle vier leicht in geschlossener Form auswerten lassen.

Der Fall $f(\varphi) = \sin^{n-1}\varphi$ ist von dem in der Abhandlung 645

De curvis algebraicis, quarum longitudo exprimitur hac formula integrali $\int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$

(*Opera omnia* I$_{21}$, p. 180) behandelten nicht verschieden, da durch die Substitution $v^n = \sin\varphi$

$$\frac{v^{m-1}dv}{\sqrt{1-v^{2n}}} = \frac{1}{n}\, d\varphi \sin^{\frac{m}{n}-1}\varphi$$

wird, wie dort näher ausgeführt ist. Der Fall $f(\varphi) = \cos^{n-1}\varphi$ ist von EULER damals nicht behandelt worden, und es ist bemerkenswert, daß dann für $n = -\frac{1}{2}$, also für

$$ds = \cos^{-\frac{3}{2}}\varphi\, d\varphi$$

---

1) Vgl. die Abhandlungen 590, 638, 639, 645, 780, 781, 783 im Bande I$_{21}$ unserer Ausgabe.

als einfachste dem Werte $v = 0$ entsprechende Kurve die gleichseitige Hyperbel

$$y^2 - x^2 = 4$$

hervorgeht, so daß also alle dem Werte $n = -\frac{1}{2}$ und $v = 1, 2, 3, \ldots$ entsprechenden Kurven das Bogenelement der gleichseitigen Hyperbel haben, während EULER nicht nur in der Abhandlung 639 (*Opera omnia* I_{21}, p. 178), sondern sonderbarerweise auch in der nach 645 abgefaßten Abhandlung 780 (*Opera omnia* I_{21}, p. 241) sagt, daß es ihm nicht gelungen sei, eine algebraische Kurve zu finden, die in ihrem Bogenelemente mit der Hyperbel übereinstimme.

Zum Schlusse der Abhandlung 651 wird noch gezeigt, daß der Fall

$$f(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^{2n-2}\varphi + b^2 \sin^{2n-2}\varphi}$$

sich in ähnlicher Weise behandeln läßt.

Die Transformation des Integrals $\int \frac{\sqrt{1+x^4}\,dx}{1-x^4}$ in ein rationales, die schon in der zu Anfang dieses Abschnitts besprochenen Abhandlung 539 erwähnt wurde, findet sich auch in der Abhandlung 668 vom 16. September 1776

De integratione formulae $\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$, *aliarumque eiusdem generis, per logarithmos et arcus circulares*

(*Opera omnia* I_{19}, p. 84). Dort erscheint das Integral als spezieller Fall des allgemeineren

$$\int \frac{x^{n-2}\,dx \sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}}}{a - cx^{2n}},$$

das durch die Substitution

$$\frac{\sqrt[n]{a + bx^n + cx^{2n}}}{x} = p$$

rational wird und bei dem, ohne daß es diese Eigenschaft verliert, der Integrand noch mit einer beliebigen positiven oder negativen ganzen Potenz von p und von

$$Q = \frac{(a - cx^{2n})^2}{x^{2n}} = (p^n - b)^2 - 4ac$$

multipliziert werden kann.

Die folgende Abhandlung 669 vom 15. Mai 1777

Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet

(*Opera omnia* I_{19}, p. 98) geht von dem Resultate aus, daß durch die Substitution

$$\frac{x}{\sqrt[2n]{a+2bx^n}} = z$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{a+2bx^n}} = \int \frac{dz}{a+b^2z^{2n}},$$

also zum Integrale einer rationalen Funktion wird und gibt eine Verallgemeinerung dieser Formeln dahingehend, daß durch die Substitution

$$\frac{x}{\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}} = z$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}} = \frac{1}{a}\int \frac{z^{m-1}dz}{1+b^\lambda z^{\lambda n}}$$

wird, also in das Integral einer rationalen Funktion transformiert werden kann, sobald λn eine positive ganze Zahl ist; dabei kann man für m eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl zulassen.

Auf das gleiche Integral führt auch der zweite Teil (§ 25—30) der Abhandlung 688 vom 26. März 1777

Specimen integrationis abstrusissimae hac formula

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

contentae

(*Opera omnia* I_{19}, p. 228), bei dem EULER von dem Integrale[1])

$$\int \frac{(1-x^{n-1})\,dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{x^{2n}-1}}$$

ausgeht.

Im ersten Teile der Abhandlung 688 behandelt EULER das in ihrem Titel genannte Integral. Es ist dies eines von jenen Integralen irrationaler Funktionen, auf welche EULER wiederholt (so in den Abhandlungen 539, 688, 674 und 701) mit Nachdruck hingewiesen hat und welche dadurch charakterisiert sind, daß sie in die Summe von je zwei Integralen zerlegt werden können, von denen jedes einzelne in ein rationales Integral übergeführt

1) Mit diesem Integral hat sich auch sein Schüler A. J. LEXELL in einer Abhandlung

Integratio formulae cuiusdam differentialis per logarithmos et arcus circulares

(Acta acad. sc. Petrop. 1781 II (1785), p. 104—117) beschäftigt.

werden kann, während es keine Substitution gibt, welche dies bei dem ganzen Integrale bewerkstelligt.

So wird das gegebene Integral zunächst durch die Substitution

$$x = -\frac{1}{4}(z^2+3), \quad v = \sqrt[4]{1+6z^2+z^4}$$

in das Integral

$$Z = \int \frac{z\,dz}{(1-z^2)v}$$

übergeführt, dieses aber in die Summe $Z = P + Q$ der beiden Integrale

$$P = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{(1+z)v}, \quad Q = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(1-z)v}$$

zerspaltet, welche nunmehr einzeln durch die Substitutionen

$$\frac{1-z}{v} = p, \quad \frac{1+z}{v} = q$$

in die Integrale rationaler Funktionen

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{2-p^4}, \quad Q = \frac{1}{2}\int \frac{dq}{2-q^4}$$

übergehen.

Das nämliche Verfahren wird in der gleichzeitigen Abhandlung 689

Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire licet

(*Opera omnia* I19, p. 251) auf die Integrale

$$\int \frac{(1\mp z^2)\,dz}{(1\pm z^2)\sqrt[4]{1\pm 6z^2+z^4}}$$

und weiter in der am 26. März der Akademie vorgelegten Abhandlung 690

Evolutio formulae integralis

$$\int \frac{\partial z\,(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{1+6zz+z^4}}$$

per logarithmos et arcus circulares,

sowie in der am 28. April 1777 vorgelegten Abhandlung 695

Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis

$$\int \frac{\partial z}{(3\pm zz)\sqrt[3]{1\pm 3zz}}$$

(*Opera omnia* I_{19}, p. 262 und p. 287) auf die in den Titeln angegebenen Integrale angewendet, von denen das Integral

$$\int \frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}}$$

sich auch im zweiten Teile der schon oben (S. XXII) genannten Abhandlung 707 findet.[1])

Zu den Integralen, welche durch passende Substitutionen in rationale übergeführt werden können, zählen auch die binomischen Integrale $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ in den Fällen, daß eine der beiden Größen $\frac{m+1}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze Zahl ist. Dies war schon NEWTON bekannt[2]), und EULER hat es zuerst in der im 5. Abschnitt wieder zu erwähnenden Abhandlung 254 vom 18. August 1754

De expressione integralium per factores

(*Opera omnia* I_{17}, p. 233) und sodann im 2. Kapitel des 1. Bandes der *Institutiones calculi integralis* (*Opera omnia* I_{11}, p. 61) ausgesprochen.[3])

An diese binomischen Integrale knüpft EULER in der Abhandlung 694 vom 21. März 1777

Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis

---

1) Es mag hier noch auf zwei einschlägige Arbeiten eines Schülers von EULER, ST. RUMOVSKI,

Integratio formulae $\frac{\partial z}{(3-z^2)\sqrt[3]{1+z^2}}$ *aliarumque nonnullarum*

und

Integratio formularum $\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^3}}$ *et* $\frac{\partial x \sqrt[3]{1-x^3}}{1+x}$

(Nova acta acad. sc. Petrop. 10 (1792), 1797 und 11 (1793), 1798) hingewiesen werden.

2) S. den Brief NEWTONS an LEIBNIZ vom 24. Oktober 1676; *Leibnizens mathem. Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, 1. Abt., 1. Band, Berlin 1849, p. 122—147, insbesondere p. 128. Vgl. a. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 3 (1901), p. 185 und 283.

3) Vgl. a. die Abhandlungen 499 (*Opera omnia* I_{18}, p. 32), 694 (I_{19}, p. 276), 752 (I_{19}, p. 395). Den Beweis für die Richtigkeit der EULERSCHEN Behauptung, daß es andere Fälle nicht gebe, in denen das binomische Integral auf ein rationales reduzierbar sei, hat erst TCHEBYCHEFF, *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, J. de Math. 18 (1853), p. 106 (*Oeuvres de P. L. TCHEBYCHEFF publiées par les soins de M. M. A. MARKOFF et N. SONIN*, t. I, p. 163, St.-Pétersbourg 1899) erbracht. Es ist noch erwähnenswert, daß auch GAUSS sich mit den binomischen Integralen beschäftigt und am 10. Januar 1797 in seinem Tagebuch die darauf bezügliche Notiz eingetragen hat: *Criterii EULERIANI rationem sponte detexi* (*GAUSS Werke* Bd. 10, I (1917), p. 510).

(*Opera omnia* I_{19}, p. 268) an, deren Schwerpunkt gleichfalls in der Transformation irrationaler Integrale in rationale liegt. EULER geht davon aus, daß das Integral

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{(a+bz^n)^{\frac{m}{n}}}$$

durch die Substitution $\frac{z^n}{a+bz^n} = t^n$ in das Integral einer rationalen Funktion der neuen Variable t übergeht und sich deshalb durch Logarithmen und Arcusfunktionen ausdrücken läßt. Indem er z als komplexe Variable auffaßt, $z = v(\cos\theta + i\sin\theta)$ setzt und v allein als veränderlich ansieht, aber dann nochmals eine andere Variable ω durch die Gleichung $a + bz^n = s(\cos n\omega + i\sin n\omega)$ einführt, erhält er das Resultat, daß ein Integral[1])

$$\int \frac{\alpha\sin n\omega + \beta\cos n\omega}{\gamma\sin n\omega + \delta\cos n\omega} \cdot \frac{d\omega}{(\sin n\omega)^{\frac{n-m}{n}}}$$

sich durch Logarithmen und Arcusfunktionen darstellen läßt. Dabei sind α, β, γ, δ zunächst nicht beliebige Konstanten; aber daß der Satz auch für solche richtig ist, zeigt die Substitution $p = \cos\omega + i\sin\omega$, durch welche das zuletzt angegebene Integral in die Summe zweier Integrale von der Form

$$\int \frac{p^{2n-1}dp}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^n + \delta')} \quad \text{und} \quad \int \frac{p^{2n-2m-1}dp}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^n + \delta')}$$

übergeht, welche durch die Substitutionen

$$p^{2n} - 1 = x^{2n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p^{2n}}{p^{2n}-1} = y^{2n}$$

in Integrale rationaler Funktionen von x bzw. y übergeführt werden können.

Beide Resultate geben EULER am Ende der Abhandlung 694 Anlaß zur Formulierung zweier allgemeiner Theoreme. Erstens, daß alle Integrale von der Form

$$\int (P\sin m\omega + Q\cos m\omega)\, d(\sin n\omega)^{\frac{m}{n}},$$

in welcher P und Q irgendwelche rationale Funktionen von $\sin 2n\omega$ und $\cos 2n\omega$ bezeichnen, und zweitens, daß alle Integrale von der Form

$$\int \frac{Px^{m-1} + Qx^{n-1}}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}}\, dx,$$

in welcher P und Q irgendwelche rationale Funktionen von x^n bezeichnen, in Integrale rationaler Funktionen übergeführt werden können, wobei jedesmal der von EULER hervor-

1) In speziellen Fällen hat EULER in der Abhandlung 721 (s. S. XXII) die Reduzierbarkeit dieses Integrales auf rationale Integrale gezeigt.

gehobene Umstand eintritt, daß nicht das ganze Integral durch eine einzige Substitution rational gemacht werden kann. Man sieht sofort, daß das zweite Theorem unmittelbar aus den Sätzen über die Reduzierbarkeit der binomischen Integrale folgt.

Anknüpfend an das erste Theorem ist zu erwähnen, daß EULER in einer $1\frac{1}{2}$ Monate später, am 5. Mai 1777, der Akademie vorgelegten Abhandlung 671

De formulis differentialibus singularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet

(*Opera omnia* I19, p. 129) weiter zeigt, wie man auch jedes Integral von der Form

$$\int \frac{(f \sin \lambda\varphi + g \cos \lambda\varphi)\, \Phi d\varphi}{\sqrt[n]{(a \sin n\varphi + b \cos n\varphi)^\lambda}},$$

in welchem Φ eine beliebige rationale Funktion von $\operatorname{tg} n\varphi$ bezeichnet, auf rationale Integrale reduzieren kann, während das zweite Theorem von EULER in der am 24. April 1777 der Akademie vorgelegten umfangreichen Abhandlung 701

Formulae generales differentialium, quae etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt

(*Opera omnia* I19, p. 297) auf die Integrale

$$\int \frac{x^{m-1} dx\,(A + Bx^{n-m})}{(C + Dx^n)\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}}, \qquad \int \frac{dx\,(A + Bx^{n-m})\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}}{x(C + Dx^n)}$$

angewendet wird. Indem man in diesen $x = \frac{\beta + \delta z}{\alpha + \gamma z}$ setzt, erhält man Integrale von sehr allgemeiner Gestalt, aus denen EULER durch Spezialisierung der Konstanten α, β, γ, δ und C, D die beiden folgenden

$$\int \frac{dz\,(1 - z^2)^{m-1}\,(A(1 + z)^{n-m} + B(1 - z)^{n-m})}{(a(1 + z)^n - b(1 - z)^n)\sqrt[n]{a(1 + z)^n + b(1 - z)^n}}, \qquad \int \frac{dz\,(A(1 + z)^{n-m} + B(1 - z)^{n-m})}{(1 - z^2)\sqrt[n]{a(1 + z^n) + b(1 - z)^n}}$$

herausgegriffen und unter der Annahme $a = \frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{1}{2}$ für zahlreiche Werte von m und n vollständig ausgeführt hat.

Die Abhandlung 606 vom 4. September 1775[1])

Speculationes analyticae super formula integrali

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}},$$

ubi simul observationes circa fractiones continuas occurrunt

---

1) Zum Teil unter dem Titel: *De integratione formulae irrationalis* $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}}$ im 4. Bande der *Institutiones calculi integralis* wieder abgedruckt (*Opera omnia* I18, p. 244).

(*Opera omnia* I18, p. 244) und die 14 Tage später vorgelegte Abhandlung 594

Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se tenent relationem. Ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi

(*Opera omnia* I18, p. 209) haben in ihrer Anlage manches Gemeinsame. Beide gehen von unbestimmten Integralen $\int x^m \varphi(x)\,dx$, wo $\varphi(x)$ eine irrationale Funktion von x ist, aus und geben Formeln zur rekursorischen Berechnung dieser Integrale für wachsende Werte von m. In beiden Abhandlungen werden sodann die erhaltenen Rekursionsformeln durch Einsetzen passend gewählter Integrationsgrenzen vereinfacht, wodurch sich schließlich Kettenbruchentwickelungen für die so erhaltenen bestimmten Integrale ergeben. Die Abhandlungen bilden somit gewissermaßen den Übergang vom vorliegenden Abschnitt zum nächsten. In 606 gibt EULER zunächst den schon in den *Institutiones calculi integralis* (*Opera omnia* I11, p. 52) angegebenen Wert des im Titel genannten unbestimmten Integrals und leitet jene Reduktionsformel ab, durch welche die drei aufeinanderfolgenden Werten von m entsprechenden Integrale P, Q, R durch eine lineare Gleichung verknüpft sind. Diese wird homogen, wenn als Integrationsgrenzen die Null und eine Wurzel der Gleichung $a^2 - 2bx + cx^2 = 0$ genommen werden; es läßt sich dann $\frac{P}{Q}$ durch $\frac{Q}{R}$ ausdrücken: $\frac{P}{Q} = \frac{(2m+1)b}{ma^2} - \frac{(m+1)c}{ma^2 Q:R}$ und durch Fortsetzung dieses Verfahrens $\frac{P}{Q}$ in Form eines Kettenbruchs entwickeln. Auf diese Weise entstehen Kettenbrüche, deren Werte Logarithmen oder Arcusfunktionen sind und aus denen bemerkenswerte einfache Kettenbruchentwicklungen von $l\frac{p}{q}$ in § 22 und von $\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{n}$ in § 27 erhalten werden, die zur angenäherten Berechnung von $l2$ und π verwendet werden.

In 594 stellt sich EULER die Aufgabe, in einem Integrale

$$T_n = \int x^{n-1}\,dv$$

das Differential dv so zu bestimmen, daß bei gegebenen Konstanten a, b, α, β und passend gewählten Integrationsgrenzen

$$T_{n+1} = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b}\,T_n$$

wird. Er findet für dv den Ausdruck

$$dv = x^{\frac{a}{\alpha}}(\alpha - \beta x)^{\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\beta} - 1}\,dx$$

und als Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = \frac{\alpha}{\beta}$. Für $\beta = \alpha$, $a = 1$, $b = 0$ geht die Formel in die Reduktionsformel der Betafunktion, für $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $a = 0$, $b = 1$ in die der Gammafunktion über; diese ihm bekannten besonderen Fälle dürften EULER den Anstoß zu der allgemeineren Fragestellung gegeben haben.

Der im zweiten Probleme behandelte Fall

$$T_n = \frac{(\alpha n + a)(\alpha' n + a')}{(\beta n + b)(\beta' n + b')} T_{n-1}$$

liefert für T_n das Produkt bzw. den Quotienten zweier Integrale, z. B. im Falle

$$\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1, \quad a = c, \quad a' = -c, \quad b = b' = 0$$

den Quotienten zweier Betafunktionen $(n - c, c) : (n, c)$.

Im dritten Probleme stellt EULER die Aufgabe, T_n so zu bestimmen, daß zwischen drei aufeinanderfolgenden Integralen T_n, T_{n+1}, T_{n+2} eine homogene lineare Relation von der Form

$$(\alpha n + a) T_n = (\beta n + b) T_{n+1} + (\gamma n + c) T_{n+2}$$

besteht. Er findet

$$T_n = \int \frac{Q x^{n-1} dx}{\alpha - \beta x - \gamma x^2},$$

wo Q durch die Gleichung

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{(a - bx - cx^2) dx}{x(\alpha - \beta x - \gamma x^2)}$$

bestimmt ist, und die Grenzen der Integrale so gewählt werden müssen, daß an beiden die Funktion Q verschwindet. Von der zwischen den drei Integralen T_1, T_2, T_3 bestehenden Relation beginnend, ergibt sich eine Kettenbruchentwicklung von $(a + \alpha)\frac{T_1}{T_2}$, mit deren Hilfe umgekehrt die Werte zahlreicher Kettenbrüche berechnet werden können, z. B. $\frac{4}{\pi}$ als Wert des bekannten BROUNCKER-WALLIS'SCHEN Kettenbruchs. Die Abhandlung enthält eine große Zahl von Kettenbrüchen, deren Werte auf diese Weise ermittelt werden können. Man wird damit die Abhandlungen 71 und 123 im Bande I_{14} vergleichen.

Schließlich ist noch eine der Abhandlung 819

Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum

(*Opera omnia* I_{19}, p. 491) entnommene und mit J. A. EULER gezeichnete Notiz zu erwähnen: Wenn p und q irgend zwei Funktionen von x sind und man setzt $y = \frac{bp + aq}{ap + bq}$, so wird

$$\arcsin y = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{a^2 - b^2} \int \frac{p dq - q dp}{(ap + bq)\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Dies gibt für $p = 1$, $q = x$ die Formel

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{b + ax}{a + bx}.$$

IV. BESTIMMTE INTEGRALE

Die einzige sich mit Doppelintegralen beschäftigende Abhandlung der drei Bände I_{17-19} möge vorweg genommen werden; es ist Abhandlung 391 vom 18. August 1768

De formulis integralibus duplicatis

(*Opera omnia* I_{17}, p. 289). Die Bestimmung der Integrationsgrenzen und die Einführung neuer Integrationsveränderlicher wird klar auseinandergesetzt. Zahlreiche Volumen- und Oberflächenberechnungen dienen als Beispiele. Schließlich leitet EULER eine allgemeine Lösung des sog. *Florentiner Problems*[1]) ab; es handelt sich hier darum, Teile der Kugeloberfläche anzugeben, die sich mittels der elementaren Funktionen berechnen lassen, d. h. anders ausgedrückt, Gebiete zu finden, über die erstreckt das Doppelintegral

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

in geschlossener Form ausgewertet werden kann.

Für die einfachen bestimmten Integrale verwendet EULER noch nicht die jetzt übliche Bezeichnung $\int_a^b f(x)\,dx$, die erst von FOURIER 1822 in seiner *Théorie analytique de la chaleur* (§ 231) eingeführt wurde. EULER führt das bestimmte Integral mit den Worten ein: *„si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur“* (Abh. 60), oder kurz *„posito post integrationem $x = b$“* (Abh. 321), wobei der notwendige Zusatz *„quandoquidem integrale ita est sumtum, ut evanescat posito $x = a$“* sich nur gelegentlich in späteren Abhandlungen 462, 463, auch 816 findet, in den meisten Fällen aber fehlt. In der Abh. 421 u. a. sagt EULER *„integratione a valore $x = a$ usque ad $x = b$ extensa“*, und erst von der Abhandlung 499 an verwendet EULER die der jetzigen nahe kommende Schreibweise

$$\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} \text{ab } x = a \\ \text{ad } x = b \end{bmatrix}.$$

Unter den von EULER behandelten bestimmten Integralen sind an erster Stelle jene von ihm zuerst angegebenen bestimmten Integrale rationaler Funktionen zu nennen, denen später DIRICHLET (*Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen*, herausg. von G. ARENDT, Braunschweig 1904, 2. Kap.; vgl. auch G. F. MEYER, *Vor-*

1) Über dieses Problem siehe die Anmerkungen zu I_{17}, p. 306 u. p. 313.

lesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, Leipzig 1871, II. Abt., 1. Kap.) ihre klassische Form gegeben hat.

Sie finden sich bei EULER erstmals in der Abhandlung 59 vom 6. September 1742

Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli

(*Opera omnia* I_{17}, p. 1), sind hier aber nicht aus den unbestimmten Integralen abgeleitet, sondern aus der auch in der *Introductio* § 178 (*Opera omnia* I_8, p. 190) angegebenen Partialbruchentwicklung von $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$. Setzt man nämlich an diese anknüpfend

$$s = \frac{x^m}{m} + \frac{x^{n-m}}{n-m} - \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} + \cdots,$$

so daß für $x = 1$

$$s = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

wird, so genügt s der Differentialgleichung

$$\frac{x\,ds}{dx} = \frac{x^m}{1+x^n} + \frac{x^{n-m}}{1+x^n},$$

aus der sofort die Integralformel [1])

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \tag{1}$$

folgt.

Hierauf wird in der gleichen Weise aus der Partialbruchentwicklung von $\frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}}$ (*Introductio* § 178, *Opera omnia* I_8, p. 191) die Formel [2])

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}} \tag{2}$$

gewonnen.

Der zweite Teil der Abhandlung 59 enthält Formeln aus der Theorie der Betafunktion (s. Abschnitt 5).

---

1) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 9), 60 (I_{17}, p. 58), 462 (I_{17}, p. 375), 463 (I_{17}, p. 388).

2) Diese Formel in den Abhandlungen 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 11), 60 (I_{17}, p. 62), 462 (I_{17}, p. 380), 463 (I_{17}, p. 388). Vgl. auch den Brief EULERS an GOLDBACH vom 30. Juni 1742 (*Corresp. math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1842, t. I, p. 131).

Erst in der gleichzeitigen Abhandlung 60

De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur

(*Opera omnia* I_{17}, p. 35) werden in der uns gewohnten Weise aus den Ausdrücken für das unbestimmte Integral, die EULER hier aber nicht ableitet, sondern als „Lemmata" hinstellt, die Werte der bestimmten Integrale gewonnen. Einen Beweis der Lemmata hat EULER in der früher (S. XII) genannten Abhandlung 162 erbracht.

Er findet jetzt zunächt die Formel[1])

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}, \tag{3}$$

1) Diese Formel in den Abhandlungen 60 (*Opera omnia* I_{17}, p. 54), 254 (I_{17}, p. 260), 589 (I_{18}, p. 201).

Die Ableitung der Formel (3) aus dem Ausdruck für das unbestimmte Integral findet sich auch in § 357 des ersten Bandes der *Inst. calc. int.* (*Opera omnia* I_{11}, p. 222). Ferner findet sich eine auf der Reihenentwicklung von $\frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}$ fußende Ableitung der Formel (3) in den *Adnotationes ad calculum integralem* EULERI von MASCHERONI (*LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_{12}, p. 476). Die hier von MASCHERONI beigefügte Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}$$

ist falsch, da das links stehende Integral nicht existiert; die an Stelle dieser Formel zu setzende DIRICHLETSCHE

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\left(\cot\frac{m\pi}{n} - \cot\frac{m'\pi}{n}\right)$$

kennt EULER nur in dem speziellen Fall $m+m'=n$ (siehe Formel (6)).

Da durch die Substitution $x = \frac{y}{\sqrt[n]{1-y^n}}$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^m}}$$

wird (vgl. Abh. 60, I_{17}, p. 55, auch Abh. 816, I_{19}, p. 448), so werden wir dieses Integral bei den B-Funktionen wiederfinden, ebenso wie die gleichfalls in der Abhandlung 60 gewonnene Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x^n)^k}\,dx = \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)\cdots((k-1)n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdots(k-1)n}\cdot\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

die sich auch in der Abhandlung 588 (I_{18}, p. 188) wiederfindet.

deren Übereinstimmung mit (1) nachgewiesen wird. Sodann wird die Formel (2) abgeleitet und schließlich gleichfalls aus dem Ausdrucke für das unbestimmte Integral die Formel [1])

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+2x^n\cos\theta+x^{2n}} = \frac{\pi \sin\frac{n-m}{n}\theta}{n\sin\frac{m\pi}{n}\cdot\sin\theta}.$$

Die Ableitung der Integrale (1) und (2) aus den Ausdrücken für die unbestimmten Integrale und ihr Zusammenhang mit den unendlichen Reihen wird von EULER nochmals in der Abhandlung 462 vom 10. Oktober 1774

De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$

(*Opera omnia* I17, p. 358) erörtert, die als eine Vervollständigung der Abhandlungen 59 und 60 erscheint.

In der schon in dem Abschnitte über rationale Integrale S. XV genannten Abhandlung 572 erscheinen die Formeln in der etwas veränderten von EULER später benutzten Form [2])

$$(5) \qquad \int_0^1 \frac{x^{n-p}+x^{n+p}}{1+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-p}+x^{n+p}}{1+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{x^{n\pm p}dx}{1+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n\cos\frac{p\pi}{2n}},$$

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{x^{n-p}-x^{n+p}}{1-x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-p}-x^{n+p}}{1-x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2n},$$

$$(7) \qquad \int_0^1 \frac{x^{n-p}+x^{n+p}}{1+2x^n\cos\theta+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-p}+x^{n+p}}{1+2x^n\cos\theta+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{x^{n\pm p}}{1+2x^n\cos\theta+x^{2n}}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi\sin\frac{p\theta}{n}}{n\sin\theta\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

---

1) Diese Formel in den Abhandlungen 60 (*Opera omnia* I17, p. 66), 589 (I18, p. 202).

2) Die Formel (5) in den Abhandlungen 463 (*Opera omnia* I17, p. 389), 572 (I18, p. 132 u. 134), 587 (I18, p. 170); die Formel (6) in den Abhandlungen 463 (*Opera omnia* I17, p. 389), 572 (I18, p. 143 u. 144), 587 (I18, p. 170); die Formel (7) in den Abhandlungen 572 (I18, p. 152 u. 153), 587 (I18, p. 171), 589 (I18, p. 203), 620 (I18, p. 277 u. 280).

Die Abhandlungen 588 und 589 vom 2. März 1775

Investigatio formulae integralis

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$$

casu quo post integrationem statuitur $x = \infty$

und

Investigatio valoris integralis

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\theta+x^{2k}}$$

a termino $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensi*

(*Opera omnia* I_{18}, p. 178 und p. 190) bringen nochmals die Ableitungen der Formeln (3), (1) und (4).

An diese Abhandlungen schließt sich die Abhandlung 620 vom 28. März 1776

Methodus facilis inveniendi integrale huius formulae

$$\int \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^{n+p}-2x^n\cos\zeta+x^{n-p}}{x^{2n}-2x^n\cos\theta+1}$$

casu quo post integrationem ponitur vel $x = 1$ *vel* $x = \infty$

(*Opera omnia* I_{18}, p. 265). Es wird hier zunächst das im Titel genannte Integral durch Partialbruchzerlegung eines Integranden berechnet und die Formel

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\cdot\frac{x^p-2\cos\zeta+x^{-p}}{x^n-2\cos\theta+x^{-n}} = \frac{\pi\sin\frac{p(\pi-\theta)}{n}}{n\sin\theta\sin\frac{p\pi}{n}} - \frac{(\pi-\theta)\cos\zeta}{n\sin\theta}$$

abgeleitet, wo ersichtlich das erste Glied der rechten Seite dem Teile $x^p + x^{-p}$, das zweite dem Teile $-2\cos\zeta$ im Zähler des Integranden entspricht.

In dieser Abhandlung 620 und in der am gleichen Tage der Akademie vorgelegten Abhandlung 635

Innumera theoremata circa formulas integrales, quorum demonstratio vires analyseos superare videatur

(*Opera omnia* I_{18}, p. 373) hat EULER die Reihe dieser Formeln noch durch die folgenden ergänzt, die er erhielt, indem er für p und θ imaginäre Werte qi und φi ($e^{\varphi} = f$) einführte[1]):

1) Die Formel (8) in den Abhandlungen 620 (*Opera omnia* I_{18}, p. 279), 635 (I_{18}, p. 383); die Formel (9) in den Abhandlungen 620 (I_{18}, p. 285), 635 (I_{18}, p. 382); die Formel (10) in den Abhandlungen 620 (I_{18}, p. 286), 635 (I_{18}, p. 385).

$$(8)\qquad \int_0^1 \frac{\cos(q l x)}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2n\sin\theta} \cdot \frac{e^{\frac{q\theta}{n}} - e^{-\frac{q\theta}{n}}}{e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}}},$$

$$(9)\qquad \int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}}}{(f - f^{-1})\sin\frac{p\pi}{n}},$$

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{\cos(q l x)}{x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{q}{n} l f\right)}{n(f - f^{-1})\left(e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}}\right)},$$

wozu noch bemerkenswerte speziellere Formeln kommen, welche aus (8) für $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ und aus (9) und (10) für $f = 1$ hervorgehen. Diese Formeln bedürfen zum Teil einer strengeren Begründung, als sie ihnen EULER gegeben hat (vgl. Anmerkung in I18, p. 278), aber sie dürften alle richtig sein. Wenn jedoch EULER schließlich auch für n eine imaginäre Zahl einführen will, so gelangt er zu ganz falschen Resultaten (vgl. Anmerkung in I18, p. 288).

Ein ganz neues Hilfsmittel zur Gewinnung weiterer Integralformeln fand EULER in der Differentiation und Integration nach einem Parameter unter dem Integralzeichen; ob die hierbei vorgenommene Vertauschung zweier Grenzübergänge erlaubt sei, erschien weder ihm noch seinen Zeitgenossen fraglich.

Eine große Anzahl neuer Formeln (die bemerkenswertesten werden unten angeführt) gewinnt EULER schon in den beiden ersten Abhandlungen, in denen er den Gedanken der Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen auf bekannte und von ihm früher gefundene bestimmte Integrale anwendet, nämlich in der Abhandlung 463[1]) vom 3. Oktober 1774

De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$ *casu quo post integrationem ponitur* $z = 1$

(*Opera omnia* I17, p. 384) und in der genau eine Woche später der Akademie vorgelegten Abhandlung 464

Nova methodus quantitates integrales determinandi

(*Opera omnia* I17, p. 421). Bald danach, nämlich in der Abhandlung 475 vom 8. Dezember 1774

Speculationes analyticae

(*Opera omnia* I18, p. 1) gibt er den vorkommenden Parametern auch komplexe Werte.

Die am 13. März 1775 der Petersburger Akademie vorgelegte, aber erst 1785 gedruckte Abhandlung 587

Observationes analyticae in aliquot theoremata illustrissimi DE LA GRANGE

1) Diese Abhandlung ist im vierten Bande der *Inst. calc. int.* p. 122—154 wieder abgedruckt.

(*Opera omnia* I18, p. 156) und die 1781 in den Mémoires der Pariser Akademie für 1778 abgedruckte Abhandlung 521

Théorèmes analytiques extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le marquis de Condorcet

(*Opera omnia* I18, p. 156) geben Zeugnis davon, wie Euler Ergebnisse seiner neuen Erfindung ohne Beweis an die befreundeten Mathematiker Lagrange und Condorcet mitteilte und wie es diesen gelang (und zwar Lagrange vollständiger als Condorcet) die so gestellten Aufgaben zu lösen, worauf dann Euler in späteren Briefen seine eigenen Beweise mitteilte.

Noch in mehreren späteren Abhandlungen kommt Euler auf die Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen zurück, sei es, daß er das Verfahren auf andere, verwickeltere Formeln anwendet, wie in der im nächsten Abschnitt zu erwähnenden Abhandlung 500 und in der Abhandlung 621 vom 18. März 1776

De summo usu calculi imaginariorum in analysi

(*Opera omnia* I18, p. 291), sei es, daß er den Grundgedanken des Verfahrens und die früher gefundenen Ergebnisse wiederholt zusammenfassend darstellt; dies geschieht in der Abhandlung 630 vom 29. Februar 1776

Uberior explicatio methodi singularis nuper expositae integralia alias maxime abscondita investigandi

(*Opera omnia* I18, p. 335), in der oben (S. XXXIX) genannten Abhandlung 635 und in der Abhandlung 653 vom 19. August 1776

De iterata integratione formularum integralium, dum aliquis exponens pro variabili assumitur

(*Opera omnia* I18, p. 458).

Folgendes sind die bemerkenswertesten der von Euler durch Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen gewonnenen bestimmten Integrale: Aus den oben (S. XXXVIII) mitgeteilten Formeln (5) und (6) findet er durch Differentiation nach p[1])

$$\int_0^1 \frac{x^{n+p}+x^{n-p}}{1+x^{2n}} \cdot \frac{dx}{x} lx = \frac{\pi^2 \sin\frac{p\pi}{2n}}{4n^2\cos^2\frac{p\pi}{2n}}, \tag{11}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+p}+x^{n-p}}{1-x^{2n}} \cdot \frac{dx}{x} lx = -\frac{\pi^2}{4n^2\cos^2\frac{p\pi}{n}} \tag{12}$$

und die weiteren sich hieraus durch wiederholte Differentiation nach p ergebenden Integrale.

1) Die Formeln (11) und (12) in den Abhandlungen 463 (*Opera omnia* I17, p. 391), 464 (I17, p. 431), 630 (I18, p. 368 u. 369), 635 (I18, p. 387 u. 389).

Ferner erhält er durch Integration nach p aus (5) und (6)[1])

$$\int_0^1 \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{dx}{x l x} = l \operatorname{tg} \frac{\pi(n+p)}{4n}, \tag{13}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{dx}{x l x} = l \cos \frac{p\pi}{2n} \tag{14}$$

und durch Integration nach m aus (3)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1 + x^n} \cdot \frac{dx}{lx} = l \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2n}. \tag{15}$$

Endlich differenziert und integriert EULER die Formel (7) nach p; durch Integration findet er so[2])

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + 2\cos\theta + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x l x} = \frac{\pi}{n \sin\theta} \int \frac{\sin\frac{p\theta}{n}}{\sin\frac{p\pi}{n}}\, dp. \tag{16}$$

Steht θ zu π in einem rationalen Verhältnis, $\theta : \pi = \mu : \nu$, so kann das rechtsstehende Integral in ein rationales übergeführt und ausgewertet werden. Für die Werte $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ und $\mu < \nu$ hat EULER die Berechnung des Integrals ganz durchgeführt. Zum Schlusse behandelt er den Fall, daß ν über alle Grenzen wächst.

Ferner schließt EULER aus der Formel

$$\int_0^1 x^\omega\, dx = \frac{1}{\omega + 1}$$

---

1) Die Formel (13) in den Abhandlungen 463 (*Opera omnia* I_{17}, p. 417), 464 (I_{17}, p. 440), 500 (I_{18}, p. 68), 521 (I_{18}, p. 72), 587 (I_{18}, p. 171), 630 (I_{18}, p. 369), 635 (I_{18}, p. 387), 653 (I_{18}, p. 463 u. 467). Die Formel (14) in den Abhandlungen 463 (I_{17}, p. 418), 464 (I_{17}, p. 440), 587 (I_{18}, p. 172), 630 (I_{18}, p. 367), 635 (I_{18}, p. 389); an den beiden erstgenannten Stellen (I_{17}, p. 418 u. 440) fehlt das letzte Glied $-2x^n$ im Zähler $x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n$ des im Integranden an erster Stelle stehenden Bruchs, ein Fehler, der bei der Herausgabe des Bandes I_{17} übersehen wurde. Die Formel (15) findet sich in den Abhandlungen 500 (I_{18}, p. 68), 521 (I_{18}, p. 70) und 587 (I_{18}, p. 168); an der ersten Stelle, p. 70, Z. 3, muß es $= l \operatorname{tang} \frac{m\pi}{2n}$ heißen.

2) Formel (16) in den Abhandlungen 621 (*Opera omnia* I_{18}, p. 291) und 635 (I_{18}, p. 379).

durch Differentiation und Integration nach dem Parameter ω [1])

$$\int_0^1 x^n lx\,dx = -\frac{1}{n^2} \tag{17}$$

und [2])

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{lx}\,dx = l\frac{m+1}{n+1}, \tag{18}$$

sowie die Verallgemeinerung von (18) [3])

$$\int_0^1 (Ax^\alpha + Bx^\beta + \cdots)\frac{dx}{lx} = Al(\alpha+1) + Bl(\beta+1) + \cdots,$$

falls

$$A + B + \cdots = 0.$$

In der Formel (12) setzt EULER insbesondere $n = 1$, $p = 0$ und erhält so [4])

$$\frac{\pi^2}{8} = -\int_0^1 \frac{lx\,dx}{1-x^2} = -\int_0^1 lx(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

(wegen (17)).

Durch wiederholte Differentiation der Gleichung (12) nach p ergeben sich genau so die bekannten Beziehungen zwischen $\pi^{2\nu}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2\nu}}$ ($\nu = 2, 3, 4, \ldots$). Unter der Voraussetzung, daß Formel (6), auf der (12) beruht, durch Partialbruchzerlegung und unbestimmte Integration mit nachfolgender Einsetzung der Grenzen abgeleitet und nicht etwa aus der von EULER sonst zur Summation der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2\nu}}$ herangezogenen Partialbruchzerlegung der Tangensfunktion gewonnen wurde, bedeutet das Vorstehende eine von den früheren ganz verschiedene Herleitung dieser Reihensummationen, die eine der schönsten Entdeckungen EULERS in der Analysis bilden und auf die er während seiner langen Forschertätigkeit immer wieder mit besonderer Vorliebe zurückkam.

Den speziellen Fall der Formel (18)

$$\int_0^1 \frac{x-1}{lx}\,dx = l2$$

hat EULER im Januar 1775 LAGRANGE (EULERS *Opera postuma* 1, p. 585 und *Oeuvres de*

1) Formel (17) in Abhandlung 463 (*Opera omnia* I_{17}, p. 394).

2) Formel (18) in den Abhandlungen 464 (*Opera omnia* I_{17}, p. 427 u. 434), 475 (I_{18}, p. 9), 521 (I_{18}, p. 69), 587 (I_{18}, p. 159), 629 (I_{18}, p. 322), 630 (I_{18}, p. 336), 663 (I_{18}, p. 459); siehe auch MASCHERONIS *Adnotatio altera* (I_{12}, p. 495).

3) Diese Formel in den Abhandlungen 464 (*Opera omnia* I_{17}, p. 438) und 500 (I_{18}, p. 55).

4) Diese Formel in Abhandlung 463 (*Opera omnia* I_{17}, p. 392).

Lagrange Bd. 14, p. 241) mitgeteilt. Die Antwort von Lagrange vom 10. Februar 1775 ist nicht erhalten; ihr Inhalt ist aber aus einem Eulerschen Briefe vom 23. März 1775 (*Opera postuma* I, p. 586, *Oeuvres de Lagrange* Bd. 14, p. 242) und aus der im Zusammenhang damit entstandenen vorhin genannten Abhandlung 587 ersichtlich. Lagrange hat nicht nur die ihm mitgeteilte Formel bewiesen, sondern Euler das allgemeinere Theorem

$$\int_a^b \frac{x^n - x^m}{lx} \cdot \frac{dx}{x} = \int_m^n (b^y - a^y)\,\frac{dy}{y} = \frac{n}{m}$$

und die Formel

$$\int_0^\infty \frac{(x^n - x^m)\,dx}{(1+x^r)\,lx} = l\,\frac{\operatorname{tg}\frac{(n+1)\pi}{2r}}{\operatorname{tg}\frac{(m+1)\pi}{2r}}$$

vorgelegt; für Euler war hiervon nur die Auswertung des Integrals $\int_m^n (b^y - a^y)\frac{dy}{y}$ neu, für die es ihm aber nicht schwer fallen konnte einen Beweis zu finden. Diesen veröffentlichte er in der Abhandlung 587 zusammen mit seinen früheren Beweisen für das ihm außerdem von Lagrange Mitgeteilte (vgl. Formel (15) und (18)). Vorher stellt er zu Beginn der Abhandlung die Hauptregeln für das Rechnen mit bestimmten Integralen zusammen, insbesondere

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Die Abhandlung 521 enthält zunächst den Auszug aus einem Briefe vom $\frac{3.}{14.}$ November 1775, in welchem Euler die beiden Formeln (15) und (18) Condorcet mitteilt. In einem weiteren Briefe vom 2. Februar 1776 hat Euler Beweise seiner Formeln angegeben. Den Schluß der Abhandlung bildet der Beweis der Formel (18), den Condorcet vor Empfang des zweiten Eulerschen Briefes selbst verfaßt hatte. Außerdem handelt es sich in diesem Briefwechsel um eine Identität zwischen Binomialkoeffizienten, die Euler Condorcet mitteilt und für die dieser seinerseits einen Beweis findet.

In der S. XL genannten Abhandlung 475 erhält Euler die Formel

$$\int_0^1 \frac{\sin(n\,lx)}{lx}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\, n \tag{19}$$

(aus (18) für rein imaginäres m und $n = -m$) und weiter auf diesem Wege

$$\int_0^1 \frac{dx}{lx} \sin plx \sin qlx = \frac{1}{4}\, l\, \frac{1+(p-q)^2}{1+(p+q)^2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{lx} \sin plx \cos qlx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2p}{1-p^2+q^2}.$$

Für (19) gibt er auch einen Beweis ohne Benutzung des Imaginären.

Die innerhalb 4 Wochen der Akademie vorgelegten drei Abhandlungen: 672, vom 13. August 1778,

Theorema maxime memorabile circa formulam integralem

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{(1 + aa - 2a\cos\varphi)^{n+1}}$$

(*Opera omnia* I_{19}, p. 141), 673, vom 31. August 1778,

Disquisitio coniecturalis super formula integrali

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(\alpha + \beta\cos\varphi)^n}$$

(*Opera omnia* I_{19}, p. 168), 674, vom 10. September 1778,

Demonstratio theorematis insignis per coniecturam eruli circa integrationem formulae

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{(1 + aa - 2a\cos\varphi)^{n+1}}$$

(*Opera omnia* I_{19}, p. 197) beschäftigen sich, wie schon aus den Überschriften hervorgeht, mit dem nämlichen Gegenstand. In 672 stellt EULER ohne Beweis die Formel

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi a^\lambda}{(1-a^2)^{2n+1}} \left\{ \binom{n-\lambda}{0}\binom{n+\lambda}{\lambda} + \binom{n-\lambda}{1}\binom{n+\lambda}{\lambda-1} a^2 + \binom{n-\lambda}{2}\binom{n+\lambda}{\lambda-2} a^4 + \cdots \right\}$$

auf und entwickelt sie für spezielle Werte von n und λ. Dabei zeigt sich, daß stets

$$\int_0^\pi d\varphi \cos\lambda\varphi\,(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^n : \int_0^\pi \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{n+1}}$$

$$= \binom{n}{\lambda}(1 - a^2)^n : \binom{-n-1}{\lambda}(1 - a^2)^{-n-1}$$

ist.

Die Abhandlung 673 beschäftigt sich damit, die Richtigkeit der in 672 aufgestellten Formel an der Hand von Reduktionsformeln in speziellen Fällen zu prüfen und im allgemeinen Falle die ersten Glieder der Reihenentwicklung nachzuweisen. Aber erst in 674 erbringt EULER einen vollständigen Beweis der in der Abhandlung 672 aufgestellten Formel sowie der dort angegebenen Beziehung zu dem Integrale

$$\int d\varphi \cos\lambda\varphi\,(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^n.$$

Es bleibt in diesem Abschnitt noch eine Abhandlung zu besprechen, nämlich 670 vom 12. August 1779

De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}\,dx\,(\Delta + x^n)^\lambda$ *in seriem semper convergentem, ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur*[1])

(*Opera omnia* I19, p. 110). Es handelt sich zunächst um die näherungsweise Berechnung des im Titel angegebenen Integrals unter der Voraussetzung, daß Δ klein ist; als untere Grenze wird die Null angenommen, während die obere beliebig bleibt. EULER entwickelt das Integral für $\lambda = -\frac{\mu}{n}$ in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{x^n}{\Delta + x^n}$ fortschreitende Reihe. Läßt man dann $\Delta = 0$ werden, so erhält man unter der Voraussetzung $\mu < m$, $n \geqq 0$[2])

$$\frac{m}{m-\mu} = 1 + \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu(\mu+n)}{(m+n)(m+2n)} + \frac{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}{(m+n)(m+2n)(m+3n)} + \cdots$$

EULER leitet diese Gleichung nochmals mit Hilfe der Reduktionsformel der Betafunktion ab (Formel (5) S. L) und zeigt, daß ihre Richtigkeit auch direkt nachgewiesen werden kann, wenn man die Glieder der rechten Seite, vom ersten angefangen, nacheinander von der linken Seite abzieht.

Dadurch veranlaßt, wirft EULER die Frage auf, unter welchen Bedingungen das eingeschlagene Verfahren der sukzessiven Subtraktion der Reihenglieder bei einer unendlichen Reihe von der Form

$$A + B\frac{\alpha}{a} + C\frac{\alpha\cdot\beta}{a\cdot b} + D\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{a\cdot b\cdot c} + \cdots$$

zum Ziele führe. Nennt man den Reihenwert $\frac{s}{t}$ und setzt zwischen den Konstanten die Beziehungen

$$s = \alpha + At, \quad a = \beta + Bt, \quad b = \gamma + Ct, \ldots,$$

---

1) Unter dem gleichen Titel hat N. FUSS am 24. August 1797 der Petersburger Akademie eine beachtenswerte Abhandlung eingereicht, welche im 15. Bande der Nova acta acad. sc. Petrop. (1799/1802), 1806 abgedruckt ist. Sie gibt zunächst eine andere Ableitung der EULERSCHEN Formel, weist darauf hin, daß aus ihr für $\Delta = 1$ eine bekannte Reihenentwicklung von arc tg x entsteht, ferner, daß die von EULER gefundene Reihenentwicklung von $\frac{m}{m-\mu}$ auch aus einer von EULER in der Abhandlung 681 (*Opera omnia* I23) angegebenen Gleichung zwischen Binomialkoeffizienten abgeleitet und auch noch auf einfacherem Wege als von EULER gewonnen werden kann.

An die Abhandlung 670 schließt sich auch eine Abhandlung von J. F. PFAFF, *Observationes analyticae ad L. EULERI institutiones calculi integralis*, vol. IV, *Suppl.* II et IV an (Nova acta acad. sc. Petrop. 11 (1793), 1798, p. 37 des „Histoire"-Teils). In dieser gibt der Verfasser eine auf die Reduktion der Integrale sich stützende Ableitung der EULERSCHEN Formel, der er noch drei andere ähnliche an die Seite stellt.

2) Beweise für diese und allgemeinere Reihensummationen hat EULER auch in der Abhandlung 685 (*Opera omnia* I16) gegeben.

so erhält man durch Subtraktion der Reihenglieder von $\frac{s}{t}$ nacheinander die Werte:

$$\frac{\alpha}{t},\quad \frac{\alpha}{t}\cdot\frac{\beta}{a},\quad \frac{\alpha}{t}\cdot\frac{\beta}{a}\cdot\frac{\gamma}{b},\ \cdots$$

Konvergiert also das unendliche Produkt

$$\frac{\alpha}{t}\cdot\frac{\beta}{a}\cdot\frac{\gamma}{b}\cdot\frac{\delta}{c}\cdots$$

gegen einen endlichen Grenzwert Π (oder auch gegen $\Pi = 0$), so ist die angeschriebene unendliche Reihe konvergent und $\frac{\alpha + At}{t} - \Pi$ ihr Wert. Der Fall $\Pi = 0$ tritt immer ein, wenn die Reihe $\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}+\cdots$ divergent ist. Als Beispiel führt EULER die Reihe

$$4 - \frac{8}{\pi} = 1 + \frac{3}{16} + \frac{3\cdot 15}{16\cdot 36} + \frac{3\cdot 15\cdot 35}{16\cdot 36\cdot 64} + \cdots$$

an.

V. BETAFUNKTIONEN

Das EULERSCHE Integral 1. Art ist durch die Gleichung[1])

$$(1)\qquad (p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

definiert.

Durch die Substitution $x^n = y$ wird

$$(p, q) = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1}(1-y)^{\frac{q}{n}-1}\,dy.$$

Man kann sich daher auf den Fall $n = 1$ beschränken, wenn man für p, was bei EULER

1) Die Bezeichnung (p, q) findet sich erst in der Abhandlung 640, während in der Abhandlung 321 und den *Instit. calc. integralis* das Integral (1) mit $\left(\frac{p}{q}\right)$ bezeichnet wird. Die Zahl n hat EULER nicht in seine Bezeichnung aufgenommen, die daher nur anwendbar ist, solange n in allen auftretenden Integralen den nämlichen Wert hat; in anderen Fällen würde man etwa $(p, q)_n$ schreiben.

ebenso wie q stets eine ganze Zahl bezeichnet, gebrochene Zahlen zuläßt. Heute wird nach dem Vorgange von BINET[1]) als Betafunktion das Integral

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \tag{1'}$$

bezeichnet, bei welchem a und b beliebige positive reelle Zahlen sind.

Durch die Substitution $x^n = \frac{z^n}{1+z^n}$ erhält man aus $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$ die zweite Integralform für die Betafunktion[2])

$$(p, q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt[n]{(1+z^n)^{p+q}}}. \tag{2}$$

Den EULERSCHEN Integralen 1. Art begegnen wir zuerst in den Abhandlungen EULERS über unendliche Produkte. An erster Stelle ist die Abhandlung 122

De productis ex infinitis factoribus ortis

(*Opera omnia* I_{14}, p. 260) zu nennen, die zwar erst 1750 veröffentlicht wurde, aber schon wesentlich früher verfaßt und bereits am 12. Januar 1739 der Petersburger Akademie vorgelegt worden war. Daraus erklärt sich, daß EULER ihre Resultate, nämlich die Entwicklung eines Quotienten zweier Betafunktionen in ein unendliches Produkt und daraus folgende Beziehungen zwischen solchen Integralen, bereits in der schon S. XXXVI genannten Abhandlung 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 1) benutzte, indem er sie hier ohne Beweis als „Lemmata" hinstellte.

Eine Wiederaufnahme der Untersuchungen der Abhandlung 122 erfolgte in der Ab handlung 254 vom 18. August 1754

De expressione integralium per factores

(*Opera omnia* I_{17}, p. 233). Auch sie enthält zahlreiche Darstellungen von Quotienten zweier

---

1) BINET, *Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes*, J. de l'Ec. polyt. t. **16** (1839), p. 123. Es ist also

$$(p, q) = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

oder umgekehrt

$$B(a, b) = n(na, nb),$$

so daß hier die rechte Seite von n unabhängig ist.

2) Vgl. die Abhandlung 254 (*Opera omnia* I_{17}, p. 236), auch *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 220) und die Abhandlung 60 (I_{17}, p. 55).

Betafunktionen durch unendliche Produkte, die sich teilweise mit denen von 122 decken. EULER zeigt hier weiter, daß auch umgekehrt jedes unendliche Produkt von der Form

$$P = \prod_{s=0}^{\infty} \frac{(a+s)(c+s)}{(b+s)(e+s)},$$

bei dem $a + c = b + e$ ist, sich in mannigfacher Weise als Quotient zweier Betafunktionen darstellen läßt. Durch Vergleichung verschiedener Darstellungen für das gleiche Produkt ergeben sich wieder zahlreiche Beziehungen zwischen Betafunktionen. Läßt man weiter durch passende Wahl der Konstanten die unendlichen Produkte P in die bekannten zur Darstellung trigonometrischer Funktionen dienenden übergehen, so erhält man zahlreiche Beziehungen zwischen solchen Funktionen und Betafunktionen.

Nachdem EULER in diesen Abhandlungen eine immer wachsende und allmählich unübersehbar werdende Anzahl sowohl von Produktdarstellungen für Quotienten zweier Betafunktionen als auch von Relationen zwischen solchen erhalten hatte, ging er daran, die Ergebnisse systematisch zusammenzustellen.

Dies geschah erstmals 1765 in der Abhandlung 321

Observationes circa integralia formularum

$$\int x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$$

posito post integrationem $x = 1$

(*Opera omnia* I_{17}, p. 267), welche er am 16. Februar 1765 an LAGRANGE übersandte[1]), ferner 1768 im 9. Kapitel der 1. Sectio des 1. Bandes der *Institutiones calculi integralis* (*Opera omnia* I_{11}, p. 228), sodann 1776 in der Abhandlung 640

Comparatio valorum formulae integralis

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

a termino $x = 0$ *usque ad* $x = 1$ *extensae*

(*Opera omnia* I_{18}, p. 392) und endlich in der etwa aus der gleichen Zeit stammenden Abhandlung 816

Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées, en certains cas, par la quadrature du cercle

(*Opera omnia* I_{19}, p. 439), welche zuerst 1862 im 1. Bande der *Opera postuma* und sodann

1) Vgl. den Brief EULERS an LAGRANGE in EULERS *Opera postuma* Bd. 1, p. 566 oder in den *Oeuvres de LAGRANGE* t. 14, p. 205.

1880 nach einem aus dem Besitze LAGRANGES stammenden Manuskripte der Pariser National bibliothek im Bulletin des sciences mathématiques[1]) veröffentlicht wurde.

Jeder Quotient zweier Betafunktionen von der Gestalt $\frac{(p, q)}{(r, q)}$ läßt sich in ein unendliches Produkt entwickeln in der Form[2])

$$(3) \qquad \frac{(p, q)}{(r, q)} = \frac{r(p+q)}{p(r+q)} \cdot \frac{(r+n)(p+q+n)}{(p+n)(r+q+n)} \cdot \frac{(r+2n)(p+q+2n)}{(p+2n)(r+q+2n)} \cdots,$$

aus der für $r = n$ die Entwicklung einer einzelnen Betafunktion in der Gestalt[3])

$$(4) \qquad (p, q) = \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdots$$

hervorgeht.

Aus diesen Produktentwicklungen und den Integralformen (1) und (2) ergeben sich nun folgende Beziehungen zwischen den zu dem nämlichen Werte von n gehörigen Integralen (p, q).

Alle Integrale (p, q), bei denen p oder q größer als n ist, lassen sich auf Grund der Formeln[4])

$$(5) \qquad (p+n, q) = \frac{p}{p+q}(p, q), \quad (p, q+n) = \frac{q}{p+q}(p, q)$$

auf diejenigen n^2 unter ihnen reduzieren, bei denen p und q beide Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind.

---

1) *Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle. Mémoire de* LÉONARD EULER, publié conformément au manuscrit autographe par M. CHARLES HENRY. Bull. d. sc. math. et astron. t. 4_2, 1re partie, 1880, p. 207.

2) Diese Formel findet sich in der Abhandlung 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 283), als Lemma 4 in der Abhandlung 59 (I_{17}, p. 21), ferner in den Abhandlungen 254 (I_{17}, p. 244 f.), 500 (I_{18}, p. 57), 640 (I_{18}, p. 400), 816 (I_{19}, p. 452), auch in den *Instit. calc. integralis* (I_{11}, p. 232). Aus der Formel (3) folgt leicht die in den *Inst. calc. integralis* (*Opera omnia* I_{11}, p. 239) und in der Abhandlung 816 (I_{19}, p. 452) angegebene allgemeinere Entwicklung von $\frac{(p, q)}{(r, s)}$, und auch diese ist als spezieller Fall in noch allgemeineren Entwicklungen enthalten, wie sie in den Abhandlungen 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 285) und 254 (I_{17}, p. 247) angegeben sind.

3) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 285), 254 (I_{17}, p. 244), 321 (I_{17}, p. 271), 499 (I_{18}, p. 33), 816 (I_{19}, p. 451) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 233).

4) Diese Formeln finden sich in den Abhandlungen 254 (*Opera omnia* I_{17}, p. 240), 321 (I_{17}, p. 270), 640 (I_{18}, p. 395) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 218). Die Formeln (5)—(9) auch in der Abhandlung 421 (I_{17}, p. 343—344), die von der Γ-Funktion handelt.

Diese n^2 Integrale aber reduzieren sich weiter auf jene $\frac{1}{2}n(n+1)$, bei denen $p \leqq q$ ist, da auf Grund der Substitution $x^n = 1 - y^n$ [1])

$$(q, p) = (p, q) \tag{6}$$

sich ergibt.

Weiter sind die Integrale bekannt, bei denen $q = n$ ist,

$$(p, n) = \int_0^1 x^{p-1}\,dp = \frac{1}{p}, \tag{7}$$

sowie jene, bei denen $q = n - p$ ist,[2])

$$(p, n-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{1+z^n} = \frac{p}{n \sin\frac{p\pi}{n}}. \tag{8}$$

Nimmt man zu den Integralen (7) und (8) noch die Integrale von der Form $(p, n-p-1)$ hinzu, so lassen sich durch die $2n-1$ Integrale [3])

$$(p, n), \text{ wo } p \leqq n; \quad (p, n-p), \text{ wo } 2p \leqq n; \quad (p, n-p-1), \text{ wo } 2p \leqq n-1$$

alle $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen (p, q), wo $p \leqq q \leqq n$, ausdrücken. So sind z. B. im Falle $n = 4$ von den 10 Integralen

$$(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} \qquad (p, q = 1, 2, 3, 4;\ p \leqq q)$$

die vier Integrale

$$(1, 4) = 1, \quad (2, 4) = \frac{1}{2}, \quad (3, 4) = \frac{1}{3}, \quad (4, 4) = \frac{1}{4}$$

und weiter die zwei Integrale

$$(1, 3) = \frac{\pi}{4 \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad (2, 2) = \frac{\pi}{4 \sin\frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

---

1) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 254 (*Opera omnia* I_{17}, p. 236), 321 (I_{17}, p. 269), 640 (I_{18}, p. 397) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 240).

2) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 254 (*Opera omnia* I_{17}, p. 260), 321 (I_{17}, p. 271), 640 (I_{18}, p. 398), 752 (I_{19}, p. 396), 816 (I_{19}, p. 454) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 226); vgl. auch den Abschnitt IV, insbesondere die Fußnote 3 S. XXX.

3) Dies ist für die kleineren Werte von n von EULER mehrmals durchgeführt, so in den Abhandlungen 321 (*Opera omnia* I_{17}, p. 274), 640 (I_{18}, p. 401), 662 (I_{19}, p. 82) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 249). Es ist noch weiter ausgeführt worden von LEGENDRE (*Exercices de calcul intégral,* Paris 1811, 2me partie: *Des intégrales Eulériennes*, insbesondere in den Formeln f—l, p. 227—230).

bekannt. Bezeichnet man die beiden letzteren mit α und β, setzt also

$$\alpha = (1, 3) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \beta = (2, 2) = \frac{\pi}{4}$$

und nimmt noch das eine Integral

$$(1, 2) = P$$

hinzu, so lassen sich die drei übrigen Integrale durch diese wie folgt ausdrücken:

$$(1, 1) = \frac{\alpha P}{\beta}, \quad (2, 3) = \frac{\beta}{P}, \quad (3, 3) = \frac{\alpha}{2P}.$$

Hieraus ergeben sich nun alle Relationen zwischen den zu $n = 4$ gehörigen Integralen (p, q); z. B. sagt die Gleichung

$$(1, 1) = \sqrt{2} \cdot (1, 2)$$

aus, daß[1])

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist, und aus

$$(1, 2) \cdot (2, 3) = \frac{\pi}{4}$$

folgt, da $(2, 3) = (3, 2)$ ist, die Formel[2])

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen, zum nämlichen Werte von n gehörigen Betafunktionen lassen sich alle mit Hilfe der einen Formel[3])

$$(9) \qquad (p, q) \cdot (p + q, r) = (q, r)\,(q + r, p) = (r, p)\,(r + p, q)$$

ableiten, mittels der die sämtlichen von EULER angegebenen Relationen zwischen Betafunktionen bewiesen werden können, so nicht nur die Lemmata 6, 7, 8 in der Abhand-

1) Diese Formel wurde am 9. September 1741 von EULER an GOLDBACH mitgeteilt (*Correspondance math. et phys. etc., publiée par P. H. Fuss*, t. I, p. 107) und findet sich auch in den Abhandlungen 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 23) und 640 (I_{18}, p. 408).

2) Diese Formel wurde am 20. Dezember 1738 von EULER an JOH. BERNOULLI mitgeteilt (*Bibliotheca mathem.* 5_3 (1904), p. 291, vgl. auch den Brief JOH. BERNOULLIS an EULER vom 7. März 1739, *Corresp. math. et phys. etc.*, t. 2, p. 25) und findet sich auch in den Abhandlungen 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 268), 59 (I_{17}, p. 34), 816 (I_{19}, p. 458).

3) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 288), 59 (I_{17}, p. 27, Lemma 5), 321 (I_{17}, p. 272), 421 (I_{17}, p. 344), 640 (I_{18}, p. 401) und in den *Inst. calc. integralis* (I_{11}, p. 242).

lung 59[1]) und die Formeln der Abhandlung 122 (*Opera omnia* I$_{14}$, p. 287 f.), sondern auch das Theorem 4 in der Abhandlung 254[2]) und nicht minder die zahlreichen Beziehungen zwischen Betafunktionen und trigonometrischen Funktionen.

Von diesen sollen hier nur einige besonders einfache hervorgehoben werden. Setzt man in (9) $r = n - p$, so folgt

$$(p, q)\,(p + q, n - p) = (p, n - p)\,(n, q),$$

also wegen (8) und (7)[3])

$$(p, q)\,(p + q, n - p) = \frac{\pi}{nq \sin \frac{p\pi}{n}}. \tag{10}$$

Ebenso folgt aus (9)

$$(p, n - p - q)\,(n - q, q) = (n - p - q, q)\,(n - p, p),$$

also wegen (8) und (6)[4])

$$\frac{(p, n - p - q)}{(q, n - p - q)} = \frac{\sin \frac{q\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{n}}, \tag{11}$$

wobei der linken Seite noch andere Formen gegeben werden können, da nach (9)

$$\frac{(p, n - p - q)}{(q, n - p - q)} = \frac{(p, q - p)}{(n - q, q - p)} = \frac{(n - p, p - q)}{(q, p - q)}$$

ist.

Für die folgenden Gleichungen wird n als gerade Zahl vorausgesetzt. Setzt man dann $n = 2r$, so folgt aus (9)

$$(r - p, r)\,(2r - p, p) = (r - p, p)\,(r, r);$$

---

1) Mit den Lemmata 6, 7, 8 stimmen Formeln der Abhandlung 122 (*Opera omnia* I$_{14}$, p. 290, 288 und 289) überein. In Lemma 6 (I$_{17}$, p. 27) sind vier Druckfehler: dreimal muß es h statt b und einmal $+$ statt $-$ heißen; die Formel lautet richtig so:

$$\frac{h+1}{c+1} = \frac{\int z^{b(\frac{1}{2}-k)-1}\,dz\,(1-z^b)^c \cdot \int z^{b(\frac{3}{2}+c-k)-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}+k}}{\int z^{b(\frac{1}{2}+k)-1}\,dz\,(1-z^b)^h \cdot \int z^{b(\frac{3}{2}+h+k)-1}\,dz\,(1-z^b)^{-\frac{1}{2}-k}}.$$

2) Das Theorem 4 (*Opera omnia* I$_{17}$, p. 257) sagt aus, daß

$$\frac{(a, c)}{(b, e)} = \frac{(a, s - a - b)}{(b, s - a - b)}$$

ist, wenn $a + c = b + e = s$ ist; es wird am einfachsten bewiesen, indem man auf der linken Seite Zähler und Nenner mit $(a + c, s - a - b) = (b + e, s - a - b)$ multipliziert und hierauf die Formel (9) anwendet.

3) Diese Formel in der Abhandlung 816 (*Opera omnia* I$_{19}$, p. 459).

4) Diese Formel in der Abhandlung 816 (*Opera omnia* I$_{19}$, p. 463, 483).

aber nach (8) ist

$$(2r-p,\,p)=\frac{\pi}{2r\sin\frac{p\pi}{2r}},\quad \text{somit speziell}\quad (r,\,r)=\frac{\pi}{2r},$$

also [1])

$$\frac{(r-p,\,r)}{(r-p,\,p)}=\sin\frac{p\pi}{2r}. \tag{12}$$

Setzt man darin $r-p=q$, so folgt [2])

$$\frac{(q,\,r)}{(q,\,r-q)}=\cos\frac{q\pi}{2r} \tag{13}$$

und deshalb [3])

$$\frac{(r-p,\,r)}{(p,\,r)}=\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2r}. \tag{14}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit [4])

$$(p,\,r)\,(p+r,\,r)=(r,\,r)\,(2r,\,p)=\frac{\pi}{2rp},$$

so folgt [5])

$$(r-p,\,r)\,(r+p,\,r)=\frac{\pi}{2rp}\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2r}, \tag{15}$$

und, $r-p=q$ gesetzt, [6])

$$(q,\,r)\,(2r-q,\,r)=\frac{\pi}{2q(r-q)}\operatorname{ctg}\frac{q\pi}{2r}. \tag{16}$$

Weitere Formeln aus der Theorie der Betafunktionen gewinnt EULER durch Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen; so findet er in der schon S. XL genannten Abhandlung 475

$$\int_0^1\frac{dx}{xlx}\cdot\frac{x^\alpha-x^\beta}{1+x^r}=l\frac{(r,\,\beta)}{(r,\,\alpha)}, \tag{17}$$

indem er links $\frac{1}{1+x^r}$ nach Potenzen von x entwickelt, gliedweise integriert und Formel (18) von S. XLIII anwendet; dabei wird, wie vorhin, n gerade $=2r$ vorausgesetzt. Für $\beta=r-\alpha$ geht (17) in Formel (13) von S. XLII über.

---

1) Diese Formel in der Abhandlung 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 22).

2) Diese Formel in den Abhandlungen 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 24), 816 (I_{19}, p. 460, 462).

3) Diese Formel in den Abhandlungen 59 (*Opera omnia* I_{17}, p. 26), 816 (I_{19}, p. 469).

4) Diese Formel in der Abhandlung 122 (*Opera omnia* I_{14}, p. 269). Im speziellen Falle $p=1$, $r=2$ ist es die früher (S. XLII) erwähnte Formel $(1,\,2)\,(3,\,2)=\frac{\pi}{4}$.

5) Diese Formel in der Abhandlung 816 (*Opera omnia* I_{19}, p. 467).

6) Diese Formel in der Abhandlung 816 (*Opera omnia* I_{19}, p. 465).

Durch ähnliche Überlegungen erhält EULER in der am 19. August 1776 der Akademie vorgelegten Abhandlung 500

De valore formulae integralis

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$$

a termino $x = 0$ *usque ad* $x = 1$ *extensae*

(*Opera omnia* I$_{18}$, p. 51) die Beziehung

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{lx} \cdot \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n} = l\frac{(a+b,c)}{(a,c)} = l\frac{(a+c,b)}{(a,b)}, \tag{18}$$

die für $a = p$, $b = q - p$, $c = n - p - q$ in folgende übergeht

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\,lx} \frac{x^p - x^q + x^{n-p} - x^{n-q}}{1-x^n} = l\,\frac{\sin\frac{p\pi}{n}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$$

(vgl. (14) S. XLII).

In der gleichfalls am 19. August 1776 der Akademie vorgelegten Abhandlung 499

De integratione formulae

$$\int \frac{dx\,lx}{\sqrt{1-xx}}$$

ab $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa*

(*Opera omnia* I$_{18}$, p. 23) findet EULER aus (3)

$$\begin{aligned} l(p,m) - l(q,m) = {} & l(m+p) - lp + l(m+p+n) - l(p+n) + l(m+p+2n) - l(p+2n) + \cdots \\ & - l(m+q) + lq - l(m+q+n) + l(q+n) - l(m+q+2n) + l(q+2n) - \cdots \end{aligned}$$

und

$$\frac{dl(p,m)}{dp} = \frac{1}{m+p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{m+p+n} - \frac{1}{p+n} + \frac{1}{m+p+2n} - \frac{1}{p+2n} + \frac{1}{m+p+3n} - \frac{1}{p+3n} + \cdots,$$

also schließlich, indem er links für (p, m) das dadurch definierte Integral einsetzt und beachtet, daß die Reihe rechts gleich $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(x^m-1)}{1-x^n}dx$ ist,

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}\,lx\,dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}\,dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-1}(x^m-1)}{1-x^n}\,dx. \tag{19}$$

Im weiteren Verlauf beschränkt sich EULER auf solche Werte der Zahlen m, n, p, für die auch das erste der rechts stehenden Integrale sich auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen und daher durch bekannte Konstante ausrechnen läßt. Er findet so eine Anzahl merkwürdiger Integrale, z. B.

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx\, lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3\pi}{16}\left(l2 - \frac{7}{12}\right), \quad \int_0^1 \frac{x^5 dx\, lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{8}{15}\left(\frac{47}{60} - l2\right),$$

$$\int_0^1 dx\, lx\sqrt{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} + l2\right), \quad \int_0^1 \frac{x\, dx\, lx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(l3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

und als einfachstes das im Titel der Abhandlung 499 genannte

$$\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} l2. \tag{20}$$

Für dieses Integral suchte er noch einfachere Beweise, deren er zwei ganz verschiedene am Anfang der Abhandlung 499 den allgemeinen Überlegungen, über die soeben berichtet wurde, vorausschickte. Bei dem ersten dieser Beweise machte er die Substitution $y = \sqrt{1-x^2}$, durch die das Integral auf der linken Seite von (20) übergeht in

$$-\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \cdots\right) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

und nach gliedweiser Integration in

$$-\frac{\pi}{1}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2} + \cdots\right).$$

Andrerseits ist

$$\int_0^z \left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^2} z^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2} z^6 + \cdots,$$

mithin

$$\int_0^1 \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right) dz = -\frac{\pi}{2} l2.$$

Bei dem zweiten von der Theorie der Betafunktion unabhängigen Beweise der Gleichung (20) macht EULER die Substitution $x = \sin\varphi$ und erhält

$$\int_0^1 \frac{dx\, lx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin\varphi\, d\varphi.$$

Für $l \sin \varphi$ setzt er (mit unzureichender Begründung) die trigonometrische Reihe

$$l \sin \varphi = -l2 - \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 4\varphi - \frac{1}{3} \cos 6\varphi - \cdots$$

ein und gelangt durch gliedweise Integration wieder zu dem Werte $-\frac{\pi}{2} l2$.

Den auf der Substitution $y = \sqrt{1-x^2}$ beruhenden Beweis übertrug EULER in der am 1. Mai 1780 der Akademie vorgelegten Abhandlung 752

De integralibus quibusdam inventu difficillimis

(*Opera omnia* I19, p. 390) auf das allgemeinere Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx \, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}};$$

er erhielt so unter Benutzung von (8) aufs neue einen Teil der in 499 gefundenen allgemeinen Ergebnisse.

Zur Berechnung eines Integrals (p, q) schlägt EULER in der Abhandlung 640 (*Opera omnia* I18, p. 419) vor, das Integrationsintervall von 0 bis 1 in die beiden Teile von 0 bis $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ bis 1 zu zerlegen. Führt man dann im zweiten Integrale an Stelle der Integrationsvariable x eine neue y ein durch die Gleichung $x^n = 1 - y^n$, so erhält man

$$(p, q) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} \frac{y^{q-1} dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}},$$

wo sich nun nach Entwicklung der Integranden nach dem binomischen Satz gut konvergente Reihen für die beiden Integrale ergeben.

VI. GAMMAFUNKTION

Es war das Problem der Interpolation der Fakultätenreihe[1]) 1, 2, 6, 24, 120, . . ., welches EULER auf die Gammafunktion geführt hat. Er schrieb am 13. Oktober 1729 an GOLDBACH[2]), daß das n^{to} Glied dieser Reihe durch das unendliche Produkt

$$\frac{1^{1-n}2^n}{1+n}\cdot\frac{2^{1-n}3^n}{2+n}\cdot\frac{3^{1-n}4^n}{3+n}\cdots$$

geliefert und dadurch für andere als ganzzahlige positive n definiert werde, und kurz darauf findet sich in der am 28. November 1729 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 19

De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt

(*Opera omnia* I_{14}, p. 1[3]) für dieses allgemeine Glied neben dem ebengenannten unendlichen Produkte (I_{14}, p. 2) auch die Integralform (I_{14}, p. 12)

$$\int_0^1 dx\,(-lx)^n,$$

auf welche EULER hier durch den Grenzübergang

$$\lim_{g=0}\left\{\frac{1}{g^n}\int_0^1 x^{f-1}(1-x^g)^n\,dx\right\}=\int_0^1 x^{f-1}\left(l\,\frac{1}{x}\right)^n dx$$

von der Betafunktion her gelangt war.

---

1) EULER nennt diese Reihe wiederholt, so in 594 (I_{18}, p. 217), *progressio hypergeometrica* WALLISII; vgl. auch Abhandlung 368

De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1\cdot 2\cdot 3\cdots x$,

Novi comment. acad. sc. Petrop. 13 (1768), 1769, p. 3 (*Opera omnia* I_{27}, p. 3).

2) *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. 1, p. 3. GOLDBACH hatte bereits am 18. November 1728 an DANIEL BERNOULLI geschrieben *„c'est ainsi que je crois pouvoir donner le terme général de la suite* $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+\cdots$ (*Corresp.* t. 2, p. 273).

3) Der wesentliche Inhalt der Abhandlung 19 findet sich auch in einem Briefe EULERS an GOLDBACH vom 8. Januar 1730 (*Corresp.* t. 1, p. 11).

Diesen Übergang von der Betafunktion zur Gammafunktion hat EULER später in der Abhandlung 421 vom 4. Juli 1771

Evolutio formulae integralis

$$\int x^{f-1}dx\,(lx)^{\frac{m}{n}}$$

integratione a valore $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa*

(*Opera omnia* I_{17}, p. 316) nochmals ausführlich dargestellt und aus ihm die Haupteigenschaften der Gammafunktion hergeleitet. Diese finden sich dann wieder in der Abhandlung 662 vom 30. September 1776

De vero valore formulae integralis

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n$$

a termino $x = 0$ *usque ad* $x = 1$ *extensae*

(*Opera omnia* I_{19}, p 63) und in der schon oben (S. XLIX) genannten Abhandlung 816 (*Opera omnia* I_{19}, p. 439), während die *Institutiones calculi integralis* die Gammafunktion noch nicht kennen.

Da durch die Substitution $x^f = z$

$$\int_0^1 x^{f-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{1}{f^{n+1}}\int_0^1 l\left(\frac{1}{z}\right)^n dz$$

wird, so kann man sich auf den Fall $f = 1$ beschränken und das EULERSCHE Integral 2. Art oder die Gammafunktion durch die Gleichung[1])

$$[n] = \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^n dx \tag{1}$$

definieren; dabei muß $n > -1$ sein.[2])

1) Die Bezeichnung $[n]$ für das Integral (1) findet sich erstmals in der Abhandlung 421 (*Opera omnia* I_{17}, p. 341). Der Name EULERSCHES Integral 2. Art oder Gammafunktion und die Bezeichnung des Integrals (1) mit $\Gamma(n+1)$ rührt von LEGENDRE her (*Exercices de calcul intégral* t. 2, 1814, p. 4). GAUSS hat dafür die Bezeichnung $\Pi(n)$ gewählt (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \cdots$, Comment. Gott. vol. 2, 1813; *Werke* Bd. 3, p. 145).

2) Diese Bedingung bei EULER in der Abhandlung 421 (*Opera omnia* I_{17}, p. 332); in der Abhandlung 662 dagegen setzt EULER auch $n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ usw., wodurch er zu unrichtigen Gleichungen gelangt (I_{19}, p. 71). Daß die Definition der Gammafunktion durch das unendliche Produkt (3) auch für beliebige nicht ganzzahlige negative Werte von n gültig bleibt, hat EULER nicht angegeben.

Durch die Substitution $x = e^{-y}$ erhält man die zweite Integralform für die Gammafunktion[1])

$$[n] = \int_0^\infty y^n e^{-y}\, dy. \tag{2}$$

Dazu tritt noch die Darstellung der Gammafunktion durch das unendliche Produkt, der auch EULER bereits die Form[2])

$$[n] = \lim_{m=\infty} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots(m+n)} (m+1)^n \right\} \tag{3}$$

gegeben hat.

Jede Betafunktion läßt sich durch Gammafunktionen darstellen in der Form[3])

$$B(p, q) = \frac{[p-1][q-1]}{[p+q-1]}. \tag{4}$$

Aus (3) oder (4) folgt[4])

$$[n][-n] = \frac{n\pi}{\sin n\pi}. \tag{5}$$

Was die Werte der Gammafunktion angeht, so ist zunächst für jedes positive ganzzahlige n[5])

$$[n] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \tag{6}$$

---

1) Diese Form in der Abhandlung 675 (*Opera omnia* I19, p. 220), vgl. auch die Abhandlung 594 (*Opera omnia* I18, p. 217). Die drei Ausdrucksformen der Gammafunktion (1), (2), (3) finden sich auch in der oben (Anm. 1, S. LVIII) genannten Abhandlung 368.

2) Brief an GOLDBACH vom 13. Oktober 1729 (*Corresp.* t. 1, p. 4) mit der Bemerkung: *„Communicavi haec cum Clar. BERNOULLI, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a me diversum, quod aliam potestatem loco* $(m+1)^n$ *adhibeat“*, die sich auf die Bemerkung DANIEL BERNOULLIS in seinem Brief an GOLDBACH vom 6. Oktober 1729 bezieht, wonach das allgemeine Glied der Fakultätenreihe aus

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \cdot \frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}$$

für unendlich großes A entstehe.

3) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 421 (*Opera omnia* I17, p. 390), 662 (I19, p. 68) und 816 (I19, p. 489). Durch sie werden die Relationen zwischen den Betafunktionen, von denen im vorigen Abschnitte die Rede war, identisch erfüllt.

4) Diese Formel findet sich in den Abhandlungen 352 (*Opera omnia* I15, p. 82), 721 (I17, p. 342), 816 (I19, p. 487).

5) Diese Formel in den Abhandlungen 421 (*Opera omnia* I17, p. 322), 662 (I19, p. 63), 675 (I19, p. 220).

Da weiter für jedes beliebige n[1])

$$[n+1] = (n+1)[n] \tag{7}$$

ist, so genügt es, $[n]$ zu berechnen für alle Werte von $n = 0$ bis $n = 1$ oder von $n = -1$ bis $n = 0$.

Es ergibt sich zunächst[2]), da nach (7) $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right]$ und nach (5) $\left[\frac{1}{2}\right]\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$\left[-\frac{1}{2}\right] = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{8}$$

und daher wegen (7) weiter[3])

$$\left[\frac{2n+1}{2}\right] = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n+1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}\sqrt{\pi}. \tag{9}$$

Für ein positives gebrochenes Argument $\frac{m}{n}$ mit beliebigem positiven ganzzahligen Zähler m und Nenner n hat EULER in der Abhandlung 421 die folgende Formel abgeleitet, welche die Gammafunktion $\left[\frac{m}{n}\right]$ durch die zur Zahl n gehörigen Betafunktionen $(1, m)$, $(2, m)$, $\ldots$ $(n-1, m)$ ausdrückt[4])

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}(m-1)!\,(1, m)\,(2, m)\ldots(n-1, m)} \tag{10}$$

---

1) Diese Formel in den Abhandlungen 662 (*Opera omnia* I_{19}, p. 67), 816 (I_{19}, p. 478).

2) Diese Werte finden sich in den Abhandlungen 19 (*Opera omnia* I_{14}, p. 11), 122 (I_{14}, p. 264), 352 (I_{15}, p. 84), 421 (I_{17}, p. 325), 521 (I_{18}, p. 77), 594 (I_{18}, p. 217), 662 (I_{19}, p. 71), 816 (I_{19}, p. 478). Den einfachen Beweis, daß durch die Substitution $x = y^2$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty y^{2n+1} e^{-y^2}\,dy,$$

also für $n = -\frac{1}{2}$

$$[-\tfrac{1}{2}] = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

wird, hat EULER nirgends angegeben.

3) Die Formel $\left[\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\sqrt{\pi}$ schon in der Abhandlung 19 (*Opera omnia* I_{14}, p. 11), die allgemeine Formel in den Abhandlungen 421 (*Opera omnia* I_{17}, p. 333), 662 (I_{19}, p. 71), 816 (I_{19}, p. 478).

4) *Opera omnia* I_{17}, p. 348; in dieser Abhandlung ist in den Fällen $n = 2$ bis $n = 8$, in der Abhandlung 816 in den Fällen $n = 2$ bis $n = 5$ die Formel speziell ausgeführt (I_{17}, p. 344 f., I_{19}, p. 479). Die Formel ist identisch mit jener, welche EULER schon in den Abhandlungen 19 (*Opera omnia* I_{14}, p. 20), 122 (I_{14}, p. 262) und in dem Brief an GOLDBACH vom 8. Januar 1730 (*Corresp.* t. 1, p. 15) angegeben hat.

und aus ihr in der Abhandlung 816 die Formel[1])

$$\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{2}{n}\right]\cdots\left[\frac{n-1}{n}\right]=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} \tag{11}$$

gewonnen.

Eine erste Gruppe der aus der Gammafunktion abgeleiteten Integrale behandelt EULER in der Abhandlung 675 vom 30. April 1781

De valoribus integralium a termino variabilis $x=0$ *usque ad* $x=\infty$ *extensorum*

(*Opera omnia* I_{19}, p. 217). In der Gleichung[2])

$$k^n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-kx}dx=\Delta \tag{12}$$

setzt EULER für k die komplexe Zahl $p+iq$ ein und gewinnt dann durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden Formeln

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\cos qx\,dx=\frac{\Delta\cos n\theta}{f},\quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\sin qx\,dx=\frac{\Delta\sin n\theta}{f}, \tag{13}$$

in denen $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{q}{p}$ und $f=\sqrt{p^2+q^2}$ ist.

Für $n=\frac{1}{2}$ ist $\Delta=\sqrt{\pi}$, und es gehen aus (13) die Formeln

$$\int_0^\infty e^{-px}\cos qx\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{f}\sqrt{\frac{f-p}{2}},\quad \int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{f}\sqrt{\frac{f+p}{2}} \tag{14}$$

hervor, in denen als spezieller Fall ($p=0$, $q=1$) die folgenden

$$\int_0^\infty\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_0^\infty\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{15}$$

enthalten sind. Auf diese Integrale wurde EULER, wie er am Anfange der Abhandlung auseinandersetzt, durch die Frage nach jener Kurve geführt, für welche der Krümmungsradius der Bogenlänge umgekehrt proportional ist.[3])

---

1) Siehe *Opera omnia* I_{19}, p. 483. Diese Formel ist ein spezieller Fall einer erst von GAUSS aufgestellten allgemeineren Formel (*Disquisitiones generales cira seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$ *Werke* Bd. 3, p. 150, Formel [57]).

2) EULER setzt in dieser Abhandlung p. 221 $\Delta=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)$.

3) Auf diese Kurve hatte schon JACOB BERNOULLI in einem nachgelassenen Aufsatze

Invenire curvam, cuius curvedo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quae ab appenso pendere flectitur in rectum

Für $n = 0$ geht aus der zweiten Formel (14) die Formel

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin qx \frac{dx}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{q}{p}, \tag{16}$$

also speziell für $p = 0$, $q = 1$ die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

hervor.

Es ist auffallend, daß EULER den Wert $n = 1$ nicht hervorhebt, in welchem aus (13) die Formeln

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos qx\, dx = \frac{p}{p^2+q^2}, \quad \int_0^\infty e^{-px} \sin qx\, dx = \frac{q}{p^2+q^2} \tag{18}$$

hervorgehen, von denen die erste durch Integration nach q gleichfalls die Formel (16) liefern würde, während aus der zweiten die Formel

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{1-\cos qx}{x}\, dx = \frac{1}{2}\, l\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right) \tag{16'}$$

hervorgeht. Die Formeln (16), (16′) hat EULER in etwas anderer Form in der S. XL genannten Abhandlung 475 (*Opera omnia* I_{18}, p. 4 und 5) erhalten.

Die EULERSCHE Konstante[1])

$$C = 0{,}57721\,56649\,01532\,86060\,65120\,90082\,40243\,10421\ldots \tag{19}$$

(*Opera*, Genevae 1744, p. 1084) hingewiesen. EULER hat ihre Koordinaten durch die sogenannten FRESNELSCHEN Integrale

$$x = c\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}, \quad y = c\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}$$

dargestellt, die sich somit lange vor FRESNEL bei EULER finden. Später wurde die Kurve von A. CORNU: *Etudes sur la diffraction; méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction* (C. R. 78, 1874, p. 113) benutzt, um eine deutliche Darstellung der Diffraktionserscheinungen zu geben. Von E. CESÀRO: *Les lignes barycentriques* (Nouv. Ann. 5_8, 1886, p. 511) wurden ihre Eigenschaften untersucht und ihr der Name Klothoide gegeben. Vgl. auch G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte* (Leipzig 1902, p. 457).

1) Vgl. die Anmerkungen zu I_{12}, p. 431 und zu I_{15}, p. 115.

tritt bei EULER zum ersten Male in der Abhandlung 43

De progressionibus harmonicis observationes

(*Opera omnia* I_{14}, p. 94) auf, wo sie als Grenzwert der Differenz

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-l(n+1)$$

für unendlich werdendes n definiert und auf 6 Dezimalstellen

$$C = 0{,}577218$$

berechnet ist, von denen aber die 6. falsch ist.

Sie kehrt dann wieder in der Abhandlung 47

Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali

(*Opera omnia* I_{14}, p. 118), in der sie auf 16 Dezimalstellen richtig berechnet ist, während sie in den Abhandlungen 393

De summis serierum numeros BERNOULLIANOS involventium

(*Opera omnia* I_{15}, p. 115), 432

Exercitationes analyticae

(*Opera omnia* I_{15}, p. 137), 583

De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente

(*Opera omnia* I_{15}, p. 569) und in den *Institutiones calculi differentialis* (*Opera omnia* I_{10}, p. 339 und 612) überall mit der falschen 16. Stelle 5 statt (aufgerundet) 9 angegeben ist. Ebenso sind von 17 in einem Briefe EULERS an JOH. BERNOULLI vom 20. Juni 1740 (Bibl. mathem. 6_3, 1905, p. 65) angegebenen Stellen die 16. und 17. falsch.[1])

1) MASCHERONI hat in seinen *Adnotationes ad calculum integralem EULERI* (Ticini 1790; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_{12}, p. 431) den Wert der EULERSCHEN Konstanten C auf 32 Stellen angegeben, von denen nur 19 richtig sind. Es folgt dann SOLDNER (*Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante*, Munic 1809, p. 13), der C auf 22 Stellen richtig angegeben hat. Unabhängig davon berechnete GAUSS ebenfalls 22 richtige Stellen, während die von ihm noch angegebene 23. falsch ist (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$ Comment. Gott. vol. **2**, 1813, *Werke* Bd. 3, p. 154; vgl. auch den Brief von GAUSS an BESSEL vom 18. November 1811; *Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL*, Leipzig 1880, p. 159); ferner hat auf GAUSS' Veranlassung F. B. G. NICOLAI C auf 40 Stellen berechnet, die sich alle als richtig erwiesen haben (s. GAUSS, *Werke*, Bd. 3 p. 154). Es folgte dann OETTINGER (*Über die richtige Wertbestimmung der Konstante des Integrallogarithmus*, J. f. Math. Bd. 60, 1862, p. 375), der C auf 42 Dezimalstellen berechnete, von denen 41 richtig sind, hierauf W. SHANKS (*On the calculation of the numerical value of EULERS Constant*; Proc. R. S. London **15** (1867), p. 431, mit 3 Nachträgen ebenda **16** (1868), p. 154 u. 300, **18** (1870), p. 49), der C zuerst auf 65 und sodann auf 80 Stellen berechnete,

Auf die Darstellung der EULERSCHEN Konstante durch das Integral [1])

$$C = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx} \right) dx$$

war EULER schon in den vorhergenannten Abhandlungen 393 und 583 geführt worden. An diese knüpfte EULER in der Abhandlung 629 vom 29. Februar 1776

Evolutio formulae integralis $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l\,x} \right)$ *a termino* $x = 0$ *usque ad* $x = 1$ *extensae*

(*Opera omnia* I18, p. 318) wieder an, aber die Reihenentwicklungen, welche EULER hier auf Grund dieser Integraldarstellung für C gibt, gehen weder formal noch sachlich über diejenigen hinaus, welche schon von den früheren Abhandlungen her vorlagen.

---

von denen aber nicht mehr als 59 richtig sind. Sodann hat GLAISHER (*On the calculation of EULERS Constant*, Proc. R. S. London **19** (1872), p. 514) C auf 100 Stellen berechnet, von denen 99 sich als richtig erwiesen haben, und dann wieder SHANKS (*On the numerical value of EULERS Constant*, Proc. R. S. London **20** (1872), p. 31) auf 110 Stellen, von denen aber nur 101 richtig sind. Endlich hat J. C. ADAMS (*Note on the value of EULERS Constant*, Proc. R. S. London **27**, 1878, p. 94) C auf 264 und 265 Stellen ausgerechnet, auf zwei verschiedene Weisen, von denen 263 Stellen übereinstimmen.

1) Der Zusammenhang dieses Integrals mit der logarithmischen Derivierten $\psi(\lambda)$ der Gammafunktion, für welche GAUSS (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$, *Werke*, Bd. 3, p. 159, Formel [77]) die Darstellung

$$\psi(\lambda) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{\log z} - \frac{z^\lambda}{1-z} \right) dz$$

gegeben hat und nach welcher $C = -\psi(1)$ ist, ist von EULER noch nicht bemerkt worden.

ADOLF KRAZER,
Karlsruhe.

GEORG FABER,
München.

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis Enestroemiani commentationes
656, 657, 662, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 688, 689, 690, 694, 695, 701, 707, 721, 752, 807, 816, 819

pag.

656. De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis 1

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1789), 1793, p. 99—133

657. Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$ casu, quo ponitur $z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$ . . . 45

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1789), 1793, p. 134—148

662. De vero valore formulae integralis $\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensae 63

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1790), 1794, p. 15—31

668. De integratione formulae $\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$ aliarumque eiusdem generis per logarithmos et arcus circulares 84

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 36—48

669. Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet 98

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 48—59

670. De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem, ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur 110

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 60—77

pag.

671. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet 129

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 183—194

672. Theorema maxime memorabile circa formulam integralem

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. \lambda \varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}}$$ 141

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 194—217

673. Disquisitio coniecturalis super formula integrali

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i\varphi}{(\alpha + \beta \cos. \varphi)^n}$$ 168

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 217—242

674. Demonstratio theorematis insignis per coniecturam eruti circa integrationem formulae

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i\varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}}$$ 197

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 242—259

675. De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum 217

Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 337—345

688. Specimen integrationis abstrusissimae hac formula

$$\int \frac{\partial x}{(1 + x) \sqrt[4]{(2xx - 1)}}$$

contentae 228

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 98—117

689. Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire licet 251

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 118—126

690. Evolutio formulae integralis

$$\int \frac{\partial z (3 + zz)}{(1 + zz) \sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}}$$

per logarithmos et arcus circulares 262

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 127—131

pag.

694. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis 268

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1792), 1797, p. 3—19

695. Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis

$$\int \frac{\partial z}{(3 \pm zz)\sqrt[3]{(1 \pm 3zz)}}$$ 287

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1792), 1797, p. 20—26

701. Formae generales differentialium, quae, etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt 297

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **11** (1793), 1798, p. 27—77

707. De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali 345

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **12** (1794), 1801, p. 3—21

721. De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt. 369

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **14** (1797/8), 1805, p. 62—74

752. De integralibus quibusdam inventu difficillimis 390

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **6** (1813/4), 1818, p. 30—53

807. Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires 417

Opera postuma **1**, Petropoli 1862, p. 269—281

816. Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées, en certains cas, par la quadrature du cercle 439

Opera postuma **1**, Petropoli 1862, p. 408—438

819. Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum 491

Opera postuma **1**, Petropoli 1862, p. 514

DE INTEGRATIONIBUS MAXIME MEMORABILIBUS EX CALCULO IMAGINARIORUM ORIUNDIS

Convent. exhib. d. 20. Mart. 1777

Commentatio 656 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1789), 1793, p. 99—133
Summarium ibidem p. 42—43

SUMMARIUM

En considérant une formule différentielle représentée sous la forme générale $Z\partial z$, où Z marque une fonction quelconque de la variable z, telle cependant que l'intégrale $\int Z\partial z$ puisse être assignée au moins par des logarithmes et des arcs de cercle, on aura $\int Z\partial z = \triangle : z$, où $\triangle$ désigne une certaine fonction de z. Que si maintenant on donne à z une valeur imaginaire $x + y\sqrt{-1}$, la fonction Z pourra être représentée sous la forme $M + N\sqrt{-1}$ et l'intégrale $\triangle : z$ se laissera toujours réduire à la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Tout revient donc à déterminer les quantités

$$P = \int (M\partial x - N\partial y)$$

$$Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

ce qu'on pourra effectuer toutes les fois que la forme $\int Z\partial z$ sera intégrable pour une valeur réelle de z, quelque compliquée que soit d'ailleurs cette intégrale.

C'est d'après cette observation générale que M. Euler s'est conduit dans la recherche des intégrales des formules

$$z^n\partial z, \quad \frac{\partial z}{1+zz}, \quad \frac{\partial z}{1+z^3} \quad \text{et} \quad \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n},$$

pour le cas où $z = x + y\sqrt{-1}$, ou bien, en mettant

$$x = v \cos. \varphi \quad \text{et} \quad y = v \sin. \varphi,$$

pour la valeur

$$z = v(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi).$$

L'intégration des trois premieres formules n'est pas, à dire la vérité, sujette à beaucoup de difficultés, mais la dernière, qui est fondée sur la décomposition en fractions partielles, en présente de plus d'une espèce, qu'il est intéressant de voir s'évanouir en partie et céder aux efforts du plus grand Analyste.

1. Considero hic in genere formulam differentialem quamcunque $Z\partial z$, cuius integrale saltem per logarithmos et arcus circulares exhibere liceat, quod per characterem $\triangle : z$ designo, ita ut sit

$$\int Z\partial z = \triangle : z.$$

Iam loco z scribo quantitatem quamcunque imaginariam, scilicet $z = x + y\sqrt{-1}$, unde functio Z transmutetur in formam $M + N\sqrt{-1}$. Hoc modo forma differentialis evadet

$$(\partial x + \partial y\sqrt{-1})(M + N\sqrt{-1}),$$

cuius producti pars realis ergo erit

$$M\partial x - N\partial y,$$

imaginaria vero

$$(N\partial x + M\partial y)\sqrt{-1}.$$

Tum vero ipsum integrale, quod est $\triangle : (x + y\sqrt{-1})$, transmutari poterit in similem formam $P + Q\sqrt{-1}$. Quare cum quantitates reales et imaginariae seorsim inter se conferri debeant, hinc duplex integratio orietur:

$$\text{I.} \quad P = \int (M\partial x - N\partial y),$$

$$\text{II.} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

quae ergo duae formulae semper erunt integrabiles, etiamsi binas variabiles x et y involvant. Erit scilicet per notum integrabilitatis criterium tam

$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ quam $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$.[1]) Unde intelligitur ex qualibet formula differentiali proposita binas deduci posse integrationes eo magis notatu dignas et arduas, quo magis integrale fuerit complicatum, quamobrem plures casus evolvisse operae erit pretium.

I. EVOLUTIO FORMULAE DIFFERENTIALIS $z^n \partial z$.

2. Cum igitur sit

$$\int z^n \partial z = \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

si loco z scribamus $x + y\sqrt{-1}$, hae potestates binomii, in usum vocando characteres, quibus iam saepius uncias designavi[2]), evolutae dabunt

$$(x + y\sqrt{-1})^n = x^n + \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y\sqrt{-1} - \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}yy - \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^3\sqrt{-1} + \text{etc.}$$

Hinc colligitur fore

$$M = x^n - \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}yy + \left(\frac{n}{4}\right)x^{n-4}y^4 - \left(\frac{n}{6}\right)x^{n-6}y^6 + \text{etc.}$$

et

$$N = \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}y - \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}y^3 + \left(\frac{n}{5}\right)x^{n-5}y^5 - \text{etc.}$$

Simili modo pro forma integralis erit

$$(n+1)P = x^{n+1} - \left(\frac{n+1}{2}\right)x^{n-1}yy + \left(\frac{n+1}{4}\right)x^{n-3}y^4 - \left(\frac{n+1}{6}\right)x^{n-5}y^6 + \text{etc.},$$

$$(n+1)Q = \left(\frac{n+1}{1}\right)x^n y - \left(\frac{n+1}{3}\right)x^{n-2}y^3 + \left(\frac{n+1}{5}\right)x^{n-4}y^5 - \text{etc.}$$

---

1) Confer Commentationem 694 huius voluminis. A. K.

2) EULERUS hanc notationem primum usurpat in Commentatione 575 voluminis I_{15}. Vide etiam Commentationem 600 voluminis I_7, imprimis notam p. 409 adiectam, necnon praefationem voluminis I_7, p. XXVI. G. F.

3. His valoribus determinatis binae integrationes, quas hinc adipiscimur, ita se habebunt:

$$P = \int \begin{Bmatrix} \partial x \left(x^n - \left(\frac{n}{2}\right) x^{n-2} y^2 + \left(\frac{n}{4}\right) x^{n-4} y^4 - \left(\frac{n}{6}\right) x^{n-6} y^6 + \text{etc.} \right) \\ - \partial y \left(\left(\frac{n}{1}\right) x^{n-1} y - \left(\frac{n}{3}\right) x^{n-3} y^3 + \left(\frac{n}{5}\right) x^{n-5} y^5 - \text{etc.} \right) \end{Bmatrix};$$

quae forma quemadmodum ipsi P aequetur, per partes videamus. At est

$$\text{I.} \quad \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

quod cum primo termino seriei § 2 pro P inventae convenit. Tum vero sumatur

$$\text{II.} \quad -\int \left(\frac{n}{2}\right) x^{n-2} y^2 \partial x - \int \left(\frac{n}{1}\right) x^{n-1} y \partial y;$$

hinc ex parte priore sumto y constante oritur integrale

$$-\left(\frac{n}{2}\right) \frac{x^{n-1}}{n-1} yy,$$

ex parte vero posteriore sumto x constante orietur

$$-\left(\frac{n}{1}\right) x^{n-1} \frac{yy}{2},$$

quae duae expressiones manifesto sunt inter se aequales, scilicet

$$= -\frac{n}{2} x^{n-1} yy.$$

At vero secunda pars ipsius P est

$$-\frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{2}\right) x^{n-1} yy,$$

quae ob

$$\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2}$$

manifesto fit

$$-\frac{n}{2} x^{n-1} yy.$$

Sumatur nunc

$$\text{III.}\quad \int \binom{n}{4} x^{n-4} y^4 \partial x + \int \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 \partial y.$$

Hic ex parte priore concluditur integrale

$$\frac{1}{n-3}\binom{n}{4} x^{n-3} y^4,$$

ex parte autem posteriore

$$\frac{1}{4}\binom{n}{3} x^{n-3} y^4.$$

Quoniam igitur est

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3}\frac{n-3}{4},$$

hae duae formulae manifesto sunt inter se aequales et integrale erit

$$\frac{1}{4}\binom{n}{3} x^{n-3} y^4 = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{1}{4}\, x^{n-3} y^4.$$

Pars tertia autem formulae pro P datae est

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{4} x^{n-3} y^4,$$

quae ob

$$\binom{n+1}{4} = \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}\cdot\frac{n-2}{4}$$

manifesto illi est aequalis. Simili modo convenientia sequentium membrorum ipsius P ostenditur simulque facile intelligitur pari modo consensum formulae Q ostendi posse.

4. Quoties igitur exponens n est numerus integer positivus, veritas nostrarum formularum manifesto in oculos incurrit. Verum si n fuerit vel numerus negativus vel fractus, tum formulae pro litteris M et N, item P et Q, in infinitum excurrerent; unde his casibus calculum alio modo instrui oportet. Scilicet loco x et y binas alias variabiles in calculum introduci conveniet statuendo $\sqrt{(xx+yy)} = v$ et quaerendo angulum φ, ut sit tang. $\varphi = \frac{y}{x}$; tum autem erit

$$x = v \cos.\varphi \quad \text{et} \quad y = v \sin.\varphi$$

ideoque differentiando

$$\partial x = \partial v \cos. \varphi - v\partial\varphi \sin. \varphi$$

et

$$\partial y = \partial v \sin. \varphi + v\partial\varphi \cos. \varphi.$$

His autem positis erit

$$(x + y\sqrt{-1})^n = v^n(\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi),$$

unde colligitur

$$M = v^n \cos. n\varphi \quad \text{et} \quad N = v^n \sin. n\varphi.$$

Deinde vero pro integrali erit

$$z^{n+1} = v^{n+1}(\cos. (n+1)\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. (n+1)\varphi),$$

unde habebitur

$$P = \frac{v^{n+1} \cos. (n+1)\varphi}{n+1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{v^{n+1} \sin. (n+1)\varphi}{n+1}.$$

5. Cum nunc invenerimus

$$P = \int (M\partial x - N\partial y) \quad \text{et} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

facta substitutione fiet

$$P = \int (v^n \partial v \cos. (n+1)\varphi - v^{n+1}\partial\varphi \sin. (n+1)\varphi)$$

et

$$Q = \int (v^n \partial v \sin. (n+1)\varphi + v^{n+1}\partial\varphi \cos. (n+1)\varphi).$$

Ambae autem hae formulae manifesto integrationem admittunt, cum ex priore fiat

$$P = \frac{v^{n+1}}{n+1} \cos. (n+1)\varphi \quad \text{et} \quad Q = \frac{v^{n+1}}{n+1} \sin. (n+1)\varphi;$$

quae cum sint obvia, ad maiora progrediamur.

II. EVOLUTIO FORMULAE DIFFERENTIALIS $\frac{\partial z}{1+zz}$ CUIUS INTEGRALE EST A tang. z

6. Cum hic sit

$$Z = \frac{1}{1+zz},$$

posito $z = x + y\sqrt{-1}$ erit

$$Z = \frac{1}{1+2xy\sqrt{-1}+xx-yy}.$$

Hic ante omnia denominatorem ab imaginariis liberari oportet, quod fit numeratorem et denominatorem multiplicando per $1+xx-yy-2xy\sqrt{-1}$, fietque

$$Z = \frac{1+xx-yy-2xy\sqrt{-1}}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

sicque erit

$$M = \frac{1+xx-yy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

et

$$N = \frac{-2xy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}.$$

Hinc igitur pro integrali $P+Q\sqrt{-1}$ impetrabimus

$$P = \int \frac{(1+xx-yy)\partial x + 2xy\partial y}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}$$

et

$$Q = \int \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{(1+xx-yy)^2+4xxyy};$$

hasque ambas formulas iam certo scimus esse integrabiles.

7. Consideremus accuratius denominatorem, qui evolvitur in hanc formam

$$(xx+yy)^2 + 2(xx-yy) + 1,$$

quae porro reducitur ad

$$(xx+yy+1)^2 - 4yy,$$

quae ergo est productum ex his duobus factoribus

$$(xx + yy + 1 + 2y)(xx + yy + 1 - 2y),$$

qui ergo factores sunt $xx + (y+1)^2$ et $xx + (y-1)^2$. Hanc ob rem ambae illae fractiones resolvi poterunt in binas fractiones, quarum alterius denominator sit $xx + (y+1)^2$ et alterius $xx + (y-1)^2$. Ad hanc resolutionem faciendam utamur resolutione generali fractionis [1]) $\frac{S}{TU}$ in has duas fractiones $\frac{F}{T} + \frac{G}{U}$, ubi numerator F reperitur ex formula $\frac{S}{U}$ ponendo $T = 0$; alter vero G ex formula $\frac{S}{T}$ ponendo $U = 0$.[2])

8. Pro formula priore erit

$$S = (1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y,$$

$$T = xx + (y+1)^2 \quad \text{et} \quad U = xx + (y-1)^2;$$

quamobrem pro priore fractione $\frac{F}{T}$ littera F definiri debet ex fractione

$$\frac{(1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y}{xx + (y-1)^2}$$

ponendo $xx + (y+1)^2 = 0$. Quare cum hinc sit $xx = -(y+1)^2$, hoc valore tam in numeratore quam in denominatore substituto, ubi quidem xx occurrit, reperietur

$$\frac{-2\partial x(yy + y) + 2xy\partial y}{-4y} = \frac{1}{2}\partial x(y+1) - \frac{1}{2}x\partial y.$$

Simili modo pro fractione $\frac{G}{U}$ numerator G definiri debet ex hac fractione

$$\frac{(1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y}{xx + (y+1)^2}$$

---

1) In editione principe loco litterarum T et U litterae P et Q usurpatae sunt, quibus autem iam alia significatio est. A. L.

2) Haec transformatio non satis definita est, quia F et G hic non constantes, sed functiones binarum variabilium x et y esse debent. A. L.

ponendo $xx + (y-1)^2 = 0$, unde fit $xx = -(y-1)^2$, quo valore substituto reperitur

$$G = \frac{2\partial x(y-yy) + 2xy\partial y}{4y} = -\frac{1}{2}\partial x(y-1) + \frac{1}{2}x\partial y.$$

Hinc igitur habebimus

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{\partial x(y+1) - x\partial y}{xx + (y+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x(y-1) - x\partial y}{xx + (y-1)^2}.$$

9. Nunc autem integratio harum formularum nulla amplius laborat difficultate. Si enim pro priore statuamus $y + 1 = tx$, erit $\partial y = t\partial x + x\partial t$, unde haec formula integralis transmutabitur in

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\partial t}{1+tt} = -\frac{1}{2}\text{A tang. } t = -\frac{1}{2}\text{A tang. } \frac{y+1}{x}.$$

Pro altera formula ponatur $y - 1 = ux$, ut sit $\partial y = u\partial x + x\partial u$, eaque abibit in

$$\frac{1}{2}\int \frac{\partial u}{1+uu} = \frac{1}{2}\text{A tang. } u = \frac{1}{2}\text{A tang. } \frac{y-1}{x},$$

quocirca adepti sumus valorem litterae P, qui est

$$P = \frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{y-1}{x} - \frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{y+1}{x}.$$

Cum nunc sit

$$\text{A tang. } a - \text{A tang. } b = \text{A tang. } \frac{a-b}{1+ab},$$

erit

$$P = -\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2x}{xx+yy-1}.$$

10. Simili modo procedamus pro valore Q inveniendo eritque

$$S = (1 + xx - yy)\partial y - 2xy\partial x$$

atque

$$T = xx + (y+1)^2 \quad \text{et} \quad U = xx + (y-1)^2,$$

unde pro fractione $\frac{F}{T}$ numerator F aequabitur fractioni

$$\frac{S}{U} = \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{xx + (y-1)^2},$$

si quidem statuatur $xx + (y+1)^2 = 0$ sive $xx = -(y+1)^2$. Erit igitur

$$F = \frac{+2\partial y(yy+y) + 2xy\partial x}{4y} = \frac{1}{2}\partial y(y+1) + \frac{1}{2}x\partial x.$$

Tum vero erit numerator G ex fractione

$$\frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{xx+(y+1)^2}$$

statuendo $xx = -(y-1)^2$ hoc modo expressus

$$G = \frac{-2\partial y(yy-y) - 2xy\partial x}{4y} = -\frac{1}{2}\partial y(y-1) - \frac{1}{2}x\partial x.$$

Hinc ergo fiet

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{\partial y(y+1) + x\partial x}{xx+(y+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial y(y-1) + x\partial x}{xx+(y-1)^2},$$

ubi in utraque formula valor [numeratoris] est dimidium differentiale denominatoris, sicque valor quaesitus

$$Q = \frac{1}{4}l(xx + (y+1)^2) - \frac{1}{4}l(xx + (y-1)^2) = \frac{1}{4}l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

11. His igitur valoribus pro P et Q inventis valor integralis quaesiti erit $P + Q\sqrt{-1}$, unde, cum formulae propositae integrale sit A tang. z, nunc certi sumus, si loco z scribamus $x + y\sqrt{-1}$, tum arcum circuli, cuius tangens est formula imaginaria $x + y\sqrt{-1}$, semper aequari huic formulae

$$-\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2x}{xx+yy-1} + \frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

12. Neque vero opus fuerat hos valores pro P et Q per integrationem quaerere, sed immediate ex integrali cognito A tang. $(x + y\sqrt{-1})$ deduci possunt. Si enim ponatur

$$P + Q\sqrt{-1} = \text{A tang.}(x + y\sqrt{-1}),$$

erit signo imaginarii mutato

$$P - Q\sqrt{-1} = \text{A tang. } (x - y\sqrt{-1}).$$

His iam formulis additis prodit

$$2P = \text{A tang. } (x + y\sqrt{-1}) + \text{A tang. } (x - y\sqrt{-1})$$
$$= \text{A tang. } \frac{2x}{1 - xx - yy}$$

ideoque

$$P = \frac{1}{2}\,\text{A tang. } \frac{2x}{1-xx-yy} = -\frac{1}{2}\,\text{A tang. } \frac{2x}{xx+yy-1}.$$

Deinde subtractio illarum formularum praebet

$$2Q\sqrt{-1} = \text{A tang. } (x + y\sqrt{-1}) - \text{A tang. } (x - y\sqrt{-1})$$
$$= \text{A tang. } \frac{2y\sqrt{-1}}{1+xx+yy}.$$

Quia vero est

$$\text{A tang. } u\sqrt{-1} = \int \frac{\partial u\sqrt{-1}}{1-uu} = \sqrt{-1}\cdot\int \frac{\partial u}{1-uu} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\frac{1+u}{1-u},$$

hinc, cum nostro casu sit $u = \frac{2y}{1+xx+yy}$, erit

$$2Q\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2},$$

ergo

$$Q = \frac{1}{4}\, l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2},$$

prorsus uti invenimus. Hoc autem imprimis pro aliis casibus est notandum, ubi, quoties integrale $\int Z\partial z$ per logarithmos vel arcus circulares exprimere licet, quoniam posito $z = x + y\sqrt{-1}$ hos in partes duas resolvere licet, alteram realem alteram simpliciter imaginariam, inde valores quantitatum P et Q assignari poterunt, quantumvis ipsae formulae integrales pro his litteris resultantes fuerint perplexae et abstrusae.

III. EVOLUTIO FORMULAE DIFFERENTIALIS $\frac{\partial z}{1+z^3}$ CUIUS INTEGRALE CONSTAT ESSE

$$\frac{1}{3}l(1+z)-\frac{1}{3}l\sqrt{(1-z+zz)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$$

13. Ponamus igitur hic $z=x+y\sqrt{-1}$ eritque

$$Z=\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{1+x^3+3xxy\sqrt{-1}-3xyy-y^3\sqrt{-1}};$$

ubi cum denominator sit

$$1+x^3-3xyy+\sqrt{-1}(3xxy-y^3),$$

multiplicetur supra et infra per

$$1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}(3xxy-y^3)$$

fietque

$$Z=\frac{1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}(3xxy-y^3)}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

Hinc ergo adipiscimur

$$M=\frac{1+x^3-3xyy}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}$$

et

$$N=-\frac{3xxy-y^3}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

14. Ex his iam valoribus, si integrale quaesitum designemus per $P+Q\sqrt{-1}$, pro utraque quantitate P et Q sequentes obtinemus formulas integrales

$$P=\int\frac{(1+x^3-3xyy)\partial x+(3xxy-y^3)\partial y}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}$$

et

$$Q=\int\frac{(1+x^3-3xyy)\partial y-(3xxy-y^3)\partial x}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3},$$

quas ambas formulas iam in antecessum novimus esse integrabiles, etiamsi evolutio harum formularum sit difficillima, cum factores denominatoris non pateant; interim tamen valores harum litterarum P et Q ex ipso integrali principali per z expresso derivare licebit.

15. Quoniam in his formulis duae variabiles x et y insunt, pro lubitu alterutram tanquam constantem tractare licebit. Ita si x pro constante sumamus, ponendo $x = a$ pro litteris P et Q has habebimus formulas integrales

$$P = \int \frac{(3aay - y^3)\partial y}{1 + 2a(aa - 3yy) + (aa + yy)^3}$$

et

$$Q = \int \frac{(1 + a^3 - 3ayy)\partial y}{1 + 2a(aa - 3yy) + (aa + yy)^3}.$$

Simili modo si y pro constante accipiatur, ponendo $y = b$ pro iisdem litteris sequentes valores prodibunt

$$P = \int \frac{(1 + x^3 - 3bbx)\partial x}{1 + 2x(xx - 3bb) + (bb + xx)^3}$$

et

$$Q = \int \frac{(b^3 - 3bxx)\partial x}{1 + 2x(xx - 3bb) + (bb + xx)^3},$$

qui valores, si calculus rite instituatur, congruere debent. Verumtamen semper tutius erit uti formulis principalibus, in quas ambae variabiles x et y ingrediuntur, propterea quod, si his posterioribus formulis uteremur, adiectio constantis in errorem praecipitare posset, si scilicet in prioribus littera a, in posterioribus vero littera b in constantem induceretur.

16. Ob has summas difficultates ergo non parum mirandum est valores horum integralium nihilominus revera exhiberi posse; tantum enim opus est, ut in integrali per z expresso loco z scribatur $x + y\sqrt{-1}$ atque singula membra in binas suas partes resolvantur, alteram realem, alteram imaginariam; tum enim partes reales iunctim sumtae dabunt valorem ipsius P, partes autem imaginariae valorem ipsius Q.

17. Quoniam enim in memorato integrali tantum logarithmi cum arcu circulari occurrunt, sufficiet duas sequentes reductiones[1]) nosse:

I. $$l(p + q\sqrt{-1}) = l\sqrt{(pp + qq)} + \sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{q}{p}$$

et

II. $$\text{A tang.}(p + q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{2p}{1 - pp - qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}.$$

1) Vide Commentationem 168 voluminis I_{17}, imprimis p. 218 necnon Commentationem 170 voluminis I_6, imprimis p. 134 et 144. G. F.

Hinc cum prima pars sit $\frac{1}{3}l(1+z)$, posito $z = x + y\sqrt{-1}$ erit

$$l(1+x+y\sqrt{-1}) = l\sqrt{((1+x)^2+yy)} + \sqrt{-1}\cdot \text{A tang.}\frac{y}{1+x}.$$

Pro secunda parte, quae erat $-\frac{1}{6}l(1-z+zz)$, ob

$$1-z+zz = 1-x+xx-yy+\sqrt{-1}(2xy-y),$$

consequenter

$$p = 1-x+xx-yy \quad \text{et} \quad q = 2xy-y,$$

erit

$$l(1-z+zz) = l\sqrt{((xx+yy-x)^2+2xx-yy-2x+1)} + \sqrt{-1}\cdot \text{A tang.}\frac{2xy-y}{1-x+xx-yy}.$$

Denique tertia pars erat $\frac{1}{\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$, ubi ergo

$$\frac{z}{2-z} = \frac{x+y\sqrt{-1}}{2-x-y\sqrt{-1}} = \frac{2x+2y\sqrt{-1}-xx-yy}{(2-x)^2+yy},$$

unde pro superiore formula erit

$$p = \frac{(2x-xx-yy)\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy} \quad \text{et} \quad q = \frac{2y\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy}.$$

Hinc ergo pro hac parte erit

$$\text{A tang.}\frac{z\sqrt{3}}{2-z} = \frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2(2x-xx-yy)((2-x)^2+yy)\sqrt{3}}{(2-x)^4+2yy(2-x)^2-3(2-x)^2xx+6xyy(2-x)-12yy-2y^4} + \frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{pp+(q+1)^2}{pp+(q-1)^2};$$

quae expressiones cum tantopere sint prolixae, in ultima parte litteras p et q retinere maluimus; quamobrem multo minus valores pro P et Q hic exhibemus, cum sufficiat nosse partes reales iunctim sumtas praebere P, imaginarias per $\sqrt{-1}$ divisas Q; atque ob hanc causam manifestum est, cur evolutio actualis superiorum formularum non successerit.

IV. EVOLUTIO FORMULAE DIFFERENTIALIS $\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$ CUIUS INTEGRALE PASSIM EVOLUTUM REPERITUR SI QUIDEM EXPONENTES m ET n FUERINT NUMERI INTEGRI

18. Ex hactenus traditis clare intelligitur longe aliam viam hic esse ineundam. Statim igitur statuamus

$$x = v\cos.\varphi \quad \text{et} \quad y = v\sin.\varphi,$$

ita ut loco binarum variabilium x et y statim binas alias v et φ in calculum introducamus; tum enim erit

$$z^m = v^m(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. m\varphi)$$

et

$$1 + z^n = 1 + v^n(\cos. n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. n\varphi).$$

Quare fractionem propositam supra et infra multiplicemus per

$$1 + v^n(\cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin. n\varphi)$$

hincque prodibit denominator $1 + 2v^n\cos. n\varphi + v^{2n}$.

19. Pro numeratore cum sit

$$z^{m-1}\partial z = \frac{1}{m}\partial.z^m = \frac{1}{m}\partial.v^m(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. m\varphi),$$

at vero in genere

$$\partial.(\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega) = \partial\omega\sqrt{-1}(\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega),$$

erit facta evolutione

$$z^{m-1}\partial z = v^{m-1}\partial v(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. m\varphi)$$
$$+ v^m\partial\varphi\sqrt{-1}(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. m\varphi)$$

sive

$$z^{m-1}\partial z = v^{m-1}(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin. m\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1}).$$

Hanc ergo formulam insuper multiplicari oportet per

$$1 + v^n(\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi),$$

pro qua operatione notetur esse

$$(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin. \alpha)(\cos. \beta - \sqrt{-1} \cdot \sin. \beta)$$
$$= \cos. (\alpha - \beta) + \sqrt{-1} \cdot \sin. (\alpha - \beta);$$

hinc ergo noster numerator erit

$$v^{m-1}(\cos. m\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. m\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1})$$
$$+ v^{m+n-1}(\cos. (m-n)\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. (m-n)\varphi)(\partial v + v\partial\varphi\sqrt{-1}),$$

cuius ergo pars realis erit

$$v^{m-1}\partial v \cos. m\varphi + v^{m+n-1}\partial v \cos. (m-n)\varphi$$
$$- v^m\partial\varphi \sin. m\varphi - v^{m+n}\partial\varphi \sin. (m-n)\varphi;$$

pars vero imaginaria erit

$$v^{m-1}\partial v\sqrt{-1} \cdot \sin. m\varphi + v^m\partial\varphi\sqrt{-1} \cdot \cos. m\varphi$$
$$+ v^{m+n-1}\partial v\sqrt{-1} \cdot \sin. (m-n)\varphi + v^{m+n}\partial\varphi\sqrt{-1} \cdot \cos. (m-n)\varphi.$$

20. His praeparatis, si formulae nostrae differentialis integrale quaesitum statuamus $= P + Q\sqrt{-1}$, utramque partem per sequentes formulas integrales reales inveniemus expressam:

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\cos. m\varphi + v^n \cos. (m-n)\varphi) - v^m\partial\varphi(\sin. m\varphi + v^n \sin. (m-n)\varphi)}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}},$$

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\sin. m\varphi + v^n \sin. (m-n)\varphi) + v^m\partial\varphi(\cos. m\varphi + v^n \cos. (m-n)\varphi)}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}.$$

Haec igitur integralia ex ipso integrali principali per z expresso derivare licebit, uti ante iam observavimus, siquidem totum integrale partim ex logarithmis partim ex arcubus circularibus, quorum tangentes dantur, componitur. Interim tamen videamus, num methodo consueta haec integralia investigare liceat.

INVESTIGATIO FORMULAE INTEGRALIS

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v(\cos. m\varphi + v^n \cos.(m-n)\varphi) - v^m \partial\varphi(\sin. m\varphi + v^n \sin.(m-n)\varphi)}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}$$

21. Totum ergo negotium huc redit, ut ante omnia denominator in suos factores resolvatur eosque trinomiales, quandoquidem ad nostrum institutum omnes factores debent esse reales. Ponamus ergo factorem huius denominatoris esse $1 - 2v\cos.\omega + vv$ atque necesse est, ut posito hoc factore $= 0$ (unde fit $v = \cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega$) etiam ipse denominator evanescat. Quoniam igitur hinc fiet

$$v^n = \cos. n\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin. n\omega$$

et

$$v^{2n} = \cos. 2n\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin. 2n\omega,$$

his substitutis denominator induet hanc formam

$$1 + 2\cos. n\varphi \cos. n\omega + \cos. 2n\omega + \sqrt{-1}(2\cos. n\varphi \sin. n\omega + \sin. 2n\omega),$$

cuius ergo tam pars realis quam imaginaria seorsim nihilo aequari debet. Ex imaginaria igitur haec oritur aequatio

$$2\cos. n\varphi \sin. n\omega + \sin. 2n\omega = 0,$$

unde per $2\sin. n\omega$ dividendo prodit

$$\cos. n\varphi + \cos. n\omega = 0.$$

At vero ex parte reali deducitur

$$1 + 2\cos. n\varphi \cos. n\omega + \cos. 2n\omega = 0,$$

unde, quia $1 + \cos. 2n\omega = 2\cos. n\omega^2$, erit

$$\cos. n\varphi + \cos. n\omega = 0,$$

prorsus ut ante. Unde patet angulum ω ita accipi debere, ut fiat

$$\cos. n\omega = -\cos. n\varphi,$$

cui conditioni infinitis modis satisfieri potest, sumendo vel

$$n\omega = \pi \pm n\varphi \quad \text{vel} \quad n\omega = 3\pi \pm n\varphi \quad \text{vel} \quad n\omega = 5\pi \pm n\varphi$$

atque adeo in genere $n\omega = (2i+1)\pi \pm n\varphi$. Atque hinc adeo n valores diversi pro ω obtinebuntur; totidem vero nobis est opus ad denominatorem implendum. Forma igitur generalis anguli ω erit

$$\omega = \frac{(2i+1)\pi}{n} \pm \varphi;$$

et quicunque huiusmodi valor ipsi ω tribuatur, denominatoris factor erit $1 - 2v\cos.\omega + vv$, quo evanescente simul ipse denominator evanescet, fietque scilicet $v^{2n} = -2v^n \cos. n\varphi - 1$.

22. Inventis iam omnibus factoribus denominatoris ipsa formula proposita in totidem partes resolvi poterit, quarum denominatores sint isti ipsi factores trinomiales $1 - 2v\cos.\omega + vv$; quamobrem pro quolibet tali factore fractionem ei respondentem, hoc est eius numeratorem, investigari oportebit; qui cum ex numeratore ipsius formae propositae deduci debeat, ponamus brevitatis gratia numeratorem formulae integralis propositae

$$R\partial v + S\partial\varphi,$$

ita ut sit

$$R = v^{m-1}(\cos. m\varphi + v^n \cos.(m-n)\varphi)$$

et

$$S = v^m(\sin. m\varphi + v^n \sin.(m-n)\varphi).$$

Iam primo evolvamus fractionem

$$\frac{R}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}},$$

quam involvere fingamus hanc fractionem simplicem

$$\frac{r}{1 - 2v\cos.\omega + vv},$$

pro cuius numeratore r constat eius valorem derivari debere ex fractione

$$\frac{R(1 - 2v\cos.\omega + vv)}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}$$

posito $1 - 2v\cos.\omega + vv = 0$, ubi operationem ita institui oportet, ut pro r quantitas integra obtineatur.

23. Quoniam autem casu $1 - 2v\cos.\omega + vv = 0$ tam numerator quam denominator evanescit, notum est[1]) hoc casu istam fractionem

$$\frac{1 - 2v\cos.\omega + vv}{1 + 2v^n\cos.n\varphi + v^{2n}}$$

aequari huic

$$\frac{v - \cos.\omega}{nv^{2n-1} + nv^{n-1}\cos.n\varphi} = \frac{vv - v\cos.\omega}{nv^n(v^n + \cos.n\varphi)},$$

cuius denominator ob $v^{2n} = -2v^n\cos.n\varphi - 1$ dabit $-nv^n\cos.n\varphi - n$; numerator vero ob $vv = 2v\cos.\omega - 1$ erit $v\cos.\omega - 1$ ideoque fractio

$$= \frac{-v\cos.\omega + 1}{n(v^n\cos.n\varphi + 1)}.$$

Ex denominatore autem nihilo aequato fit $v^n = -\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi$[2]), qui valor in hoc denominatore substitutus dat

$$\frac{1 - v\cos.\omega}{-n\cos.n\varphi^2 + n\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi\cos.n\varphi + n} = \frac{1 - v\cos.\omega}{n\sin.n\varphi(\sin.n\varphi + \sqrt{-1}\cos.n\varphi)}.$$

Numerator vero posito $v = \cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega$ abibit in

$$\sin.\omega(\sin.\omega - \sqrt{-1}\cdot\cos.\omega)$$

sicque tota haec fractio erit

$$\frac{\sin.\omega(\sin.\omega - \sqrt{-1}\cdot\cos.\omega)}{n\sin.n\varphi(\sin.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\cos.n\varphi)}.$$

---

1) Vide G. F. DE L'HOSPITAL (1661—1704), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris 1696, p. 145. Confer porro L. EULERI *Institutiones calculi differentialis* [Berolini] 1755, partis posterioris cap. XV; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_{10}, p. 564. G. F.

2) Editio princeps:

$$v^n = \cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi,$$

qui valor in hoc denominatore substitutus dat

$$\frac{1 - v\cos.\omega}{n\cos.n\varphi^2 + n\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi\cos.n\varphi - n} = \frac{v\cos.\omega - 1}{n\sin.n\varphi(\sin.n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\cos.n\varphi)}.$$

Inde denique formula definitiva huius paragraphi erat

$$\frac{-v\sin.(\omega - n\varphi) - \sin.n\varphi}{n\sin.n\varphi}.$$

Correxit A. L.

Nunc haec fractio supra et infra ducatur in $\sin. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \cos. n\varphi$ prodibitque

$$-\frac{\sin. \omega (\cos. (\omega + n\varphi) + \sqrt{-1} \cdot \sin. (\omega + n\varphi))}{n \sin. n\varphi}.$$

Verum imaginaria, quae hic adhuc supersunt, nostrum negotium prorsus turbant. Interim tamen hoc incommodum tolli poterit, si quantitas v in numeratorem introducatur. Ponamus igitur numeratorem esse $Av + B$, ita ut A et B sint quantitates reales; unde cum sit

$$Av + B = A \cos. \omega + B + \sqrt{-1} \cdot A \sin. \omega,$$

partes reales et imaginariae seorsim aequentur sicque esse debet

$$A \sin. \omega = -\sin. (\omega + n\varphi) \sin. \omega,$$

unde fit

$$A = -\sin. (\omega + n\varphi),$$

quo valore substituto partes reales dabunt

$$-\cos. \omega \sin. (\omega + n\varphi) + B = -\sin. \omega \cos. (\omega + n\varphi),$$

unde fit

$$B = \sin. n\varphi,$$

sicque fractio nostra erit

$$\frac{-v \sin. (\omega + n\varphi) + \sin. n\varphi}{n \sin. n\varphi}.$$ [1])

24. Nunc igitur tantum superest, ut ista formula multiplicetur per R, eius scilicet valorem, quem accipiet posito

$$vv - 2v \cos. \omega + 1 = 0.$$

Erat autem

$$R = v^{m-1}(\cos. m\varphi + v^n \cos. (m - n)\varphi),$$

quod posito $v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega$ abit in

$$\cos. m\varphi \cos. (m - 1)\omega + \cos. (m - n)\varphi \cos. (m + n - 1)\omega$$
$$+ \sqrt{-1} (\cos. m\varphi \sin. (m - 1)\omega + \cos. (m - n)\varphi \sin. (m + n - 1)\omega),$$

1) Vide notam 2 p. 19. G. F.

cuius loco, ut imaginaria extirpemus, scribamus $Cv + D$ sive

$$C\cos.\omega + D + \sqrt{-1}\cdot C\sin.\omega,$$

unde erit

$$C = \frac{\cos.m\varphi\sin.(m-1)\omega + \cos.(m-n)\varphi\sin.(m+n-1)\omega}{\sin.\omega}$$

et hinc

$$D = \frac{\cos.m\varphi\sin.(2-m)\omega + \cos.(m-n)\varphi\sin.(2-m-n)\omega}{\sin.\omega}.$$

25. Inventis nunc valoribus litterarum A, B, C, D erit numerator noster quaesitus $r = (Av + B)(Cv + D)$. Quia autem hic adhuc inest quadratum vv, eius loco scribendum restat $2v\cos.\omega - 1$ sicque erit valor iustus

$$r = 2ACv\cos.\omega - AC + (AD + BC)v + BD.$$

Consequenter pars integralis huic factori respondens pro variabili v erit

$$\int \frac{r\partial v}{1 - 2v\cos.\omega + vv}.$$

Simili modo pro altera variabili φ fractio partialis ex fractione

$$\frac{S}{1 - 2v^n\cos.n\varphi + v^{2n}}$$

derivari debet; quae si statuatur

$$\frac{s}{1 - 2v\cos.\omega + vv}$$

atque quantitas S redigatur ad formam $Ev + F$, simili modo reperietur

$$s = (Av + B)(Ev + F),$$

ubi autem insuper loco vv scribi debet $2v\cos.\omega - 1$, quo facto pro variabili φ habebitur formula

$$\int \frac{s\partial\varphi}{1 - 2v\cos.\omega + vv}.$$

26. Quodsi iam haec colligamus, pars integralis ex quolibet denominatoris factore $1 - 2v\cos.\omega + vv$ oriunda erit

$$\int \frac{r\partial v + s\partial\varphi}{1 - 2v\cos.\omega + vv};$$

ubi imprimis notandum est hic criterium notissimum[1]) circa integrabilitatem formularum duas variabiles involventium certe locum esse habiturum. Sufficiet autem plerumque alterutram tantum variabilem considerasse.

27. Hic quidem ad valorem litterae P inveniendum sufficere posset formula

$$\int \frac{r\partial v}{1 - 2v\cos.\omega + vv},$$

in qua sola v ut variabilis tractetur, cuius integrale, uti constat, per logarithmos et arcus circulares exhiberi potest. Interim tamen hoc idem integrale etiam erui debet ex altera formula

$$\int \frac{s\partial\varphi}{1 - 2v\cos.\omega + vv},$$

in qua solus angulus φ cum angulo ω ab eo pendente variabilis assumitur, quae integratio eo magis est notatu digna, quod plura multipla anguli φ in ea occurrunt neque adhuc methodus tales formulas tractandi satis est exculta. At vero haec nimis sunt generalia, quam ut ea, quae in iis sunt contenta, clare perspicere queamus; unde haud parum lucis nobis accendetur, si quosdam casus simplicissimos contemplabimur.

APPLICATIO AD FORMULAM DIFFERENTIALEM $\frac{\partial z}{1+z}$ UBI EST $m = 1$ ET $n = 1$

28. Cum huius formulae integrale sit $l(1+z)$, posito $z = x + y\sqrt{-1}$ seu potius, uti in genere fecimus,

---

1) Vide A. J. Lexell (1740—1784): *De criteriis integrabilitatis formularum differentialium*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 15 (1770), 1771, p. 127; confer porro L. Euleri *Institutionum calculi integralis* vol. tertium, Petropoli 1770, appendix § 95; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I$_{13}$, p. 411. G. F.

$$z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$$

integrale

$$l(1 + v\cos.\varphi + v\sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$$

evolvitur in formam

$$P + Q\sqrt{-1}$$

existente

$$P = l\sqrt{(1 + 2v\cos.\varphi + vv)}$$

et

$$Q = \text{A tang.}\frac{v\sin.\varphi}{1 + v\cos.\varphi}.$$

29. Nunc igitur eosdem valores per integrationem eruere conemur. Positis autem $m = n = 1$ formulae generales pro P et Q exhibitae sequentes induent formas

$$P = \int \frac{\partial v(\cos.\varphi + v) - v\partial\varphi\sin.\varphi}{1 + 2v\cos.\varphi + vv}$$

et

$$Q = \int \frac{\partial v\sin.\varphi + v\partial\varphi\cos.\varphi + vv\partial\varphi}{1 + 2v\cos.\varphi + vv},$$

ubi formula prior manifesto habet integrale

$$\frac{1}{2}l(1 + 2v\cos.\varphi + vv),$$

posterior vero integrale habet

$$\text{A tang.}\frac{v\sin.\varphi}{1 + v\cos.\varphi},$$

quemadmodum differentiatio manifesto declarat, ita ut hic non opus fuerit alterum angulum ω in calculum introducere.

APPLICATIO AD FORMULAM DIFFERENTIALEM $\frac{\partial z}{1+zz}$ UBI $m = 1$ ET $n = 2$

30. Hunc casum iam supra evolvimus, ubi vidimus posito $z = x + y\sqrt{-1}$ integrale esse

$$\text{A tang.}(x + y\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2x}{xx + yy - 1} + \frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{xx + (y+1)^2}{xx + (y-1)^2}.$$

Hinc ergo, si ponamus

$$x = v \cos. \varphi \quad \text{et} \quad y = v \sin. \varphi,$$

erit pro integrali $P + Q\sqrt{-1}$

$$P = -\frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v \cos. \varphi}{vv - 1} = \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v \cos. \varphi}{1 - vv}$$

et

$$Q = \frac{1}{4} l \frac{1 + 2v \sin. \varphi + vv}{1 - 2v \sin. \varphi + vv}.$$

Hos igitur valores videamus quemadmodum per integrationem eliciamus.

31. Cum igitur hic sit $m = 1$ et $n = 2$, formulae generales praebebunt

$$P = \int \frac{\partial v(1 + vv) \cos. \varphi - v \partial \varphi (1 - vv) \sin. \varphi}{1 + 2vv \cos. 2\varphi + v^4},$$

$$Q = \int \frac{\partial v(1 - vv) \sin. \varphi + v \partial \varphi (1 + vv) \cos. \varphi}{1 + 2vv \cos. 2\varphi + v^4},$$

ubi notetur denominatoris binos factores, ob

$\cos. 2\omega = -\cos. 2\varphi = \cos. (\pi \pm 2\varphi)$ hincque vel $\omega = 90^0 + \varphi$ vel $\omega = 90^0 - \varphi$, esse

$$1 + 2v \sin. \varphi + vv \quad \text{et} \quad 1 - 2v \sin. \varphi + vv.$$

Hinc ad resolutionem expediendam consideremus in genere fractionem

$$\frac{S}{1 + 2vv \cos. 2\varphi + v^4},$$

quam resolvi ponamus in has partes

$$\frac{F}{1 + 2v \sin. \varphi + vv} + \frac{G}{1 - 2v \sin. \varphi + vv},$$

ubi novimus hos numeratores ita definiri debere, ut sit

$$F = \frac{S}{1 - 2v \sin. \varphi + vv} \quad \text{posito} \quad 1 + 2v \sin. \varphi + vv = 0$$

et

$$G = \frac{S}{1 + 2v \sin. \varphi + vv} \quad \text{posito} \quad 1 - 2v \sin. \varphi + vv = 0.$$

32. Quoniam nunc tam pro P quam Q binas habemus partes, alteram per ∂v, alteram vero per $\partial\varphi$ datam, sit primo

$$S = (1 + vv)\cos.\varphi,$$

unde fit

$$F = \frac{(1 + vv)\cos.\varphi}{1 - 2v\sin.\varphi + vv} \quad \text{posito} \quad 1 + vv = -2v\sin.\varphi,$$

unde statim fit

$$F = \frac{-2v\sin.\varphi\cos.\varphi}{-4v\sin.\varphi} = \frac{1}{2}\cos.\varphi;$$

similique modo erit

$$G = \frac{(1 + vv)\cos.\varphi}{1 + 2v\sin.\varphi + vv} \quad \text{posito} \quad 1 + vv = +2v\sin.\varphi$$

sicque erit

$$G = +\frac{1}{2}\cos.\varphi;$$

quamobrem pro P pars integralis elementum ∂v continens erit

$$P = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos.\varphi}{1 + 2v\sin.\varphi + vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v\cos.\varphi}{1 - 2v\sin.\varphi + vv}.$$

33. Pro parte autem, ubi φ est variabile, habebimus

$$S = -v(1 - vv)\sin.\varphi,$$

unde fiet

$$F = \frac{-v(1 - vv)\sin.\varphi}{1 - 2v\sin.\varphi + vv} \text{ posito } 1 + vv = -2v\sin.\varphi \text{ ideoque } vv = -2v\sin.\varphi - 1,$$

unde fit

$$F = \frac{1}{2}(1 + v\sin.\varphi).$$

Simili modo erit

$$G = \frac{-v(1 - vv)\sin.\varphi}{1 + 2v\sin.\varphi + vv},$$

posito scilicet $1 + vv = 2v\sin.\varphi$, quo facto fit

$$G = -\frac{1}{2}(1 - v\sin.\varphi).$$

Hinc igitur valor completus quantitatis P ex utraque variabilitate erit

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{\partial v \cos.\varphi + (1 + v \sin.\varphi)\partial\varphi}{1 + 2v\sin.\varphi + vv} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial v \cos.\varphi - (1 - v\sin.\varphi)\partial\varphi}{1 - 2v\sin.\varphi + vv}.$$

34. Pari modo pro quantitate Q primo habemus

$$S = (1 - vv)\sin.\varphi$$

ideoque fiet

$$F = \frac{(1 - vv)\sin.\varphi}{1 - 2v\sin.\varphi + vv} \quad \text{posito} \quad 1 + vv = -2v\sin.\varphi,$$

unde fit

$$F = -\frac{1 + v\sin.\varphi}{2v}.$$

Hic autem v ex denominatore extrudere oportet; quem in finem multiplicetur supra et infra per $v + 2\sin.\varphi$, ut denominator fiat $2(vv + 2v\sin.\varphi) = -2$; numerator autem tunc erit

$$vv\sin.\varphi + v + 2v\sin.\varphi^2 + 2\sin.\varphi$$

ideoque

$$F = \frac{1}{2}(v + \sin.\varphi).$$

Simili modo erit

$$G = \frac{(1 - vv)\sin.\varphi}{1 + 2v\sin.\varphi + vv}, \quad \text{posito scilicet} \quad 1 + vv = 2v\sin.\varphi,$$

quo facto fit

$$G = \frac{1 - vv}{4v}$$

et ob $1 = 2v\sin.\varphi - vv$ erit

$$G = \frac{1}{2}(\sin.\varphi - v).$$

Sicque pars prior pro Q variabilem v continens erit

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{\partial v(v + \sin.\varphi)}{1 + 2v\sin.\varphi + vv} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial v(\sin.\varphi - v)}{1 - 2v\sin.\varphi + vv}$$

Pro altera vero parte variabilem φ habente erit

$$S = v(1 + vv)\cos.\varphi$$

hincque colligitur

$$F = \frac{v(1+vv)\cos.\varphi}{1-2v\sin.\varphi+vv} \text{ posito } 1+2v\sin.\varphi+vv=0 \text{ sive } 1+vv=-2v\sin.\varphi,$$

unde fit

$$F = \frac{1}{2}v\cos.\varphi;$$

tum vero erit

$$G = \frac{v(1+vv)\cos.\varphi}{1+2v\sin.\varphi+vv} \quad \text{posito} \quad 1+vv=+2v\sin.\varphi$$

ideoque

$$G = \frac{1}{2}v\cos.\varphi$$

sicque valor completus ipsius Q erit

$$Q = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(v+\sin.\varphi)+v\partial\varphi\cos.\varphi}{1+2v\sin.\varphi+vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(\sin.\varphi-v)+v\partial\varphi\cos.\varphi}{1-2v\sin.\varphi+vv}.$$

35. Incipiamus ab evolutione posterioris valoris Q, utpote facillima, quoniam in utraque formula numerator manifesto est dimidium differentiale denominatoris, unde statim obtinetur

$$Q = \frac{1}{4}l\frac{1+2v\sin.\varphi+vv}{1-2v\sin.\varphi+vv},$$

qui valor prorsus congruit cum supra dato. Pro littera P autem notetur esse

$$\int\frac{f\partial v}{1-2v\cos.\omega+vv} = \frac{f}{\sin.\omega}\text{ A tang.}\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega},$$

unde, cum nostro casu pro parte priore sit

$$f=\cos.\varphi, \quad \cos.\omega=-\sin.\varphi \quad \text{et} \quad \sin.\omega=\cos.\varphi,$$

erit

$$\int\frac{\partial v\cos.\varphi}{1+2v\sin.\varphi+vv} = \text{A tang.}\frac{v\cos.\varphi}{1+v\sin.\varphi},$$

si quidem angulus φ ut constans tractetur. At vero ex eius variabilitate non prodit altera pars, quae est

$$\int \frac{\partial\varphi(1+v\sin.\varphi)}{1+2v\sin.\varphi+vv},$$

sed eius loco differentiatio praebet

$$\frac{-v\partial\varphi\sin.\varphi-vv\partial\varphi}{1+2v\sin.\varphi+vv}.$$

In hunc ergo dissensum accuratius inquiri conveniet.

36. Primo quidem nullum est dubium, quin differentiatio formulae

$$\text{A tang.}\frac{v\cos.\varphi}{1+v\sin.\varphi}$$

praebeat partem priorem; sed idem contingeret, si constans quaecunque adiiceretur; quare cum in hac integratione angulus φ pro constante sit habitus, ista constans utique adhuc ipsum angulum φ continere potest. Hanc ob rem in genere statuamus integrale quaesitum esse

$$\text{A tang.}\frac{v\cos.\varphi}{1+v\sin.\varphi}+\int\Phi\partial\varphi$$

existente Φ functione ipsius φ, et iam huius formulae differentiale posito v constante erit

$$\frac{-v\partial\varphi\sin.\varphi-vv\partial\varphi}{1+2v\sin.\varphi+vv}+\Phi\partial\varphi=\partial\varphi(\Phi+2v\Phi\sin.\varphi+\Phi vv-v\sin.\varphi-vv);$$

ubi si sumatur $\Phi=1$, ipsum nostrum differentiale prodit

$$\frac{\partial\varphi(1+v\sin.\varphi)}{1+2v\sin.\varphi+vv},$$

ita ut ista pars sit

$$\text{A tang.}\frac{v\cos.\varphi}{1+v\sin.\varphi}+\varphi=\text{A tang.}\frac{v\cos.\varphi}{1+v\sin.\varphi}+\text{A tang.}\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

qui duo arcus contracti praebent

$$\text{A tang.}\frac{\text{sin.}\,\varphi + v}{\text{cos.}\,\varphi}$$

haecque formula differentiata ipsum producit integrale datum.

37. Pro altera autem parte ipsius P, quae est

$$\int \frac{\partial v \,\text{cos.}\,\varphi - (1 - v\,\text{sin.}\,\varphi)\partial\varphi}{1 - 2v\,\text{sin.}\,\varphi + vv},$$

cum haec forma a priore tantum in hoc discrepet, quod angulus φ sit negative sumtus, idem discrimen in integrali introductum dabit

$$\text{A tang.}\frac{v - \text{sin.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi}.$$

Sicque completus valor quantitatis P erit

$$P = \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{v + \text{sin.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi} + \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{v - \text{sin.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi},$$

qui duo arcus in unum contracti dabunt

$$P = \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\frac{2v\,\text{cos.}\,\varphi}{1 - vv},$$

qui valor pariter perfecte congruit cum supra dato.

APPLICATIO
AD CASUM QUO $m = 1$ ET $n = 3$ SEU FORMULAM DIFFERENTIALEM
$\frac{\partial z}{1 + z^3}$

38. Quodsi hic ponatur

$$z = \text{cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}\cdot\text{sin.}\,\varphi$$

et integrale inde resultans statuatur

$$\int \frac{\partial z}{1+z^3} = P + Q\sqrt{-1},$$

ex formulis generalibus supra datis erit

$$P = \int \frac{\partial v\,(\cos.\varphi + v^3 \cos.2\varphi) - v\partial\varphi\,(\sin.\varphi - v^3 \sin.2\varphi)}{1 + 2v^3\cos.3\varphi + v^6}$$

et

$$Q = \int \frac{\partial v\,(\sin.\varphi - v^3 \sin.2\varphi) + v\partial\varphi\,(\cos.\varphi + v^3 \cos.2\varphi)}{1 + 2v^3\cos.3\varphi + v^6}.$$

39. Hic igitur denominator tres habebit factores trinomiales; quorum forma si ponatur $1 - 2v\cos.\omega + vv$, debet esse $\cos.3\omega = -\cos.3\varphi$. Aequabitur ergo 3ω vel $\pi + 3\varphi$ vel $\pi - 3\varphi$ vel $3\pi - 3\varphi$, unde ergo oriuntur hi tres valores ipsius ω:

$$\omega = 60^0 + \varphi, \quad \omega = 60^0 - \varphi, \quad \omega = 180^0 - \varphi.$$

Nunc igitur in genere consideremus hanc fractionem

$$\frac{S}{1 + 2v^3\cos.3\varphi + v^6},$$

cuius una fractio partialis sit

$$\frac{F}{1 - 2v\cos.\omega + vv};$$

atque, ut supra animadvertimus, valorem ipsius F derivari oportet ex forma

$$\frac{S(1 - 2v\cos.\omega + vv)}{1 + 2v^3\cos.3\varphi + v^6},$$

si statuatur $1 - 2v\cos.\omega + vv = 0$; tum autem ista fractio reducetur ad hanc formam

$$\frac{S(vv - v\cos.\omega)}{3v^6 + 3v^3\cos.3\varphi}.$$

Cum autem sit

$$v^6 = -2v^3\cos.3\varphi - 1,$$

denominator erit

$$-3(v^3\cos.3\varphi + 1),$$

numerator vero

$$S(v \cos. \omega - 1),$$

sicque fractio resolvenda erit

$$\frac{S(1 - v \cos. \omega)}{3(v^3 \cos. 3\varphi + 1)} = F,$$

postquam scilicet ex denominatore quantitas v fuerit elisa.

40. Quoniam igitur per hypothesin habemus

$$v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega,$$

erit

$$v^3 = \cos. 3\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. 3\omega,$$

ubi notetur esse

$$\cos. 3\omega = -\cos. 3\varphi;$$

tum vero erit

$$\sin. 3\omega = \pm \sin. 3\varphi.$$

Scilicet pro primo valore, quo $\omega = 60^0 + \varphi$ sive $3\omega = 180^0 + 3\varphi$, erit $\sin. 3\omega = -\sin. 3\varphi$; pro secundo valore, quo $3\omega = 180^0 - 3\varphi$, erit $\sin. 3\omega = +\sin. 3\varphi$; pro tertio casu, quo $3\omega = 3\pi - 3\varphi$, erit etiam $\sin. 3\omega = +\sin. 3\varphi$. Hoc autem valore posito denominator noster erit

$$3(-\cos. 3\varphi^2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sin. 3\varphi \cos. 3\varphi + 1),$$

ubi signum superius valet pro valore tertio et secundo anguli ω, inferius autem pro primo. Hic denominator etiam hoc modo concinnius exprimi potest

$$3 \sin. 3\varphi (\sin. 3\varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \cos. 3\varphi).$$

41. Nunc igitur tam numeratorem quam denominatorem ducamus in $\sin. 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos. 3\varphi$ eritque

$$F = \frac{S(1 - v \cos. \omega)(\sin. 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos. 3\varphi)}{3 \sin. 3\varphi}.$$

At si etiam loco v scribamus $\cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega$, fiet

$$F = \frac{S \sin. \omega (\sin. \omega - \sqrt{-1} \cdot \cos. \omega)(\sin. 3\varphi \mp \sqrt{-1} \cdot \cos. 3\varphi)}{3 \sin. 3\varphi}.$$

Hinc si bini factores imaginarii numeratoris in se invicem ducantur, reperietur

$$F = \frac{S \sin.\omega\,(\mp\cos.(\omega \pm 3\varphi) \mp \sqrt{-1}\cdot\sin.(\omega \pm 3\varphi))}{3\sin.3\varphi},$$

ubi imaginaria non amplius curamus, quoniam, uti supra vidimus, introducendo litteram v, ea rursus tollere licet.

41a.[1]) Nunc autem pro S quatuor habemus valores ad binas litteras P et Q definiendas. Primo enim pro P et elemento ∂v erit

$$S = \cos.\varphi + v^3\cos.2\varphi,$$

ubi loco v^3 scribamus valorem iam ante usurpatum $-\cos.3\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi$, unde fiet

$$\begin{aligned} S &= \cos.\varphi - \cos.3\varphi\cos.2\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi\cos.2\varphi \\ &= \sin.3\varphi\,(\sin.2\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\cos.2\varphi), \end{aligned}$$

sicque erit valor noster

$$F = \frac{1}{3}\sin.\omega\,(\sin.2\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\cos.2\varphi)\,(\mp\cos.(\omega \pm 3\varphi) \mp \sqrt{-1}\cdot\sin.(\omega \pm 3\varphi)),$$

qui valor pro signis superioribus erit

$$F = +\frac{1}{3}\sin.\omega\,(\sin.(\omega+\varphi) - \sqrt{-1}\cdot\cos.(\omega+\varphi))^2),$$

at pro signis inferioribus prodit

$$F = +\frac{1}{3}\sin.\omega\,(\sin.(\omega-\varphi) - \sqrt{-1}\cdot\cos.(\omega-\varphi)).$$

---

1) In editione principe numerus 41 per errorem iteratur. G. F.

2) Editio princeps:

$$F = -\frac{1}{3}\sin.\omega\,(\sin.(\omega+\varphi) + \sqrt{-1}\cdot\cos.(\omega+\varphi)),$$

unde formula definitiva falso:

$$F = -\frac{1}{3}v\cos.(\omega+\varphi) + \frac{1}{3}\cos.(2\omega+\varphi).$$

Correxit A. L.

42. Nunc autem necesse est imaginaria hinc secludi, ad quod efficiendum statuamus

$$\sin.(\omega+\varphi)-\sqrt{-1}\cdot\cos.(\omega+\varphi)=Av+B$$
$$=A\cos.\omega+B+\sqrt{-1}\cdot A\sin.\omega,$$

unde manifesto deducitur

$$A=-\frac{\cos.(\omega+\varphi)}{\sin.\omega}\quad\text{et}\quad B=\frac{\cos.\varphi}{\sin.\omega},$$

sicque habebimus pro priore casu

$$F=-\frac{1}{3}v\cos.(\omega+\varphi)+\frac{1}{3}\cos.\varphi,$$

pro posteriore vero

$$A=-\frac{\cos.(\omega-\varphi)}{\sin.\omega}\quad\text{et}\quad B=\frac{\cos.\varphi}{\sin.\omega}$$

ideoque

$$F=-\frac{1}{3}v\cos.(\omega-\varphi)+\frac{1}{3}\cos.\varphi.$$

Verum non opus est ulterius progredi, quoniam evolutio horum casuum specialium nobis iam viam sternit ad formam generalem evolvendam, quam ergo in sequente problemate prosequemur.

PROBLEMA GENERALE

Si ponatur $z=v(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$, *investigare integrale huius formulae*

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}.$$

SOLUTIO

43. Cum ob valorem ipsius z imaginarium integrale quaesitum pariter esse debeat imaginarium, id sub forma $P+Q\sqrt{-1}$ complectamur, ita ut P et Q sint quantitates reales; hanc ob rem erit facta substitutione indicata

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}=P+Q\sqrt{-1}.$$

44. Cum porro sit

$$z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi),$$

erit

$$z^n = v^n(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi)$$

et

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}.$$

Hinc igitur formula proposita abibit in hanc

$$\frac{v^m(\cos.m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.m\varphi)\left(\frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}\right)}{1 + v^n(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi)},$$

ubi pro sequente ratiocinio notetur denominatorem evanescere, si ponatur

$$v^n = -\frac{1}{\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi} = -\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi.$$

Nunc vero ut denominator ab imaginariis liberetur, supra et infra multiplicetur per $1 + v^n(\cos.n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi)$ et formula differentialis, quam per ∂V designemus, erit

$$\partial V = \frac{v^m(\cos.m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.m\varphi)\left(\frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}\right)(1 + v^n(\cos.n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi))}{1 + 2v^n\cos.n\varphi + v^{2n}}.$$

Numerator autem reduci potest ad hanc formam

$$v^m\left(\frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}\right)(\cos.m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.m\varphi + v^n(\cos.(m-n)\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.(m-n)\varphi)),$$

cuius partes reales et imaginariae ita a se invicem segregabuntur, ut sit pars realis

$$v^{m-1}\partial v(\cos.m\varphi + v^n\cos.(m-n)\varphi) - v^m\partial\varphi(\sin.m\varphi + v^n\sin.(m-n)\varphi),$$

pars vero imaginaria per $\sqrt{-1}$ divisa

$$v^{m-1}\partial v(\sin.m\varphi + v^n\sin.(m-n)\varphi) + v^m\partial\varphi(\cos.m\varphi + v^n\cos.(m-n)\varphi).$$

45. Ponamus nunc brevitatis gratia

$$R = \cos. m\varphi + v^n \cos. (m - n)\varphi$$

et

$$S = \sin. m\varphi + v^n \sin. (m - n)\varphi,$$

et ambae quantitates quaesitae P et Q per sequentes formulas integrales exprimentur:

$$P = \int \frac{Rv^{m-1}\partial v - Sv^m \partial\varphi}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}$$

et

$$Q = \int \frac{Sv^{m-1}\partial v + Rv^m \partial\varphi}{1 + 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}.$$

Totum negotium ergo huc redit, ut primo denominatoris factores trinomiales investigentur, tum vero ex singulis fractiones partiales eruantur.

46. Ponamus igitur denominatoris factorem quemcunque esse

$$1 - 2v \cos. \omega + vv$$

atque necesse erit, ut posito $1 - 2v \cos. \omega + vv = 0$ etiam denominator evanescat, id quod ante iam animadvertimus fieri casu

$$v^n = -\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi.$$

At vero cum sit $v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega$, erit hinc

$$v^n = \cos. n\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\omega,$$

unde manifestum est esse debere

$$\cos. n\omega = -\cos. n\varphi \quad \text{et} \quad \sin. n\omega = +\sin. n\varphi.$$

Hinc patet angulorum $n\omega$ et $n\varphi$ summam aequari debere angulo $i\pi$ denotante i numerum imparem quemcunque, ita ut $n\omega = i\pi - n\varphi$ ideoque

$$\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi.$$

Evidens autem est hoc modo pro ω tot diversos valores reperiri, quot exponens n habet unitates. Singuli enim isti valores prodibunt, si loco i su-

mantur numeri impares 1, 3, 5, 7 etc. usque ad $2n-1$; quamobrem singuli isti factores totidem producunt fractiones partiales idque pro singulis partibus, quibus litterae P et Q exprimuntur.

47. Ad hanc resolutionem instituendam consideremus in genere fractionem

$$\frac{N}{1+2v^n\cos.n\varphi+v^{2n}},$$

unde pro factore $1-2v\cos.\omega+vv$ oriatur fractio partialis

$$=\frac{F}{1-2v\cos.\omega+vv},$$

reliquae vero partes omnes designentur per Ω, ita ut sit

$$\frac{N}{1+2v^n\cos.n\varphi+v^{2n}}=\frac{F}{1-2v\cos.\omega+vv}+\Omega,$$

unde colligimus

$$F=\frac{N(1-2v\cos.\omega+vv)}{1+2v^n\cos.n\varphi+v^{2n}}-\Omega(1-2v\cos.\omega+vv).$$

Ex quo intelligitur valorem ipsius F ex sola parte priore elici posse, si statuatur $1-2v\cos.\omega+vv=0$. At vero tum prioris partis tam numerator quam denominator evanescet, unde secundum regulam notissimam [1]) differentialia substitui debent, quo facto fiet

$$F=\frac{N(2v-2\cos.\omega)}{2nv^{2n-1}+2nv^{n-1}\cos.n\varphi}=\frac{N(v-\cos.\omega)}{nv^{n-1}(v^n+\cos.n\varphi)}.$$

48. Cum autem casu, quo ista evanescentia numeratoris et denominatoris evenit, sit

$$v=\cos.\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin.\omega$$

et

$$v^n=-\cos.n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi,$$

his valoribus substitutis fiet

$$F=\frac{N\sin.\omega}{nv^{n-1}\sin.n\varphi}=\frac{Nv\sin.\omega}{nv^n\sin.n\varphi}.$$

---

1) Vide notam 1 p. 19. G. F.

Nunc igitur tantum opus est, ut loco N diversae partes, quae supra in numeratoribus formularum P et Q occurrerunt, substituantur hincque ope aequationis $vv - 2v\cos.\omega + 1 = 0$ singulae expressiones infra secundam potestatem ipsius v deprimantur.

49. Hunc in finem in usum vocetur sequens lemma:

Si fuerit

$$vv - 2v\cos.\omega + 1 = 0,$$

semper erit

$$v^\lambda \sin.\omega = v\sin.\lambda\omega - \sin.(\lambda - 1)\omega,$$

cuius veritas haud difficulter demonstratur. Tantum autem opus est, ut pro littera N gemini valores evolvantur, qui sunt $N = Rv^{m-1}$ et $N = Sv^{m-1}$, quibus deinceps adiungi debebit sive ∂v sive $v\partial\varphi$. Sit igitur primo

$$N = Rv^{m-1} = v^{m-1}\cos.m\varphi + v^{m+n-1}\cos.(m-n)\varphi$$

eritque

$$F = \frac{v^{m-n}\sin.\omega\cos.m\varphi + v^m\sin.\omega\cos.(m-n)\varphi}{n\sin.n\varphi},$$

ubi secundum lemma habebimus

$$v^{m-n}\sin.\omega = v\sin.(m-n)\omega - \sin.(m-n-1)\omega$$

et

$$v^m\sin.\omega = v\sin.m\omega - \sin.(m-1)\omega,$$

unde ergo conficitur

$$F = \frac{1}{n\sin.n\varphi}\left\{\begin{array}{l} +v\sin.(m-n)\omega\cos.m\varphi - \sin.(m-n-1)\omega\cos.m\varphi \\ +v\sin.m\omega\cos.(m-n)\varphi - \sin.(m-1)\omega\cos.(m-n)\varphi \end{array}\right\}.$$

50. In hac expressione littera v ducitur in formulam

$$\sin.(m-n)\omega\cos.m\varphi + \cos.(m-n)\varphi\sin.m\omega,$$

pro cuius resolutione notetur esse

$$\cos.n\omega = -\cos.n\varphi \quad \text{et} \quad \sin.n\omega = +\sin.n\varphi,$$

hincque fiet

$$\sin.(m-n)\omega = -\sin.m\omega\cos.n\varphi - \cos.m\omega\sin.n\varphi,$$

tum vero

$$\cos.(m-n)\varphi = \cos. m\varphi \cos. n\varphi + \sin. m\varphi \sin. n\varphi,$$

quibus valoribus substitutis quantitas litteram v afficiens erit

$$-\sin. n\varphi \cos. m(\omega+\varphi).$$

Hinc autem pars reliqua oritur, si mutato signo loco $m\omega$ scribatur $(m-1)\omega$, sicque integer valor quaesitus erit

$$F = -\frac{1}{n} v \cos. m(\omega+\varphi) + \frac{1}{n}\cos.((m-1)\omega + m\varphi).$$

51. Supra autem vidimus esse $\omega+\varphi = \frac{i\pi}{n}$ ideoque $m(\omega+\varphi) = \frac{mi\pi}{n}$, cuius loco scribamus ζ, quo facto pro casu praesente, quo $N = Rv^{m-1}$, fractionis quaesitae numerator erit

$$F = -\frac{1}{n}(v\cos.\zeta - \cos.(\zeta-\omega)),$$

quem igitur duplici modo adhiberi convenit; namque pro littera P is multiplicari debet per ∂v, pro littera Q vero per $v\partial\varphi$.

52. Simili modo pro casu

$$N = Sv^{m-1} = v^{m-1}\sin. m\varphi + v^{m+n-1}\sin.(m-n)\varphi$$

oritur

$$F = \frac{v^{m-n}\sin.\omega\sin. m\varphi + v^m\sin.\omega\sin.(m-n)\varphi}{n\sin. n\varphi}.$$

Iam loco potestatum ipsius v scribamus valores supra assignatos ac prodibit

$$F = \frac{1}{n\sin. n\omega}\left\{\begin{array}{l} v\sin. m\varphi\sin.(m-n)\omega - \sin. m\varphi\sin.(m-n-1)\omega \\ +v\sin.(m-n)\varphi\sin. m\omega - \sin.(m-n)\varphi\sin.(m-1)\omega \end{array}\right\}.$$

Cum iam sit

$$\sin.(m-n)\omega = -\sin. m\omega\cos. n\varphi - \cos. m\omega\sin. n\varphi$$

et

$$\sin.(m-n)\varphi = \sin. m\varphi\cos. n\varphi - \cos. m\varphi\sin. n\varphi,$$

littera v affecta est hac quantitate

$$-\sin. n\varphi \sin. (\varphi + \omega) m = -\sin. n\varphi \sin. \zeta,$$

unde integer valor erit

$$F = -\frac{1}{n}(v \sin. \zeta - \sin. (\zeta - \omega)),$$

qui valor pro P duci debet in $-v\partial\varphi$, pro Q autem in $+\partial v$.

53. His igitur valoribus inventis singuli anguli ω, quorum numerus est $= n$, dabunt totidem partes pro quantitatibus quaesitis P et Q, scilicet valor $\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi$ existente $\frac{mi\pi}{n} = \zeta$ dabit[1])

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v (v \cos. \xi - \cos. (\xi - \omega)) - v\partial\varphi (v \sin. \xi - \sin. (\xi - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}$$

et

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v (v \sin. \xi - \sin. (\xi - \omega)) + v\partial\varphi (v \cos. \xi - \cos. (\xi - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}.$$

Ubi quidem $\partial\varphi$ adhuc multiplicatur per vv, cuius loco scribi posset $2v \cos. \omega - 1$; verum omissa hac substitutione nullus error committitur.

54. Videamus nunc, quomodo ipsa harum formularum integratio institui queat. Ac primo quidem angulum φ pro constante habeamus, ut sit

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v (v \cos. \xi - \cos. (\xi - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}$$

et

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v (v \sin. \xi - \sin. (\xi - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}.$$

Ponatur igitur

$$M = \int \frac{\partial v (v \cos. \xi - \cos. (\xi - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}$$

eritque

---

1) Notandum est per has formulas non totas quantitates P et Q exhiberi, sed solam unam earum partem. A. L.

$$M - \cos.\zeta\, lV(1 - 2v\cos.\omega + vv)$$
$$= \int \frac{\partial v\,(v\cos.\xi - \cos.(\xi-\omega))}{1-2v\cos.\omega+vv} - \int \frac{(v\cos.\xi - \cos.\xi\cos.\omega)\,\partial v}{1-2v\cos.\omega+vv}$$
$$= \int \frac{\partial v\,(\cos.\xi\cos.\omega - \cos.(\xi-\omega))}{1-2v\cos.\omega+vv} = -\int \frac{\partial v\sin.\xi\sin.\omega}{1-2v\cos.\omega+vv}$$

sicque integrale erit

$$-\sin.\zeta\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega}$$

ideoque

$$M = \cos.\zeta\, lV(1-2v\cos.\omega+vv) - \sin.\zeta\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega};$$

consequenter habebimus

$$P = -\frac{\cos.\xi}{n}\, lV(1-2v\cos.\omega+vv) + \frac{\sin.\xi}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega}.$$

55. Hoc valore ex sola variabilitate ipsius v orto videamus, quomodo cum angulo variabili φ consistat. Hunc in finem differentiemus hanc ipsam formulam inventam statuendo solum angulum ω variabilem, siquidem $\partial\omega = -\partial\varphi$ ob angulum ζ constantem, eritque differentiale

$$-\frac{1}{n}\,\frac{-v\partial\varphi\sin.\omega\cos.\xi + v\partial\varphi\,(\cos.\omega - v)\sin.\xi}{1-2v\cos.\omega+vv} = \frac{1}{n}\,\frac{(v\sin.\xi - \sin.(\xi-\omega))\,v\partial\varphi}{1-2v\cos.\omega+vv},$$

quod prorsus convenit cum forma proposita, ita ut iustus valor pro P sit

$$P = -\frac{\cos.\xi}{n}\, lV(1-2v\cos.\omega+vv) + \frac{\sin.\xi}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega}.$$

56. Eodem modo procedamus pro valore Q sitque

$$M = \int \frac{\partial v\,(v\sin.\xi - \sin.(\xi-\omega))}{1-2v\cos.\omega+vv}$$

eritque

$$M - \sin.\zeta\, lV(1-2v\cos.\omega+vv)$$
$$= \int \frac{\partial v\,(v\sin.\xi - \sin.(\xi-\omega))}{1-2v\cos.\omega+vv} - \int \frac{(v\sin.\xi - \cos.\omega\sin.\xi)\,\partial v}{1-2v\cos.\omega+vv}$$
$$= \int \frac{\partial v\cos.\xi\sin.\omega}{1-2v\cos.\omega+vv} = \cos.\zeta\ \text{A tang.}\,\frac{v\sin.\omega}{1-v\cos.\omega},$$

unde manifesto colligitur

$$Q = -\frac{\sin.\,\xi}{n}\,lV(1-2v\cos.\,\omega+vv) - \frac{\cos.\,\xi}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\,\omega}{1-v\cos.\,\omega},$$

quae expressio variabilitati ipsius φ etiam est consentanea.

57. Nunc igitur casum formulae $\int\frac{\partial z}{1+z^3}$, quem iam bis frustra sumus aggressi, facile expedire licebit. Cum enim hic sit $m=1$ et $n=3$, pro littera i tres sumi debebunt valores 1, 3 et 5, unde pro nostris formulis integralibus sequentes valores emergunt:

i	1	3	5
ω	$60^0-\varphi$	$180^0-\varphi$	$300^0-\varphi$
sin. ω	sin. $(60^0-\varphi)$	sin. φ	$-$ sin. $(60^0+\varphi)$
cos. ω	cos. $(60^0-\varphi)$	$-$ cos. φ	cos. $(60^0+\varphi)$
ζ	60^0	180^0	300^0
sin. ζ	$\frac{V3}{2}$	0	$-\frac{V3}{2}$
cos. ζ	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

58. Ex his iam ternis valoribus tam pro P quam Q ternas partes adipiscemur, quae erunt:

Pro P

Pars I. $$-\frac{1}{6}\,lV(1-2v\cos.\,(60^0-\varphi)+vv)+\frac{1}{2V3}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\,(60^0-\varphi)}{1-v\cos.\,(60^0-\varphi)},$$

Pars II. $$+\frac{1}{3}\,lV(1+2v\cos.\,\varphi+vv)\qquad+0,$$

Pars III. $$-\frac{1}{6}\,lV(1-2v\cos.\,(60^0+\varphi)+vv)+\frac{1}{2V3}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sin.\,(60^0+\varphi)}{1-v\cos.\,(60^0+\varphi)}.$$

Ubi notasse iuvabit partem primam et tertiam ita coniunctim exprimi posse

$$-\frac{1}{12}\,l\left(1-2v\cos.\,\varphi+2vv\left(\frac{1}{2}+\cos.\,2\varphi\right)-2v^3\cos.\,\varphi+v^4\right)$$
$$+\frac{1}{2V3}\,\text{A tang.}\,\frac{2v\cos.\,\varphi\,V3-vvV3}{2-2v\cos.\,\varphi-vv}.$$

Pro Q

Pars I. $$-\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0-\varphi)+vv)}-\frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0-\varphi)}{1-v\cos.(60^0-\varphi)},$$

Pars II. $$-0\qquad\qquad+\frac{1}{3}\text{A tang.}\frac{v\sin.\varphi}{1+v\cos.\varphi},$$

Pars III. $$+\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0+\varphi)+vv)}+\frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0+\varphi)}{1-v\cos.(60^0+\varphi)}.$$

Hic iterum partes prima et tertia contrahi possent, sed praestabit formulis primo inventis uti. Hinc iam istam tractationem sequenti Theoremate concludemus.

THEOREMA

59. *Posito*

$$z=v(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$$

si statuatur

$$\int\frac{\partial z}{1+z^3}=P+Q\sqrt{-1},$$

hae quantitates P et Q ita exprimentur

$$P=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{6}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0-\varphi)+vv)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0-\varphi)}{1-v\cos.(60^0-\varphi)}\\+\frac{1}{3}l\sqrt{(1+2v\cos.\varphi+vv)}\\-\frac{1}{6}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0+\varphi)+vv)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0+\varphi)}{1-v\cos.(60^0+\varphi)}\end{array}\right\},$$

$$Q=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0-\varphi)+vv)}-\frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0-\varphi)}{1-v\cos.(60^0-\varphi)}\\+\frac{1}{3}\text{A tang.}\frac{v\sin.\varphi}{1+v\cos.\varphi}\\+\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1-2v\cos.(60^0+\varphi)+vv)}+\frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0+\varphi)}{1-v\cos.(60^0+\varphi)}\end{array}\right\}.$$

COROLLARIUM 1

60. Si ergo sumamus angulum $\varphi=0$, ut fiat $z=v$, pro formula integrali

$$\int\frac{\partial v}{1+v^3}=P+Q\sqrt{-1}$$

erit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} l\sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\frac{1}{3} l(1 + v) \\ -\frac{1}{6} l\sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 - v + vv)} - \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{array} \right\}.$$

Sicque erit $Q = 0$, uti natura rei postulat. Nam quia ipsa formula integranda est realis, etiam integrale partem imaginariam continere nequit. Ceterum ipsum hoc integrale satis est notum.

COROLLARIUM 2

61. Consideremus etiam casum, quo $\varphi = 90^0$ ideoque $z = v\sqrt{-1}$, et formula integranda erit

$$\int \frac{\partial v\sqrt{-1}}{1 - v^3\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1};$$

quantitates vero P et Q ita exprimentur:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} l\sqrt{(1 - v\sqrt{3} + vv)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v}{2 - v\sqrt{3}} \\ +\frac{1}{3} l\sqrt{(1 + vv)} \\ -\frac{1}{6} l\sqrt{(1 + v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v}{2 + v\sqrt{3}} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 - v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v}{2 - v\sqrt{3}} \\ \qquad + \frac{1}{3} \text{A tang.} v \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 + v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v}{2 + v\sqrt{3}} \end{array} \right\}.$$

COROLLARIUM 3

62. Praeterea vero etiam casus memoratu dignus occurrit, quo $\varphi = 60^0$ ideoque $z = \frac{v}{2} + \frac{v\sqrt{-3}}{2}$ et $z^3 = -v^3$, ita ut formula integranda sit

$$\frac{\partial v(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})}{1 - v^3};$$

tum igitur erit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} l(1-v) \\ +\frac{1}{3} l\sqrt{(1+v+vv)} \\ -\frac{1}{6} l\sqrt{(1+v+vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2+v} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sqrt{3}} l(1-v) \\ +\frac{1}{3} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2+v} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1+v+vv)} + \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v\sqrt{3}}{2+v} \end{array} \right\},$$

ubi manifesto $P : Q = 1 : \sqrt{3}$, prorsus uti natura rei postulat.

SUPPLEMENTUM AD DISSERTATIONEM PRAECEDENTEM CIRCA INTEGRATIONEM FORMULAE

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$$

CASU QUO PONITUR

$$z = v\,(\cos.\,\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\varphi)$$

Commentatio 657 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1789), 1793, p. 134—148
Summarium ibidem p. 43—44

SUMMARIUM

Dans un Supplément M. Euler continue ces recherches, en appliquant sa méthode, un peu simplifiée, à la formule

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n},$$

pour l'intégration de laquelle il donne deux méthodes différentes, dont la dernière cependant a, de son propre aveu, le défaut d'être fondée sur une simple conjecture qu'il est difficile de mettre en évidence, mais qui néanmoins conduit à un résultat parfaitement conforme tant à la solution générale rigoureusement démontrée, qu'aux cas particuliers qui en dérivent. Cet accord, qui ne sçauroit être l'effet d'un pur hazard, engage l'Auteur à recommander sa derniere solution à l'attention des Géomètres, en les invitant à l'établir sur des principes sûrs et inexpugnables.

1. Resolutio formulae

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n},$$

quam supra in problemate pro casu, quo $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$, dedimus, eximia et notatu dignissima artificia complectitur, quae animo firmius imprimere haud inutile erit. Cum igitur formula, quam hic tractandam suscipimus, non minore attentione sit digna quam ea, quam supra tractavimus, eius integrale per eandem methodum exhibere constitui; ubi simul occasionem inveniemus novum compendium in calculo adhibendi.

PROBLEMA

Si ponatur $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$, *investigare integrale huius formulae*

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}.$$

SOLUTIO

2. Cum ob valorem ipsius z imaginarium integrale quaesitum etiam esse debeat imaginarium, id sub forma $P + Q\sqrt{-1}$ complectamur, ita ut P et Q sint quantitates reales. Hanc ob rem erit facta substitutione

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n} = P + Q\sqrt{-1}.$$

3. Cum porro sit $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$ hincque

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1},$$

erit numerator

$$z^{m-1}\partial z = v^m(\cos.m\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.m\varphi)\left(\frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}\right),$$

denominator vero erit

$$1 - v^n(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi),$$

qui ergo evanescit ponendo

$$v^n = \frac{1}{\cos. n\varphi + \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi} = \cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi.$$

4. Iam ut imaginaria ex denominatore tollantur, supra et infra multiplicemus per

$$1 - v^n(\cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi)$$

sicque fractio nostra evolvenda erit

$$\partial V = \frac{z^{m-1}\partial z(1 - v^n \cos. n\varphi + v^n\sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi)}{1 - 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}.$$

Quodsi iam hic loco $z^{m-1}\partial z$ valor modo assignatus substituatur et partes reales ab imaginariis segregentur, ob

$$(\cos. m\varphi + \sqrt{-1}\cdot \sin. m\varphi)(\cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi)$$
$$= \cos. (m-n)\varphi + \sqrt{-1}\cdot \sin. (m-n)\varphi$$

prodibit pars realis ita expressa

$$v^{m-1}\partial v(\cos. m\varphi - v^n \cos. (m-n)\varphi) - v^m \partial\varphi(\sin. m\varphi - v^n \sin. (m-n)\varphi),$$

pars vero imaginaria per $\sqrt{-1}$ divisa

$$v^{m-1}\partial v(\sin. m\varphi - v^n \sin. (m-n)\varphi) + v^m \partial\varphi(\cos. m\varphi - v^n \cos. (m-n)\varphi).$$

5. Quodsi iam brevitatis gratia statuamus

$$R = v^{m-1}(\cos. m\varphi - v^n \cos. (m-n)\varphi)$$

et

$$S = v^{m-1}(\sin. m\varphi - v^n \sin. (m-n)\varphi),$$

ambae litterae quaesitae P et Q per sequentes formulas integrales exprimentur:

$$P = \int \frac{R\partial v - Sv\partial\varphi}{1 - 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}$$

et

$$Q = \int \frac{S\partial v + Rv\partial\varphi}{1 - 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}.$$

Has igitur duas formulas integrare oportebit, quod fiet, dum denominatoris singulos factores trinomiales investigabimus et ex singulis fractiones partiales inde oriundas definiemus.

6. Consideremus igitur in genere hanc fractionem

$$\frac{N}{1 - 2v^n \cos. n\varphi + v^{2n}}$$

et fingamus denominatoris factorem esse $1 - 2v \cos. \omega + vv$, ubi angulus ω ita debet esse comparatus, ut posito

$$1 - 2v \cos. \omega + vv = 0$$

sive

$$v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega$$

simul quoque denominator evanescat, id quod fit, uti vidimus, quando

$$v^n = \cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi.$$

At vero ex factore supposito fit

$$v^n = \cos. n\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\omega,$$

unde statui debebit

$$\cos. n\omega = \cos. n\varphi \quad \text{et} \quad \sin. n\omega = -\sin. n\varphi,$$

id quod evenit in genere, quando $n\omega + n\varphi = i\pi$ denotante i omnes numeros pares, sicque erit $n\omega = i\pi - n\varphi$ ideoque

$$\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi,$$

unde n diversi valores pro angulo ω deducuntur, dum scilicet loco i scribuntur successive numeri 0, 2, 4, 6 etc. usque ad $2n$ excluso postremo.

7. Ponamus nunc fractionem partialem ex isto factore oriundam esse

$$\frac{F}{1 - 2v \cos. \omega + vv},$$

atque ex superioribus patet statui debere

$$F = \frac{N(1 - 2v\cos.\omega + vv)}{1 - 2v^n\cos.n\varphi + v^{2n}},$$

unde scilicet ope aequationis $vv - 2v\cos.\omega + 1 = 0$ pro F huiusmodi forma $Av + B$ elici debet. Quoniam vero hoc casu tam numerator quam denominator evanescit, differentialibus in subsidium vocatis fiet

$$F = \frac{N(v - \cos.n\omega)}{nv^{n-1}(v^n - \cos.n\varphi)}.$$

8. Cum nunc casu, quo $vv - 2v\cos.\omega + 1 = 0$, sit

$$v - \cos.\omega = \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega$$

et

$$v^n - \cos.n\varphi = -\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi,$$

erit

$$F = -\frac{Nv\sin.\omega}{nv^n\sin.n\varphi},$$

qui valor prorsus convenit cum eo, qui supra est repertus. Hic igitur tantum opus est, ut loco N sive R sive S substituatur indeque forma praescripta pro isto numeratore F derivetur, in usum vocando lemma supra allatum.[1])

EVOLUTIO FRACTIONIS

$$\frac{Rv\sin.\omega}{nv^n\sin.n\varphi} \quad \text{SIVE} \quad \frac{v^m\sin.\omega\,(\cos.m\varphi - v^n\cos.(m-n)\varphi)}{nv^n\sin.n\varphi}$$

9. Hinc ergo erit

$$F = -\frac{v^{m-n}\sin.\omega\cos.m\varphi - v^m\sin.\omega\cos.(m-n)\varphi}{n\sin.n\varphi}.$$

Per lemma autem memoratum habebitur

$$\sin.\omega\,v^{m-n} = v\sin.(m-n)\omega - \sin.(m-n-1)\omega.$$

1) Vide § 49 Commentationis praecedentis. G. F.

Cum igitur sit

$$n\omega = i\pi - n\varphi,$$

erit

$$\text{sin.}\,(m-n)\omega = \text{sin.}\,(m\omega + n\varphi)$$

et

$$\text{sin.}\,(m-n-1)\omega = \text{sin.}\,((m-1)\omega + n\varphi).$$

Deinde vero est

$$\text{sin.}\,\omega\, v^m = v\,\text{sin.}\,m\omega - \text{sin.}\,(m-1)\omega,$$

quibus valoribus substitutis erit

$$F = -\frac{1}{n\,\text{sin.}\,n\varphi}\left\{\begin{array}{l} v\,\text{cos.}\,m\varphi\,\text{sin.}\,(m\omega+n\varphi) - \text{cos.}\,m\varphi\,\text{sin.}\,((m-1)\omega+n\varphi) \\ -v\,\text{sin.}\,m\omega\,\text{cos.}\,(m-n)\varphi + \text{sin.}\,(m-1)\omega\,\text{cos.}\,(m-n)\varphi \end{array}\right\}.$$

Facta iam evolutione formularum

$$\text{sin.}\,(m\omega + n\varphi) = \text{sin.}\,m\omega\,\text{cos.}\,n\varphi + \text{cos.}\,m\omega\,\text{sin.}\,n\varphi$$

et

$$\text{cos.}\,(m-n)\varphi = \text{cos.}\,m\varphi\,\text{cos.}\,n\varphi + \text{sin.}\,m\varphi\,\text{sin.}\,n\varphi$$

littera v hic multiplicatur per hanc formam

$$\text{sin.}\,n\varphi\,\text{cos.}\,m\varphi\,\text{cos.}\,m\omega - \text{sin.}\,n\varphi\,\text{sin.}\,m\varphi\,\text{sin.}\,m\omega = \text{sin.}\,n\varphi\,\text{cos.}\,(m\varphi + m\omega),$$

reliqui vero termini, quia ab his tantum in eo differunt, ut loco $m\omega$ scribi debeat $(m-1)\omega$, erunt

$$-\text{sin.}\,n\varphi\,\text{cos.}\,(m(\omega+\varphi) - \omega)$$

sicque pro numeratore, quem quaerimus, erit

$$F = -\frac{1}{n}v\,\text{cos.}\,m(\omega+\varphi) + \frac{1}{n}\,\text{cos.}\,(m(\omega+\varphi) - \omega).$$

EVOLUTIO FRACTIONIS

$$\frac{Sv\,\text{sin.}\,\omega}{nv^n\,\text{sin.}\,n\varphi} = \frac{v^m\,\text{sin.}\,\omega\,(\text{sin.}\,m\varphi - v^n\,\text{sin.}\,(m-n)\varphi)}{nv^n\,\text{sin.}\,n\varphi}$$

10. Hoc casu erit

$$F = -\frac{v^{m-n}\,\text{sin.}\,\omega\,\text{sin.}\,m\varphi - v^m\,\text{sin.}\,\omega\,\text{sin.}\,(m-n)\varphi}{n\,\text{sin.}\,n\varphi}.$$

Hic igitur eodem lemmate in subsidium vocato erit

$$F = -\frac{1}{n \sin. n\varphi}\left\{\begin{array}{l} v \sin. m\varphi \sin. (m\omega + n\varphi) - \sin. m\varphi \sin. ((m-1)\omega + n\varphi) \\ -v \sin. (m-n)\varphi \sin. m\omega + \sin. (m-n)\varphi \sin. (m-1)\omega \end{array}\right\},$$

ubi per similem evolutionem quantitas, qua v multiplicatur, invenitur

$$= \sin. n\varphi \sin. (m(\omega + \varphi));$$

reliqua vero pars erit

$$-\sin. n\varphi \sin. (m(\omega + \varphi) - \omega);$$

hinc igitur pro littera S valor quaesitus numeratoris erit

$$F = -\frac{1}{n} v \sin. m(\omega + \varphi) + \frac{1}{n} \sin. (m(\omega + \varphi) - \omega).$$

11. Cum igitur sit $\omega + \varphi = \frac{i\pi}{n}$, ponamus brevitatis gratia angulum

$$m(\omega + \varphi) = \frac{mi\pi}{n} = \zeta$$

atque pro littera R erit

$$F = -\frac{1}{n}(v \cos. \zeta - \cos. (\zeta - \omega)),$$

at vero pro S erit

$$F = -\frac{1}{n}(v \sin. \zeta - \sin. (\zeta - \omega)),$$

quibus valoribus inventis pro denominatoris factore $1 - 2v \cos. \omega + vv$ partes, ex quibus litterae P et Q componuntur, per sequentes formulas integrales exprimentur[1]):

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{(v \cos. \zeta - \cos. (\zeta - \omega))\,\partial v - v\partial\varphi\,(v \sin. \zeta - \sin. (\zeta - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv},$$

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{(v \sin. \zeta - \sin. (\zeta - \omega))\,\partial v + v\partial\varphi\,(v \cos. \zeta - \cos. (\zeta - \omega))}{1 - 2v \cos. \omega + vv}.$$

1) Vide notam 1 p. 39. A. L.

12. Quoniam hae formulae prorsus conveniunt cum iis, quas supra sumus nacti, et ne signa quidem sunt immutata, peculiari integratione non indigemus, sed pro quantitatibus P et Q sequentes habebimus valores integratos:

$$P = -\frac{\cos.\zeta}{n} l\sqrt{(1 - 2v\cos.\omega + vv)} + \frac{\sin.\zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \sin.\omega}{1 - v\cos.\omega}$$

et

$$Q = -\frac{\sin.\zeta}{n} l\sqrt{(1 - 2v\cos.\omega + vv)} - \frac{\cos.\zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \sin.\omega}{1 - v\cos.\omega}.$$

Tales scilicet formulae ex singulis factoribus denominatoris formae

$$1 - 2v\cos.\omega + vv$$

derivari et in unam summam colligi debent, ut veri valores pro P et Q obtineantur, ubi tantum recordari oportet esse $\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi$ et $\zeta = \frac{mi\pi}{n}$; pro i autem hic numeros pares accipi oportet.

EXEMPLUM 1

13. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 1$, *ita ut quaeri debeat*

$$\int \frac{\partial z}{1 - z} = P + Q\sqrt{-1},$$

posito scilicet $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin.\varphi)$.

Quia hic $n = 1$, unicus valor pro ω locum habet resultans ex $i = 0$ eritque ergo $\omega = -\varphi$ et $\zeta = 0$, unde statim colligimus

$$P = -l\sqrt{(1 - 2v\cos.\varphi + vv)} \quad \text{et} \quad Q = \text{A tang.} \frac{v \sin.\varphi}{1 - v\cos.\varphi}.$$

EXEMPLUM 2

14. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 2$ *ideoque formula integranda*

$$\int \frac{\partial z}{1 - zz} = P + Q\sqrt{-1}$$

posito $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin.\varphi)$.

Quia hic est $n = 2$, pro ω duos habebimus valores ex $i = 0$ et $i = 2$ oriundos, unde,

si $i = 0$, erit $\omega = -\varphi$ et $\zeta = 0$,
si $i = 2$, erit $\omega = \pi - \varphi$ et $\zeta = \pi$.

Hinc igitur statim colligemus

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} l V(1 - 2v \cos.\varphi + vv) + 0 \\ +\frac{1}{2} l V(1 + 2v \cos.\varphi + vv) + 0 \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 0 + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v \sin.\varphi}{1 - v \cos.\varphi} \\ 0 + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v \sin.\varphi}{1 + v \cos.\varphi} \end{array} \right\}.$$

EXEMPLUM 3

15. *Sit nunc* $m = 2$ *et* $n = 2$ *ideoque formula integranda*

$$\int \frac{z\partial z}{1 - zz} = P + QV - 1,$$

posito scilicet $z = v(\cos.\varphi + V - 1 \cdot \sin.\varphi)$.

Hic ergo primo sumi debet $i = 0$, tum vero $i = 2$, unde,

si $i = 0$, erit $\omega = -\varphi$ et $\zeta = 0$,
si $i = 2$, erit $\omega = \pi - \varphi$ et $\zeta = 2\pi$;

unde valores pro P et Q eruuntur sequentes:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} l V(1 - 2v \cos.\varphi + vv) - 0 \\ -\frac{1}{2} l V(1 + 2v \cos.\varphi + vv) - 0 \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 0 + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v \sin.\varphi}{1 - v \cos.\varphi} \\ 0 - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v \sin.\varphi}{1 + v \cos.\varphi} \end{array} \right\}.$$

EXEMPLUM 4

16. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 3$ *ideoque formula integranda*

$$\int \frac{\partial z}{1 - z^3} = P + Q\sqrt{-1}$$

posito $z = v(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi)$.

Hic igitur ternos valores pro angulo ω habebimus, quos sequenti modo repraesentemus:

i	0	2	4
ω	$-\varphi$	$120^0 - \varphi$	$240^0 - \varphi$
sin. ω	$-$ sin. φ	$+$ sin. $(60^0 + \varphi)$	$-$ sin. $(60^0 - \varphi)$
cos. ω	$+$ cos. φ	$-$ cos. $(60^0 + \varphi)$	$-$ cos. $(60^0 - \varphi)$
ζ	0	120^0	240^0
sin. ζ	0	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos. ζ	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Hinc ergo inveniemus

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} l\sqrt{(1 - 2v \cos. \varphi + vv)} + 0 \\ +\frac{1}{6} l\sqrt{(1 + 2v \cos. (60^0 + \varphi) + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v \sin. (60^0 + \varphi)}{1 + v \cos. (60^0 + \varphi)} \\ +\frac{1}{6} l\sqrt{(1 + 2v \cos. (60^0 - \varphi) + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{v \sin. (60^0 - \varphi)}{1 + v \cos. (60^0 - \varphi)} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 0 + \frac{1}{3} \text{A tang.} \frac{v \sin. \varphi}{1 - v \cos. \varphi} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 + 2v \cos. (60^0 + \varphi) + vv)} + \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v \sin. (60^0 + \varphi)}{1 + v \cos. (60^0 + \varphi)} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{(1 + 2v \cos. (60^0 - \varphi) + vv)} - \frac{1}{6} \text{A tang.} \frac{v \sin. (60^0 - \varphi)}{1 + v \cos. (60^0 - \varphi)} \end{array} \right\}.$$

EXEMPLUM 5

17. *Sumatur nunc* $m = 2$ *manente* $n = 3$, *ut formula integranda sit*

$$\int \frac{z\partial z}{1-z^3} = P + Q\sqrt{-1}$$

posito $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$.

Hic notetur valores ipsius ω prorsus eosdem manere ut ante sicque etiam logarithmi et arcus circulares iidem manebunt; valores autem pro ζ erunt sequentes:

si $i = 0$, erit $\zeta = 0$, $\sin.\zeta = 0$ et $\cos.\zeta = +1$,

si $i = 2$, erit $\zeta = \frac{4}{3}\pi$, $\sin.\zeta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos.\zeta = -\frac{1}{2}$,

si $i = 4$, erit $\zeta = \frac{8}{3}\pi$, $\sin.\zeta = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos.\zeta = -\frac{1}{2}$.

Hinc igitur fiet

$$P = \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}l\sqrt{(1-2v\cos.\varphi+vv)} + 0 \\ +\frac{1}{6}l\sqrt{(1+2v\cos.(60^0+\varphi)+vv)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0+\varphi)}{1+v\cos.(60^0+\varphi)} \\ +\frac{1}{6}l\sqrt{(1+2v\cos.(60^0-\varphi)+vv)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0-\varphi)}{1+v\cos.(60^0-\varphi)} \end{array}\right\},$$

$$Q = \left\{\begin{array}{l} 0 + \frac{1}{3}\text{A tang.}\frac{v\sin.\varphi}{1-v\cos.\varphi} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1+2v\cos.(60^0+\varphi)+vv)} + \frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0+\varphi)}{1+v\cos.(60^0+\varphi)} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}l\sqrt{(1+2v\cos.(60^0-\varphi)+vv)} - \frac{1}{6}\text{A tang.}\frac{v\sin.(60^0-\varphi)}{1+v\cos.(60^0-\varphi)} \end{array}\right\}.$$

EXEMPLUM 6

18. *Sit nunc* $m = 1$ *et* $n = 4$, *ut formula integranda fiat*

$$\int \frac{\partial z}{1-z^4} = P + Q\sqrt{-1}$$

posito $z = v(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$.

Quia hic $n = 4$, pro angulis ω et ζ quaternos valores adipiscimur, scilicet

i	0	2	4	6
ω	$-\varphi$	$\frac{1}{2}\pi - \varphi$	$\pi - \varphi$	$\frac{3}{2}\pi - \varphi$
sin. ω	$-$ sin. φ	$+$ cos. φ	$+$ sin. φ	$-$ cos. φ
cos. ω	$+$ cos. φ	$+$ sin. φ	$-$ cos. φ	$-$ sin. φ
ζ	0	90^0	180^0	270^0
sin. ζ	0	$+1$	0	-1
cos. ζ	$+1$	0	-1	0

Hinc iam litterae P et Q sequenti modo exprimentur:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4} l V(1 - 2v\cos.\varphi + vv) + 0 \\ 0 \qquad\qquad + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 - v\sin.\varphi} \\ +\frac{1}{4} l V(1 + 2v\cos.\varphi + vv) + 0 \\ 0 \qquad\qquad + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 + v\sin.\varphi} \end{array} \right\},$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} 0 \qquad\qquad + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 - v\cos.\varphi} \\ -\frac{1}{4} l V(1 - 2v\sin.\varphi + vv) + 0 \\ 0 \qquad\qquad + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 + v\cos.\varphi} \\ +\frac{1}{4} l V(1 + 2v\sin.\varphi + vv) + 0 \end{array} \right\}.$$

19. Super hoc exemplo notasse iuvabit esse

$$\int \frac{\partial z}{1 - z^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial z}{1 - zz} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial z}{1 + zz}.$$

Modo autem vidimus pro formula $\frac{\partial z}{1 - zz}$ esse

$$P = -\frac{1}{2} lV(1 - 2v\cos.\varphi + vv) + \frac{1}{2} lV(1 + 2v\cos.\varphi + vv)$$

et

$$Q = +\frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 - v\cos.\varphi} + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 + v\cos.\varphi}.$$

Pro altera vero formula $\int \frac{\partial z}{1+zz}$ in superiore dissertatione § 30 et seqq. invenimus

$$P = \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v\cos.\varphi}{1 - vv} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4} l \frac{1 + 2v\sin.\varphi + vv}{1 - 2v\sin.\varphi + vv},$$

quos autem valores ob arcum circuli hic contractum potius ex formulis problematis generalis § 54 et seqq. derivemus. Erit enim posito ibi $m = 1$, $n = 2$ pro forma integrali

$$\int \frac{\partial z}{1+zz}$$

valor

$$P = \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 - v\sin.\varphi} + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 + v\sin.\varphi},$$

$$Q = \frac{1}{2} lV(1 + 2v\sin.\varphi + vv) - \frac{1}{2} lV(1 - 2v\sin.\varphi + vv).$$

Additis ergo binis P et Q per binarium divisis prodit pro forma integrali

$$\int \frac{\partial z}{1 - z^4}$$

valor

$$P = \begin{cases} +\frac{1}{4} lV(1 + 2v\cos.\varphi + vv) + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 - v\sin.\varphi} \\ -\frac{1}{4} lV(1 - 2v\cos.\varphi + vv) + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\cos.\varphi}{1 + v\sin.\varphi} \end{cases},$$

$$Q = \begin{cases} +\frac{1}{4} lV(1 + 2v\sin.\varphi + vv) + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 - v\cos.\varphi} \\ -\frac{1}{4} lV(1 - 2v\sin.\varphi + vv) + \frac{1}{4} \text{A tang.} \frac{v\sin.\varphi}{1 + v\cos.\varphi} \end{cases},$$

prorsus uti supra invenimus.

20. Quanquam haec solutio satis est commoda et sine multis ambagibus ad optatum finem perducit, tamen aliam hic subiungam, quae quidem multo

simplicior et brevior, ita tamen est comparata, ut eius bonitas nequidem perspici queat atque eatenus tantum admitti possit, quatenus ad veritatem iam aliunde cognitam perducit. In eo autem ista solutio a praecedente solutione recedit, quod primo denominatorem $1 - z^n$ ab imaginariis liberare non est opus; deinde etiam numerator ita tractari potest, ut quantitas v inde penitus elidatur neque permixtio quantitatum realium et imaginariarum ullam moram facessat.

ALIA SOLUTIO PROBLEMATIS

21. Cum posito $z = v(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi)$ esse debeat

$$\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 - z^n} = P + Q\sqrt{-1},$$

statim considero denominatoris factorem $1 - 2v \cos. \omega + vv$, quo ergo posito $= 0$ etiam ipse denominator evanescere debet; inde autem fit

$$v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. \omega,$$

et cum sit

$$z = v(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi),$$

erit

$$z^n = v^n(\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi).$$

Quare cum sit

$$v^n = \cos. n\omega + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\omega,$$

hinc fiet

$$z^n = \cos.(n\omega + n\varphi) + \sqrt{-1} \cdot \sin.(n\omega + n\varphi);$$

quae expressio cum unitati debeat esse aequalis, erit $\cos.(n\omega + n\varphi) = 1$, unde fit $n\omega + n\varphi = i\pi$ denotante i numerum parem quemcunque, sicque altera pars $\sqrt{-1} \cdot \sin.(n\omega + n\varphi)$ sponte evanescit. Cum igitur hinc sit $n\omega = i\pi - n\varphi$, erit

$$\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi,$$

unde n diversi valores pro ω eliciuntur.

22. Statuamus nunc fractionem partialem ex hoc factore oriundam esse

$$= \frac{F}{1 - 2v\cos.\omega + vv},$$

atque, ut supra vidimus, statui debet

$$F = z^{m-1}\partial z \cdot \frac{1 - 2v\cos.\omega + vv}{1 - z^n},$$

unde ope aequationis $vv - 2v\cos.\omega + 1 = 0$ iste valor F penitus a litteris z et v debet liberari. Quoniam autem hinc fractionis illius tam numerator quam denominator evanescit, sumtis differentialibus ob $\partial . z^n = nz^n \frac{\partial z}{z} = nz^n \frac{\partial v}{v}$, quandoquidem in hac reductione anguli ω et φ ut constantes spectari possunt, illa fractio induet hanc formam $-\frac{2(v - \cos.\omega)v}{nz^n}$. Quoniam igitur

$$v - \cos.\omega = \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega \quad \text{et} \quad z^n = 1,$$

erit ista fractio $= -\frac{2v\sqrt{-1}\cdot\sin.\omega}{n}$ sicque habebimus

$$F = -\frac{2v}{n} z^{m-1}\partial z \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega.$$

23. Cum nunc sumto etiam angulo φ variabili sit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\varphi\sqrt{-1}$$

ideoque

$$\frac{2v\sqrt{-1}}{n}\cdot\frac{\partial z}{z} = \frac{2}{n}\partial v\sqrt{-1} - 2v\frac{\partial\varphi}{n},$$

habebimus

$$F = -\frac{2}{n} z^m \partial v\sqrt{-1}\cdot\sin.\omega + \frac{2}{n} v z^m \partial\varphi \sin.\omega$$

sive

$$F = \frac{2}{n} z^m \sin.\omega\,(v\partial\varphi - \partial v\sqrt{-1}).$$

Nunc vero, uti ante evolvimus potestatem z^n, hic simili modo evolvamus potestatem z^m eritque

$$z^m = \cos.(m\omega + m\varphi) + \sqrt{-1}\cdot\sin.(m\omega + m\varphi),$$

quo valore introducto fiet

$$F = \frac{2}{n} \sin.\, \omega\, (v\partial\varphi - \partial v \sqrt{-1})(\cos.\, (m\omega + m\varphi) + \sqrt{-1} \cdot \sin.\, (m\omega + m\varphi)).$$

Cum denique sit $\omega = \frac{i\pi}{n} - \varphi$, erit $m\omega + m\varphi = \frac{mi\pi}{n}$; quem ergo angulum si vocemus $= \zeta$, valor litterae F quaesitus erit

$$F = \frac{2}{n} \sin.\, \omega\, (v\partial\varphi - \partial v \sqrt{-1})(\cos.\, \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\, \zeta),$$

quem partiamur in has partes

$$F = + \frac{2}{n} \partial v \sin.\, \omega\, (\sin.\, \zeta - \sqrt{-1} \cdot \cos.\, \zeta) + \frac{2}{n} v\partial\varphi \sin.\, \omega\, (\cos.\, \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\, \zeta).$$

24. Quia haec expressio ex partibus realibus et imaginariis constat, videri posset partes reales sumi debere pro valore litterae P, imaginarias pro $Q\sqrt{-1}$; verum hinc in crassissimum errorem illaberemur, quemadmodum ex collatione cum superiore solutione manifestum est. Interim tamen observavi ex hac ipsa formula veros valores pro P et Q elici posse. Scilicet pro valore ipsius P inveniendo haec tota formula ex realibus et imaginariis permixta in valorem realem transformetur; tum enim eius semissis pro littera P valebit. Simili modo pro littera Q eandem expressionem totam in formam simpliciter imaginariam transfundi oportet, cuius pariter semissis pro valore litterae Q adhiberi debebit; scilicet cum valor ipsius F coefficientem habeat 2, ex altera semissi littera P, ex altera vero littera Q formari debet.

25. Hinc ergo omisso factore formulam pro F inventam primo ad litteram P accommodemus; qui valor cum debeat esse realis, statuatur

$$= Av + B$$

et loco v valorem $\cos.\, \omega + \sqrt{-1} \cdot \sin.\, \omega$ substituendo habebimus hanc aequationem

$$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{n} \partial v \sin.\, \omega\, (\sin.\, \zeta - \sqrt{-1} \cdot \cos.\, \zeta) \\ + \frac{1}{n} v\partial\varphi \sin.\, \omega\, (\cos.\, \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\, \zeta) \end{array} \right\} = A \cos.\, \omega + B + A\sqrt{-1} \cdot \sin.\, \omega.$$

Hinc iam partibus realibus et imaginariis seorsim aequatis primo ex imaginariis elicitur

$$A \sin.\ \omega = \frac{1}{n} \sin.\ \omega (-\partial v \cos.\ \zeta + v\partial\varphi \sin.\ \zeta),$$

unde fit

$$A = -\frac{1}{n}(\partial v \cos.\ \zeta - v\partial\varphi \sin.\ \zeta).$$

Hic iam valor in aequalitate partium realium substitutus dabit

$$\frac{1}{n} \sin.\ \omega (\partial v \sin.\ \zeta + v\partial\varphi \cos.\ \zeta) = -\frac{\cos.\ \omega}{n}(\partial v \cos.\ \zeta - v\partial\varphi \sin.\ \zeta) + B,$$

unde colligitur

$$B = \frac{1}{n}\partial v \cos.\ (\zeta - \omega) - \frac{1}{n} v\partial\varphi \sin.\ (\zeta - \omega).$$

Hinc ergo pro littera P erit

$$F = -\frac{1}{n}\partial v (v \cos.\ \zeta - \cos.\ (\zeta - \omega)) + \frac{1}{n} v\partial\varphi (v \sin.\ \zeta - \sin.\ (\zeta - \omega))$$

sicque ex factore denominatoris $1 - 2v \cos.\ \omega + vv$ habebimus[1])

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{\partial v (v \cos.\ \zeta - \cos.\ (\zeta - \omega)) - v\partial\varphi (v \sin.\ \zeta - \sin.\ (\zeta - \omega))}{1 - 2v \cos.\ \omega + vv}.$$

26. Pro littera Q altera semissis litterae F aequetur huic quantitati simpliciter imaginariae

$$(Cv + D)\sqrt{-1},$$

unde exorietur ista aequatio

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{n}\partial v \sin.\ \omega (\sin.\ \zeta - \sqrt{-1} \cdot \cos.\ \zeta) \\ +\frac{1}{n} v\partial\varphi \sin.\ \omega (\cos.\ \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\ \zeta) \end{array}\right\} = C \cos.\ \omega \sqrt{-1} + D\sqrt{-1} - C \sin.\ \omega.$$

Hinc ex partibus realibus concluditur

$$C = -\frac{1}{n}(\partial v \sin.\ \zeta + v\partial\varphi \cos.\ \zeta),$$

1) Vide notam 1 p. 39. A. L.

quo valore substituto ex partibus imaginariis haec emerget aequatio

$$-\frac{1}{n}\sin.\,\omega\,(\partial v\cos.\,\zeta - v\,\partial\varphi\sin.\,\zeta) = -\frac{\cos.\,\omega}{n}(\partial v\sin.\,\zeta + v\,\partial\varphi\cos.\,\zeta) + D,$$

unde eruitur

$$D = \frac{1}{n}\partial v\sin.\,(\zeta-\omega) + \frac{1}{n}v\,\partial\varphi\cos.\,(\zeta-\omega).$$

Hinc ergo pro littera Q habemus

$$F = -\frac{1}{n}\partial v\,(v\sin.\,\zeta - \sin.\,(\zeta-\omega)) - \frac{1}{n}v\,\partial\varphi\,(v\cos.\,\zeta - \cos.\,(\zeta-\omega)),$$

unde valor ipsius Q ex factore $1 - 2v\cos.\,\omega + vv$ oriundus erit[1])

$$Q = -\frac{1}{n}\int\frac{\partial v\,(v\sin.\,\zeta - \sin.\,(\zeta-\omega)) + v\,\partial\varphi\,(v\cos.\,\zeta - \cos.\,(\zeta-\omega))}{1 - 2v\cos.\,\omega + vv}.$$

27. Quoniam haec solutio tam egregie cum praecedente convenit, id profecto casui fortuito tribui nequit; quamobrem mihi quidem haec solutio prorsus singularis haud parum in recessu habere videtur, unde eam Geometris perscrutandam proponere non dubito, ut eius soliditatem ex firmis principiis derivare conentur.

1) Vide notam 1 p. 39. A. L.

DE VERO VALORE FORMULAE INTEGRALIS $\int \partial x \left(l \frac{1}{x}\right)^n$ A TERMINO $x = 0$ USQUE AD TERMINUM $x = 1$ EXTENSAE[1])

Convent. exhib. die 30. Sept. 1776

Commentatio 662 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1790), 1794, p. 15—31
Summarium ibidem p. 48—50

SUMMARIUM

La formule dont il s'agit dans ce Mémoire de trouver la vraye valeur, représente le terme général de la progression hypergéométrique de WALLIS[2]); sa valeur peut, par conséquent, être regardée comme parfaitement connue pour tous les cas où l'exposant n est un nombre entier positif ou négatif; mais lorsque cet exposant est un nombre fractionnaire, on sait, par les recherches antérieures de M. EULER[1]) sur ce sujet, que la valeur de la formule

1) Confer hac cum dissertatione praeter Commentationem 421 voluminis I17 Commentationes 652 et 661 (indicis ENESTROEMIANI): *De termino generali serierum hypergeometricarum,* Nova acta acad. sc. Petrop. 7 (1789), 1793, p. 42—63 et *Variae considerationes circa series hypergeometricas,* Nova acta acad. sc. Petrop. 8 (1790), 1794, p. 3—14; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I16. G. F.

2) J. WALLIS (1616—1703), *Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos problemata,* Oxoniae 1655; *Opera mathematica,* t. I, Oxoniae 1695, imprimis p. 466. Confer etiam Commentationem 47 (indicis ENESTROEMIANI): *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali,* Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, p. 9—22; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I14, imprimis notam 1 p. 114 additam. G. F.

proposée dépend de la quadrature d'une courbe algébrique d'un ordre plus ou moins élevé, selon que le dénominateur de la fraction prise pour n est plus ou moins grand. C'est donc aussi de la réduction de ces valeurs transcendantes à la quadrature de courbes algébriques qu'il s'agit dans ce Mémoire. Voici le précis de la méthode que l'auteur emploie pour cet effet.

Il met $l\frac{1}{x} = u$, et comme la formule proposée $\int u^n \partial x$ est réductible, pour le terme d'intégration établi $x = 0$, tant à $n\int u^{n-1}\partial x$ qu'à $\frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\partial x$, on pourra, moyennant la premiere réduction, diminuer successivement de l'unité toute fraction positive prise pour n, quelque grande qu'elle soit, et réduire l'exposant à une fraction contenue entre les limites 0 et 1; et à l'aide de la seconde réduction, on sera en état d'augmenter successivement de l'unité toute fraction négative qu'on prendroit pour n, et réduire cet exposant à une fraction renfermée entre les mêmes limites 0 et 1. Par là on obtient l'avantage de n'avoir à traiter que les fractions positives moindres que l'unité.

Ceci remarqué, M. EULER considère la série

$$s = 1 + A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + \text{etc.}$$

formée des produits des deux coëfficiens correspondans des puissances m et n développées du binome $1 + z$, savoir

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

$$(1+z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$$

et ayant fait voir, dans le Mémoire qui est à la suite de celui-ci,[1]) que la somme de la série mentionnée peut être exprimée ainsi

$$s = \frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^m \partial x \cdot \int u^n \partial x},$$

il compare cette valeur avec celle qu'il avoit donnée autrefois (Acta pro A⁰. 1781. P. I. pag. 82.)[2]) pour la somme de la même série, savoir

$$s = \frac{m+n}{mn\int x^{m-1}\partial x (1-x)^{n-1}},$$

---

1) Voir le mémoire 663 (suivant l'index d'ENESTRÖM): *Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur.* Nova acta acad. sc. Petrop. 8 (1790), 1794, p. 32—68; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I16. G. F.

2) Voir le mémoire 575: *De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt.* Acta acad. sc. Petrop. 5: I (1781: I), 1784, p. 74—111; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I15. G. F.

et il en déduit cette équation

$$\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int \partial x \sqrt[\lambda]{w^{\mu}} \cdot \int \partial x \sqrt[\lambda]{w^{\nu}} = \int \partial x \sqrt[\lambda]{w^{\mu+\nu}} \int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\nu}}},$$

où $\mu = \lambda m$, $\nu = \lambda n$ et $z = \sqrt[\lambda]{x}$, et la dernière intégrale réductible à la quadrature du cercle, toutes les fois que $\mu + \nu = \lambda$. Et en général, quelle que soit la valeur des lettres λ, μ et ν, pourvu que μ et ν soyent moindres que λ, la valeur de cette intégrale pourra être regardée comme connue, de même que $\int \partial x \sqrt[\lambda]{w^{\mu}}$ et $\int \partial x \sqrt[\lambda]{w^{\nu}}$, de sorte que la valeur de la formule proposée pourra être déterminée pour toutes les valeurs possibles de l'exposant n. Ces recherches générales sont éclaircies par plusieurs applications que M. EULER en fait, en donnant à λ successivement les valeurs 2, 3, 4 et 5 et à μ et ν, dans chaque cas, toutes les valeurs audessous de λ.

1. Cum haec formula exprimat aream curvae transcendentis, cuius abscissae x respondet applicata $= \left(l\frac{1}{x}\right)^n$, quaestio huc redit, ut eadem area, quatenus abscissae $x = 1$ convenit, vel per numeros absolutos vel saltem per quadraturas curvarum algebraicarum exhibeatur. Ac primo quidem manifestum est, quoties exponens n fuerit numerus integer, hanc formulam integralem sistere terminum generalem progressionis hypergeometricae, cum sit

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^0 = 1,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^1 = 1,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \cdot 2,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

atque adeo in genere

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n,$$

quem autem valorem cognoscere non datur, nisi exponens n fuerit numerus integer positivus; praeterea vero si exponens n fuerit numerus integer nega-

tivus, ex indole seriei hypergeometricae facile perspicitur valores nostrae formulae omnes fieri infinite magnos. Quaestio igitur hic potissimum complectetur casus, quibus exponens n est numerus fractus, quibus utique valor nostrae formulae neutiquam per numeros absolutos assignari potest, sed potius quadraturas curvarum algebraicarum eo altiorum ordinum postulat, quo maior fuerit denominator fractionis pro n assumtae, quemadmodum iam olim fusius monstravi.[1]) Nuper autem se mihi obtulit alia methodus eosdem valores transcendentes investigandi, quam ergo hic explicare constitui, cum inde haud contemnenda incrementa in Analysin redundare videantur.

2. Ante omnia igitur statuamus brevitatis gratia

$$l\frac{1}{x} = u,$$

ut sit $\partial u = -\frac{\partial x}{x}$ ideoque $\partial x = -x\partial u$. Hinc statim insignes reductiones ope lemmatis vulgatissimi, quo est

$$\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P,$$

derivari possunt. Sumto enim

$$P = u^n \quad \text{et} \quad \partial Q = \partial x$$

ob

$$\partial P = nu^{n-1}\partial u = -\frac{nu^{n-1}\partial x}{x} \quad \text{et} \quad Q = x$$

hoc lemma nobis praebet

$$\int u^n \partial x = xu^n + n\int u^{n-1}\partial x.$$

Deinde cum sit $u^n\partial x = -xu^n\partial u$, si hic capiatur

$$P = -x \quad \text{et} \quad \partial Q = u^n\partial u,$$

---

1) Vide Commentationem 421 nota 1 p. 61 laudatam. Confer etiam Commentationem 19 (indicis Enestroemiani): *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt,* Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), 1738, p. 36—57, imprimis § 16; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I_{14}. G. F.

ob

$$\partial P = -\partial x \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$$

habebimus

$$\int u^n \partial x = -\frac{1}{n+1}xu^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\partial x.$$

Quare, quoniam haec integralia ita capi debent, ut evanescant posito $x=0$, tum vero statui debet $x=1$, notum est tum membra absoluta in his reductionibus in nihilum abire, ita ut pro hoc casu, de quo hic unice agitur, sit

$$\int u^n \partial x = n\int u^{n-1}\partial x,$$

tum vero etiam

$$\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\partial x,$$

quae quidem posterior reductio sponte ex priori fluit.

3. Quod autem formula xu^n casu $x=0$ semper evanescat, vulgo non satis directe demonstrari solet atque adeo dubium videri queat, propterea quod posito $x=0$ fiat $u^n=\infty$; at vero haec veritas sequenti modo rigorose ostendi potest. Namque pro casu $x=0$ statuamus

$$xu^n = v,$$

ita ut valor huius litterae v nobis sit explorandus, quem ergo ita per fractionem repraesentemus

$$v = \frac{x}{u^{-n}},$$

cuius tam numerator quam denominator casu $x=0$ evanescit, unde per regulam communem[1]) tam loco numeratoris quam denominatoris eorum differentialia scribantur, et quia valor ipsius v idem prodire debet, erit quoque

$$v = \frac{\partial x}{-nu^{-n-1}\partial u} = \frac{+x}{nu^{-n-1}} \quad \left(\text{ob } \partial u = -\frac{\partial x}{x}\right).$$

Cum igitur ex priore valore sit $v=xu^n$, ex posteriore vero $v=\frac{1}{n}xu^{n+1}$, inde fiet

$$v^{n+1} = x^{n+1}u^{n(n+1)},$$

1) Vide notam 1 p. 19. G. F.

hinc vero

$$v^n = \left(\frac{x}{n}\right)^n u^{n(n+1)},$$

quorum valorum ille per hunc divisus dabit $v = n^n x$, haecque expressio pariter verum valorem ipsius v pro casu $x = 0$ exhibere debet, hic autem posito $x = 0$ manifesto fit $v = 0$.

4. Quoniam nostra investigatio hic potissimum ad casus, quibus exponens n est fractio, restringitur, ope reductionis $\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$ omnes fractiones loco n assumtae, quantumvis fuerint magnae, continuo unitate diminui ideoque tandem adeo infra unitatem deprimi poterunt, ita ut intra limites 0 et 1 contineantur. Deinde vero ope alterius reductionis $\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, si forte exponens n fuerit fractio negativa, tandem eius valor pariter ad fractionem inter limites 0 et 1 redigi poterit; unde nobis hoc loco sufficiet eos tantum casus evolvisse, quibus fractiones pro n assumtae intra limites 0 et 1 consistunt; haeque fractiones commode in varias classes distribuuntur, prouti denominatores harum fractionum fuerint vel 2 vel 3 vel 4 vel 5 etc.

5. Cum nuper series, quae ex unciis potestatum binomii formantur, essem contemplatus[1]), ostendi, si ponatur

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.},$$

tum vero etiam

$$(1+z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

tum summam huius seriei

$$1 + A\alpha + B\beta + C\gamma + \text{etc.} = s$$

ita exprimi posse, ut sit

$$s = \frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x \cdot \int u^n \partial x},$$

quae ergo summa per valores formulae integralis propositae definitur; deinde vero etiam monstravi[1]) eandem summam quoque hoc modo exprimi posse

1) Vide notam 1 p. 64 A. K.

$$s = \frac{m+n}{mn\int x^{m-1}\partial x(1-x)^{n-1}},$$

unde ergo sequitur semper fore

$$\frac{m+n}{mn}\int u^m\partial x\cdot\int u^n\partial x = \int u^{m+n}\partial x\cdot\int x^{m-1}\partial x(1-x)^{n-1},$$

siquidem singula haec integralia a termino $x=0$ usque ad terminum $x=1$ extendantur.

6. Quoniam autem praesens nostrum institutum circa fractiones easque unitate minores versatur, ponamus in genere $m=\frac{\mu}{\lambda}$ et $n=\frac{\nu}{\lambda}$, ita ut sit

$$\frac{\lambda(\mu+\nu)}{\mu\nu}\int u^{\frac{\mu}{\lambda}}\partial x\cdot\int u^{\frac{\nu}{\lambda}}\partial x = \int u^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}}\partial x\cdot\int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x(1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}}.$$

Nunc vero, ut postremam formulam integralem ab exponentibus fractis liberemus, statuamus $x=z^\lambda$ et ob $\partial x=\lambda z^{\lambda-1}\partial z$ erit

$$\int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x(1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}} = \lambda\int z^{\mu-1}\partial z(1-z^\lambda)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}},$$

quae formula ob $\nu-\lambda<0$ ita referri potest

$$\lambda\int\frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}},$$

quod integrale pariter a $z=0$ usque ad $z=1$ est extendendum. Facta igitur hac substitutione aequatio nostra principalis ita se habebit

$$\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^\mu}\cdot\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^\nu} = \int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}}\cdot\int\frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}},$$

ubi ambo numeri μ et ν perpetuo nobis erunt positivi et minores quam λ. Imprimis autem hic observari meretur casu, quo $\mu+\nu=\lambda$, postremum integrale semper ad quadraturam circuli ita reduci posse, ut sit[1])

$$\int\frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^\mu}} = \frac{\pi}{\lambda\sin.\frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

1) Confer Commentationes 254 et 321 (indicis ENESTROEMIANI); *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I$_{17}$ p. 260 et 271. A. K.

7. Ex hac iam aequatione principali haud difficulter valores formulae integralis propositae pro singulis denominatoribus λ elicientur, si modo litteris μ et ν quovis casu omnes numeri denominatore λ minores successive tribuantur; tum enim plures formabuntur aequationes, ex quibus valores formularum $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\mu}$ et $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\nu}$ definiri poterunt. Quod autem ad formulam $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}}$ attinet, quae nata est ex $\int u^{m+n}\partial x$, quando fuerit $m+n>1$ sive $\mu+\nu>\lambda$, quoniam vidimus esse $\int u^{m+n}\partial x = (m+n)\int u^{m+n-1}\partial x$, erit

$$\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}} = \frac{\mu+\nu}{\lambda}\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu-\lambda}},$$

quae ergo formula valebit, quando $\mu+\nu>\lambda$. Denique vero omnes valores, qui ex postrema formula integrali

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}}$$

nascuntur, tanquam cogniti spectari poterunt, unde eos litteris *A*, *B*, *C*, *D* etc. indicabimus. His igitur praenotatis pro denominatore λ ordine numeros 2, 3, 4, 5 etc. accipiamus ideoque sequentes casus evolvamus, pro quibus in genere observasse iuvabit numeros μ et ν semper inter se permutari posse, ita ut sit

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}} = \int \frac{z^{\nu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\mu}}}.$$

I. EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = 2$

8. Pro hoc ergo casu aequatio nostra principalis erit

$$\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int \partial x \sqrt{u^\mu}\cdot\int \partial x \sqrt{u^\nu} = \int \partial x \sqrt{u^{\mu+\nu}}\cdot\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt{(1-zz)^{2-\nu}}},$$

ubi cum loco μ et ν alios numeros praeter unitatem accipere non liceat, posito $\mu=1$ et $\nu=1$ pro formula postrema unica species oritur

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}},$$

cuius valor, uti constat, est $=\frac{\pi}{2}$, quem autem ob analogiam sequentium casuum littera *A* designabimus. Hinc igitur, cum sit $\mu+\nu=2$, erit

$$\int \partial x \sqrt{uu} = \int u\,\partial x = 1,$$

aequatio autem principalis induet hanc formam

$$2\int \partial x \sqrt{u} \cdot \int \partial x \sqrt{u} = \frac{\pi}{2} = A,$$

unde fit

$$\int \partial x \sqrt{u} = \sqrt{\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

9. Quoniam igitur invenimus esse $\int u^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, si exponentem ipsius u continuo unitate augeamus, per reductionem supra ostensam

$$\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$$

impetrabimus sequentes valores

$$\int u^{\frac{3}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{5}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{7}{2}} \partial x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi}$$

et ita porro. Deinde vero regrediendo per alteram reductionem

$$\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$$

reperiemus

$$\int u^{-\frac{1}{2}} \partial x = \sqrt{\pi}$$

hincque porro

$$\int u^{-\frac{3}{2}} \partial x = -2\sqrt{\pi}^{1}),$$

$$\int u^{-\frac{5}{2}} \partial x = +\frac{2 \cdot 2}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{7}{2}} \partial x = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5}\sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{9}{2}} \partial x = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7}\sqrt{\pi},$$

sicque valores nostrae formulae invenimus pro omnibus fractionibus, quarum denominator est $= 2$.

1) Manifestum est et hanc aequalitatem et tres sequentes impossibiles esse. A. L.

EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = 3$

10. Quoniam hic litterae μ et ν binos valores recipere possunt, scilicet 1 et 2, formula integralis postrema quatuor nobis suppeditat valores, quos sequenti modo indicemus

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = A, \quad \int \frac{z\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = B,$$

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = A', \quad \int \frac{z\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = B'.$$

In harum formularum prima et quarta est $\mu + \nu = \lambda = 3$, unde per quadraturam circuli habebimus

$$A = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad B' = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

unde patet esse $B' = A$, quod etiam inde sequitur, quod litterae μ et ν sunt permutabiles. Praeterea vero notetur casu $\mu + \nu = 3$ fore

$$\int \partial x \sqrt[3]{u^{\mu+\nu}} = \int u \partial x = 1,$$

at vero casu $\mu + \nu = 4$ erit

$$\int \partial x \sqrt[3]{u^4} = \int u^{\frac{4}{3}} \partial x = \frac{4}{3} \int \partial x \sqrt[3]{u}.$$

11. His praemonitis omnes casus aequationis nostrae principalis ordine evolvamus sequenti modo:

I. Si $\mu = 1$ et $\nu = 2$, erit $\frac{3}{2} \int \partial x \sqrt[3]{u} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = A.$

II. Si $\mu = 2$ et $\nu = 2$, erit $\frac{4}{4} \int \partial x \sqrt[3]{u^2} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = \frac{4}{3} B \int \partial x \sqrt[3]{u}.$

III. Si $\mu = 1$ et $\nu = 1$, erit $2 \int \partial x \sqrt[3]{u} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u} = A' \int \partial x \sqrt[3]{u^2}.$

IV. Si $\mu = 2$ et $\nu = 1$, erit $\frac{3}{2} \int \partial x \sqrt[3]{u^2} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u} = B'.$

Sicque quatuor nacti sumus aequationes pro determinandis binis valoribus incognitis, scilicet $\int \partial x \sqrt[3]{u}$ et $\int \partial x \sqrt[3]{u^2}$, quos ergo pluribus modis definire licebit, quandoquidem ad hoc duae tantum aequationes sufficiunt.

12. Quo autem hic calculus facilior reddatur, statuamus brevitatis gratia

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = p \quad \text{et} \quad \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = q$$

et combinemus primo aequationes I et II, quae erunt

$$\frac{3}{2} pq = A \quad \text{et} \quad qq = \frac{4}{3} Bp,$$

quarum posterior dat $p = \frac{3qq}{4B}$; qui valor in priore substitutus dat $\frac{9q^3}{8B} = A$, unde reperitur

$$q = 2\sqrt[3]{\frac{AB}{9}},$$

ex quo porro colligitur

$$p = \frac{3}{B}\sqrt[3]{\frac{A^2B^2}{81}}$$

sive etiam

$$p = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}},$$

sicque pro p et q restitutis valoribus iam nacti sumus has determinationes

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}} \quad \text{et} \quad \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2\sqrt[3]{\frac{AB}{9}}.$$

13. Combinemus nunc primam aequationem cum tertia et habebimus

$$\frac{3}{2} pq = A \quad \text{et} \quad 2pp = A'q.$$

Ex posteriore fit $q = \frac{2pp}{A'}$, qui valor in priore substitutus dat $\frac{3p^3}{A'} = A$, unde reperitur

$$p = \sqrt[3]{\frac{AA'}{3}}$$

hincque

$$q = \frac{2}{A'}\sqrt[3]{\frac{A^2A'A'}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{A^2}{9A'}},$$

sicque haec combinatio nos perducit ad hos valores

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{AA'}{3}} \quad \text{et} \quad \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2\sqrt[3]{\frac{A^2}{9A'}}.$$

14. Combinemus nunc quoque primam aequationem cum quarta et habebimus $\frac{3}{2}pq = A$ et $\frac{3}{2}pq = B'$, unde nihil aliud sequitur nisi $B' = A$, uti ante invenimus. Combinemus igitur secundam cum tertia et habebimus

$$qq = \frac{4}{3}Bp \quad \text{et} \quad 2pp = A'q,$$

ex quarum posteriore fit $q = \frac{2pp}{A'}$, qui valor in prima substitutus dat $\frac{4p^3}{A'A'} = \frac{4}{3}B$, unde reperitur

$$p = \sqrt[3]{\frac{A'A'B}{3}},$$

ex quo fit

$$q = 2\sqrt[3]{\frac{A'BB}{9}},$$

sicque haec combinatio nobis dat hos valores

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A'A'B}{3}} \quad \text{et} \quad \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2\sqrt[3]{\frac{A'BB}{9}}.$$

15. Quoniam aequatio quarta cum prima prorsus convenit, superfluum foret secundam vel tertiam cum quarta combinare, quoniam eas iam cum prima combinavimus. Sicque pro litteris p et q omnino ternos nacti sumus valores, quos ita coniunctim ob oculos ponamus

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}} = \sqrt[3]{\frac{A'A}{3}} = \sqrt[3]{\frac{A'A'B}{3}}$$

et

$$\int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2\sqrt[3]{\frac{AB}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{A^2}{9A'}} = 2\sqrt[3]{\frac{A'BB}{9}}.$$

Hinc igitur sumtis cubis sequentes nanciscimur aequationes

$$\frac{AA}{B} = AA' = A'A'B \quad \text{et} \quad AB = \frac{AA}{A'} = A'BB.$$

16. At relatione inter hos diversos valores facta omnes hae aequalitates ad unicam hanc proprietatem revocantur, qua est

$$A = A'B.$$

Substitutis igitur ipsis formulis integralibus consequimur hanc veritatem maxime memorabilem

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} \cdot \int \frac{z\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}},$$

et quia A per quadraturam circuli definitur, prodibit valor huius producti

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} \cdot \int \frac{z\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

unde, si alterius harum duarum formularum valor innotesceret, simul alterius valor foret cognitus; hoc enim modo ex binis valoribus A et B bini reliqui A' et B' ita determinantur, ut sit

$$A' = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad B' = A.$$

Denique etiam operae pretium erit notasse hanc relationem

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = \frac{2}{3} A = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = 4$

17. Hic iam primo brevitatis gratia ponamus

$$[\int \partial x \sqrt[4]{u} = p,] \quad \int \partial x \sqrt[4]{u^2} = q \quad \text{et} \quad \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = r;$$

praeterea vero designemus formulam integralem

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^{4-\nu}}}$$

per characterem (μ, ν), quandoquidem iam vidimus litteras μ et ν inter se permutari posse. Deinde aequatio principalis hoc modo repraesentetur

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^\mu} \cdot \int \partial x \sqrt[4]{u^\nu} = \frac{\mu\nu}{\mu+\nu} \int \partial x \sqrt[4]{u^{\mu+\nu}} \cdot (\mu, \nu),$$

ubi notetur, si $\mu + \nu = \lambda = 4$, fore

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^4} = 1;$$

sin autem $\mu + \nu = \lambda + \alpha = 4 + \alpha$, erit

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^{4+\alpha}} = \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right) \int u^{\frac{\alpha}{4}} \partial x = \frac{\mu+\nu}{4} \int \partial x \sqrt[4]{u^\alpha}.$$

18. Tribuamus nunc litteris μ et ν successive omnes valores minores quam 4 atque aequatio principalis nobis praebebit sequentes aequationes:

1°. Si $\begin{pmatrix}\mu=1\\ \nu=1\end{pmatrix}$, erit $pp = \frac{1}{2} q(1,1)$, unde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1,1) = A$.

2°. Si $\begin{pmatrix}\mu=1\\ \nu=2\end{pmatrix}$, erit $pq = \frac{2}{3} r(1,2)$, unde $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1,2) = B$.

3°. Si $\begin{pmatrix}\mu=1\\ \nu=3\end{pmatrix}$, erit $pr = \frac{3}{4}(1,3) = C$.

4°. Si $\begin{pmatrix}\mu=2\\ \nu=2\end{pmatrix}$, erit $qq = \quad (2,2) = D$.

5°. Si $\begin{pmatrix}\mu=2\\ \nu=3\end{pmatrix}$, erit $qr = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} p(2,3)$, unde fit $\frac{qr}{p} = \frac{3}{2}(2,3) = E$.

6°. Si $\begin{pmatrix}\mu=3\\ \nu=3\end{pmatrix}$, erit $rr = \frac{9}{6} \cdot \frac{6}{4} q(3,3)$, unde fit $\frac{rr}{q} = \frac{9}{4}(3,3) = F$.

19. Hinc igitur nacti sumus sex aequationes, ex quibus tres nostras incognitas p, q et r definiri oportet, quod igitur pluribus modis fieri potest, siquidem ternae aequationes sufficiunt. Eligamus igitur eas, quae negotium facillime conficiunt, ac primo quidem quarta nobis statim dat

$$q = \sqrt{D},$$

unde ex prima elicimus $pp = A\sqrt{D}$ ideoque

$$p = \sqrt{A}\sqrt{D} = \sqrt[4]{AAD},$$

denique ex aequatione sexta colligimus $rr = F\sqrt{D}$ ideoque

$$r = \sqrt[4]{FFD}$$

sicque omnes tres formulas transcendentes ita determinavimus, ut sit

$$1^0.\quad p = \int \partial x \sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{AAD} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(1,1)^2(2,2)},$$

$$2^0.\quad q = \int \partial x \sqrt[4]{u^2} = \int \partial x \sqrt{u} = \sqrt{D} = \sqrt{(2,2)},$$

$$3^0.\quad r = \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = \sqrt[4]{DFF} = \tfrac{3}{2}\sqrt[4]{(2,2)(3,3)^2}.$$

20. Hic iam notasse iuvabit valorem formulae (μ, ν) casu, quo $\mu + \nu = \lambda$, in genere per quadraturam circuli exprimi posse, cum hoc casu sit

$$(\mu, \nu) = \frac{\pi}{\lambda \sin. \frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

Nostro igitur casu, quo $\lambda = 4$, erit

$$(2, 2) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{4},$$

deinde quoque erit

$$(1, 3) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Hinc igitur patet fore

$$D = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad C = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}},$$

ita ut hae duae litterae C et D a sola quadratura circuli pendeant.

21. Quoniam has tres determinationes, nempe

$$p = \sqrt[4]{AAD}, \quad q = \sqrt{D} \quad \text{et} \quad r = \sqrt[4]{DFF},$$

ex aequationibus 1, 4 et 6ta elicuimus, si eosdem valores in reliquis aequationibus substituamus, reperiemus egregias relationes inter litteras nostras maiusculas. Sic enim secunda aequatio $pq = Br$ dabit $AAD^3 = B^4DFF$, quae reducitur ad hanc

$$AD = BBF;$$

tertia vero aequatio $pr = C$ dabit

$$ADF = CC;$$

denique quinta aequatio $qr = Ep$ praebebit $D^3FF = A^2DE^4$, unde fit

$$DF = AEE.$$

Hoc ergo modo deducti sumus ad tres sequentes relationes

$$1^0.\ AD = BBF, \quad 2^0.\ ADF = CC \quad \text{et} \quad 3^0.\ DF = AEE,$$

quarum prima ducta in secundam dabit $AD = BC$, at vero secunda ducta in tertiam producit $DF = CE$. Cum igitur sit $AD = BC$, ex prima concluditur quoque fore $C = BF$, ita ut ternae determinationes repertae ad istas ternas revocentur

$$1^0.\ C = AE, \quad 2^0.\ C = BF, \quad 3^0.\ AD = BC,$$

quae reducuntur ad istas tres simplicissimas

$$1^0.\ C = AE, \quad 2^0.\ C = BF, \quad 3^0.\ D = BE.$$

22. Quodsi iam in his postremis aequationibus loco litterarum formulas integrales per nostros characteres designatas introducamus, provenient sequentes relationes:

$$1^0.\ (1, 3) = (1, 1)(2, 3),$$

$$2^0.\ (1, 3) = 2(1, 2)(3, 3)$$

et

$$3^0.\ (2, 2) = (1, 2)(2, 3).$$

Hinc igitur per ipsas formulas integrales habebimus istas tres relationes maxime memorabiles:

$$1^0.\quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{z\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}},$$

$$2^0.\quad \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)}},$$

et

$$3^0.\quad \frac{\pi}{4} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}},$$

quarum ultimam iam dudum in medium attuli.[1])

23. Cum igitur ex sex formulis integralibus, quae hic occurrunt, binae, scilicet C et D, a quadratura circuli pendeant, si modo ex reliquis unius valor innotescat, valores ceterarum inde assignari poterunt. Si enim praeter characteres (1, 3) et (2, 2) insuper hunc (1, 2) tanquam cognitum spectemus, reliqui tres per hos sequenti modo determinabuntur:

$$(3,3) = \frac{(1,3)}{2(1,2)}, \quad (2,3) = \frac{(2,2)}{(1,2)}, \quad (1,1) = \frac{(1,2)(1,3)}{(2,2)}.$$

EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = 5$

24. Vocemus hic formulas transcendentes quaesitas

$$\int u^{\frac{1}{5}} \partial x = p, \quad \int u^{\frac{2}{5}} \partial x = q, \quad \int u^{\frac{3}{5}} \partial x = r, \quad \int u^{\frac{4}{5}} \partial x = s.$$

Nunc vero character (μ, ν) significet hanc formulam integralem

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[5]{(1-z^5)^{5-\nu}}};$$

---

1) Vide epistolam EULERI d. 20. Dec. 1738 ad JOH. BERNOULLI datam, Biblioth. mathem. 5_3 (1904), p. 291, et EULERI Commentationes 59 et 122 (indicis ENESTROEMIANI); *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_{17}, p. 34, et I_{14}, p. 268. G. F.

quibus positis ex aequatione principali decem sequentes aequationes nanciscemur:

1°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 1\end{pmatrix}$, erit $pp = \frac{1}{2} q(1, 1)$, unde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1, 1) = A.$

2°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, erit $pq = \frac{2}{3} r(1, 2)$, ergo $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1, 2) = B.$

3°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $pr = \frac{3}{4} s(1, 3)$, ergo $\frac{pr}{s} = \frac{3}{4}(1, 3) = C.$

4°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $ps = \frac{4}{5}(1, 4) = D.$

5°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, erit $qq = s(2, 2)$, ergo $\frac{qq}{s} = (2, 2) = E.$

6°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $qr = \frac{6}{5}(2, 3) = F.$

7°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $qs = \frac{8}{6} \cdot \frac{6}{5} p(2, 4)$, ergo $\frac{qs}{p} = \frac{8}{5}(2, 4) = G.$

8°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 3\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $rr = \frac{9}{6} \cdot \frac{6}{5} p(3, 3)$, ergo $\frac{rr}{p} = \frac{9}{5}(3, 3) = H.$

9°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 3\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $rs = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{5} q(3, 4)$, ergo $\frac{rs}{q} = \frac{12}{5}(3, 4) = I.$

10°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 4\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $ss = \frac{16}{8} \cdot \frac{8}{5} r(4, 4)$, ergo $\frac{ss}{r} = \frac{16}{5}(4, 4) = K.$

25. Quoniam igitur decem adepti sumus aequationes, ex quibus quatuor quantitates incognitas definiri oportet, eligamus eas, quibus negotium facillime expedietur. Quarta autem aequatio statim dat

$$s = \frac{D}{p};$$

ex sexta autem fit

$$r = \frac{F}{q},$$

ita ut tantum supersit binas litteras p et q elicere. Deinde vero ex prima deducimus

$$q = \frac{pp}{A},$$

ita ut sit

$$r = \frac{AF}{pp}.$$

Nunc igitur ex secunda aequatione fiet

$$\frac{p^5}{AAF} = B,$$

unde fit

$$p = \sqrt[5]{AABF},$$

quo valore invento colligitur fore

$$q = \sqrt[5]{\frac{BBFF}{A}}, \quad r = \sqrt[5]{\frac{AF^3}{BB}};$$

denique erit

$$s = \frac{D}{\sqrt[5]{AABF}}.$$

Sicque omnes quatuor incognitas per quadraturas ordinarias exprimere licebit. Quodsi iam hos valores in reliquis aequationibus substituamus, orientur sequentes aequationes:

$1^0.\ CD = AF,$

$2^0.\ BF = ED,$

$3^0.\ D = AG,$

$4^0.\ F = BH,$

$5^0.\ D = BI,$

$6^0.\ DD = AFK,$

unde ob $D = AG$ eruitur

$$DG = FK.$$

26. Ecce ergo sex novae prodierunt determinationes, quibus decem nostrae litterae a se invicem pendent, ita ut ex quatuor pro cognitis assumtis reliquae sex definiri queant; pro cognitis autem imprimis assumi conveniet binas D et F, quippe quae per quadraturam circuli innotescunt, cum sit

$$D = \frac{4}{5}(1, 4) = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \sin. \frac{1}{5}\pi} \quad \text{et} \quad F = \frac{6}{5}(2, 3) = \frac{6}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2}{5}\pi}.$$

Dummodo ergo duae reliquarum etiam ut cognitae spectentur, ceteras omnes per eas definire licebit. At vero sex illae relationes rite inter se comparatae ternas formulas tam ipsi D quam ipsi F aequales suppeditant, quae sunt

$$D = AG = BI = CK \quad \text{et} \quad F = BH = CG = EI.$$

Hinc igitur, si praeter D et F etiam litterae A et B pro cognitis assumantur, reliquae litterae ex iis determinabuntur, ut sequitur:

$$C = \frac{AF}{D}, \quad E = \frac{BF}{D}, \quad G = \frac{D}{A}, \quad H = \frac{F}{B}, \quad I = \frac{D}{B} \quad \text{et} \quad K = \frac{DD}{AF}.$$

27. Substituamus nunc loco harum litterarum characteres formularum integralium atque sex sequentes relationes obtinebuntur:

$$1^0.\ (1, 4) = (1, 1)(2, 4),$$
$$2^0.\ (1, 4) = 2(1, 2)(3, 4),$$
$$3^0.\ (1, 4) = 3(1, 3)(4, 4),$$
$$4^0.\ (2, 3) = (1, 2)(3, 3),$$
$$5^0.\ (2, 3) = (1, 3)(2, 4),$$
$$6^0.\ (2, 3) = 2(2, 2)(3, 4);$$

unde plura egregia theoremata formari possent.

28. Quoniam ambae litterae D et F seu potius characteres $(1, 4)$ et $(2, 3)$ ambo peripheriam circuli involvunt, eorum ratio seu fractio $\frac{(1, 4)}{(2, 3)}$ algebraice exhiberi poterit, quippe cuius valor est

$$= \frac{\sin. \frac{2}{5}\pi}{\sin. \frac{1}{5}\pi} = 2 \cos. \frac{1}{5}\pi.$$

Hinc etiam sequentes rationes inter binas formulas integrales derivantur

$$2\cos.\frac{1}{5}\pi=\frac{(1,1)}{(1,3)}=2\frac{(3,4)}{(3,3)}=\frac{(1,2)}{(2,2)}=3\frac{(4,4)}{(2,4)},$$

unde iterum eximia theoremata formari possent, si praesens nostrum institutum hoc postularet. Pleniorem autem huius argumenti expositionem in aliam occasionem sum dilaturus.

29. Simili modo, quo hic casum $\lambda=5$ evolvimus, etiam tractare liceret sequentes casus, quibus litterae λ maiores valores tribuuntur. Quoniam autem numerus aequationum continuo secundum numeros trigonales increscit, superfluum foret istum laborem hic suscipere, quoniam omnes operationes analyticae, quibus hae solutiones nituntur, iam satis dilucide sunt expositae.

DE INTEGRATIONE FORMULAE $\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$ ALIARUMQUE EIUSDEM GENERIS PER LOGARITHMOS ET ARCUS CIRCULARES

M. S. Academiae exhib. die 16. Sept. 1776

Commentatio 668 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 36—48

1.[1]) Cum mihi non ita pridem contigisset integrale huius formulae

$$\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$$

per arcum circularem et logarithmum exprimere[2]), haec integratio eo magis mihi visa est notatu digna, quod nullo modo perspiciebam eam ad rationalitatem perduci posse, quandoquidem certum est istam formulam, quae simplicior videatur, $\int \partial x \sqrt{(1+x^4)}$, neutiquam ad rationalitatem revocari posse; neque enim videbam accessionem denominatoris $1-x^4$ hanc reductionem promovere posse hincque concludebam dari eiusmodi formulas differentiales irrationales, quarum integralia per logarithmos et arcus circulares exhibere liceat,

1) In editione principe paragraphi numeris 56 usque ad 75 signatae sunt, problemata numeris 16 usque ad 18. A. K.

2) Vide Commentationem 539 voluminis I18, p. 105. Confer etiam Commentationes 669 et 688 huius voluminis. A. K. et G. F.

etiamsi nulla substitutione ab irrationalitate liberari queant, quae quidem conclusio utique valet pro formulis compositis; quanquam enim istae formulae

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

ad rationalitatem reduci possunt[1]), tamen formula ex iis composita

$$\int \partial x \left(\frac{A}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} + \frac{B}{\sqrt[4]{(1+x^4)}} \right)$$

per nullam plane substitutionem ad aliam formulam rationalem reduci potest, propterea quod utraque pars peculiarem substitutionem postulat.

2. Interim tamen cum formulam propositam

$$\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = S$$

attentius essem contemplatus, inveni eam ab irrationalitate liberari posse ope huius substitutionis prorsus singularis

$$x = \frac{\sqrt{(1+tt)} + \sqrt{(1-tt)}}{t\sqrt{2}}.$$

Hinc enim fit

$$\partial x = -\frac{\partial t}{tt\sqrt{2(1+tt)}} - \frac{\partial t}{tt\sqrt{2(1-tt)}},$$

quae duae partes ad eundem denominatorem reductae dant

$$\partial x = -\frac{\partial t}{tt\sqrt{2(1-t^4)}} \left(\sqrt{(1-tt)} + \sqrt{(1+tt)} \right).$$

Cum igitur sit $\sqrt{(1+tt)} + \sqrt{(1-tt)} = tx\sqrt{2}$, hoc valore substituto fiet

$$\partial x = -\frac{x \partial t}{t\sqrt{(1-t^4)}},$$

ita ut sit

$$\partial S = -\frac{x \partial t \sqrt{(1+x^4)}}{t(1-x^4)\sqrt{(1-t^4)}}.$$

---

1) Confer Commentationem 254 voluminis I17, imprimis p. 236. G. F.

3. Porro autem sumtis quadratis erit

$$xx = \frac{1+\sqrt{(1-t^4)}}{tt},$$

unde colligimus

$$1+xx = \frac{1+tt+\sqrt{(1-t^4)}}{tt} = \frac{\sqrt{(1+tt)}}{tt}\left(\sqrt{(1+tt)}+\sqrt{(1-tt)}\right),$$

sicque ob

$$\sqrt{(1+tt)}+\sqrt{(1-tt)} = tx\sqrt{2}$$

erit

$$1+xx = \frac{x\sqrt{2}(1+tt)}{t}.$$

Simili modo erit

$$1-xx = -\frac{1-tt+\sqrt{(1-t^4)}}{tt}$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-tt)}}{tt}\left(\sqrt{(1-tt)}+\sqrt{(1+tt)}\right) = -\frac{x\sqrt{2}(1-tt)}{t}.$$

Hinc igitur sequitur fore

$$1-x^4 = -\frac{2xx\sqrt{(1-t^4)}}{tt},$$

qui valor in nostra formula substitutus praebet

$$\partial S = +\frac{t\partial t\sqrt{(1+x^4)}}{2x(1-t^4)}.$$

4. Deinde sumtis quadratis habebimus

$$(1+xx)^2 = \frac{2xx(1+tt)}{tt}$$

et

$$(1-xx)^2 = \frac{2xx(1-tt)}{tt},$$

quibus additis prodibit

$$(1+xx)^2+(1-xx)^2 = 2(1+x^4) = \frac{4xx}{tt},$$

unde fit

$$\sqrt{(1+x^4)} = \frac{x\sqrt{2}}{t};$$

quo valore substituto nostra formula abit in hanc

$$\partial S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial t}{1-t^4},$$

quae ergo formula est rationalis et solam variabilem t complectitur.

5. Cum igitur porro sit

$$\frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+tt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-tt},$$

tum vero integrando reperiatur

$$\int \frac{\partial t}{1+tt} = \text{Arc. tang. } t$$

et

$$\int \frac{\partial t}{1-tt} = \frac{1}{2} l \frac{1+t}{1-t} = l \frac{1+t}{\sqrt{1-tt}},$$

his valoribus substitutis reperietur

$$S = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Arc. tang. } t + \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{1+t}{\sqrt{(1-tt)}}.$$

Quare cum regrediendo sit

$$t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}},$$

supra autem invenerimus

$$1 + x^4 = \frac{2xx}{tt},$$

erit

$$tt = \frac{2xx}{1+x^4}$$

hincque

$$1 - tt = \frac{(1-xx)^2}{1+x^4}$$

ideoque

$$\sqrt{(1-tt)} = \frac{1-xx}{\sqrt{(1+x^4)}};$$

his valoribus substitutis integrale quaesitum per ipsam variabilem x sequenti modo exprimetur

$$\int \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Arc. tang.} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} l \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{(1+x^4)}}{1-xx}.$$

6. Hic autem merito quaeretur, quonam artificio ad substitutionem illam, quae primo intuitu a scopo prorsus aliena videtur, pertigerim, quandoquidem nemo certe in eam incidisset neque etiam ipse memini, quanam ratione ad eam sim perductus. Verum postquam omnia momenta accuratius perpendissem, methodum multo planiorem detexi, qua istud negotium sine tot ambagibus absolvi potest, quam igitur hic perspicue proponi conveniet.

METHODUS PLANIOR ET MAGIS NATURALIS FORMULAM INTEGRALEM PROPOSITAM TRACTANDI

7. Quo ex formula

$$\partial S = \frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$$

irrationalitatem saltem apparenter tollamus, ponamus

$$\sqrt{(1+x^4)} = px,$$

ut fiat

$$\partial S = \frac{px\,\partial x}{1-x^4}.$$

Cum igitur sit $1+x^4 = ppxx$, erit radicem extrahendo

$$xx = \frac{1}{2}pp + \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^4 - 1\right)}.$$

Ponatur hic

$$\frac{1}{2}pp = q,$$

ut habeamus

$$xx = q + \sqrt{(qq-1)}$$

et

$$2lx = l(q + \sqrt{(qq-1)})$$

hincque differentiando

$$\frac{2\partial x}{x} = \frac{\partial q}{\sqrt{(qq-1)}};$$

ergo loco q restituto valore $\frac{1}{2}pp$ erit

$$\frac{2\partial x}{x} = \frac{2p\partial p}{\sqrt{(p^4-4)}}$$

sicque fiet

$$\partial x = \frac{xp\partial p}{\sqrt{(p^4-4)}},$$

quo valore substituto fit

$$\partial S = \frac{p^2x^2\partial p}{(1-x^4)\sqrt{(p^4-4)}}.$$

8. Ut nunc hinc quantitatem x penitus eiiciamus, quoniam invenimus

$$xx = \frac{pp+\sqrt{(p^4-4)}}{2},$$

erit

$$x^4 = \frac{p^4-2+pp\sqrt{(p^4-4)}}{2}$$

hincque

$$1-x^4 = \frac{4-p^4-pp\sqrt{(p^4-4)}}{2} = -\frac{\sqrt{(p^4-4)}\,(pp+\sqrt{(p^4-4)})}{2}.$$

Unde colligitur fore

$$\frac{xx}{1-x^4} = -\frac{1}{\sqrt{(p^4-4)}},$$

quo valore substituto impetramus formulam differentialem rationalem per novam variabilem p expressam, quae est

$$\partial S = -\frac{pp\partial p}{p^4-4} \quad \text{existente} \quad p = \frac{\sqrt{(1+x^4)}}{x};$$

unde idem integrale, quod ante nacti sumus, deducitur. Similis autem substitutio cum successu adhiberi potest in formulis integralibus multo magis generalibus, veluti in sequente problemate ostendemus.

PROBLEMA 1[1])

9. *Propositam formulam integralem*

$$S = \int \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx+cx^4)}}{a-cx^4}$$

ope idoneae substitutionis ab omni irrationalitate liberare.

SOLUTIO

Ad speciem saltem irrationalitatis tollendam ponamus

$$\sqrt{(a+bxx+cx^4)} = px,$$

ut habeamus

$$S = \int \frac{px\,\partial x}{a-cx^4}.$$

Cum igitur sit

$$p = \frac{\sqrt{(a+bxx+cx^4)}}{x},$$

erit[2])

$$\partial p = -\frac{a\partial x - cx^4\partial x}{xx\sqrt{(a+bxx+cx^4)}} = \frac{-a\partial x + cx^4\partial x}{px^3},$$

unde erit

$$\partial x = -\frac{px^3\partial p}{a-cx^4},$$

quo valore substituto fiet

$$\partial S = -\frac{ppx^4\partial p}{(a-cx^4)^2}.$$

10. Deinde cum sit

$$a + cx^4 = (pp-b)xx$$

hincque porro

$$(a+cx^4)^2 = (pp-b)^2x^4,$$

---

1) Vide notam 1 p. 84. G. F.

2) In editione principe formula sequens habet $+cx^4$ loco $-cx^4$. Vide de EULERI scribendi modo notam 1 ad p. 408 voluminis I$_{14}$ adiectam. G. F.

auferatur $4acx^4$ ac remanebit

$$(a - cx^4)^2 = ((pp - b)^2 - 4ac)x^4,$$

quo substituto formula nostra fiet

$$\partial S = -\frac{pp\,\partial p}{(pp-b)^2 - 4ac}.$$

Sicque quantitas variabilis x penitus e calculo est extrusa ac deducti sumus ad formulam differentialem prorsus rationalem, cuius ergo integratio per logarithmos et arcus circulares nulla amplius laborat difficultate. Quin etiam formulae adhuc generaliores eodem modo feliciter tractari poterunt.

PROBLEMA 2

11. *Propositam hanc formulam integralem*

$$S = \int \frac{x^{n-2}\,\partial x \sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})}}{a - cx^{2n}}$$

ope idoneae substitutionis ab omni irrationalitate liberare.

SOLUTIO

Utamur igitur hac substitutione

$$\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})} = px,$$

ut formula proposita hanc induat formam

$$\partial S = \frac{px^{n-1}\partial x}{a - cx^{2n}};$$

tum vero, cum sit

$$p^n = \frac{a + bx^n + cx^{2n}}{x^n},$$

erit differentiando

$$p^{n-1}\,\partial p = -\frac{\partial x\,(a - cx^{2n})}{x^{n+1}},$$

unde fit

$$\partial x = -\frac{p^{n-1}x^{n+1}\partial p}{a-cx^{2n}},$$

quo valore substituto formula nostra induet hanc formam

$$\partial S = -\frac{p^n x^{2n}\partial p}{(a-cx^{2n})^2}.$$

12. Deinde cum sit

$$a + cx^{2n} = (p^n - b)x^n,$$

erit

$$(a + cx^{2n})^2 = (p^n - b)^2 x^{2n};$$

hinc subtrahatur $4acx^{2n}$ et remanebit

$$(a - cx^{2n})^2 = ((p^n - b)^2 - 4ac)x^{2n};$$

substituto igitur hoc valore fiet

$$\partial S = -\frac{p^n \partial p}{(p^n-b)^2 - 4ac},$$

quae ergo omnino est rationalis, atque adeo integratio per logarithmos et arcus circulares facile expeditur.

PROBLEMA 3

13. *Invenire formulas integrales adhuc generaliores, quae ope substitutionis*

$$\sqrt[n]{(a + bx^n + cx^{2n})} = px$$

ad rationalitatem perduci queant.

SOLUTIO

Quoniam in praecedente problemate invenimus hanc formulam differentialem

$$\frac{x^{n-2}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})}}{a-cx^{2n}}$$

ope huius substitutionis reduci ad istam formulam rationalem

$$-\frac{p^n \partial p}{(p^n-b)^2-4ac},$$

erit

$$\frac{Px^{n-2}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})}}{a-cx^{2n}} = -\frac{Pp^n \partial p}{(p^n-b)^2-4ac},$$

ubi loco P functiones quaecunque ipsius x accipi possunt eiusmodi, ut facta substitutione praebeant functiones rationales ipsius p, id quod infinitis modis fieri poterit, quorum praecipuos hic percurramus.

14. Cum vi substitutionis sit

$$\frac{\sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})}}{x} = p,$$

loco P potestas quaecunque ipsius p assumi poterit, quae sit p^λ. Sumatur igitur $P = p^\lambda Q$ eritque etiam

$$P = \frac{Q\sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})^\lambda}}{x^\lambda};$$

quibus valoribus substitutis prodibit ista aequatio

$$\frac{Qx^{n-\lambda-2}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})^{\lambda+1}}}{a-cx^{2n}} = -\frac{Qp^{n+\lambda}\partial p}{(p^n-b)^2-4ac},$$

quae posterior formula denuo est rationalis.

15. Deinde in praecedente problemate quoque invenimus esse

$$\frac{(a-cx^{2n})^2}{x^{2n}} = (p^n-b)^2-4ac,$$

quamobrem pro Q sumamus potestatem exponentis i harum quantitatum vel potius harum quantitatum reciprocam, scilicet capiatur

$$Q = \frac{x^{2in}}{(a-cx^{2n})^{2i}} = \frac{1}{((p^n-b)^2-4ac)^i}.$$

Quibus valoribus substitutis obtinebimus formulam latissime patentem hanc

$$\frac{x^{(2i+1)n-\lambda-2}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})^{\lambda+1}}}{(a-cx^{2n})^{2i+1}} = -\frac{p^{n+\lambda}\partial p}{((p^n-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

ubi pro litteris λ et i numeros quoscunque integros sive positivos sive negativos accipere licet; perpetuo enim formula differentialis per p expressa manebit rationalis.

16. Quin etiam haec reductio multo generalior reddi potest, propterea quod necesse non est, ut λ sit numerus integer. Quaecunque enim fractio pro λ assumatur, formula per p expressa semper facile ad rationalitatem reduci poterit. Si enim ponamus $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, membrum dextrum fiet

$$-\frac{p^{\frac{\nu n+\mu}{\nu}}\partial p}{((p^n-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

quae rationalis redditur ponendo

$$p = q^\nu;$$

erit enim $\partial p = \nu q^{\nu-1}\partial q$ ideoque hoc membrum

$$-\frac{\nu q^{\mu+\nu n+\nu-1}\partial q}{((q^{\nu n}-b)^2-4ac)^{i+1}}.$$

Nunc autem uti oportebit hac substitutione

$$\sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})} = q^\nu x$$

atque habebitur ista reductio

$$\frac{x^{(2i+1)n-\frac{\mu}{\nu}-2}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{\mu+\nu}{\nu}}}}{(a-cx^{2n})^{2i+1}} = -\frac{\nu q^{\mu+\nu n+\nu-1}\partial q}{((q^{n\nu}-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

quae postrema formula utique est rationalis.

17. Ut etiam in membro sinistro exponentes fractos ipsius x tollamus, ponamus $x = y^r$ eritque

$$\frac{y^{(2i+1)nr-\mu-r-1}\partial y \sqrt[nr]{(a+by^{nr}+cy^{2nr})^{\mu+r}}}{(a-cy^{2nr})^{2i+1}} = -\frac{q^{\mu+nr+r-1}\partial q}{((q^{nr}-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

quae expressio autem multo generalior videtur, quam revera est. Si enim loco nr ubique scribamus n, resultat ista aequatio

$$\frac{y^{(2i+1)n-\mu-r-1}\partial y \sqrt[n]{(a+by^n+cy^{2n})^{\mu+r}}}{(a-cy^{2n})^{2i+1}} = -\frac{q^{\mu+r+n-1}\partial q}{((q^n-b)^2-4ac)^{i+1}};$$

haec autem aequatio manifesto non discrepat ab illa § 15 allata; si enim hic loco $\mu+r-1$ scribamus λ et loco y et q ut ante x et p, ipsa praecedens aequatio reperitur sicque sufficiet loco λ numeros integros assumere.

COROLLARIUM 1

18. Quo clarius indoles harum formularum perspiciatur, sumamus $n = 2$ et formula differentialis variabilem x involvens erit

$$\frac{x^{4i-\lambda}\partial x \sqrt{(a+bxx+cx^4)^{\lambda+1}}}{(a-cx^4)^{2i+1}},$$

quae facta substitutione

$$\sqrt{(a+bxx+cx^4)} = px$$

transmutatur in hanc rationalem

$$-\frac{p^{\lambda+2}\partial p}{((pp-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

unde sumendo $\lambda = 4i$ resultat ista aequatio

$$\frac{\partial x \sqrt{(a+bxx+cx^4)^{4i+1}}}{(a-cx^4)^{2i+1}} = -\frac{p^{4i+2}\partial p}{((pp-b)^2-4ac)^{i+1}};$$

in qua si porro ponatur $i = 0$, fiet

$$\frac{\partial x \sqrt{(a+bxx+cx^4)}}{a-cx^4} = -\frac{pp\partial p}{(pp-b)^2-4ac};$$

quae, si insuper ponatur $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$, praebet

$$\frac{\partial x \sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = -\frac{pp\partial p}{p^4-4},$$

quae est ipsa reductio, quae supra § 8 fuerat inventa.

COROLLARIUM 2

19. Si sumamus $n = 3$, prodibit ista reductio generalis

$$\frac{x^{6i-\lambda+1}\partial x \sqrt[3]{(a+bx^3+cx^6)^{\lambda+1}}}{(a-cx^6)^{2i+1}} = -\frac{p^{\lambda+3}\partial p}{((p^3-b)^2-4ac)^{i+1}},$$

quae ponendo $i = 0$ migrat in hanc

$$\frac{x^{-\lambda+1}\partial x \sqrt[3]{(a+bx^3+cx^6)^{\lambda+1}}}{a-cx^6} = -\frac{p^{\lambda+3}\partial p}{(p^3-b)^2-4ac};$$

posito vero $b = 0$ haec prodit formula concinnior

$$\frac{x^{-\lambda+1}\partial x \sqrt[3]{(a+cx^6)^{\lambda+1}}}{a-cx^6} = -\frac{p^{\lambda+3}\partial p}{p^6-4ac},$$

cuius duos casus evolvisse iuvabit.

I. Sit $\lambda = 0$ eritque

$$\frac{x\partial x \sqrt[3]{(a+cx^6)}}{a-cx^6} = -\frac{p^3\partial p}{p^6-4ac},$$

quae concinnior redditur ponendo $xx = y$; reperietur enim

$$\frac{\partial y \sqrt[3]{(a+cy^3)}}{a-cy^3} = -\frac{2p^3\partial p}{p^6-4ac}.$$

II. Sumto autem $\lambda = 1$ ista prodit expressio

$$\frac{\partial x \sqrt[3]{(a+cx^6)^2}}{a-cx^6} = -\frac{p^4 \partial p}{p^6 - 4ac}.$$

SCHOLION

20. Ex his exemplis satis intelligitur, quam egregie reductiones ex nostris formulis generalibus deduci queant, quarum resolutio, nisi methodus nostra adhibeatur, omnes vires analyseos superare videatur.

MEMORABILE GENUS FORMULARUM DIFFERENTIALIUM MAXIME IRRATIONALIUM QUAS TAMEN AD RATIONALITATEM PERDUCERE LICET

M. S. Academiae exhib. die 15. Maii 1777

Commentatio 669 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 48—59

1.[1]) Cum nuper hanc formulam differentialem

$$\frac{\partial x}{(1-xx)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

tractassem eamque singulari modo ad rationalitatem perduxissem[2]), mox vidi eandem methodum succedere in hac generaliori

$$\frac{\partial x}{(a+bxx)\sqrt[4]{(a+2bxx)}}$$

atque adeo in hac multo generaliori

$$\frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}},$$

1) In editione principe paragraphi numeris 76 usque ad 91 signatae sunt, problemata numeris 19 usque ad 21. A. K.

2) Vide Commentationem 688 huius voluminis, quae Commentatio ante hanc Commentationem 669 Academiae exhibita est. A. K.

ubi irrationalitas ad ordinem quantumvis altum assurgere potest, cuius resolutio sequenti modo instituitur.

2. Utor scilicet hac substitutione

$$\frac{x}{\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}} = Z,$$

ut formula nostra integranda, quam per ∂V indicemus, fiat

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Z}{a+bx^n};$$

sumtis ergo logarithmis erit

$$lZ = lx - \frac{1}{2n} l(a+2bx^n),$$

unde differentiando fit

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} - \frac{bx^{n-1}\partial x}{a+2bx^n} = \frac{\partial x(a+bx^n)}{x(a+2bx^n)};$$

erit ergo

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial Z(a+2bx^n)}{Z(a+bx^n)};$$

hinc ergo nostra formula erit

$$\partial V = \frac{\partial Z(a+2bx^n)}{(a+bx^n)^2}.$$

Cum igitur sit

$$Z^{2n} = \frac{x^{2n}}{a+2bx^n},$$

erit $a+2bx^n = \frac{x^{2n}}{Z^{2n}}$ ideoque

$$\partial V = \frac{x^{2n}\partial Z}{Z^{2n}(a+bx^n)^2}.$$

Cum porro sit $aa+2abx^n = \frac{ax^{2n}}{Z^{2n}}$, addatur utrinque bbx^{2n} et prodibit

$$(a+bx^n)^2 = \frac{ax^{2n}}{Z^{2n}} + bbx^{2n} = \frac{x^{2n}(a+bbZ^{2n})}{Z^{2n}},$$

quo valore substituto nostra formula evadet

$$\partial V = \frac{\partial Z}{a + bbZ^{2n}},$$

quae ergo formula est rationalis ideoque per logarithmos et arcus circulares integrari poterit.

3. Observavi porro, cum hic post signum radicale tantum binomium involvatur, eius loco quoque trinomia atque adeo polynomia introduci posse. Pro trinomiis autem formula differentialis talem habebit formam

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a + bx^n)\sqrt[3n]{(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})}},$$

ubi ergo irrationalitas ad ordinem multo altiorem ascendit. Nihilo vero minus etiam ista formula ab irrationalitate liberari poterit ope similis substitutionis

$$Z = \frac{x}{\sqrt[3n]{(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})}};$$

hinc enim sumtis logarithmis per differentiationem nanciscemur

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} - \frac{abx^{n-1}\partial x + 2bbx^{2n-1}\partial x}{aa + 3abx^n + 3bbx^{2n}}$$

seu

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x(a + bx^n)^2}{x(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})}$$

ideoque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial Z}{Z} \cdot \frac{aa + 3abx^n + 3bbx^{2n}}{(a + bx^n)^2}.$$

Cum igitur nostra formula iam sit $\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Z}{a + bx^n}$, introducto elemento ∂Z obtinebimus

$$\partial V = \frac{\partial Z(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})}{(a + bx^n)^3}.$$

4. Cum igitur vi substitutionis sit

$$\sqrt[3n]{(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})} = \frac{x}{Z},$$

erit

$$aa + 3abx^n + 3bbx^{2n} = \frac{x^{3n}}{Z^{3n}}.$$

Multiplicetur utrinque per a et addatur utrinque b^3x^{3n} eritque

$$(a + bx^n)^3 = \frac{x^{3n}(a + b^3Z^{3n})}{Z^{3n}};$$

hoc igitur valore substituto ex formula nostra littera x penitus excludetur prodibitque

$$\partial V = \frac{\partial Z}{a + b^3Z^{3n}}.$$

Cuius ergo integrale semper per logarithmos et arcus circulares reperire licebit.

5. Pro quadrinomiis autem ponamus brevitatis gratia

$$\sqrt[4n]{(a^3 + 4aabx^n + 6abbx^{2n} + 4b^3x^{3n})} = S$$

ac formula ad rationalitatem reducenda proponatur haec

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a + bx^n)S},$$

id quod simili modo succedet ope huius substitutionis

$$\frac{x}{S} = Z,$$

unde formula nostra erit

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Z}{a + bx^n}.$$

Cum nunc sit

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{aabx^{n-1}\partial x + 3abbx^{2n-1}\partial x + 3b^3x^{3n-1}\partial x}{a^3 + 4aabx^n + 6abbx^{2n} + 4b^3x^{3n}}$$

sive

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{bx^n(aa + 3abx^n + 3bbx^{2n})}{S^{4n}},$$

erit

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial S}{S},$$

consequenter

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{(a+bx^n)^3}{S^{4n}}$$

hincque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{S^{4n}\partial Z}{Z(a+bx^n)^3},$$

quo valore substituto formula nostra erit

$$\partial V = \frac{S^{4n}\partial Z}{(a+bx^n)^4}.$$

6. Cum autem sit

$$S^{4n} = a^3 + 4aabx^n + 6abbx^{2n} + 4b^3x^{3n},$$

erit

$$aS^{4n} + b^4x^{4n} = (a+bx^n)^4,$$

quo valore substituto erit

$$\partial V = \frac{S^{4n}\partial Z}{aS^{4n} + b^4x^{4n}};$$

quia igitur posuimus $Z = \frac{x}{S}$, erit $S = \frac{x}{Z}$ ideoque $S^{4n} = \frac{x^{4n}}{Z^{4n}}$, qui valor surrogatus dabit

$$\partial V = \frac{\partial Z}{a + b^4Z^{4n}},$$

sicque itidem ad rationalitatem est perducta.

7. Hinc iam facile intelligitur, quo modo pro omnibus polynomiis formulae differentiales comparatae esse debeant, ut tali substitutione ad rationalitatem perduci queant, id quod in sequente problemate expediamus.

PROBLEMA 1

8. *Si proposita fuerit haec formula differentialis*

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})}},$$

eam ad rationalitatem reducere, quantumvis magni numeri pro n et λ accipiantur.

SOLUTIO

Ponamus etiam hic brevitatis gratia

$$\sqrt[\lambda n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})} = S,$$

ut formula fiat

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a+bx^n)S},$$

fiatque insuper

$$\frac{x}{S} = Z,$$

ut habeamus

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Z}{a+bx^n}.$$

Iam logarithmos differentiando reperietur

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{bx^{n-1}\partial x(a+bx^n)^{\lambda-1} - b^\lambda x^{\lambda n-1}\partial x}{S^{\lambda n}}$$

sive

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{bx^n(a+bx^n)^{\lambda-1} - b^\lambda x^{\lambda n}}{S^{\lambda n}}.$$

Cum igitur sit $\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial S}{S}$, hoc valore substituto erit

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{a(a+bx^n)^{\lambda-1}}{S^{\lambda n}}$$

hincque vicissim erit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{S^{\lambda n}\partial Z}{aZ(a+bx^n)^{\lambda-1}},$$

quo valore substituto impetramus

$$\partial V = \frac{S^{\lambda n}\partial Z}{a(a+bx^n)^\lambda};$$

quia nunc est $(a+bx^n)^\lambda = S^{\lambda n} + b^\lambda x^{\lambda n}$, erit

$$\partial V = \frac{S^{\lambda n}\partial Z}{a(S^{\lambda n} + b^\lambda x^{\lambda n})}.$$

Denique ob $S = \frac{x}{Z}$ ideoque $S^{\lambda n} = \frac{x^{\lambda n}}{Z^{\lambda n}}$ hoc valore substituto obtinebitur

$$\partial V = \frac{\partial Z}{a(1+b^\lambda Z^{\lambda n})},$$

quae est rationalis unicam variabilem Z involvens, cuius adeo integrale per logarithmos et arcus circulares assignari poterit.

COROLLARIUM 1

9. Eadem solutio etiam locum habet, si pro λ numeri fracti accipiantur, qua ratione post signum radicale denuo radicalia involvuntur; ita si fuerit $\lambda = \frac{2}{n}$, erit formula radicalis

$$S = \sqrt{((a+bx^n)^{\frac{2}{n}} - b^{\frac{2}{n}}xx)}$$

et formulae nostrae

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a+bx^n)S}$$

integrale erit

$$V = \frac{1}{a}\int \frac{\partial Z}{1+b^{\frac{2}{n}}ZZ} = \frac{1}{ab^{\frac{1}{n}}} \text{Arc. tang. } b^{\frac{1}{n}}Z.$$

COROLLARIUM 2

10. Quo haec clariora reddantur, capiamus $a=1$, $b=1$ et $n=4$, ut pro postremo casu sit

$$S = \sqrt{((1+x^4)^{\frac{1}{2}} - xx)}$$

et

$$\partial V = \frac{\partial x}{(1+x^4)\sqrt{((1+x^4)^{\frac{1}{2}} - xx)}},$$

cuius integrale posito

$$Z = \frac{x}{\sqrt{((1+x^4)^{\frac{1}{2}} - xx)}}$$

erit

$$V = \text{Arc. tang. } Z$$

sive

$$V = \text{Arc. tang. } \frac{x}{\sqrt{((1+x^4)^{\frac{1}{2}} - xx)}}.$$

Sin autem manente $n = 4$ et $a = 1$ fuerit $b = -1$ ideoque

$$S = \sqrt{((1-x^4)^{\frac{1}{2}} - xx\sqrt{-1})},$$

ipsa formula prodiret imaginaria.

COROLLARIUM 3

11. Pro eodem casu $\lambda = \frac{2}{n}$ sit $n = 6$, $a = 1$ et $b = 1$ eritque

$$S = \sqrt{((1+x^6)^{\frac{1}{3}} - xx)}$$

ideoque

$$\partial V = \frac{\partial x}{(1+x^6)\sqrt{((1+x^6)^{\frac{1}{3}} - xx)}}.$$

Cuius integrale posito $\frac{x}{S} = Z$ erit

$$V = \text{Arc. tang. } Z = \text{Arc. tang. } \frac{x}{\sqrt{((1+x^6)^{\frac{1}{3}} - xx)}}.$$

Similique modo alia huius generis exempla pro lubitu formari possunt; verum quamquam formula problematis admodum est generalis, tamen adhuc multo magis generalior fieri potest, uti in sequente problemate sumus ostensuri.

PROBLEMA 2

12. *Si proponatur ista formula differentialis multo generalior, quippe in qua tres occurrunt exponentes indeterminati* λ, n *et* m,

$$\partial V = \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[\lambda n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})^m}},$$

eam ab irrationalitate liberare.

SOLUTIO

Ponatur iterum brevitatis gratia

$$\sqrt[\lambda n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})} = S,$$

ut formula integranda proposita fiat

$$\partial V = \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)S^m} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^m}{(a+bx^n)S^m},$$

quae ergo, si porro ut ante statuamus

$$\frac{x}{S} = Z,$$

fiet

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Z^m}{a+bx^n},$$

unde variabilem x penitus eliminari oportet. Quoniam nunc ambae litterae S et Z eosdem habent valores ut in problemate praecedente atque adeo ipsa formula ∂V oriatur, si praecedens per Z^{m-1} multiplicetur, etiam integrale quaesitum obtinebimus, dum superius integrale per Z^{m-1} multiplicabimus, quo facto erit integrale quaesitum

$$V = \frac{1}{a}\int \frac{Z^{m-1}\partial Z}{1+b^\lambda Z^{\lambda n}}.$$

COROLLARIUM 1

13. Si exponentem m negativum capiamus, irrationalitas in numeratorem transferetur; ita posito $m = -1$ habebimus

$$\partial V = \frac{\partial x \sqrt[\lambda n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})}}{xx(a+bx^n)},$$

cuius ergo integrale per Z expressum erit

$$V = \frac{1}{a}\int \frac{\partial Z}{ZZ(1+b^\lambda Z^{\lambda n})}.$$

Quin etiam per hunc exponentem m irrationalitas simplicior reddi poterit; veluti si sumamus $m = \lambda$, erit

$$\partial V = \frac{x^{\lambda-1}\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})}}.$$

Cuius integrale posito $Z = \frac{x}{S}$ retinente S superiorem valorem erit

$$V = \frac{1}{a}\int \frac{Z^{\lambda-1}\partial Z}{1+b^\lambda Z^{\lambda n}}.$$

COROLLARIUM 2

14. Deinde vero etiam si pro m fractionem assumamus, irrationalitas adhuc magis complicabitur; veluti si sumamus $m = \frac{1}{2}$, formula differentialis iam erit

$$\partial V = \frac{\partial x}{(a+bx^n)\sqrt[2\lambda n]{x^{\lambda n}((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n})}}.$$

Verum hic casus facile ad primum problema revocatur statuendo $x = vv$, ita ut sit

$$\partial V = \frac{2\partial v}{(a+bv^{2n})\sqrt[2\lambda n]{((a+bv^{2n})^\lambda - b^\lambda v^{2\lambda n})}},$$

quae formula a primo problemate aliter non discrepat, nisi quod hic exponens n duplo sit maior.

SCHOLION

15. Quamquam binae litterae a et b pro lubitu tam negative quam positive accipi possunt, tamen occurrunt casus, qui sub hac generali forma non comprehenduntur; veluti si proponatur haec formula

$$\frac{\partial x}{(1-xx)\sqrt[4]{(2xx-1)}},$$

haec in problemate primo non continetur, quia fieri deberet $aa = -1$; quod cum in genere evenire posset, etiam problema generale ad hunc casum accommodatum subiungamus.

PROBLEMA 3

16. *Si ponatur ista formula differentialis latissime patens tres exponentes indeterminatos involvens*

$$\partial V = \frac{x^{m-1}\partial x}{(fx^n-g)\sqrt[\lambda n]{(f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda)^m}},$$

eam ab omni irrationalitate liberare.

SOLUTIO

Statuamus ut ante brevitatis gratia

$$\sqrt[\lambda n]{(f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda)} = S,$$

tum vero

$$Z = \frac{x}{S},$$

ut formula differentialis fiat

$$\partial V = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{Z^m}{fx^n-g}.$$

Nunc autem sumendo differentialia logarithmica est

$$\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{f^\lambda x^{\lambda n}-fx^n(fx^n-g)^{\lambda-1}}{S^{\lambda n}}$$

atque hinc colligitur fore

$$\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{g(fx^n - g)^{\lambda - 1}}{S^{\lambda n}}$$

sicque habebitur

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial Z}{Z} \cdot \frac{S^{\lambda n}}{g(fx^n - g)^{\lambda - 1}},$$

quo valore substituto nanciscimur

$$\partial V = \frac{Z^{m-1} \partial Z S^{\lambda n}}{g(fx^n - g)^{\lambda}}.$$

Manifesto autem est $(fx^n - g)^{\lambda} = f^{\lambda} x^{\lambda n} - S^{\lambda n}$ ideoque

$$\partial V = \frac{Z^{m-1} S^{\lambda n} \partial Z}{g(f^{\lambda} x^{\lambda n} - S^{\lambda n})};$$

unde postremo ob $S = \frac{x}{Z}$ concluditur haec forma

$$\partial V = \frac{Z^{m-1} \partial Z}{g(f^{\lambda} Z^{\lambda n} - 1)},$$

quae formula a praecedentibus tantum signis discrepat.

DE RESOLUTIONE FORMULAE INTEGRALIS $\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^\lambda$ IN SERIEM SEMPER CONVERGENTEM UBI SIMUL PLURA INSIGNIA ARTIFICIA CIRCA SERIERUM SUMMATIONEM EXPLICANTUR

M. S. Academiae exhib. die 12. Aug. 1779

Commentatio 670 indicis Enestroemiani
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 60—77

1. Obtulit se mihi nuper haec formula integralis

$$\int \partial x \sqrt{(\triangle + x^4)};$$

cuius valor cum casu, quo $\triangle = 0$, sit $\frac{1}{3}x^3$, in mentem mihi venit eos eius valores investigare, quos induit, quando $\triangle$ est quantitas valde parva. Mox autem vidi hoc vulgari evolutione praestari neutiquam posse. Cum enim sit

$$\sqrt{(\triangle + x^4)} = \sqrt{\triangle}\cdot\left(1 + \frac{x^4}{\triangle}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ideoque per seriem

$$\sqrt{(\triangle + x^4)} = \sqrt{\triangle}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\triangle} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^8}{\triangle^2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{12}}{\triangle^3} - \text{etc.}\right),$$

erit valor formulae huius integralis

$$\int \partial x \sqrt{(\triangle + x^4)} = x\sqrt{\triangle} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{5\triangle} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^8}{9\triangle^2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{12}}{13\triangle^3} - \text{etc.}\right),$$

quae series ergo manifesto maxime divergit, quoties $\triangle$ fuerit quantitas valde parva atque adeo, quoties fractio $\frac{x^4}{\triangle}$ unitatem superaverit.

2. Ut igitur ad scopum propositum pertingerem, ipsam hanc quaestionem sub hac forma sum contemplatus:

Valorem formulae integralis $\int \partial x \sqrt{(\triangle + x^4)}$ *a termino* $x = 0$ *usque ad terminum* $x = a$ *extensum per seriem semper convergentem exprimere, quicunque valor litterae* $\triangle$ *tribuatur.*

Hunc in finem formulam $\triangle + x^4$ sub hac specie repraesento

$$\triangle + a^4 - (a^4 - x^4)$$

sive hac

$$(\triangle + a^4)\left(1 - \frac{a^4 - x^4}{\triangle + a^4}\right).$$

Hinc igitur erit

$$\sqrt{(\triangle + x^4)} = \sqrt{(\triangle + a^4)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^4 - x^4}{\triangle + a^4} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(\frac{a^4 - x^4}{\triangle + a^4}\right)^2 - \text{etc.}\right).$$

Sicque totum negotium huc redit, ut harum formularum integralium

$$\int \partial x(a^4 - x^4), \quad \int \partial x(a^4 - x^4)^2, \quad \int \partial x(a^4 - x^4)^3 \quad \text{etc.}$$

valores ab $x = 0$ usque ad $x = a$ extensi investigentur, unde primus terminus $\int \partial x$ dabit a.

3. Pro secundo termino habebitur integrando

$$\int \partial x(a^4 - x^4) = a^4 x - \frac{1}{5}x^5,$$

cuius valor sumto $x = a$ erit $\frac{4}{5}a^5$. Pro tertio termino erit

$$\int \partial x(a^4 - x^4)^2 = a^8 x - \frac{2}{5}a^4 x^5 + \frac{1}{9}x^9,$$

quae expressio posito $x = a$ abit in $\frac{4\cdot 8}{5\cdot 9}a^9$. Simili modo pro quarto termino habebimus

$$\int \partial x(a^4 - x^4)^3 = a^{13}\left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13}\right) = \frac{4\cdot 8\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13}a^{13}.$$

Eodemque modo reperitur fore

$$\int \partial x(a^4 - x^4)^4 = \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17}a^{17}$$

et ita porro. Hanc autem elegantem progressionis legem infra sum demonstraturus.

4. His igitur valoribus substitutis totus valor integralis quaesitus reperietur fore

$$a\sqrt{(\triangle + a^4)}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{a^4}{\triangle + a^4} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 8}{5\cdot 9}\left(\frac{a^4}{\triangle + a^4}\right)^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{4\cdot 8\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13}\left(\frac{a^4}{\triangle + a^4}\right)^3 - \text{etc.}\right).$$

Quoniam hic duplices coefficientes occurrunt, si singulos factores priorum tam supra quam infra duplicemus, ista series contrahetur in sequentem

$$a\sqrt{(\triangle + a^4)}\cdot\left(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{a^4}{\triangle + a^4} - \frac{2\cdot 2}{5\cdot 9}\left(\frac{a^4}{\triangle + a^4}\right)^2 - \frac{2\cdot 2\cdot 6}{5\cdot 9\cdot 13}\left(\frac{a^4}{\triangle + a^4}\right)^3 - \text{etc.}\right),$$

quae series manifesto semper convergit, propterea quod non solum coefficientes haud mediocriter decrescunt, sed etiam formula $\frac{a^4}{\triangle + a^4}$ unitate est minor.

5. Iam nihil obstat, quominus loco a restituamus ipsam quantitatem variabilem x, sicque valor huius formulae integralis $\int \partial x\sqrt{(\triangle + x^4)}$ exprimetur per sequentem seriem semper convergentem

$$x\sqrt{(\triangle + x^4)}\cdot\left(1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^4}{\triangle + x^4} - \frac{2\cdot 2}{5\cdot 9}\left(\frac{x^4}{\triangle + x^4}\right)^2 - \frac{2\cdot 2\cdot 6}{5\cdot 9\cdot 13}\left(\frac{x^4}{\triangle + x^4}\right)^3 - \text{etc.}\right).$$

Hic casus, quo ista series minime convergit, est ille ipse, quem initio commemoravimus, quo $\triangle = 0$ ipsumque integrale $= \frac{1}{3}x^3$. Posito igitur $\triangle = 0$ pervenimus ad sequentem seriem maxime notatu dignam

$$x^3\left(1 - \frac{2}{5} - \frac{2\cdot 2}{5\cdot 9} - \frac{2\cdot 2\cdot 6}{5\cdot 9\cdot 13} - \frac{2\cdot 2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17} - \text{etc.}\right),$$

cuius adeo summam novimus esse $= \frac{1}{3}x^3$, ita ut iam habeamus hanc summationem

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{9} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{13} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{10}{17} - \text{etc.},$$

cuius demonstratio altioris indaginis videtur. Interim tamen, quoniam eius summa est cognita, veritas sequenti modo ostendi potest. Hinc enim erit

$$\frac{2}{5} + \frac{2\cdot 2}{5\cdot 9} + \frac{2\cdot 2\cdot 6}{5\cdot 9\cdot 13} + \text{etc.} = \frac{2}{3},$$

quae aequatio in $\frac{5}{2}$ ducta dat

$$1 + \frac{2}{9} + \frac{2\cdot 6}{9\cdot 13} + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{9\cdot 13\cdot 17} + \text{etc.} = \frac{5}{3}.$$

Transponatur hic primus terminus in alteram partem et multiplicando per $\frac{9}{2}$ prodibit

$$1 + \frac{6}{13} + \frac{6\cdot 10}{13\cdot 17} + \frac{6\cdot 10\cdot 14}{13\cdot 17\cdot 21} + \text{etc.} = \frac{9}{3}.$$

Translato iterum primo termino ad alteram partem factaque multiplicatione per $\frac{13}{6}$ colligitur

$$1 + \frac{10}{17} + \frac{10\cdot 14}{17\cdot 21} + \frac{10\cdot 14\cdot 18}{17\cdot 21\cdot 25} + \text{etc.} = \frac{13}{3}.$$

Simili modo progrediendo prodibit

$$1 + \frac{14}{21} + \frac{14\cdot 18}{21\cdot 25} + \frac{14\cdot 18\cdot 22}{21\cdot 25\cdot 29} + \text{etc.} = \frac{17}{3},$$

$$1 + \frac{18}{25} + \frac{18\cdot 22}{25\cdot 29} + \frac{18\cdot 22\cdot 26}{25\cdot 29\cdot 33} + \text{etc.} = \frac{21}{3}.$$

Sicque innumerabiles nacti sumus series, quarum summa est cognita, et quoniam lege aequabili ulterius progrediuntur, signum hoc certum est summam primo datam esse iustam. Hanc autem insignem veritatem infra, ubi rem in genere persequemur, accuratius demonstrabimus.

PROBLEMA GENERALE

Formulae integralis

$$\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^\lambda$$

valorem a termino $x = 0$ *usque ad* $x = a$ *extensum per seriem semper convergentem exprimere.*

SOLUTIO

6. Formulam $\triangle + x^n$ sub hac forma repraesentemus $\triangle + a^n - (a^n - x^n)$, quae reducitur ad hanc

$$(\triangle + a^n)\left(1 - \frac{a^n - x^n}{\triangle + a^n}\right),$$

sicque formula integralis proposita erit

$$(\triangle + a^n)^\lambda \int x^{m-1}\partial x \left(1 - \frac{a^n - x^n}{\triangle + a^n}\right)^\lambda.$$

At facta evolutione est

$$\left(1 - \frac{a^n - x^n}{\triangle + a^n}\right)^\lambda = 1 - \frac{\lambda}{1}\cdot\frac{a^n - x^n}{\triangle + a^n} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\left(\frac{a^n - x^n}{\triangle + a^n}\right)^2 - \text{etc.},$$

quae ergo series ducta in $x^{m-1}\partial x$ ita integrari debet, ut integrale ab $x = 0$ ad $x = a$ extendatur. Hinc patet totum negotium reduci ad hanc integrationem

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^\theta,$$

cuius valor casu, quo $\theta = 0$, manifesto est $\frac{x^m}{m} = \frac{a^m}{m}$. Casu vero, quo $\theta = 1$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n) = \frac{a^n x^m}{m} - \frac{x^{m+n}}{m+n},$$

qui valor posito $x = a$ evadit $\frac{n}{m(m+n)}a^{m+n}$. Ac casu, quo $\theta = 2$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^2 = a^{2n}\frac{x^m}{m} - 2a^n\frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{x^{m+2n}}{m+2n},$$

quae expressio posito $x = a$ abit in hanc $\frac{n \cdot 2n}{m(m+n)(m+2n)} a^{m+2n}$. Simili modo calculo subducto reperietur

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^3 = \frac{n \cdot 2n \cdot 3n}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)} a^{m+3n}.$$

Ne autem hic inductioni nimium tribuamus, hanc progressionem sequenti modo accuratius demonstrabimus.

7. Ponamus formulae $\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^\theta$ valorem iam esse inventum $= V$ hincque quaeramus valorem formulae sequentis $\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta+1}$. Hunc in finem ponamus

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta+1} = A \int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^\theta + B x^m (a^n - x^n)^{\theta+1},$$

quae formula differentiata et per $x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^\theta$ divisa praebet

$$a^n - x^n = A + mB(a^n - x^n) - (\theta + 1) n B x^n;$$

unde nascuntur hae duae determinationes

$$A + mBa^n = a^n \quad \text{et} \quad mB + (\theta + 1) nB = 1,$$

qui praebent

$$A = \frac{(\theta+1) n a^n}{m + (\theta+1) n} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{m + (\theta+1) n}.$$

8. Quoniam igitur post integrationem fieri debet $x = a$, membrum littera B affectum evanescit eritque

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta+1} = \frac{(\theta+1) n a^n}{m + (\theta+1) n} V.$$

Cum igitur casu $\theta = 0$ sit $V = \frac{a^m}{m}$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n) = \frac{n}{m(m+n)}a^{m+n},$$

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^2 = \frac{n\cdot 2n}{m(m+n)(m+2n)}a^{m+2n},$$

$$\int x^{m-1}\partial x(a^n - x^n)^3 = \frac{n\cdot 2n\cdot 3n}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)}a^{m+3n}$$

etc.

Unde patet ordinem supra observatum in ipsa rei natura esse fundatum.

9. Quia hic integralia ita capi debent, ut evanescant posito $x = 0$, in reductione generali, qua sumus usi, ubi postremum membrum erat $Bx^m(a^n - x^n)^{\theta+1}$, evidens est hoc membrum non evanescere, nisi fuerit $m > 0$; quamobrem, si forte eiusmodi formulae occurrant, ubi exponens m fuerit vel 0 vel adeo negativus, reductiones hic inventae locum habere nequeunt.

10. Singuli hi termini factorem involvunt communem $\frac{a^m}{m}$; qui si cum multiplicatore generali coniungatur, series per integrationem orta erit

$$\frac{a^m}{m}(\triangle + a^n)^\lambda\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{\lambda}{1}\cdot\frac{n}{m+n}\cdot\frac{a^n}{\triangle + a^n} \\ + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\cdot 2n}{(m+n)(m+2n)}\left(\frac{a^n}{\triangle + a^n}\right)^2 - \text{etc.}\end{array}\right\},$$

ubi coefficientes sequenti modo contrahi poterunt

$$\frac{a^m}{m}(\triangle + a^n)^\lambda\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{a^n}{\triangle + a^n} + \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\left(\frac{a^n}{\triangle + a^n}\right)^2 \\ - \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\cdot\frac{(\lambda-2)n}{m+3n}\left(\frac{a^n}{\triangle + a^n}\right)^3 + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Quodsi iam hic loco a substituamus ipsam quantitatem variabilem x, haec series

$$\frac{x^m}{m}(\triangle + x^n)^\lambda\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{x^n}{\triangle + x^n} + \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\left(\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right)^2 \\ - \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\cdot\frac{(\lambda-2)n}{m+3n}\left(\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right)^3 + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

exprimet valorem formulae integralis $\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^\lambda$ a termino $x = 0$ sumtum.

11. Casibus, quibus exponens λ est numerus integer positivus, veritas seriei inventae sponte elucescit; uti his casibus:

1°) Si $\lambda = 1$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n) = \frac{x^m}{m}(\triangle + x^n)\left(1 - \frac{n}{m+n}\cdot\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right),$$

quae expressio reducitur ad hanc $\frac{x^m}{m}\left(\triangle + x^n - \frac{n}{m+n}x^n\right)$; integrale vero ordinario modo sumtum erit $\frac{\triangle x^m}{m} + \frac{x^{m+n}}{m+n}$, quod cum praecedente convenit.

2°) Si fuerit $\lambda = 2$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^2 = \frac{x^m}{m}(\triangle + x^n)^2\left(1 - \frac{2n}{m+n}\cdot\frac{x^n}{\triangle + x^n} + \frac{2n}{m+n}\cdot\frac{n}{m+2n}\left(\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right)^2\right),$$

quae expressio reducitur ad hanc

$$\frac{x^m}{m}\left\{\begin{array}{l} \triangle\triangle + 2\triangle x^n + \qquad x^{2n} \\ -\frac{2n}{m+n}\triangle x^n - \frac{2n}{m+n}x^{2n} \\ \quad + \frac{n\cdot 2n}{(m+n)(m+2n)}x^{2n} \end{array}\right\}$$

sive ad hanc concinniorem

$$\frac{x^m}{m}\left(\triangle\triangle + \frac{2m}{m+n}\triangle x^n + \frac{m}{m+2n}x^{2n}\right),$$

quod egregie convenit cum integrali more solito sumto. Ceterum hic meminisse iuvabit haec integralia locum habere non posse, nisi m fuerit nihilo maior, quia alioquin integrale non ita sumi posset, ut evanesceret casu $x = 0$.

12. Sin autem exponens λ non fuerit numerus integer, series inventa in infinitum progreditur eiusque veritas non amplius in oculos incurrit. His autem casibus forma nostri integralis simplicior et concinnior reddetur, si statuamus $\lambda = -\frac{\mu}{n}$; tum enim huius formulae $\int x^{m-1}\partial x(\triangle + x^n)^{-\frac{\mu}{n}}$ integrale erit

$$\frac{x^m}{m(\triangle + x^n)^{\frac{\mu}{n}}}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{x^n}{\triangle + x^n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\left(\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right)^2 \\ \quad + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n}\left(\frac{x^n}{\triangle + x^n}\right)^3 + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

13. Hinc iam summam huius seriei generalis assignare licebit

$$1+\frac{a}{b}\chi+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+n}{b+n}\chi^2+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+n}{b+n}\cdot\frac{a+2n}{b+2n}\chi^3+\text{etc.}$$

Si enim hanc seriem cum inventa comparemus, erit $\mu=a$ et $m+n=b$ ideoque $m=b-n$; tum vero erit $\chi=\frac{x^n}{\Delta+x^n}$, unde relatio inter χ et x innotescit. Tum igitur huius seriei summa aequabitur huic formulae integrali

$$\int\frac{x^{b-n-1}\partial x}{(\Delta+x^n)^{\frac{a}{n}}}$$

divisae per hanc quantitatem

$$\frac{x^{b-n}}{(b-n)(\Delta+x^n)^{\frac{a}{n}}};$$

ideoque ista summa erit

$$\frac{(b-n)(\Delta+x^n)^{\frac{a}{n}}}{x^{b-n}}\cdot\int\frac{x^{b-n-1}\partial x}{(\Delta+x^n)^{\frac{a}{n}}},$$

quae autem summa subsistere nequit, nisi fuerit $b>n$. Ceterum evidens est istam seriem semper esse convergentem, cum non solum fractio $\frac{x^n}{\Delta+x^n}$ sit unitate minor, sed etiam coefficientes omnes sint unitate minores.

14. Casus autem maxime memorabilis, qui hic occurrit, est, quando $\Delta=0$; tum enim nostra formula integralis erit

$$\int x^{m-\mu-1}\partial x=\frac{x^{m-\mu}}{m-\mu};$$

huic ergo quantitati semper aequabitur sequens series

$$\frac{x^{m-\mu}}{m}\left(1+\frac{\mu}{m+n}+\frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}+\frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n}+\text{etc.}\right),$$

si modo fuerit m numerus positivus, uti iam aliquoties est animadversum. Consequenter huius seriei

$$1+\frac{\mu}{m+n}+\frac{\mu(\mu+n)}{(m+n)(m+2n)}+\frac{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}{(m+n)(m+2n)(m+3n)}+\text{etc.}$$

summa est $\frac{m}{m-\mu}$, quae summatio est eo magis notatu digna, quod vix ulla via patet eius veritatem investigandi.

15. Statim autem apparet hanc summam subsistere non posse, nisi tam n quam $m-\mu$ fuerit numerus positivus. Cum enim formula nostra integralis casu $\Delta=0$ sit $\int x^{m-1-\mu}\partial x$, quam ab $x=0$ inchoari oportet, evidens est hoc fieri non posse, nisi $m-\mu$ fuerit numerus positivus; praeterea etiam notandum est exponentem n necessario positivum esse debere. Cum enim in analysi supra exposita hoc integrale occurrat $\int x^{m-1}\partial x(a^n-x^n)^\theta$, manifestum est, si n esset numerus negativus, integrationem non ita institui posse, ut casu $x=0$ evanescat. His notatis istam seriem accuratius sum contemplaturus, et quoniam eius indoles non parum abscondita videtur, eius veritatem duplici modo sum ostensurus. Primo scilicet ostendam summam assignatam revera aequari summae totius progressionis; deinde analysin prorsus singularem aperiam, quae non solum directe ad ipsam hanc seriem perducet, sed etiam eius summam indicabit.

DEMONSTRATIO HUIUS SUMMATIONIS

$$\frac{m}{m-\mu}=1+\frac{\mu}{m+n}+\frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}+\frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n}+\text{etc.}$$

16. Hic scilicet ostendam, si omnes huius seriei termini a summa inventa $\frac{m}{m-\mu}$ successive subtrahantur, tandem revera nihil relictum iri. Subtracto enim primo termino 1 remanet $\frac{\mu}{m-\mu}$. Hinc terminus secundus ablatus relinquet

$$\frac{\mu(\mu+n)}{(m-\mu)(m+n)}.$$

Hinc porro subtrahatur tertius terminus ac remanebit

$$\frac{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}{(m-\mu)(m+n)(m+2n)}.$$

Hinc iam quartus terminus ablatus residuum praebet sequens

$$\frac{\mu(\mu+n)(\mu+2n)(\mu+3n)}{(m-\mu)(m+n)(m+2n)(m+3n)}.$$

Unde iam satis liquet omnibus terminis ablatis tandem remansurum esse hoc productum in infinitum excurrens

$$\frac{\mu(\mu+n)(\mu+2n)(\mu+3n)(\mu+4n)\text{ etc.}}{(m-\mu)(m+n)(m+2n)(m+3n)(m+4n)\text{ etc.}}.$$

17. Facile autem intelligitur valorem huius producti revera nihilo esse aequalem. Omisso enim primo factore $\frac{\mu}{m-\mu}$ omnes reliqui factores sunt fractiones unitate minores, quia $\mu < m$, et quoniam tam numeratores quam denominatores in arithmetica progressione increscunt, iam satis constat valorem talis producti revera evanescere. Hic autem probe tenendum est, ut productum infinitarum talium fractionum in nihilum abeat, non sufficere, ut singulae fractiones sint unitate minores, veluti evenit in hac forma

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{48}{49}\cdot\text{etc.},$$

cuius producti in infinitum protensi valor facile ostenditur esse $= \frac{1}{2}$.

18. Quoniam in nostro producto singuli denominatores superant suos numeratores eadem quantitate $m - \mu$, istam formam generaliorem considerabo

$$\frac{a}{a+\triangle}\cdot\frac{b}{b+\triangle}\cdot\frac{c}{c+\triangle}\cdot\frac{d}{d+\triangle}\cdot\frac{e}{e+\triangle}\cdot\text{etc.}$$

et perscrutabor, sub quibusnam conditionibus eius valor in infinitum extensus, qui sit Π, revera in nihilum sit abiturus. Evidens autem est hoc evenire, si eadem forma inversa

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{a+\triangle}{a}\cdot\frac{b+\triangle}{b}\cdot\frac{c+\triangle}{c}\cdot\frac{d+\triangle}{d}\cdot\text{etc.}$$

in infinitum excrescit. Sin autem eius valor fuerit infinitus, etiam eius loga-

rithmus infinitus evadat necesse est. Cum igitur sit

$$l\frac{1}{\Pi} = l\frac{a+\Delta}{a} + l\frac{b+\Delta}{b} + l\frac{c+\Delta}{c} + l\frac{d+\Delta}{d} + \text{etc.},$$

facta evolutione reperietur

$$\begin{aligned} l\frac{1}{\Pi} = \quad & \Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\text{etc.}\right) \\ & -\frac{1}{2}\Delta^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\text{etc.}\right) \\ & +\frac{1}{3}\Delta^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{e^3}+\text{etc.}\right) \\ & -\text{etc.} \end{aligned}$$

quae expressio semper erit infinita, quoties summa primae seriei

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{etc.}$$

fuerit infinita. Hanc autem summam semper esse infinitam, quoties numeri a, b, c, d etc. in progressione arithmetica crescunt, iam notum est et per se perspicuum; quod cum in nostra serie contingat, certum est illius producti infiniti valorem esse evanescentem.

19. Circa nostram autem seriem id imprimis notatu dignum occurrit, quod eius summa $\frac{m}{m-\mu}$ litteram n non involvat, ita ut eius summa semper maneat eadem, quicunque valores litterae n tribuantur, quod quidem pro casu $n = 0$ per se statim fit manifestum, quandoquidem tum series nostra evadit

$$1+\frac{\mu}{m}+\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{\mu^3}{m^3}+\text{etc.};$$

quae cum sit progressio geometrica, eius summa erit $\frac{m}{m-\mu}$. Quod vero summa perpetuo maneat eadem, quicunque valores ipsi n tribuantur, non tam facile perspicitur, etsi veritas a nobis iam sit demonstrata.

20. Quin etiam demonstratio hic tradita multo latius patet, cum adeo in eadem forma valores ipsius n variare liceat. Ita si posito α loco n pro

eius multiplis $2n$, $3n$, $4n$, $5n$ etc. scribamus novas litteras β, γ, δ, ε etc., ut habeatur ista series

$$1 + \frac{\mu}{m+\alpha} + \frac{\mu}{m+\alpha}\cdot\frac{\mu+\alpha}{m+\beta} + \frac{\mu}{m+\alpha}\cdot\frac{\mu+\alpha}{m+\beta}\cdot\frac{\mu+\beta}{m+\gamma} + \text{etc.},$$

eius summa etiam nunc erit $\frac{m}{m-\mu}$. Subtracto enim termino primo remanet

$$\frac{\mu}{m-\mu}.$$

Hinc terminus secundus subtractus relinquit

$$\frac{\mu(\mu+\alpha)}{(m-\mu)(m+\alpha)}.$$

Hinc tertius terminus subtractus

$$\frac{\mu(\mu+\alpha)(\mu+\beta)}{(m-\mu)(m+\alpha)(m+\beta)}.$$

Unde iam patet in infinitum tandem prodire productum

$$\frac{\mu(\mu+\alpha)(\mu+\beta)(\mu+\gamma)(\mu+\delta)\text{ etc.}}{(m-\mu)(m+\alpha)(m+\beta)(m+\gamma)(m+\delta)\text{ etc.}},$$

cuius valor semper erit evanescens, si modo haec series

$$\frac{1}{\mu+\alpha} + \frac{1}{\mu+\beta} + \frac{1}{\mu+\gamma} + \frac{1}{\mu+\delta} + \text{etc.}$$

habuerit summam infinite magnam, uti modo ante ostendimus.

ANALYSIS SINGULARIS DIRECTE AD SERIEM SUPRA INVENTAM PERDUCENS

21. Ponamus

$$x^m(1-x^n)^\theta = A\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^\theta + B\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\theta-1}$$

et reperietur

$$A = m + \theta n \quad \text{et} \quad B = -\theta n;$$

hinc ergo, si ponamus

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^\theta = P \quad \text{et} \quad \int x^{m-1}\partial x(1-x^n)^{\theta-1} = Q,$$

erit

$$x^m(1-x^n)^\theta = (m+\theta n)P - \theta n Q$$

ideoque

$$Q = \frac{m+\theta n}{\theta n}P - \frac{1}{\theta n}x^m(1-x^n)^\theta.$$

Quodsi iam ambo integralia P et Q a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extendamus, erit $Q = \frac{m+\theta n}{\theta n}P$, si modo fuerit tam $m>0$ quam $\theta>0$.

22. Cum iam sit $\partial Q = \frac{\partial P}{1-x^n}$, denominatore in seriem evoluto erit

$$\partial Q = \partial P(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + \text{etc.});$$

consequenter habebitur

$$Q = P + \int x^n \partial P + \int x^{2n}\partial P + \int x^{3n}\partial P + \text{etc.},$$

quae singula integralia ita sunt comparata, ut quodlibet ad praecedens reduci possit ope huius reductionis

$$x^\alpha(1-x^n)^{\theta+1} = A\int x^{\alpha+n-1}\partial x(1-x^n)^\theta + B\int x^{\alpha-1}\partial x(1-x^n)^\theta,$$

pro qua reperitur $A = -\alpha - n(\theta+1)$ et $B = \alpha$.

23. Si etiam haec duo integralia a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extendantur, fiet

$$0 = -(\alpha + n(\theta+1))\int x^{\alpha+n-1}\partial x(1-x^n)^\theta + \alpha\int x^{\alpha-1}\partial x(1-x^n)^\theta,$$

si modo fuerit $\alpha>0$ et $\theta+1>0$. Faciamus nunc $\alpha = m+\lambda n$, et quia ante posueramus

$$x^{m-1}\partial x(1-x^n)^\theta = \partial P,$$

haec aequatio abibit in hanc formam

$$-(\alpha + n(\theta+1))\int x^{(\lambda+1)n}\partial P + \alpha\int x^{\lambda n}\partial P,$$

quocirca habebimus hanc reductionem

$$\int x^{\lambda n+n}\partial P = \frac{\alpha}{\alpha+n(\theta+1)}\int x^{\lambda n}\partial P = \frac{m+\lambda n}{m+n(\lambda+\theta+1)}\int x^{\lambda n}\partial P.$$

24. Haec formula generalis nobis iam suppeditat sequentes integrationes speciales:

1°)	Si $\lambda = 0$	$\int x^n\,\partial P = \frac{m}{m+n(\theta+1)}P.$
2°)	Si $\lambda = 1$	$\int x^{2n}\partial P = \frac{m+n}{m+n(\theta+2)}\int x^n\partial P$
		ideoque
		$\int x^{2n}\partial P = \frac{m}{m+n(\theta+1)}\cdot\frac{m+n}{m+n(\theta+2)}P.$
3°)	Si $\lambda = 3$	$\int x^{3n}\partial P = \frac{m+2n}{m+n(\theta+3)}\int x^{2n}\partial P$
		ideoque
		$\int x^{3n}\partial P = \frac{m}{m+n(\theta+1)}\cdot\frac{m+n}{m+n(\theta+2)}\cdot\frac{m+2n}{m+n(\theta+3)}P.$
4°)	Si $\lambda = 4$	$\int x^{4n}\partial P = \frac{m}{m+n(\theta+1)}\cdot\frac{m+n}{m+n(\theta+2)}\cdot\frac{m+2n}{m+n(\theta+3)}\cdot\frac{m+3n}{m+n(\theta+4)}P.$
etc.		etc.

25. Cum igitur ex superioribus fuisset

$$Q = \int \partial P(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n} + \text{etc.}),$$

si pro singulis terminis valores modo inventos substituamus atque utrinque per P dividamus, nanciscemur hanc aequationem

$$\frac{Q}{P} = 1 + \frac{m}{m+n(\theta+1)} + \frac{m}{m+n(\theta+1)}\cdot\frac{m+n}{m+n(\theta+2)}$$
$$+ \frac{m}{m+n(\theta+1)}\cdot\frac{m+n}{m+n(\theta+2)}\cdot\frac{m+2n}{m+n(\theta+3)} + \text{etc.};$$

supra autem ostendimus esse

$$\frac{Q}{P} = \frac{m+\theta n}{\theta n},$$

quae ergo fractio est summa istius seriei infinitae.

26. Ut iam consensum huius seriei cum supra inventa ostendamus, primo loco θ scribamus $\frac{\mu}{n}$ atque series nostra inventa hanc induet formam

$$\frac{m+\mu}{\mu} = 1 + \frac{m}{m+n+\mu} + \frac{m}{m+n+\mu}\cdot\frac{m+n}{m+2n+\mu}$$
$$+ \frac{m}{m+n+\mu}\cdot\frac{m+n}{m+2n+\mu}\cdot\frac{m+2n}{m+3n+\mu} + \text{etc.},$$

cuius veritas eodem modo, quo ante fueram usus, demonstrari potest. Si enim a summa subtrahatur terminus primus, relinquitur

$$\frac{m}{\mu}.$$

Subtracto hinc termino secundo remanet

$$\frac{m(m+n)}{\mu(m+n+\mu)}.$$

Hinc porro tertius terminus subtractus relinquit

$$\frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(m+n+\mu)(m+2n+\mu)}$$

et ita porro; quae operatio si in infinitum continuetur, producti huius resultantis valor est $= 0$. Tum vero evidens est seriem hanc inventam in eam ipsam, quam supra dedimus, transmutari, si hic loco m scribatur μ, at vero $m - \mu$ loco μ.

27. Coronidis loco hic subiungam seriem multo generaliorem eiusdem generis, cuius summam pariter assignare licet, quam sequenti problemate sum complexurus.

PROBLEMA 1

28. *Proposita hac serie*

$$A+B\frac{\alpha}{a}+C\frac{\alpha\beta}{ab}+D\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}+etc.$$

investigare conditiones, sub quibus eius summam assignare liceat.

SOLUTIO

Haec ergo series involvit ternas series: primam litterarum α, β, γ, δ etc., quae numeratores seriei propositae constituunt, secundam litterarum a, b, c, d etc., ex quibus denominatores formantur, tertiam litterarum A, B, C, D etc., quae coefficientes terminorum exhibent. Quemadmodum igitur ternae istae series comparatae esse debeant, ut seriei propositae summam per expressionem finitam atque adeo rationalem assignare liceat, hic investigabo.

29. Statuamus huius seriei summam esse $\frac{s}{t}$ atque eadem methodo utamur, quam iam supra adhibuimus, scilicet ab hac summa primo subtrahamus primum terminum A, et cum remaneat $\frac{s-At}{t}$, statuamus $s-At=\alpha$, ut habeamus $\frac{\alpha}{t}$; hinc subtrahamus secundum terminum $B\frac{\alpha}{a}$ et residuum erit $\frac{\alpha(a-Bt)}{t\cdot a}$. Hic iam faciamus $a-Bt=\beta$, ut habeamus $\frac{\alpha\beta}{t\cdot a}$; unde si subtrahatur tertius terminus $C\frac{\alpha\beta}{ab}$, residuum erit $\frac{\alpha\beta(b-Ct)}{t\cdot ab}$. Fiat hic $b-Ct=\gamma$, ut habeamus $\frac{\alpha\beta\gamma}{t\cdot ab}$, unde terminus quartus ablatus relinquit $\frac{\alpha\beta\gamma(c-Dt)}{t\cdot abc}$. Fiat hic iterum $c-Dt=\delta$, ut habeamus $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{t\cdot abc}$, unde quintum terminum subtrahendo colligitur $\frac{\alpha\beta\gamma\delta(d-Et)}{t\cdot abcd}$. Haeque operationes in infinitum continuari intelligantur.

30. Ex his igitur determinationibus tam littera s quam litterae a, b, c, d etc. sequenti modo definientur

$$s=\alpha+At,\quad a=\beta+Bt,\quad b=\gamma+Ct,\quad c=\delta+Dt\ \text{ etc.}$$

Atque his valoribus introductis residuum, postquam omnes seriei termini fuerint a formula $\frac{s}{t}$ ablati, remanebit hoc productum in infinitum excurrens $\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\,\text{etc.}}{t\cdot abcdef\,\text{etc.}}$; quod ergo productum si in nihilum abeat, tum summa seriei propositae revera erit $=\frac{s}{t}$. Videamus igitur, sub quibusnam conditionibus hoc productum evanescat.

31. Designemus hoc productum littera Π, ut substitutis pro a, b, c etc. valoribus inventis erit

$$\Pi = \frac{s}{t}\left(\frac{\alpha}{\alpha+At}\cdot\frac{\beta}{\beta+Bt}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+Ct}\cdot\frac{\delta}{\delta+Dt}\cdot\text{etc.}\right),$$

ubi scilicet factorem $\frac{s}{t}$ praefiximus. Nunc igitur quaeritur, sub quibusnam conditionibus istud productum in infinitum continuatum in nihilum sit abiturum. Evidens autem est hoc evenire, si productum istud invertatur eiusque logarithmus eveniat infinite magnus. Hoc ergo locum inveniet, quando summa horum logarithmorum

$$l\left(1+\frac{At}{\alpha}\right)+l\left(1+\frac{Bt}{\beta}\right)+l\left(1+\frac{Ct}{\gamma}\right)+l\left(1+\frac{Dt}{\delta}\right)+\text{etc.}=\infty,$$

id quod semper continget, si sumtis tantum primis terminis, qui omnes factorem communem habent t, series haec

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}+\frac{D}{\delta}+\text{etc.}$$

habuerit summam infinite magnam; tum igitur nostrae seriei propositae summa semper erit $\frac{\alpha+At}{t}$.

32. Neque vero absolute necesse est, ut productum Π penitus evanescat, sed quemcunque habuerit valorem, scilicet Π, quoniam is oritur, postquam tota summa seriei propositae, quam ponamus $= S$, ablata fuerit a formula $\frac{s}{t}$, ita ut sit $\Pi = \frac{s}{t} - S$, unde manifesto fit $S = \frac{s}{t} - \Pi$.

33. Ut hoc exemplo illustremus, litteris α, β, γ, δ etc. hos tribuamus valores $\alpha = 3$, $\beta = 15$, $\gamma = 35$, $\delta = 63$ etc., praeterea vero sit $t = 1$ atque insuper $A = B = C = D = \text{etc.} = 1$; hinc ergo determinationes inventae praebebunt

$$s = 4, \quad a = 16, \quad b = 36, \quad c = 64, \quad d = 100 \text{ etc.}$$

Sicque series nostra iam erit

$$1+\frac{3}{16}+\frac{3\cdot15}{16\cdot36}+\frac{3\cdot15\cdot35}{16\cdot36\cdot64}+\frac{3\cdot15\cdot35\cdot63}{16\cdot36\cdot64\cdot100}+\text{etc.},$$

pro cuius summa notetur esse

$$\Pi = 4 \cdot \frac{3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot \ 99 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100 \cdot \text{etc.}}.$$

Constat autem ex quadratura circuli WALLISIANA[1]) esse

$$\frac{3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot \ 99 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100 \cdot \text{etc.}} = \frac{2}{\pi}$$

existente π peripheria circuli, cuius diameter est unitas. Hinc ergo erit $\Pi = \frac{8}{\pi}$ ideoque summa nostrae seriei $S = 4 - \frac{8}{\pi}$ ideoque proxime $\frac{16}{11}$.

34. At vero series generalis, quam hoc modo sumus adepti, maxime est fecunda in formatione innumerabilium serierum specialium, cum non modo tam seriem litterarum α, β, γ, δ etc., sed etiam litterarum A, B, C, D etc. prorsus pro lubitu assumere liceat, quandoquidem inde litterae a, b, c, d etc. sponte determinantur; tum autem talium serierum summam semper assignare licebit, si modo valor producti in infinitum excurrentis, quod littera Π indicavimus, definiri poterit, ubi perinde est, utrum iste valor fuerit rationalis sive adeo transcendens quadraturam quamcunque involvens.

---

1) J. WALLIS (1616—1703), *Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos problemata*, Oxoniae 1655, p. 182; *Opera mathematica*, t. I, Oxoniae 1695, p. 355, imprimis p. 469. A. K.

DE FORMULIS DIFFERENTIALIBUS ANGULARIBUS MAXIME IRRATIONALIBUS QUAS TAMEN PER LOGARITHMOS ET ARCUS CIRCULARES INTEGRARE LICET

M. S. Academiae exhibit. die 5. Maii 1777

Commentatio 671 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 183—194

1. Quae iam saepius sum commentatus de formulis differentialibus irrationalibus, quae nulla substitutione ad rationalitatem revocari possunt, nihilo vero minus integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt[1]), etiam transferri possunt ad eiusmodi formulas angulares, quae sinus et cosinus cuiuspiam anguli involvunt. Forma autem generalis huiusmodi differentialium, quae hoc modo tractari possunt, sequenti modo repraesentari potest: denotante φ angulum quemcunque designet Φ functionem quamcunque rationalem ipsius tang. $n\varphi$ atque inveni istam formulam

$$\frac{\Phi\partial\varphi(f\sin.\lambda\varphi+g\cos.\lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a\sin.n\varphi+b\cos.n\varphi)^\lambda}}$$

semper per logarithmos et arcus circulares integrari posse, id quod a casibus simplicioribus inchoando in sequentibus problematibus ostendere constitui.

1) Confer Commentationem 688 huius voluminis, imprimis § 1, necnon voluminis praecedentis Commentationem 539, imprimis § 44. G. F.

PROBLEMA 1

2. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.

SOLUTIO

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$ ideoque $\frac{1}{i} = -i$. Iam ante omnia in numeratore nostrae formulae loco $\cos.\varphi$ has duas partes substituamus

$$\frac{1}{2}(\cos.\varphi + i \sin.\varphi) + \frac{1}{2}(\cos.\varphi - i \sin.\varphi)$$

atque ipsam formulam propositam per duas huiusmodi partes repraesentemus, quae sint

$$\partial p = \frac{\partial\varphi(\cos.\varphi + i \sin.\varphi)}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{\partial\varphi(\cos.\varphi - i \sin.\varphi)}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}},$$

ita ut ipsa formula nostra proposita sit $\frac{1}{2}\partial p + \frac{1}{2}\partial q$ ideoque eius integrale $\frac{p+q}{2}$.

3. Nunc ambas istas partes seorsim sequenti modo tractemus. Pro formula scilicet priore

$$\partial p = \frac{\partial\varphi(\cos.\varphi + i \sin.\varphi)}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}}$$

statuamus

$$\frac{\cos.\varphi + i \sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = x,$$

ut sit

$$\partial p = x\partial\varphi,$$

ac sumtis potestatibus exponentis n habebimus

$$x^n = \frac{(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^n}{\cos. n\varphi}.$$

Constat autem esse

$$(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^n = \cos. n\varphi + i \sin. n\varphi,$$

sicque erit

$$x^n = 1 + i \operatorname{tang}. n\varphi,$$

unde colligitur

$$\operatorname{tang}. n\varphi = \frac{x^n - 1}{i} = i(1 - x^n);$$

hinc cum posito in genere $\operatorname{tang}. \omega = Z$ sit $\partial\omega = \frac{\partial Z}{1 + ZZ}$, erit pro nostro casu

$$n\partial\varphi = \frac{-nix^{n-1}\partial x}{1 + ii - 2iix^n + iix^{2n}},$$

quae formula ob $ii = -1$ transmutatur in hanc

$$\partial\varphi = \frac{-ix^{n-1}\partial x}{2x^n - x^{2n}},$$

hincque ipsa formula

$$\partial p = x\partial\varphi = \frac{-i\partial x}{2 - x^n};$$

quae cum sit rationalis, eius integratio nulli difficultati est subiecta.

4. Quodsi iam simili modo pro altera formula

$$\partial q = \frac{\partial\varphi\,(\cos. \varphi - i \sin. \varphi)}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}}$$

statuatur

$$\frac{\cos. \varphi - i \sin. \varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = y,$$

ut sit

$$\partial q = y\partial\varphi,$$

per similes operationes, quae a praecedentibus in hoc solo discrepabunt, quod littera i negative sit accipienda, resultabit ista transformatio

$$\partial q = \frac{i\partial y}{2 - y^n};$$

quae cum priori prorsus sit similis, eadem integratione totum negotium conficietur et pro ipso integrali quaesito habebimus

$$p + q = -i\int\frac{\partial x}{2-x^n} + i\int\frac{dy}{2-y^n}.$$

5. Constat autem integralia talium formularum ex duplicis generis partibus, scilicet logarithmicis et arcubus circularibus constare, ita ut illarum forma generalis sit $fl(\alpha + \beta x + \gamma xx)$, harum vero g Arc. tang. $(\delta + \varepsilon x)$. Quare cum hic differentia inter binas formulas integrales similes occurrat, ex singulis partibus logarithmicis orietur talis forma

$$-ifl\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{\alpha+\beta y+\gamma yy},$$

ubi tam x quam y imaginaria involvit; hanc ob rem ponamus brevitatis gratia

$$x = r + is \quad \text{et} \quad y = r - is,$$

ubi erit

$$r = \frac{\cos.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} \quad \text{et} \quad s = \frac{\sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}};$$

his igitur valoribus substitutis quaelibet pars logarithmica erit

$$-ifl\frac{\alpha+\beta r+\gamma rr-\gamma ss+i(\beta s+2\gamma rs)}{\alpha+\beta r+\gamma rr-\gamma ss-i(\beta s+2\gamma rs)}.$$

6. Loco huius expressionis prolixioris scribamus brevitatis gratia

$$-ifl\frac{t+iu}{t-iu},$$

ita ut sit

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{et} \quad u = \beta s + 2\gamma rs,$$

sicque etiam hi valores per angulum φ innotescunt. Quoniam igitur iam saepius est demonstratum[1]) esse

1) Vide e. g. Commentationes 168 et 170 (indicis Enestroemiani): *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires,* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [5] (1749), 1751, p. 203—221, et *Recherches sur les racines imaginaires des équations,* ibidem p. 222—288; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I_{17}, p. 195, imprimis p. 218, et I_6, p. 78, imprimis p. 134. G. F.

$$l\frac{t+u\sqrt{-1}}{t-u\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{u}{t},$$

ista portio integralis erit $= +2f\,\text{Arc. tang.}\frac{u}{t}$, quae ergo penitus est realis, dum imaginaria se mutuo sustulerunt, ita ut quaelibet portio logarithmica imaginaria producat arcum circularem realem.

7. Simili modo coniungamus in genere binos arcus circulares per integrationem prodeuntes, qui ex forma assumta erunt

$$-ig\,\text{Arc. tang.}\,(\delta+\varepsilon x)+ig\,\text{Arc. tang.}\,(\delta+\varepsilon y),$$

quae forma ita in unum arcum contrahetur, qui erit

$$-ig\,\text{Arc. tang.}\frac{\varepsilon(x-y)}{1+(\delta+\varepsilon x)(\delta+\varepsilon y)},$$

quae introductis valoribus assumtis $x=r+is$ et $y=r-is$ induet hanc formam

$$-ig\,\text{Arc. tang.}\frac{2i\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\varepsilon\delta r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)}.$$

Cum igitur in genere sit

$$\text{Arc. tang.}\,v\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\frac{1+v}{1-v},$$

ista pars circularis transformabitur in sequentem logarithmum realem

$$\frac{g}{2}\,l\frac{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)+2\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)-2\varepsilon s};$$

hoc ergo modo sumendis omnium integralium partibus tandem obtinebitur integrale quaesitum per meros logarithmos et arcus circulares realiter expressum.

PROBLEMA 2

8. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{\partial\varphi\,\sin.\,\varphi}{\sqrt[n]{\cos.\,n\varphi}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.

SOLUTIO

Hic loco sin. φ scribatur haec forma duabus constans partibus

$$\frac{1}{2i}(\cos.\varphi + i\sin.\varphi) - \frac{1}{2i}(\cos.\varphi - i\sin.\varphi)$$

ac formula proposita resolvatur in has partes

$$\partial p = \frac{\partial\varphi(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)}{\sqrt[n]{\cos.n\varphi}} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{\partial\varphi(\cos.\varphi - i\sin.\varphi)}{\sqrt[n]{\cos.n\varphi}},$$

ita ut ipsa formula proposita iam fiat $\frac{\partial p - \partial q}{2i}$ ideoque ipsum integrale quaesitum $\frac{p-q}{2i}$.

9. Quodsi iam rursus ut ante statuamus

$$\frac{\cos.\varphi + i\sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos.n\varphi}} = x \quad \text{et} \quad \frac{\cos.\varphi - i\sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos.n\varphi}} = y,$$

reperietur ut supra

$$\partial p = -\frac{i\partial x}{2 - x^n} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{i\partial y}{2 - y^n};$$

unde ergo fiet ipsum integrale quaesitum

$$\frac{p-q}{2i} = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{2-x^n} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial y}{2-y^n},$$

ubi coefficientes evaserunt reales.

10. Consideremus nunc ex forma integrali utriusque partis quamlibet portionem logarithmicam, quae sit $fl(\alpha + \beta x + \gamma xx)$, hincque pro integrali quaesito ex utraque parte orietur

$$-\frac{1}{2}fl(\alpha + \beta x + \gamma xx) - \frac{1}{2}fl(\alpha + \beta y + \gamma yy).$$

Quodsi iam ut supra ponamus brevitatis gratia $x = r + is$ et $y = r - is$, tum vero

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{et} \quad u = \beta s + 2\gamma rs,$$

hi ambo logarithmi evadunt

$$= -\frac{1}{2} fl(t + iu) - \frac{1}{2} fl(t - iu),$$

qui contrahuntur in

$$-\frac{1}{2} fl(tt + uu),$$

quae expressio iam est realis neque ulla ulteriori reductione indiget.

11. Eodem modo binae partes circulares ex integratione oriundae [erunt]

$$-\frac{1}{2} g \text{ Arc. tang. } (\delta + \varepsilon x) - \frac{1}{2} g \text{ Arc. tang. } (\delta + \varepsilon y),$$

quae per r et s ita repraesentantur

$$-\frac{1}{2} g \left(\text{Arc. tang. } (\delta + \varepsilon r + i\varepsilon s) + \text{Arc. tang. } (\delta + \varepsilon r - i\varepsilon s)\right);$$

qui duo arcus ita in unum contrahuntur

$$-\frac{1}{2} g \text{ Arc. tang. } \frac{2\delta + 2\varepsilon r}{1 - (\delta + \varepsilon r)^2 - \varepsilon\varepsilon ss},$$

quae expressio iam ultro prodiit realis.

PROBLEMA 3

12. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{\partial\varphi \cos. \lambda\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^2}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.

SOLUTIO

Cum sit

$$\cos. \lambda\varphi = \frac{1}{2}(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^\lambda + \frac{1}{2}(\cos. \varphi - i \sin. \varphi)^\lambda,$$

formula proposita in has duas partes discerpatur

$$\partial p = \frac{\partial\varphi\,(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^\lambda}} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{\partial\varphi\,(\cos.\varphi - i\sin.\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^\lambda}},$$

ita ut integrale quaesitum fiat $\frac{p+q}{2}$.

13. Iam statuamus, ut ante fecimus,

$$\frac{\cos.\varphi + i\sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = x \quad \text{et} \quad \frac{\cos.\varphi - i\sin.\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = y,$$

quo facto fiet

$$\partial p = x^\lambda \partial\varphi \quad \text{et} \quad \partial q = y^\lambda \partial\varphi.$$

Calculo autem ut supra expedito obtinebimus

$$\partial\varphi = -\frac{i x^{n-1}\partial x}{2x^n - x^{2n}}$$

hincque

$$\partial p = -\frac{i x^{\lambda-1}\partial x}{2 - x^n};$$

similique modo erit

$$\partial q = \frac{i y^{\lambda-1}\partial y}{2 - y^n}$$

sicque totum integrale quaesitum erit

$$= -\frac{i}{2}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{2-x^n} + \frac{i}{2}\int\frac{y^{\lambda-1}\partial y}{2-y^n}.$$

14. Quoniam haec duo integralia sibi sunt similia ideoque similes partes tam logarithmicas quam circulares complectuntur, ex parte logarithmica, quae sit $fl(\alpha + \beta x + \gamma xx)$, ponendo ut supra $x = r + is$ et $y = r - is$, tum vero $t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss$ et $u = \beta s + 2\gamma rs$, hinc primo ista pars logarithmica colligitur

$$-ifl\frac{t+iu}{t-iu};$$

quae cum sit imaginaria, reducitur ad hunc arcum circularem realem

$$= 2f\,\text{Arc. tang.}\,\frac{u}{t}.$$

Simili modo, si forma arcus circularis ex integratione oriunda fuerit

$$-g \text{ Arc. tang. } (\delta + \varepsilon x),$$

ex partibus circularibus primo oritur sequens arcus imaginarius

$$-ig \text{ Arc. tang. } \frac{2i\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\varepsilon\delta r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)},$$

qui denique ad hunc logarithmum realem revocatur

$$\frac{g}{2} l \frac{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)+2\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)-2\varepsilon s}.$$

PROBLEMA 4

15. *Proposita formula differentiali*

$$\frac{\partial\varphi \sin. \lambda\varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^{\lambda}}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.

SOLUTIO

Cum sit

$$\sin. \lambda\varphi = \frac{1}{2i}(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^{\lambda} - \frac{1}{2i}(\cos. \varphi - i \sin. \varphi)^{\lambda},$$

constituamus ut hactenus has duas partes

$$\partial p = \frac{\partial\varphi(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^{\lambda}}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^{\lambda}}} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{\partial\varphi(\cos. \varphi - i \sin. \varphi)^{\lambda}}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi^{\lambda}}},$$

ita ut integrale quaesitum sit $\frac{p-q}{2i}$. Statuamus nunc iterum

$$\frac{\cos. \varphi + i \sin. \varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = x \quad \text{et} \quad \frac{\cos. \varphi - i \sin. \varphi}{\sqrt[n]{\cos. n\varphi}} = y,$$

ut fiat

$$\partial p = x^{\lambda}\partial\varphi \quad \text{et} \quad \partial q = y^{\lambda}\partial\varphi,$$

hincque calculo ut supra instituto fiet

$$\partial p = -\frac{ix^{\lambda-1}\partial x}{2-x^n} \quad \text{et} \quad \partial q = \frac{iy^{\lambda-1}\partial y}{2-y^n}$$

sicque integrale quaesitum erit

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{2-x^n} - \frac{1}{2}\int\frac{y^{\lambda-1}\partial y}{2-y^n}.$$

16. Quodsi iam, ut hactenus est factum, ponamus $x = r + is$ et $y = r - is$ et pro partibus logarithmicis, quarum forma sit $fl(a + \beta x + \gamma xx)$, ponamus

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{et} \quad u = \beta s + 2\gamma rs,$$

binae partes logarithmicae imaginariae uti in problemate secundo in unum logarithmum realem contrahentur, qui erit

$$-\frac{1}{2} fl(tt + uu).$$

At si pro partibus circularibus, quarum forma sit

$$g \text{ Arc. tang. } (\delta + \varepsilon x),$$

bini tales arcus imaginarii iungantur, illi coalescent in unum arcum realem

$$-\frac{1}{2} g \text{ Arc. tang. } \frac{2\delta + 2\varepsilon r}{1 - (\delta + \varepsilon r)^2 - \varepsilon\varepsilon ss}.$$

PROBLEMA GENERALE

17. *Si Φ denotet functionem quamcunque rationalem ipsius* tang. $n\varphi$ *ac proposita fuerit haec formula differentialis*

$$\frac{\Phi\partial\varphi\,(F \sin. \lambda\varphi + G \cos. \lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi)^\lambda}},$$

eius integrationem ad logarithmos et arcus circulares reducere.

SOLUTIO

Ex praecedentibus iam facile intelligitur formulam numeratoris

$$F \sin. \lambda\varphi + G \cos. \lambda\varphi$$

semper ad talem formam revocari posse

$$F'(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^\lambda + G'(\cos. \varphi - i \sin. \varphi)^\lambda$$

atque hinc ipsa forma proposita discerpatur in has duas partes

$$\partial p = \frac{\Phi \partial \varphi (\cos. \varphi + i \sin. \varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi)^\lambda}}$$

et

$$\partial q = \frac{\Phi \partial \varphi (\cos. \varphi - i \sin. \varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi)^\lambda}},$$

ita ut integrale quaesitum iam futurum sit $F'p + G'q$.

18. Iam pro formula priori ∂p statuatur

$$\frac{\cos. \varphi + i \sin. \varphi}{\sqrt[n]{(a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi)}} = x$$

et pro posteriori

$$\frac{\cos. \varphi - i \sin. \varphi}{\sqrt[n]{(a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi)}} = y,$$

ita ut hinc futurum sit

$$\partial p = \Phi x^\lambda \partial\varphi \quad \text{et} \quad \partial q = \Phi y^\lambda \partial\varphi;$$

inde autem fiet

$$x^n = \frac{\cos. n\varphi + i \sin. n\varphi}{a \cos. n\varphi + b \sin. n\varphi},$$

unde colligitur

$$\text{tang.}\, n\varphi = \frac{1 - a x^n}{b x^n - i};$$

quare, cum Φ denotet functionem rationalem ipsius tang. $n\varphi$, evadet quoque functio rationalis ipsius x atque adeo ipsius x^n, quae designetur per X. Praeterea vero etiam differentiale $\partial\varphi$ rationaliter determinabitur, cum fiat

$$\partial\varphi = \frac{(ia - b) x^{n-1} \partial x}{(aa + bb) x^{2n} - 2(a + ib) x^n};$$

hoc ergo modo habebimus

$$\partial p = \frac{(ia-b)Xx^{\lambda-1}\partial x}{(aa+bb)x^n - 2(a+ib)};$$

quae cum sit penitus rationalis, certum est eius integrale, quantumcunque etiam laborem postulaverit, semper per logarithmos et arcus circulares expediri posse.

19. Simili modo res se habet in altera formula ∂q, quae ab ista tantum ratione signi litterae i differet, et quoniam hic omnia rationaliter per y prodibunt expressa, quo pacto Φ abeat in Y atque obtinebitur

$$\partial q = -\frac{(b+ia)Yy^{\lambda-1}\partial y}{(aa+bb)y^n - 2a + 2ib},$$

cuius integratio omnino similis erit praecedenti et quasi eodem labore absolvetur.

20. Manifestum autem est in huiusmodi calculo imaginaria cum realibus multo arctius commisceri, quam in praecedentibus problematibus usu venit, quandoquidem iam statim ab initio coefficientes derivati F' et G' iam imaginaria involvunt; deinde vero etiam utrinque tang. $n\varphi$ imaginariis inquinatur, unde etiam in valores X et Y imaginaria ingredientur; quamobrem reductio ad realitatem plerumque maximum laborem exigere poterit, pro quo autem negotio praecepta necessaria iam satis sunt cognita.

THEOREMA MAXIME MEMORABILE CIRCA FORMULAM INTEGRALEM[1]

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. \lambda\varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}}$$

M. S. Academiae exhib. die 13. Augusti 1778

Commentatio 672 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 194—217

1.[2]) Haec formula aliam restrictionem non postulat, nisi quod littera λ numeros tantum integros designat sive positivos sive negativos. Evidens autem est valores negativos non discrepare a positivis, cum semper sit $\cos.(-\varphi) = \cos.(+\varphi)$. Hoc notato si istius formulae integrale a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^0$ sive $\varphi = \pi$ porrigatur, eius valor semper sequenti formula exprimetur

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-\lambda}{0}\binom{n+\lambda}{\lambda} + \binom{n-\lambda}{1}\binom{n+\lambda}{\lambda+1} aa + \binom{n-\lambda}{2}\binom{n+\lambda}{\lambda+2} a^4$$
$$+ \binom{n-\lambda}{3}\binom{n+\lambda}{\lambda+3} a^6 + \binom{n-\lambda}{4}\binom{n+\lambda}{\lambda+4} a^8 + \binom{n-\lambda}{5}\binom{n+\lambda}{\lambda+5} a^{10} + \text{etc.};$$

1) Confer Commentationes 673 et 674 huius voluminis. G. F.

2) In editione principe paragraphi numeris 21 usque ad 39 signatae sunt. G. F.

ubi formulae uncinulis inclusae non fractiones, sed eos characteres designant, quibus unciae potestatum binomii designari solent[1]), ita ut sit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-\beta+1}{\beta},$$

quae expressio, quoniam nostro casu β ubique est numerus integer, determinatum valorem facile quovis casu exhibendum declarat, ubi notasse sufficiet, quoties fuerit $\beta = 0$, semper fore $\left(\frac{\alpha}{0}\right) = 1$; sin autem fuerit β numerus negativus, valorem huius characteris in nihilum abire; tum vero etiam observari convenit, si fuerit $\beta = \alpha$, fore $\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = 1$, et si $\beta > \alpha$, pariter valores evanescere, cum semper sit $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)$.

2. His explicatis evolvamus praecipuos casus, quibus exponenti n valores simpliciores 0, 1, 2, 3, 4 etc. tribuuntur.

CASUS I
QUO $n = 0$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{1+aa-2a\cos.\varphi} \begin{bmatrix} a & \varphi = 0 \\ ad & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Quia hic $n = 0$, pro prioribus factoribus quantitatis V habebimus

$$\left(\frac{0-\lambda}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{0-\lambda}{1}\right) = -\lambda, \quad \left(\frac{0-\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2},$$

$$\left(\frac{0-\lambda}{3}\right) = -\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}\cdot\frac{\lambda+2}{3}, \quad \left(\frac{0-\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}\cdot\frac{\lambda+2}{3}\cdot\frac{\lambda+3}{4} \quad \text{etc.}$$

Pro posterioribus vero factoribus habebimus

$$\left(\frac{0+\lambda}{\lambda}\right) = 1, \quad \left(\frac{0+\lambda}{\lambda+1}\right) = 0, \quad \left(\frac{0+\lambda}{\lambda+2}\right) = 0 \quad \text{etc.;}$$

hic scilicet omnes isti factores praeter primum evanescunt, unde colligitur valor quantitatis $V = 1$, ideoque integrale quaesitum huius casus erit $= \frac{\pi a^\lambda}{1-aa}$.

---

1) Vide notam 2 p. 3. G. F.

Hinc ergo si fuerit $\lambda = 0$, erit

$$\int \frac{\partial\varphi}{1+aa-2a\cos.\varphi} = \frac{\pi}{1-aa},$$

quod egregie consentit cum integratione satis cognita[1])

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha+\beta\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}} \text{Arc. cos.} \frac{\alpha\cos.\varphi+\beta}{\alpha+\beta\cos.\varphi},$$

quod integrale iam sponte evanescit sumto $\varphi = 0$. Statuatur igitur, ut hic perpetuo assumimus, $\varphi = 180^0 = \pi$ atque ob $\cos.\varphi = -1$ erit istud integrale

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}} \text{Arc. cos.}(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}}.$$

Iam nostro casu est $\alpha = 1+aa$ et $\beta = -2a$, unde fit $\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)} = 1-aa$.

CASUS II

QUO $n = 1$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^2} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Quia hic est $n = 1$, erit pro prioribus factoribus quantitatis V

$$\left(\frac{1-\lambda}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{1-\lambda}{1}\right) = -(\lambda-1), \quad \left(\frac{1-\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} \quad \text{etc.}$$

Pro posterioribus vero factoribus habebimus

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) = \lambda+1, \quad \left(\frac{1+\lambda}{\lambda+1}\right) = 1;$$

sequentes vero formulae evanescunt sicque erit

$$V = \lambda+1-(\lambda-1)aa,$$

1) Vide e. g. Commentationem 674 huius voluminis, imprimis § 1. G. F.

quocirca valor integralis propositi erit

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^3}((\lambda+1)-(\lambda-1)aa);$$

hinc ergo sequentes casus speciales apposuisse iuvabit, ubi brevitatis gratia loco formulae $1+aa-2a\cos.\varphi$ characterem Δ scribamus

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^2}=\frac{2\pi a}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.2\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^2(3-aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.3\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^3(4-2aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.4\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^4(5-3aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.5\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^5(6-4aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.6\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^6(7-5aa)}{(1-aa)^3}$$

etc.

CASUS III
QUO $n=2$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^3}\begin{bmatrix}\text{a} & \varphi=0\\ \text{ad} & \varphi=\pi\end{bmatrix}$$

Hic factores priores, qui in valore quantitatis V occurrunt, erunt

$$\binom{2-\lambda}{0}=1,\quad\binom{2-\lambda}{1}=-(\lambda-2),\quad\binom{2-\lambda}{2}=\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{1\cdot2},$$

$$\binom{2-\lambda}{3}=-\frac{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}{1\cdot2\cdot3}\quad\text{etc.},$$

factores autem posteriores erunt

$$\left(\frac{2+\lambda}{\lambda}\right) = \frac{\lambda+2}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{2}, \quad \left(\frac{2+\lambda}{\lambda+1}\right) = \lambda+2, \quad \left(\frac{2+\lambda}{\lambda+2}\right) = 1$$

et sequentes omnes evanescunt; hinc ergo colligimus

$$V = \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{1\cdot 2} - (\lambda\lambda-4)aa + \frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{1\cdot 2}a^4$$

hocque valore invento erit integrale quaesitum

$$\frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^5}\, V,$$

unde sequentes casus speciales statuendo ut ante

$$1 + aa - 2a\cos.\varphi = \Delta$$

evolvamus

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi}{(1-aa)^5}(1+4aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a}{(1-aa)^5}(1+aa),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6\pi a^2}{(1-aa)^5},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(10-5aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a^4}{(1-aa)^5}(5-4aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi a^5}{(1-aa)^5}(7-7aa+2a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^3} = \frac{2\pi a^6}{(1-aa)^5}(14-16aa+5a^4)$$

etc.

CASUS IV
QUO $n = 3$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^4} \begin{bmatrix} a & \varphi = 0 \\ ad & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Hic pro prioribus factoribus quantitatis V habebimus

$$\left(\frac{3-\lambda}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{3-\lambda}{1}\right) = -(\lambda-3), \quad \left(\frac{3-\lambda}{2}\right) = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2},$$

$$\left(\frac{3-\lambda}{3}\right) = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{3}, \quad \left(\frac{3-\lambda}{4}\right) = \frac{3-\lambda}{1}\cdot\frac{2-\lambda}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{3}\cdot\frac{-\lambda}{4} \quad \text{etc.},$$

factores autem posteriores erunt

$$\left(\frac{3+\lambda}{\lambda}\right) = \frac{3+\lambda}{1}\cdot\frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{1+\lambda}{3}, \quad \left(\frac{3+\lambda}{\lambda+1}\right) = \frac{3+\lambda}{1}\cdot\frac{2+\lambda}{2},$$

$$\left(\frac{3+\lambda}{\lambda+2}\right) = 3+\lambda, \quad \left(\frac{3+\lambda}{\lambda+3}\right) = 1$$

et sequentes omnes evanescunt; hinc ergo colligimus

$$V = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{(\lambda+2)(\lambda\lambda-9)}{1\cdot2}aa + \frac{(\lambda-2)(\lambda\lambda-9)}{1\cdot2}a^4 - \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1\cdot2\cdot3}a^6.$$

Quo valore invento colligimus integrale quaesitum

$$= \frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^7} V$$

hincque sequentes casus speciales ponendo ut hactenus

$$1 + aa - 2a\cos.\varphi = \Delta$$

evolvamus

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi}{(1-aa)^7}(1+9aa+9a^4+a^6),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^4} = \frac{4\pi a}{(1-aa)^7}(1+3aa+a^4),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^4} = \frac{10\pi a^2}{(1-aa)^7}(1+aa),$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^4} = \frac{20\pi a^3}{(1-aa)^7},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^4}{(1-aa)^7}(35-21aa+7a^4-a^6)$$

etc.

3. Hic longius progredi superfluum foret, cum forma generalis pro V inventa totum negotium facillime conficiat; verum haud inutile erit litterae n etiam valores negativos tribuere, quibus casibus tota integratio per methodos consuetas haud difficulter expeditur, unde iucundum erit pulcherrimum consensum nostrae formae generalis perspicere.

CASUS I

QUO $n = -1$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \partial\varphi \cos. \lambda\varphi \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Haec formula absolute est integrabilis, cum sit

$$\int \partial\varphi \cos. \lambda\varphi = \frac{1}{\lambda} \sin. \lambda\varphi;$$

quae formula cum iam evanescat posito $\varphi = 0$, sumendo $\varphi = \pi$ ob λ numerum integrum iste valor semper erit $= 0$ solo casu excepto $\lambda = 0$. Spectato enim λ tanquam infinite parvo erit $\sin. \lambda\pi = \lambda\pi$ ideoque hoc casu valor erit $= \pi$. Nunc autem forma generalis pro quantitate V data erit

$$V = \binom{-1-\lambda}{0}\binom{-1+\lambda}{\lambda} + \binom{-1-\lambda}{1}\binom{-1+\lambda}{\lambda+1}a^2 + \binom{-1-\lambda}{2}\binom{-1+\lambda}{\lambda+2}a^4$$
$$+ \binom{-1-\lambda}{3}\binom{-1+\lambda}{\lambda+3}a^6 + \binom{-1-\lambda}{4}\binom{-1+\lambda}{\lambda+4}a^8 + \binom{-1-\lambda}{5}\binom{-1+\lambda}{\lambda+5}a^{10} + \text{etc.}$$

Cuius expressionis factores posteriores omnes evanescunt, quoties fuerit vel $\lambda = 1$ vel $\lambda > 1$, propterea quod numeri inferiores maiores quam superiores, utrique vero positivi; quae conclusio autem non valet, quando superior numerus evadit negativus, uti evenit casu $\lambda = 0$, quem ergo solum perpendisse necesse est; hoc autem casu factores priores evadent

$$\binom{-1}{0} = 1, \quad \binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = +1, \quad \binom{-1}{3} = -1, \quad \binom{-1}{4} = +1 \text{ etc.},$$

at vero valores posteriores easdem determinationes recipiunt sicque habebimus

$$V = 1 + aa + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} + \text{etc.};$$

quae series cum sit geometrica, erit $V = \frac{1}{1-aa}$; quare, cum ob $n = -1$ et $\lambda = 0$ valor quaesitus per nostram formam generalem sit $\pi(1-aa)V$, iste valor nunc ob $V = \frac{1}{1-aa}$ abit in π, uti supra.

CASUS II

QUO $n = -2$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \partial\varphi \cos.\lambda\varphi (1 + aa - 2a\cos.\varphi) \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Per formam nostram generalem integrale quaesitum erit $\pi a^2(1-aa)^3 V$ existente

$$V = \binom{-2-\lambda}{0}\binom{-2+\lambda}{\lambda} + \binom{-2-\lambda}{1}\binom{-2+\lambda}{\lambda+1}aa + \binom{-2-\lambda}{2}\binom{-2+\lambda}{\lambda+2}a^4$$
$$+ \binom{-2-\lambda}{3}\binom{-2+\lambda}{\lambda+3}a^6 + \binom{-2-\lambda}{4}\binom{-2+\lambda}{\lambda+4}a^8 + \binom{-2-\lambda}{5}\binom{-2+\lambda}{\lambda+5}a^{10} + \text{etc.}$$

Ubi iterum evidens est, si fuerit vel $\lambda = 2$ vel $\lambda > 2$, omnes factores posteriores evanescere ideoque fieri $V = 0$, ita ut etiam valor integralis quaesitus

semper evanescat, id quod ex ipsa natura formulae sponte sequitur, quippe cuius integrale ob

$$\cos.\varphi\cos.\lambda\varphi = \frac{1}{2}\cos.(\lambda-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos.(\lambda+1)\varphi$$

in genere erit

$$\frac{1+aa}{\lambda}\sin.\lambda\varphi - \frac{a}{\lambda-1}\sin.(\lambda-1)\varphi - \frac{a}{\lambda-1}\sin.(\lambda+1)\varphi,$$

quod, quia $\lambda > 1$, casu $\varphi = \pi$ manifesto evanescit; unde duos casus perpendere superest, alterum, quo $\lambda = 0$, et alterum, quo $\lambda = 1$.

1°. Sit $\lambda = 0$ et integrale

$$\pi(1-aa)^3 V,$$

ubi pro V factores posteriores evadunt

$$\left(\frac{-2}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-2}{1}\right) = -2, \quad \left(\frac{-2}{2}\right) = +3, \quad \left(\frac{-2}{3}\right) = -4, \quad \left(\frac{-2}{4}\right) = +5,$$
$$\left(\frac{-2}{5}\right) = -6 \text{ etc.};$$

simili modo priores factores erunt

$$\left(\frac{-2}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-2}{1}\right) = -2, \quad \left(\frac{-2}{2}\right) = 3 \text{ etc.},$$

unde colligitur fore

$$V = 1 + 4aa + 9a^4 + 16a^6 + 25a^8 + 36a^{10} + \text{etc.}$$

Pro qua serie summanda inde subtrahatur series Vaa et remanebit

$$V(1-aa) = 1 + 3aa + 5a^4 + 7a^6 + 9a^8 + \text{etc.}$$

Multiplicetur denuo utrinque per $1-aa$ ac prodibit

$$V(1-aa)^2 = 1 + 2aa + 2a^4 + 2a^6 + 2a^8 + \text{etc.},$$

quae denuo ducta in $1 - aa$ praebet

$$V(1-aa)^3 = 1 + aa \quad \text{ideoque} \quad V = \frac{1+aa}{(1-aa)^3}.$$

Consequenter integrale quaesitum erit

$$= \pi(1+aa),$$

id quod utique oritur ex integratione actuali, cum sit

$$\int \partial\varphi (1 + aa - 2a \cos.\varphi) = (1+aa)\varphi - 2a \sin.\varphi,$$

quod facto $\varphi = \pi$ abit in $(1+aa)\pi$.

II°. Sit $\lambda = 1$ et integrale quaesitum

$$\pi a (1-aa)^3 V,$$

ubi pro factoribus posterioribus est

$$\left(\frac{-1}{1}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{2}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{4}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{5}\right) = -1 \text{ etc.}$$

Factores vero priores evadunt

$$\left(\frac{-3}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-3}{1}\right) = -3, \quad \left(\frac{-3}{2}\right) = 6, \quad \left(\frac{-3}{3}\right) = -10,$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right) = 15, \quad \left(\frac{-3}{5}\right) = -21, \quad \left(\frac{-3}{6}\right) = 28, \quad \left(\frac{-3}{7}\right) = -36 \text{ etc.;}$$

hinc igitur habebimus

$$V = -1 - 3aa - 6a^4 - 10a^6 - 15a^8 - 21a^{10} - 28a^{12} - 36a^{14} - \text{etc.}$$

Pro cuius summatione multiplicetur utrinque per $1 - aa$ et prodibit

$$V(1-aa) = -1 - 2aa - 3a^4 - 4a^6 - 5a^8 - 6a^{10} - 7a^{12} - 8a^{14} - \text{etc.;}$$

multiplicando denuo per $1 - aa$ prodit

$$V(1-aa)^2 = -1 - aa - a^4 - a^6 - a^8 - a^{10} - a^{12} - a^{14} - \text{etc.}$$

et multiplicando rursus per $1-aa$ erit

$$V(1-aa)^3 = -1,$$

ita ut sit

$$V = -\frac{1}{(1-aa)^3};$$

consequenter integrale quaesitum

$$= -\pi a.$$

Ipsa autem integratio ob

$$\cos.\varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2\varphi$$

praebet

$$\int \partial\varphi \cos.\varphi(1+aa-2a\cos.\varphi) = (1+aa)\sin.\varphi - a\varphi - \frac{1}{2}a\sin. 2\varphi,$$

unde statuendo $\varphi = \pi$ oritur integrale $= -a\pi$.

CASUS III

QUO $n = -3$ ET FORMULA INTEGRALIS HAEC PROPONITUR

$$\int \partial\varphi \cos.\lambda\varphi(1+aa-2a\cos.\varphi)^2 \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{bmatrix}$$

Hoc ergo casu ex forma generali erit integrale

$$\pi a^\lambda (1-aa)^5 V$$

existente

$$V = \binom{-3-\lambda}{0}\binom{-3+\lambda}{\lambda} + \binom{-3-\lambda}{1}\binom{-3+\lambda}{\lambda+1}a^2$$
$$+ \binom{-3-\lambda}{2}\binom{-3+\lambda}{\lambda+2}a^4 + \binom{-3-\lambda}{3}\binom{-3+\lambda}{\lambda+3}a^6 + \text{etc.},$$

ubi factores posteriores manifesto omnes evanescunt, quando fuerit vel $\lambda = 3$ vel $\lambda > 3$, quibus ergo casibus totum integrale evanescit, ut cuilibet calculum instituenti facile patebit; tres autem casus considerandi restant, quibus $\lambda < 3$.

I°. Sit $\lambda = 0$; atque tam priores quam posteriores factores convenient eruntque

$$\left(\frac{-3}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-3}{1}\right) = -3, \quad \left(\frac{-3}{2}\right) = 6, \quad \left(\frac{-3}{3}\right) = -10,$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right) = 15, \quad \left(\frac{-3}{5}\right) = -21, \quad \left(\frac{-3}{6}\right) = 28 \quad \text{etc.},$$

unde colligitur

$$V = 1 + 9aa + 36a^4 + 100a^6 + 225a^8 + 441a^{10} + \text{etc.};$$

quae series, cum tandem perducat ad differentias constantes, simili modo ut hactenus summari poterit. Prima enim multiplicatio per $1 - aa$ praebet

$$V(1 - aa) = 1 + 8aa + 27a^4 + 64a^6 + 125a^8 + 216a^{10} + 343a^{12} + \text{etc.}$$

Secunda multiplicatio per $1 - aa$ praebet

$$V(1 - aa)^2 = 1 + 7aa + 19a^4 + 37a^6 + 61a^8 + 91a^{10} + 127a^{12} + \text{etc.}$$

Tertia multiplicatio dat

$$V(1 - aa)^3 = 1 + 6aa + 12a^4 + 18a^6 + 24a^8 + 30a^{10} + \text{etc.}$$

Quarta multiplicatio dat

$$V(1 - aa)^4 = 1 + 5aa + 6a^4 + 6a^6 + 6a^8 + 6a^{10} + \text{etc.}$$

ac denique

$$V(1 - aa)^5 = 1 + 4aa + a^4,$$

ita ut sit

$$V = \frac{1 + 4aa + a^4}{(1 - aa)^5};$$

consequenter valor integralis quaesitus hoc casu erit

$$\pi(1 + 4aa + a^4),$$

quod egregie cum integrali more solito invento congruit.

II°. Sit $\lambda = 1$; quo casu priores factores ipsius V erunt

$$\left(\frac{-4}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-4}{1}\right) = -4, \quad \left(\frac{-4}{2}\right) = 10, \quad \left(\frac{-4}{3}\right) = -20,$$

$$\left(\frac{-4}{4}\right) = 35, \quad \left(\frac{-4}{5}\right) = -56, \quad \left(\frac{-4}{6}\right) = 84, \quad \left(\frac{-4}{7}\right) = -120 \text{ etc.},$$

posteriores vero ita se habent

$$\left(\frac{-2}{1}\right) = -2, \quad \left(\frac{-2}{2}\right) = +3, \quad \left(\frac{-2}{3}\right) = -4, \quad \left(\frac{-2}{4}\right) = +5,$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right) = -6, \quad \left(\frac{-2}{6}\right) = +7, \quad \left(\frac{-2}{7}\right) = -8, \quad \left(\frac{-2}{8}\right) = +9 \text{ etc.}$$

ideoque

$$V = -2 - 12a^2 - 40a^4 - 100a^6 - 210a^8 - 392a^{10} - 672a^{12} - 1080a^{14} - \text{etc.},$$

quae series, cum tandem perducat ad differentias constantes, simili modo ut ante summari poterit. Prima enim multiplicatio per $1 - aa$ dat

$$V(1-aa) = -2 - 10a^2 - 28a^4 - 60a^6 - 110a^8 - 182a^{10} - 280a^{12} - \text{etc.}$$

Secunda multiplicatio per $1 - aa$ praebet

$$V(1-aa)^2 = -2 - 8a^2 - 18a^4 - 32a^6 - 50a^8 - 72a^{10} - 98a^{12} - \text{etc.}$$

Tertia multiplicatio dat

$$V(1-aa)^3 = -2 - 6a^2 - 10a^4 - 14a^6 - 18a^8 - 22a^{10} - 26a^{12} - \text{etc.}$$

Quarta multiplicatio dat

$$V(1-aa)^4 = -2 - 4a^2 - 4a^4 - 4a^6 - 4a^8 - 4a^{10} - 4a^{12} - \text{etc.}$$

ac denique quinta multiplicatio per $1 - aa$ praebet

$$V(1-aa)^5 = -2 - 2aa = -2(1+aa);$$

unde colligitur

$$V = -\frac{2(1+aa)}{(1-aa)^5}$$

ideoque valor integralis quaesitus erit

$$= -2\pi a(1 + aa),$$

qui egregie cum integrali more solito invento congruit.

III°. Sit $\lambda = 2$ atque factores priores ipsius V erunt

$$\left(\frac{-5}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-5}{1}\right) = -5, \quad \left(\frac{-5}{2}\right) = 15, \quad \left(\frac{-5}{3}\right) = -35,$$
$$\left(\frac{-5}{4}\right) = 70, \quad \left(\frac{-5}{5}\right) = -126, \quad \left(\frac{-5}{6}\right) = 210, \quad \left(\frac{-5}{7}\right) = -330 \text{ etc.},$$

posteriores vero factores ita se habebunt

$$\left(\frac{-1}{2}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{4}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{5}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{-1}{6}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{7}\right) = -1, \quad \left(\frac{-1}{8}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{9}\right) = -1 \text{ etc.},$$

unde colligitur

$$V = 1 + 5a^2 + 15a^4 + 35a^6 + 70a^8 + 126a^{10} + 210a^{12} + 330a^{14} + \text{etc.},$$

quae series eodem modo ut ante summata praebet

$$V = + \frac{1}{(1 - aa)^5},$$

unde colligitur valor integralis quaesitus

$$= \pi aa,$$

qui cum integrali more solito invento utique egregie congruit.

4. Quodsi haec integralia, quibus n est numerus negativus, cum iis comparemus, quibus n est numerus positivus, insignis analogia deprehenditur inter valores harum formularum

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. \lambda\varphi \quad \text{et} \quad \int \frac{\partial\varphi \cos. \lambda\varphi}{\Delta^{n+1}};$$

quae affinitas si per plures casus exploretur, sequens nobis suppeditat Theorema maxime notabile.

THEOREMA

5. *Posito brevitatis gratia*

$$\Delta = 1 + aa - 2a\cos.\varphi$$

atque si integralia a termino $\varphi = 0$ *usque ad terminum* $\varphi = 180^0$ *extendantur, semper locum habebit sequens proportio*

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos.\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Delta^{n+1}} = \binom{n}{\lambda}(1-aa)^n : \binom{-n-1}{\lambda}(1-aa)^{-n-1},$$

vel si statuamus

$$\frac{\Delta}{1-aa} = \frac{1+aa-2a\cos.\varphi}{1-aa} = \Gamma,$$

simplicius erit

$$\int \Gamma^n \partial\varphi \cos.\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Gamma^{n+1}} = \binom{n}{\lambda} : \binom{-n-1}{\lambda}.$$

6. Ita exempli gratia si ponamus $n = 2$, erit ex priore proportione

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos.\lambda\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Delta^3} = \binom{2}{\lambda}(1-aa)^2 : \binom{-3}{\lambda}(1-aa)^{-3};$$

unde, si $\lambda = 0$, ob $\binom{2}{0} = 1$ et $\binom{-3}{0} = 1$ erit

$$\int \Delta^2 \partial\varphi : \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = (1-aa)^2 : \frac{1}{(1-aa)^3} = 1 : \frac{1}{(1-aa)^5}$$

ideoque erit

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{(1-aa)^5}\int \Delta^2 \partial\varphi.$$

Cum igitur sit

$$\int \Delta^2 \partial\varphi = \pi(1 + 4aa + a^4),$$

erit

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi}{(1-aa)^5}(1 + 4aa + a^4).$$

7. Manente $n = 2$ sit $\lambda = 1$; ob $\left(\frac{2}{1}\right) = 2$ et $\left(\frac{-3}{1}\right) = -3$ erit

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos.\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} = 2(1-aa)^2 : -3(1-aa)^{-3} = 1 : \frac{-3}{2(1-aa)^5},$$

unde fit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} = \frac{-3}{2(1-aa)^5} \int \Delta^2 \partial\varphi \cos.\varphi;$$

cum igitur sit

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos.\varphi = -2\pi a(1+aa),$$

erit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} = \frac{+3\pi a(1+aa)}{(1-aa)^5}.$$

8. Simili modo sumatur $\lambda = 2$ et ob $\left(\frac{2}{2}\right) = 1$ et $\left(\frac{-3}{2}\right) = 6$ erit

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos.2\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.2\varphi}{\Delta^3} = (1-aa)^2 : 6(1-aa)^{-3} = 1 : \frac{6}{(1-aa)^5},$$

unde fit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6}{(1-aa)^5} \int \Delta^2 \partial\varphi \cos.2\varphi.$$

Erat autem

$$\int \Delta^2 \partial\varphi \cos.2\varphi = \pi aa,$$

consequenter

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6\pi aa}{(1-aa)^5}.$$

9. Cum character $\left(\frac{n}{\lambda}\right)$ fiat $= 1$ casu $\lambda = n$, casibus vero, quibus $\lambda > n$, semper sit $\left(\frac{n}{\lambda}\right) = 0$, siquidem λ fuerit numerus integer, uti hic perpetuo assumimus, evidens est istis casibus, quibus $\lambda > n$, semper valorem formulae $\int \Delta^n \partial\varphi \cos.\lambda\varphi$ in nihilum abire.

10. Theorema, quod hic proposuimus, non solum ob simplicitatem rationis omni attentione est dignum, sed etiam, quod id tantum per plures casus sola inductione conclusimus neque adhuc ulla via patere videtur, qua eius veritas

directe demonstrari queat[1]); huiusmodi autem theoremata summam Geometrarum attentionem merentur. Evolvamus autem adhuc alios quosdam casus memorabiles nostri theorematis initio propositi.

EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = n$ ET FORMULA INTEGRALIS PROPOSITA $\int \frac{\partial\varphi \cos. n\varphi}{\Delta^{n+1}}$

Ex forma generali hoc casu integrale erit

$$\frac{\pi a^n}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{0}{0}\binom{2n}{n} + \binom{0}{1}\binom{2n}{n+1} aa + \binom{0}{2}\binom{2n}{n+2} a^4 + \text{etc.},$$

ubi manifesto omnes termini praeter primum evanescunt, ita ut sit $V = \binom{2n}{n}$ ideoque nostrum integrale

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. n\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^n}{(1-aa)^{2n+1}} \cdot \binom{2n}{n};$$

ubi notetur valores characteris $\binom{2n}{n}$ pro variis valoribus numeri n sequenti modo se habere:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	etc.
$\binom{2n}{n}$	1	2	6	20	70	252	924	3432	etc.,

quae series facillime per hos factores continuatur

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{10}{3}, \quad \frac{14}{4}, \quad \frac{18}{5}, \quad \frac{22}{6}, \quad \frac{26}{7} \quad \text{etc.}$$

---

1) Postea EULERUS demonstrationem invenit; confer Commentationem 674 huius voluminis, imprimis § 7 necnon notam 1 ibi adiectam. A. L.

Postremum vero theorema inventum ad hunc casum applicatum praebebit hanc proportionem

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. n\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos. n\varphi}{\Delta^{n+1}} = (1-aa)^n : \binom{-1-n}{n} (1-aa)^{-n-1},$$

unde fit

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. n\varphi = \frac{\pi a^n}{\binom{-n-1}{n}} \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} \pi a^n : \binom{-n-1}{n};$$

ubi notetur valores characteris $\binom{-n-1}{n}$ pro variis valoribus ipsius n esse

n	0	1	2	3	4	5	6	etc.,
$\binom{-n-1}{n}$	1	-2	6	-20	70	-252	924	etc.,

unde patet esse $\binom{-n-1}{n} = \pm \binom{2n}{n}$, dum signum superius valet, quando n est numerus par, contra vero signum inferius, quando n est numerus impar; hinc ergo erit

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. n\varphi = \pm \pi a^n.$$

His notatis evolvamus casus simpliciores pro utraque formula integrali.

$n = 0$	$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$	$\int \partial\varphi = +\pi,$
$n = 1$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. \varphi}{\Delta^2} = \frac{2\pi a}{(1-aa)^3}$	$\int \Delta\partial\varphi \cos. \varphi = -\pi a,$
$n = 2$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{6\pi a^2}{(1-aa)^5}$	$\int \Delta^2\partial\varphi \cos. 2\varphi = +\pi a^2,$
$n = 3$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^4} = \frac{20\pi a^3}{(1-aa)^7}$	$\int \Delta^3\partial\varphi \cos. 3\varphi = -\pi a^3,$
$n = 4$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^5} = \frac{70\pi a^4}{(1-aa)^9}$	$\int \Delta^4\partial\varphi \cos. 4\varphi = +\pi a^4,$
$n = 5$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^6} = \frac{252\pi a^5}{(1-aa)^{11}}$	$\int \Delta^5\partial\varphi \cos. 5\varphi = -\pi a^5,$
$n = 6$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^7} = \frac{924\pi a^6}{(1-aa)^{13}}$	$\int \Delta^6\partial\varphi \cos. 6\varphi = +\pi a^6$

etc.

Hic imprimis notatu dignum occurrit, quod his casibus $\lambda = n$ integralia tam succincte exprimuntur; nunc autem alios perpendamus casus, quibus litterae λ successive valores 0, 1, 2, 3 etc. tribuantur.

EVOLUTIO CASUS QUO $\lambda = 0$ ET FORMULA INTEGRALIS PROPOSITA $\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}}$

11. Cum hic sit $\lambda = 0$, integrale quaesitum ex nostra formula erit

$$\frac{\pi}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \left(\frac{n}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 aa + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 a^6 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 a^8 + \text{etc.};$$

simul vero hinc etiam assignari poterit valor huius formulae $\int \Delta^n \partial\varphi$, cum sit

$$\int \Delta^n \partial\varphi : \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = (1-aa)^n : (1-aa)^{-n-1} = (1-aa)^{2n+1} : 1,$$

ex qua proportione colligitur

$$\int \Delta^n \partial\varphi = \pi V.$$

Percurramus igitur simpliciores casus pro exponente n, quos sequenti tabula subiungamus

$$n = 0 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}, \\ \int \partial\varphi = \pi, \end{cases}$$

$$n = 1 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi}{(1-aa)^3}(1+aa), \\ \int \Delta\partial\varphi = \pi(1+aa), \end{cases}$$

$$n = 2 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi}{(1-aa)^5}(1+2^2aa+a^4), \\ \int \Delta^2\partial\varphi = \pi(1+2^2aa+a^4), \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi}{(1-aa)^7}(1 + 3^2aa + 3^2a^4 + a^6), \\ \int \Delta^3 \partial\varphi = \pi(1 + 3^2aa + 3^2a^4 + a^6), \end{cases}$$

$$n = 4 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi}{(1-aa)^9}(1 + 4^2aa + 6^2a^4 + 4^2a^6 + a^8), \\ \int \Delta^4 \partial\varphi = \pi(1 + 4^2aa + 6^2a^4 + 4^2a^6 + a^8) \end{cases}$$

etc.

EVOLUTIO CASUUM QUIBUS $\lambda = 1$ ET FORMULA INTEGRALIS PROPOSITA $\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^{n+1}}$

12. Hoc igitur casu integrale quaesitum erit

$$\frac{\pi a}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-1}{0}\binom{n+1}{1} + \binom{n-1}{1}\binom{n+1}{2}aa + \binom{n-1}{2}\binom{n+1}{3}a^4$$
$$+ \binom{n-1}{3}\binom{n+1}{4}a^6 + \binom{n-1}{4}\binom{n+1}{5}a^8 + \binom{n-1}{5}\binom{n+1}{6}a^{10} + \text{etc.}$$

Tum vero cum ob $\lambda = 1$ sit

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos.\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^{n+1}} = n(1-aa)^n : -(n+1)(1-aa)^{-n-1},$$

inde[1]) fit

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos.\varphi = -\frac{n}{n+1} \cdot \pi a V.$$

Pro casibus ergo simplicioribus ipsius n sequentem tabulam subiungamus:

$$n = 0 \begin{cases} \int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a}{1-aa}, \\ \int \partial\varphi \cos.\varphi = 0, \end{cases}$$

1) Editio princeps: *unde* (loco inde). Correxit G. F.

$$n=1\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}=\frac{2\pi a}{(1-aa)^3},\\ \int\Delta\partial\varphi\cos.\varphi=-\pi a,\end{cases}$$

$$n=2\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^3}=\frac{\pi a}{(1-aa)^5}(1\cdot3+1\cdot3aa),\\ \int\Delta^2\partial\varphi\cos.\varphi=-\frac{2}{3}\pi a(1\cdot3+1\cdot3aa),\end{cases}$$

$$n=3\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^4}=\frac{\pi a}{(1-aa)^7}(1\cdot4+2\cdot6aa+1\cdot4a^4),\\ \int\Delta^3\partial\varphi\cos.\varphi=-\frac{3}{4}\pi a(1\cdot4+2\cdot6aa+1\cdot4a^4),\end{cases}$$

$$n=4\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^5}=\frac{\pi a}{(1-aa)^9}(1\cdot5+3\cdot10aa+3\cdot10a^4+1\cdot5\cdot a^6),\\ \int\Delta^4\partial\varphi\cos.\varphi=-\frac{4}{5}\pi a(1\cdot5+3\cdot10aa+3\cdot10a^4+1\cdot5\cdot a^6),\end{cases}$$

$$n=5\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^6}=\frac{\pi a}{(1-aa)^{11}}(1\cdot6+4\cdot15aa+6\cdot20a^4+4\cdot15a^6+1\cdot6a^8),\\ \int\Delta^5\partial\varphi\cos.\varphi=-\frac{5}{6}\pi a(1\cdot6+4\cdot15aa+6\cdot20a^4+4\cdot15a^6+\text{etc.}),\end{cases}$$

$$n=6\begin{cases}\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^7}=\frac{\pi a}{(1-aa)^{13}}(1\cdot7+5\cdot21aa+10\cdot35a^4+10\cdot35a^6+\text{etc.}),\\ \int\Delta^6\partial\varphi\cos.\varphi=-\frac{6}{7}\pi a(1\cdot7+5\cdot21aa+10\cdot35a^4+10\cdot35a^6+\text{etc.})\end{cases}$$

etc.

EVOLUTIO CASUUM QUIBUS $\lambda=2$ ET FORMULA INTEGRALIS PROPOSITA $\int\frac{\partial\varphi\cos.2\varphi}{\Delta^{n+1}}$

13. Hoc ergo casu integrale quaesitum erit

$$\frac{\pi a^2}{(1-aa)^{2n+1}}V$$

existente

$$V = \binom{n-2}{0}\binom{n+2}{2} + \binom{n-2}{1}\binom{n+2}{3}aa + \binom{n-2}{2}\binom{n+2}{4}a^4 + \binom{n-2}{3}\binom{n+2}{5}a^6 + \binom{n-2}{4}\binom{n+2}{6}a^8 + \text{etc.},$$

tum vero erit altera forma

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. 2\varphi = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\pi aa V.$$

Percurramus ergo ut hactenus casus simpliciores, et quia integratio formulae $\int \Delta^n \partial\varphi \cos. 2\varphi$ sponte patet ex ultima formula, superfluum foret haec integralia allegare:

$$n = 0 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta} = \frac{\pi aa}{1-aa}, \right.$$

$$n = 1 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^3}(1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot aa), \right.$$

$$n = 2 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^5}(1\cdot 6), \right.$$

$$n = 3 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^7}(1\cdot 10 + 1\cdot 10aa), \right.$$

$$n = 4 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^9}(1\cdot 15 + 2\cdot 20aa + 1\cdot 15a^4), \right.$$

$$n = 5 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^{11}}(1\cdot 21 + 3\cdot 35a^2 + 3\cdot 35a^4 + 1\cdot 21a^6), \right.$$

$$n = 6 \left| \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^7} = \frac{\pi aa}{(1-aa)^{13}}(1\cdot 28 + 4\cdot 56aa + 6\cdot 70a^4 + 4\cdot 56a^6 + 1\cdot 28a^8) \right.$$

etc.

EVOLUTIO CASUUM QUIBUS $\lambda = 3$ ET FORMULA INTEGRALIS PROPOSITA $\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^{n+1}}$

14. Hoc ergo casu integrale erit

$$\frac{\pi a^3}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-3}{0}\binom{n+3}{3} + \binom{n-3}{1}\binom{n+3}{4}aa + \binom{n-3}{2}\binom{n+3}{5}a^4 + \binom{n-3}{3}\binom{n+3}{6}a^6 + \text{etc.},$$

pro altera autem formula habebimus

$$\int \Delta^n \partial\varphi \cos. 3\varphi = -\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\pi a^3 V.$$

Pro praecipuis igitur casibus habebimus sequentem tabellam:

$n=0$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^3}{1-aa}$,
$n=1$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^3}(1\cdot 4 - 2\cdot 1aa)$,
$n=2$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(1\cdot 10 - 1\cdot 5aa + 1\cdot 1a^4)$,
$n=3$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^7}(1\cdot 20)$,
$n=4$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^9}(1\cdot 35 + 1\cdot 35aa)$,
$n=5$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^{11}}(1\cdot 56 + 2\cdot 70aa + 1\cdot 56a^4)$,
$n=6$	$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^7} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^{13}}(1\cdot 84 + 3\cdot 126aa + 3\cdot 126a^4 + 1\cdot 84a^6)$

etc.

OBSERVATIO CIRCA VALORES NEGATIVOS IPSIUS λ

15. Iam initio monuimus pro littera λ tantum numeros integros positivos sumi oportere, qua conditione generalitas nostrae quaestionis non restringitur, cum semper sit $\cos.(-\lambda\varphi) = \cos.\lambda\varphi$. Interim tamen hic ingens paradoxon se offert, quod solutiones supra inventae evadant falsae, quando ipsi λ valores negativi tribuuntur; quod quo clarius pateat, consideremus casum $n = 0$, pro quo supra invenimus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1-aa};$$

unde videtur sequi debere casu $\lambda = -i$ fore

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{a^i(1-aa)},$$

quod autem manifesto est falsum, cum verum integrale utique sit $\frac{\pi a^i}{1-aa}$, perinde ac si esset $\lambda = +i$. At vero ista restrictio tantum est apparens atque solutio nostra generalis nihilo minus veritati est consentanea, etiamsi litterae λ valores negativi tribuantur, dummodo fuerint integri, quandoquidem perpetuo assumimus casu $\varphi = \pi$ semper esse $\sin.\lambda\varphi = 0$; hoc igitur maxime operae erit pretium clarius ostendisse.

16. Sufficiet autem casum, quo $n = 0$, perpendisse, pro quo nostra solutio generalis praebet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1-aa} V$$

existente

$$V = \binom{-\lambda}{0}\binom{\lambda}{\lambda} + \binom{-\lambda}{1}\binom{\lambda}{\lambda+1}aa + \binom{-\lambda}{2}\binom{\lambda}{\lambda+2}a^4 + \binom{-\lambda}{3}\binom{\lambda}{\lambda+3}a^6 + \text{etc.}$$

Cuius expressionis tantum prima pars remanet, quando λ est numerus positivus integer, propterea quod tum formulae $\binom{\lambda}{\lambda+1}$, $\binom{\lambda}{\lambda+2}$, $\binom{\lambda}{\lambda+3}$ etc. evanescunt; longe secus autem se res habet, quando pro λ assumitur numerus negativus, veluti si ponamus $\lambda = -i$; tum erit

$$V = \binom{i}{0}\binom{-i}{-i} + \binom{i}{1}\binom{-i}{1-i}aa + \binom{i}{2}\binom{-i}{2-i}a^4 + \binom{i}{3}\binom{-i}{3-i}a^6 + \text{etc.},$$

ubi notetur omnium horum characterum, quamdiu denominator est negativus, valores evanescere; quoniam vero denominatores continuo crescunt, tandem evadent positivi atque adeo valores determinatos exhibebunt. Ad hoc ostendendum ponamus primo $\lambda = -1$ sive $i = +1$ eritque[1])

$$V = \binom{1}{0}\binom{-1}{-1} + \binom{1}{1}\binom{-1}{0}aa,$$

ubi primum membrum sine dubio est $= 0$, secundum vero

$$\binom{1}{1}\binom{-1}{0}aa = aa.$$

Cum igitur sit $V = aa$ casu $\lambda = -1$, nostra formula praebet hoc integrale

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-\varphi)}{\Delta} = \frac{\pi a^{-1}}{1-aa} \cdot aa = \frac{\pi a}{1-aa},$$

id quod prorsus convenit.

17. Sumamus nunc $\lambda = -2$ sive $i = 2$ manente $n = 0$ eritque

$$V = \binom{2}{0}\binom{-2}{-2} + \binom{2}{1}\binom{-2}{-1}aa + \binom{2}{2}\binom{-2}{0}a^4,$$

ubi sequentes termini manifesto evanescunt; ob factores posteriores autem bini termini initiales etiam evanescunt ob denominatores negativos, tertius autem terminus ob $\binom{-2}{0} = 1$ praebet $V = a^4$; consequenter casu $\lambda = -2$ habebimus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-2\varphi)}{\Delta} = \frac{\pi a^{-2}}{1-aa} \cdot a^4 = \frac{\pi aa}{1-aa},$$

prorsus atque invenimus pro

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta}.$$

---

1) Editio princeps: *eritque* $V = -aa$. Correxit A. L.

18. Simili modo facile intelligitur casu $\lambda = -3$ proditurum esse $V = a^6$ eodemque modo casu $\lambda = -4$ reperietur $V = a^8$; atque adeo in genere casu $\lambda = -i$ obtinebitur $V = a^{2i}$; sicque huius formulae

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-i\varphi)}{\Delta}$$

integrale erit

$$\frac{\pi a^{-i}}{1-aa} \cdot a^{2i} = \frac{\pi a^i}{1-aa},$$

quod ipsum est integrale formulae

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta},$$

uti natura rei postulat.

19. Talis autem egregius consensus locum habebit pro omnibus valoribus ipsius n. Sit enim verbi gratia $n = 2$ et integratio nostra

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\lambda\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^\lambda}{(1-aa)^5} V$$

existente

$$V = \binom{2-\lambda}{0}\binom{2+\lambda}{\lambda} + \binom{2-\lambda}{1}\binom{2+\lambda}{\lambda+1} aa + \binom{2-\lambda}{2}\binom{2+\lambda}{\lambda+2} a^4 + \text{etc.};$$

quare sumto $\lambda = -3$, ut forma nostra sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-3\varphi)}{\Delta^3} = \frac{\pi a^{-3}}{(1-aa)^5} V$$

existente

$$V = \binom{5}{0}\binom{-1}{-3} + \binom{5}{1}\binom{-1}{-2} aa + \binom{5}{2}\binom{-1}{-1} a^4 + \binom{5}{3}\binom{-1}{0} a^6 + \binom{5}{4}\binom{-1}{1} a^8 + \binom{5}{5}\binom{-1}{2} a^{10},$$

ubi tria priora membra evanescunt, sequentia autem ob

$$\binom{-1}{0} = 1, \quad \binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = 1$$

dabunt[1])

$$V = 10a^6 - 5a^8 + a^{10} = a^6(10 - 5aa + a^4),$$

1) Editio princeps: *erit* (loco dabunt). Correxit G. F.

consequenter nostrum integrale fit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-3\varphi)}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3}{(1-aa)^5}(10-5aa+a^4),$$

prorsus uti supra invenimus pro casu

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^3};$$

talis autem consensus perpetuo deprehendi debebit.

DISQUISITIO CONIECTURALIS SUPER FORMULA INTEGRALI[1]

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(\alpha + \beta \cos. \varphi)^n}$$

M. S. Academiae exhib. die 31. Augusti 1778

Commentatio 673 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 217—242

1.[2]) Incipiamus a casu simplicissimo, quo $i = 0$ et $n = 1$, et formula integranda proponitur haec

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha + \beta \cos. \varphi},$$

ad quod praestandum commodissime in subsidium vocatur haec substitutio

$$\text{tang.} \frac{1}{2}\varphi = t,$$

unde statim fit

$$\partial\varphi = \frac{2\partial t}{1 + tt};$$

porro vero cum hinc sit

$$\sin. \frac{1}{2}\varphi = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \quad \text{et} \quad \cos. \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

erit

$$\cos. \varphi = \frac{1 - tt}{1 + tt}$$

1) Confer Commentationes 672 et 674 huius voluminis. A. K.

2) In editione principe paragraphi numeris 40 usque ad 82 signatae sunt. G. F.

ideoque denominator nostrae formulae

$$\alpha + \beta \cos. \varphi = \frac{\alpha + \beta + (\alpha - \beta) tt}{1 + tt}$$

sicque nostra formula integranda erit

$$\int \frac{2 \partial t}{\alpha + \beta + (\alpha - \beta) tt}.$$

2. Constat autem ex elementis esse

$$\int \frac{\partial t}{f + gtt} = \frac{1}{\sqrt{fg}} \text{Arc. tang. } t \sqrt{\frac{g}{f}}.$$

Quare cum pro nostro casu sit $f = \alpha + \beta$ et $g = \alpha - \beta$, habebimus hanc integrationem

$$\int \frac{\partial \varphi}{\alpha + \beta \cos. \varphi} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}} \text{Arc. tang. } t \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}}$$

existente $t = \text{tang.} \frac{1}{2} \varphi$, quod ergo integrale evanescit casu $t = 0$ ideoque casu $\varphi = 0$. Quodsi ergo hoc integrale extendere velimus a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^0$, ubi fit $t = \infty$, istud integrale erit

$$\frac{2}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

denotante π semiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$.

3. Quoniam igitur integrale nostrae formulae a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^0$ tam concinne et simpliciter exprimitur, etiam generatim in hac dissertatione in ea tantum integralia formulae generalis propositae

$$\int \frac{\partial \varphi \cos. i\varphi}{(\alpha + \beta \cos. \varphi)^n}$$

sum inquisiturus, quae comprehenduntur inter terminos $\varphi = 0$ et $\varphi = 180^0$. Quia autem in casu tractato formula inest irrationalis $\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}$, ad hoc

incommodum tollendum in sequentibus perpetuo assumemus

$$\alpha = 1 + aa \quad \text{et} \quad \beta = -2a,$$

unde fit

$$\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)} = 1 - aa,$$

sicque nostrae disquisitiones versabuntur circa integrationem huius formulae generalis

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^n},$$

pro qua brevitatis gratia ubique statuamus

$$1 + aa - 2a \cos. \varphi = \Delta,$$

ut nostra formula generalis iam sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^n},$$

ubi, ut iam notatum, eum tantum integralis valorem explorare nobis est propositum, qui intra terminos $\varphi = 0$ et $\varphi = 180^0$ contineatur, quem valorem ex casibus particularibus concludere conabimur. Praeterea vero hic in genere notetur litteram i nobis perpetuo alios numeros non designare praeter integros et quidem positivos, quandoquidem semper est

$$\cos. (-i\varphi) = \cos. (+i\varphi).$$

I. DE INTEGRATIONE FORMULAE

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix}$$

4. Hic ergo casus in generali continetur ponendo exponentem $n = 1$, quem casum ut simplicissimum spectamus, siquidem casus $n = 0$ nulla prorsus laborat difficultate, cum sit

$$\int \partial\varphi \cos. i\varphi = \frac{1}{i} \sin. i\varphi,$$

quod integrale iam evanescit casu $i = 0$, et quoniam i numeros tantum integros significat, sumto $\varphi = 180^0$ hoc integrale iterum evanescit solo casu excepto, quo $i = 0$, quippe quo casu integrale fiet $= \varphi$ ideoque sumto $\varphi = 180^0$ erit pro terminis integrationis constitutis $\int \partial\varphi = \pi$.

5. Iste postremus casus fundamentum continet, unde integralia formae hic propositae haurire conveniet; cum enim sit

$$\partial\varphi = \frac{(1+aa)\partial\varphi}{\Delta} - \frac{2a\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta},$$

erit integrando pro terminis praescriptis

$$\pi = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} - 2a\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta};$$

supra autem invenimus esse

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa},$$

quo valore substituto adipiscimur integrationem casus $i = 1$; cum enim sit

$$\pi = \frac{(1+aa)\pi}{1-aa} - 2a\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta},$$

erit

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a}{1-aa},$$

sicque iam duos casus sumus adepti, qui sunt

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa} \quad \text{et} \quad \int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a}{1-aa}.$$

6. Ex his autem duobus casibus $i = 0$ et $i = 1$ sequentes omnes haud difficulter derivare licet ope huius lemmatis: cum sit, ut vidimus,

$$\int\partial\varphi\cos.i\varphi = 0,$$

erit

$$0 = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{\Delta} - 2a\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi\cos.i\varphi}{\Delta}.$$

Constat autem esse

$$2 \cos. \varphi \cos. i\varphi = \cos. (i-1)\varphi + \cos. (i+1)\varphi,$$

unde habebimus hanc aequationem

$$\frac{1+aa}{a}\int\frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} = \int\frac{\partial\varphi \cos. (i-1)\varphi}{\Delta} + \int\frac{\partial\varphi \cos. (i+1)\varphi}{\Delta},$$

unde oritur istud lemma

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. (i+1)\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} - \int\frac{\partial\varphi \cos. (i-1)\varphi}{\Delta}.$$

Sumto nunc $i = 1$ istud lemma nobis suppeditat hunc casum

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{\partial\varphi \cos. \varphi}{\Delta} - \int\frac{\partial\varphi}{\Delta},$$

qui ergo per binos praecedentes expeditur; fiet enim

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta} = \frac{\pi aa}{1-aa}.$$

Sumatur nunc $i = 2$ et lemma nobis dabit

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta} - \int\frac{\partial\varphi \cos. \varphi}{\Delta}$$

sive

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^3}{1-aa};$$

simili modo sumto $i = 3$ lemma dabit

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta} - \int\frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta}$$

sive

$$\int\frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^4}{1-aa}.$$

Porro casus $i = 4$ praebet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta} - \int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta}$$

sive

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^5}{1-aa}$$

atque ita porro.

7. Hinc igitur patet singulos istos casus ex binis praecedentibus determinari ope scalae relationis

$$\frac{1+aa}{a}, \quad -1$$

atque seriem recurrentem hinc oriundam abire in geometricam; quodsi enim bini termini postremi iam inventi fuerint

$$\frac{\pi a^\lambda}{1-aa} \quad \text{et} \quad \frac{\pi a^{\lambda+1}}{1-aa},$$

sequens reperitur

$$= \frac{\pi a^{\lambda+2}}{1-aa};$$

ex quo ergo sine ullo dubio sequitur pro casu particulari hoc loco tractato in genere fore

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa},$$

ubi autem probe est notandum loco i non nisi numeros integros positivos assumi debere.

II. DE INTEGRATIONE FORMULAE

$$\int \frac{\delta\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix}$$

8. Casus simplicissimus hic occurret $\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2}$, cuius ergo integrale ante omnia perscrutari oportet; hunc in finem consideremus hanc formulam finitam

$$\frac{\sin.\varphi}{\Delta} = V,$$

quae pro utroque termino $\varphi = 0$ et $\varphi = 180^0$ evanescit; hinc autem erit

$$\partial V = \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta} - \frac{2a\partial\varphi \sin.\varphi^2}{\Delta^2}$$

sive

$$\partial V = \frac{(1+aa)\,\partial\varphi \cos.\varphi - 2a\partial\varphi}{\Delta^2};$$

unde integrando iam novimus esse

$$0 = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}.$$

Porro vero, quoniam ante habuimus

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa},$$

hanc formulam integralem supra et infra per Δ multiplicando erit quoque

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2}.$$

Ex praecedente autem colligitur

$$\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} = \frac{2a}{1+aa}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2},$$

quo valore substituto habebimus

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - \frac{4aa}{1+aa}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1-aa)^2}{1+aa}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2};$$

quamobrem hinc adipiscimur hanc integrationem principalem

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

ex quo immediate deducitur casus sequens

$$\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} = \frac{2\pi a}{(1-aa)^3}.$$

9. Pro sequentibus casibus consideremus integrationem in articulo praecedente inventam

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa},$$

quae formula integralis supra et infra per Δ multiplicando discerpitur in sequentes duas partes

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} - 2a\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2},$$

quae aequatio porro evolvitur in hanc formam

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} - a\int \frac{\partial\varphi \cos.(i-1)\varphi}{\Delta^2} - a\int \frac{\partial\varphi \cos.(i+1)\varphi}{\Delta^2};$$

unde deducitur hoc quasi lemma

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(i+1)\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos.(i-1)\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^{i-1}}{1-aa}.$$

10. Sumamus nunc statim $i=1$ atque istud lemma nobis praebet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi}{1-aa};$$

hic iam bini valores iam inventi substituantur atque reperietur

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa) - \pi(1-aa)^2}{(1-aa)^3};$$

hinc ergo sequitur fore

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(3aa-a^4)}{(1-aa)^3} = \frac{\pi aa(3-aa)}{(1-aa)^3}.$$

Sumatur nunc pro lemmate praemisso $i=2$ eritque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a}{1-aa}$$

sive

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1+aa)\pi a(3-aa) - 2\pi a - \pi a(1-aa)^2}{(1-aa)^3},$$

quae expressio contrahitur in hanc

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3(4 - 2aa)}{(1 - aa)^3}.$$

Sit nunc in lemmate praemisso $i = 3$ eritque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{1 + aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi aa}{1 - aa}$$

sive

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1 + aa)\pi aa(4 - 2aa) - \pi aa(3 - aa) - \pi aa(1 - aa)^2}{(1 - aa)^3},$$

quae expressio contrahitur in hanc

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^4(5 - 3aa)}{(1 - aa)^3}.$$

Sit nunc in lemmate nostro $i = 4$ eritque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{1 + aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^3}{1 - aa}$$

sive

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1 + aa)\pi a^3(5 - 3aa) - \pi a^3(4 - 2aa) - \pi a^3(1 - aa)^2}{(1 - aa)^3},$$

quae expressio contrahitur in hanc

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^5(6 - 4aa)}{(1 - aa)^3}.$$

Sit nunc in lemmate nostro $i = 5$ eritque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{1 + aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^4}{1 - aa}$$

sive

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1 + aa)\pi a^4(6 - 4aa) - \pi a^4(5 - 3aa) - \pi a^4(1 - aa)^2}{(1 - aa)^3},$$

quae expressio contrahitur in hanc

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^6(7 - 5aa)}{(1 - aa)^3}.$$

11. Qui has formulas earumque generationem attentius perpendet, nullo certe modo dubitabit inde hanc conclusionem deducere, quin in genere pro casu hic proposito futurum sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3};$$

cuius lex cum non sit tam manifesta quam in casu praecedente, omnes formulas inventas iunctim ante oculos ponamus

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a(2-0aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi aa(3-aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3(4-2aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^4(5-3aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^5(6-4aa)}{(1-aa)^3},$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^6(7-5aa)}{(1-aa)^3}.$$

III. DE INTEGRATIONE FORMULAE

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} \left[\begin{matrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{matrix}\right]$$

12. Pro casu simplicissimo $\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3}$ eruendo utamur hac formula

$$V = \frac{\sin.\varphi}{\Delta^2}$$

eritque

$$\partial V = \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^2} - \frac{2\partial\varphi \sin.\varphi^2}{\Delta^3}$$

sive

$$\partial V = \frac{(1 + aa)\partial\varphi \cos.\varphi - 2a\partial\varphi \cos.\varphi^2 - 4a\partial\varphi \sin.\varphi^2}{\Delta^3}.$$

Hic loco $\sin.\varphi^2$ scribatur $1 - \cos.\varphi^2$ atque integrando ob $V = 0$ habebimus hanc aequationem

$$0 = (1 + aa)\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} - 4a\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3} + 2a\int\frac{\partial\varphi \cos.\varphi^2}{\Delta^3}.$$

13. Huc addamus hanc formam indefinitam

$$s = A\int\frac{\partial\varphi}{\Delta} + B\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2},$$

cuius differentiale ad denominationem Δ^3 perducatur, litterae vero A et B ita definiantur, ut membra $\partial\varphi \cos.\varphi$ et $\partial\varphi \cos.\varphi^2$ evanescant, eritque formulis differentialibus additis

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^3(\partial V + \partial s)}{\partial\varphi} = &- 4a + (1 + aa)\cos.\varphi + 2a\cos.\varphi^2 \\ &+ A(1 + aa)^2 - 4Aa(1 + aa)\cos.\varphi + 4Aaa\cos.\varphi^2 \\ &+ B(1 + aa) - 2Ba\cos.\varphi.\end{aligned}$$

Nunc igitur, ut termini $\cos.\varphi^2$ abigantur, statuatur

$$2a + 4Aaa = 0$$

ideoque

$$A = \frac{-1}{2a}.$$

Nunc etiam termini $\cos.\varphi$ e medio tollantur eritque

$$1 + aa - 4Aa(1 + aa) - 2Ba = 0,$$

unde fit

$$B = \frac{3(1 + aa)}{2a}.$$

Ex quibus valoribus nanciscimur

$$\frac{\Delta^3(\partial V + \partial s)}{\partial\varphi} = \frac{(1 - aa)^2}{a};$$

hinc ergo vicissim integrando habebimus

$$V+s=\frac{(1-aa)^2}{a}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}.$$

14. Cum igitur, ut iam notavimus, sit $V=0$ atque ex casibus iam tractatis

$$s=\frac{-1}{2a}\cdot\frac{\pi}{1-aa}+\frac{3(1+aa)}{2a}\cdot\frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

habebimus hanc aequationem

$$\frac{(1-aa)^2}{a}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}=\frac{3\pi(1+aa)^2-\pi(1-aa)^2}{2a(1-aa)^3},$$

unde colligitur

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}=\frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5}.$$

15. Cum sit

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3},$$

erit per reductionem hactenus usitatam

$$\frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3}=(1+aa)\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}-2a\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^3},$$

unde concludimus

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{2a}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}-\frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3}$$

ideoque

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.\varphi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{2a}\cdot\frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5}-\frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3}$$

$$=\frac{3\pi a(1+aa)}{(1-aa)^5}=\frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5}.$$

16. Cum igitur in articulo praecedente [§ 11] invenerimus

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^i(i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3},$$

hanc formulam integralem supra et infra per Δ multiplicando habebimus

$$\frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3} = (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} - 2a\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3}$$

sive

$$\frac{\pi a^i (i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}$$
$$= (1+aa)\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} - a\int \frac{\partial\varphi \cos.(i-1)\varphi}{\Delta^3} - a\int \frac{\partial\varphi \cos.(i+1)\varphi}{\Delta^3};$$

unde deducitur hoc quasi lemma

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(i+1)\varphi}{\Delta^3}$$
$$= \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} - \int \frac{\partial\varphi \cos.(i-1)\varphi}{\Delta^3} - \frac{\pi a^{i-1}(i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3}.$$

17. Sumamus nunc statim $i = 1$ atque istud lemma nobis praebet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1+aa}{a}\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\Delta^3} - \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^3} - \frac{2\pi}{(1-aa)^3};$$

hic iam bini valores iam inventi substituantur reperieturque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1+aa}{a}\cdot\frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5} - \frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5} - \frac{2\pi(1-aa)^2}{(1-aa)^5}$$
$$= \frac{\pi aa(6)}{(1-aa)^5};$$

sumto $i = 2$ erit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 3\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^3(10-5aa+a^4)}{(1-aa)^5};$$

sumto $i = 3$ nanciscimur

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 4\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^4(15-12aa+3a^4)}{(1-aa)^5};$$

sumto $i = 4$ prodit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 5\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^5(21-21aa+6a^4)}{(1-aa)^5};$$

posito $i = 5$ erit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. 6\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^6 (28 - 32aa + 10a^4)}{(1-aa)^5}$$

et in genere

$$\int \frac{\partial\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}\left(\frac{i(i+3)+2}{2} - (ii-4)aa + \frac{i(i-3)+2}{2}a^4\right),$$

quae forma facile transformatur in hanc

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}\left(\frac{(i+1)(i+2)}{2} - (i+2)(i-2)aa + \frac{(i-1)(i-2)}{2}a^4\right).$$

18. Hoc modo procedere liceret ad sequentes formulas, in quibus denominator est Δ^4, Δ^5, Δ^6 etc.; verum integralium formae ita continuo magis fierent complicatae, ut vix ullus ordo in iis observari posset, quamobrem aliam viam inire conveniet, qua numerum i pro dato assumimus et continuo a minoribus ad maiores numeros n procedemus. Primo igitur sumamus $i = 0$ et investigemus valorem integralem formulae

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}}.$$

INTEGRATIO FORMULAE

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix}$$

EXISTENTE $\Delta = 1 + aa - 2a\cos.\varphi$

19. Ex praecedentibus colligere licet quemlibet casum exponentis $n+1$ a duobus praecedentibus pendere, ita ut sit sub terminis integrationis praescriptis

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^n} + \beta\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}},$$

ubi totum negotium eo redit, ut coefficientes α et β rite determinentur; hunc

in finem statuamus in genere esse

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^n} + \beta \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}} + \gamma \frac{\sin.\varphi}{\Delta^n},$$

quippe qui postremus terminus pro utroque integrationis termino evanescit.

20. Differentietur nunc ista aequatio et facta divisione per $\partial\varphi$ orietur sequens aequatio

$$\frac{1}{\Delta^{n+1}} = \frac{\alpha}{\Delta^n} + \frac{\beta}{\Delta^{n-1}} + \frac{\gamma \cos.\varphi(1 + aa - 2a\cos.\varphi) - 2\gamma an \sin.\varphi^2}{\Delta^{n+1}}$$

haecque aequatio multiplicata per Δ^{n+1} abibit in hanc formam

$$1 = \alpha(1 + aa - 2a\cos.\varphi) + \beta(1 + aa)^2 - 4\beta a \cos.\varphi(1 + aa)$$
$$+ 4\beta aa \cos.\varphi^2 + \gamma \cos.\varphi(1 + aa - 2a\cos.\varphi) - 2\gamma an \sin.\varphi^2.$$

Cum nunc sit

$$2\cos.\varphi^2 = 1 + \cos.2\varphi \quad \text{et} \quad 2\sin.\varphi^2 = 1 - \cos.2\varphi,$$

hac reductione adhibita pervenietur ad sequentem aequationem

$$\begin{aligned} 1 = {} & \alpha(1 + aa) - 2\alpha a \cos.\varphi + 2\beta aa \cos.2\varphi \\ & + \beta(1 + aa)^2 - 4\beta a(1 + aa)\cos.\varphi - \gamma a \cos.2\varphi \\ & + 2\beta aa + \gamma(1 + aa)\cos.\varphi + \gamma na \cos.2\varphi \\ & - \gamma a \\ & - \gamma na. \end{aligned}$$

21. Ut nunc hanc aequationem resolvamus, necesse est, ut tam termini involventes $\cos.\varphi$ quam $\cos.2\varphi$ seorsim ad nihilum redigantur; unde ex postremo termino deducimus

$$2\beta aa - \gamma a + \gamma na = 0$$

ideoque

$$\beta = \frac{\gamma(1 - n)}{2a} = -\frac{\gamma(n - 1)}{2a},$$

qui valor in terminis cos. φ affectis substitutus perducit ad hanc aequationem

$$-2\alpha a + 2\gamma(n-1)(1+aa) + \gamma(1+aa) = 0,$$

unde fit

$$2\alpha a = 2\gamma n(1+aa) - \gamma(1+aa);$$

ideoque erit

$$\alpha = \frac{\gamma(1+aa)(2n-1)}{2a}.$$

Iam hic valores loco α et β inventi substituantur in prima parte atque deducemur ad hanc aequationem

$$1 = \frac{\gamma(2n-1)(1+aa)^2}{2a} - \frac{\gamma(n-1)(1+aa)^2}{2a} - \gamma a(n-1) - \gamma a - \gamma n a$$

sive

$$2a = \gamma(2n-1)(1+aa)^2 - \gamma(n-1)(1+aa)^2 - 2\gamma aa(n-1) - 2\gamma aa - 2\gamma naa$$

vel

$$2a = \gamma n(1+aa)^2 - 4\gamma naa,$$

unde fit

$$\gamma = \frac{2a}{n(1-aa)^2}.$$

22. Invento iam isto valore γ hinc eliciemus

$$\alpha = \frac{(2n-1)(1+aa)}{n(1-aa)^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-(n-1)}{n(1-aa)^2}$$

hincque per $n(1-aa)^2$ multiplicando adipiscimur

$$n(1-aa)^2 \int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n+1}} = (2n-1)(1+aa)\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^n} - (n-1)\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{n-1}},$$

cuius beneficio ex cognitis iam duobus casibus assignari poterit casus sequens.

23. Iam ante autem invenimus esse

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}.$$

Pro sequentibus vero ponamus

$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^2}=\frac{\pi A}{(1-aa)^3},\quad \int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3}=\frac{\pi B}{(1-aa)^5},\quad \int\frac{\partial\varphi}{\Delta^4}=\frac{\pi C}{(1-aa)^7},$$
$$\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^5}=\frac{\pi D}{(1-aa)^9},\quad \int\frac{\partial\varphi}{\Delta^6}=\frac{\pi E}{(1-aa)^{11}}\quad \text{etc.}$$

Ubi iam ante invenimus

$$A=1+aa \quad \text{et} \quad B=1+4aa+a^4,$$

unde sequentes valores omnes C, D, E etc. ope reductionis inventae definiri poterunt.

24. Introducamus ergo istos valores atque sequentes nanciscemur aequationes

$$\text{I.}\quad A=1+aa,$$
$$\text{II.}\quad 2B=3(1+aa)A-(1-aa)^2,$$
$$\text{III.}\quad 3C=5(1+aa)B-2(1-aa)^2A,$$
$$\text{IV.}\quad 4D=7(1+aa)C-3(1-aa)^2B,$$
$$\text{V.}\quad 5E=9(1+aa)D-4(1-aa)^2C,$$
$$\text{VI.}\quad 6F=11(1+aa)E-5(1-aa)^2D,$$
$$\text{VII.}\quad 7G=13(1+aa)F-6(1-aa)^2E,$$
$$\text{VIII.}\quad 8H=15(1+aa)G-7(1-aa)^2F$$
$$\text{etc.}$$

25. Harum aequationum prima statim dat valorem ante inventum

$$A=1+aa;$$

secunda vero praebet

$$2B=\begin{cases}3+6aa+3a^4\\-1+2aa-a^4,\end{cases}$$

unde fit

$$B=1+4aa+a^4.$$

Deinde vero tertia aequatio praebet

$$3C = \begin{cases} 5 + 25aa + 25a^4 + 5a^6 \\ -2 + 2aa + 2a^4 - 2a^6, \end{cases}$$

unde elicitur

$$C = 1 + 9aa + 9a^4 + a^6.$$

Porro quarta aequatio

$$4D = \begin{cases} 7 + 70aa + 126a^4 + 70a^6 + 7a^8 \\ -3 - 6aa + 18a^4 - 6a^6 - 3a^8, \end{cases}$$

unde colligitur

$$D = 1 + 16aa + 36a^4 + 16a^6 + a^8.$$

Simili modo ex aequatione quinta colligimus

$$5E = \begin{cases} 9 + 153aa + 468a^4 + 468a^6 + 153a^8 + 9a^{10} \\ -4 - 28aa + 32a^4 + 32a^6 - 28a^8 - 4a^{10}, \end{cases}$$

unde colligitur

$$E = 1 + 25aa + 100a^4 + 100a^6 + 25a^8 + a^{10}.$$

Evolvamus etiam sextam aequationem, quae praebet

$$6F = \begin{cases} 11 + 286aa + 1375a^4 + 2200a^6 + 1375a^8 + 286a^{10} + 11a^{12} \\ -5 - 70aa - 25a^4 + 200a^6 - 25a^8 - 70a^{10} - 5a^{12}, \end{cases}$$

hincque concluditur

$$F = 1 + 36aa + 225a^4 + 400a^6 + 225a^8 + 36a^{10} + a^{12}.$$

26. Hic non sine admiratione deprehendimus omnes coefficientes harum formarum esse numeros quadratos, quorum radices occurrunt in potestatibus respondentibus binomii $1 + aa$, sicque pro littera sequente habebimus

$$G = 1 + 7^2aa + 21^2a^4 + 35^2a^6 + 35^2a^8 + 21^2a^{10} + 7^2a^{12} + a^{14},$$

quae littera respondet formulae integrali

$$\int \frac{\partial\varphi}{\Delta^{7+1}},$$

ita ut hic sit $n = 7$. Quodsi ergo formae generalis

$$\int \frac{\partial \varphi}{\Delta^{n+1}}$$

integrale statuamus

$$= \frac{\pi V}{(1 - aa)^{2n+1}},$$

erit valor litterae

$$V = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 aa + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 a^6 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 a^8 + \left(\frac{n}{5}\right)^2 a^{10} + \text{etc.},$$

adhibitis scilicet characteribus, quibus coefficientes potestatum binomii designare consuevimus[1]), dum scilicet est

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n, \quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \quad \text{etc.}$$

27. Haec quidem conclusio tantum per inductionem quasi coniectura est deducta; vix enim quisquam reperietur, cui ista coniectura suspecta videatur, quamquam rigorosa demonstratione nondum sit corroborata; casu enim fortuito neutiquam evenire certe potest, ut omnes isti coefficientes prodierint numeri quadrati atque adeo ipsorum coefficientium, qui in evolutione potestatis $(1 + aa)^n$ occurrunt; interim tamen deinceps vidi pro hac veritate solidam demonstrationem adornari posse.

28. Hac igitur lege stabilita valores litterarum A, B, C, D etc., quas in expressiones integralium induximus, sequenti modo se habebunt:

$$A = 1^2 + 1^2 aa,$$
$$B = 1^2 + 2^2 aa + 1^2 a^4,$$
$$C = 1^2 + 3^2 aa + 3^2 a^4 + 1^2 a^6,$$
$$D = 1^2 + 4^2 aa + 6^2 a^4 + 4^2 a^6 + 1^2 a^8,$$
$$E = 1^2 + 5^2 aa + 10^2 a^4 + 10^2 a^6 + 5^2 a^8 + 1^2 a^{10},$$
$$F = 1^2 + 6^2 aa + 15^2 a^4 + 20^2 a^6 + 15^2 a^8 + 6^2 a^{10} + 1^2 a^{12},$$
$$G = 1^2 + 7^2 aa + 21^2 a^4 + 35^2 a^6 + 35^2 a^8 + 21^2 a^{10} + 7^2 a^{12} + 1^2 a^{14}$$

etc.

1) Vide notam 2 p. 3. G. F.

INTEGRATIO FORMULAE GENERALIS

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} \left[\begin{matrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{matrix}\right]$$

EXISTENTE $\Delta = 1 + aa - 2a\cos.\varphi$

29. Haec formula generalis perinde tractari potest ac praecedens, dum valor integralis cuiusque casus etiam a duobus casibus praecedentibus pendet, ita ut ponere queamus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^n} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n-1}},$$

quatenus scilicet integralia ad binos terminos integrationis stabilitos referuntur; quia autem necesse est, ut aequationem generalem ab ista conditione liberam constituamus, aliquot membra adiungi oportet, quae pro utroque termino evanescant; neque enim hic sufficit ut ante unicum terminum adiunxisse, verum adeo ternos huiusmodi terminos adiungi debebunt, cuius ratio mox ex ipso calculo elucebit; hanc ob rem constituamus sequentem aequationem

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^n} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$
$$+ \gamma \frac{\sin. i\varphi}{\Delta^n} + \delta \frac{\sin.(i-1)\varphi}{\Delta^n} + \varepsilon \frac{\sin.(i+1)\varphi}{\Delta^n},$$

quae postrema membra, quoniam i est numerus integer, pro utroque termino integrationis evanescunt.

30. Differentietur igitur nunc ista aequatio ac posito brevitatis gratia $1 + aa = b$, ut sit $\Delta = b - 2a\cos.\varphi$, negligantur denominatores, qui erunt Δ^{n+1}, una cum elemento $\partial\varphi$. Primo notetur esse

$$\Delta \cos. i\varphi = b\cos. i\varphi - a\cos.(i-1)\varphi - a\cos.(i+1)\varphi,$$

tum vero ob

$$\Delta^2 = bb - 4ab\cos.\varphi + 4aa\cos.\varphi^2 = 2aa + bb - 4ab\cos.\varphi + 2aa\cos.2\varphi$$

erit

$$\Delta^2 \cos. i\varphi = (bb + 2aa) \cos. i\varphi - 2ab \cos. (i-1)\varphi$$
$$- 2ab \cos. (i+1)\varphi + aa \cos. (i-2)\varphi + aa \cos. (i+2)\varphi.$$

Deinde vero habebitur

$$\partial \cdot \frac{\sin. i\varphi}{\Delta^n} = i\Delta \cos. i\varphi - 2na \sin. i\varphi \sin. \varphi$$
$$= ib \cos. i\varphi - ia \cos. (i-1)\varphi - ia \cos. (i+1)\varphi$$
$$- na \cos. (i-1)\varphi + na \cos. (i+1)\varphi.$$

Simili modo erit

$$\partial \cdot \frac{\sin. (i-1)\varphi}{\Delta^n} = (i-1) b \cos. (i-1)\varphi - (i-1) a \cos. (i-2)\varphi$$
$$- (i-1) a \cos. i\varphi - na \cos. (i-2)\varphi + na \cos. i\varphi$$

ac denique

$$\partial \cdot \frac{\sin. (i+1)\varphi}{\Delta^n} = (i+1) b \cos. (i+1)\varphi - (i+1) a \cos. i\varphi$$
$$- (i+1) a \cos. (i+2)\varphi - na \cos. i\varphi + na \cos. (i+2)\varphi.$$

31. Hic igitur occurrunt quinque anguli, scilicet

$$i\varphi, \quad (i-1)\varphi, \quad (i+1)\varphi, \quad (i-2)\varphi \quad \text{et} \quad (i+2)\varphi,$$

unde patet ratio, cur terni termini absoluti sint supra adiuncti; differentiale ergo, facta evolutione singulorum terminorum, per quinque columnas sequenti modo repraesentetur, ita ut membrum sinistrum, quod est cos. $i\varphi$, aequetur sequenti expressioni:

$\cos. i\varphi$	$\cos.(i-1)\varphi$	$\cos.(i+1)\varphi$	$\cos.(i-2)\varphi$	$\cos.(i+2)\varphi$
$+\alpha b$	$-\alpha a$	$-\alpha a$		
$+\beta(bb+2aa)$	$-2\beta ab$	$-2\beta ab$	$+\beta aa$	$+\beta aa$
$+\gamma ib$	$-\gamma ia$	$-\gamma ia$		
	$-\gamma na$	$+\gamma na$		
$-\delta(i-1)a$	$+\delta(i-1)b$	$+\varepsilon(i+1)b$	$-\delta(i-1)a$	$-\varepsilon(i+1)a$
$+\delta na$			$-\delta na$	$+\varepsilon na$
$-\varepsilon(i+1)a$				
$-\varepsilon na$				

32. Hic igitur omnes quatuor posteriores columnae ad nihilum redigi debent, propterea quod sola prima columna membro sinistro aequari potest; incipiamus igitur a binis columnis ultimis, unde deducimus

$$\delta = \frac{\beta a}{i+n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\beta a}{i-n+1}.$$

His valoribus introductis pro secunda columna erit

$$-2\beta ab + \delta(i-1)b = \frac{\beta ab(1-i-2n)}{i+n-1} = -\frac{\beta ab(i+2n-1)}{i+n-1}.$$

Pro tertia vero columna erit

$$-2\beta ab + \varepsilon(i+1)b = -\frac{\beta ab(i-2n+1)}{i-n+1};$$

unde hae binae columnae nobis praebent has duas aequationes

$$-\alpha a - \gamma(i+n)a - \frac{\beta ab(i+2n-1)}{i+n-1} = 0,$$

$$-\alpha a - \gamma(i-n)a - \frac{\beta ab(i-2n+1)}{i-n+1} = 0.$$

33. Harum duarum aequationum subtrahatur posterior a priore ac prodibit

$$-2\gamma na - \frac{2\beta inab}{ii-(n-1)^2} = 0,$$

unde colligimus

$$\gamma = -\frac{\beta i b}{ii-(n-1)^2}.$$

Atque hinc porro ex secunda deduci potest valor ipsius α, cum sit

$$\alpha a = -\gamma(i+n)a - \frac{\beta a b(i+2n-1)}{i+n-1};$$

erit

$$\alpha = \frac{\beta i(i+n)b}{ii-(n-1)^2} - \frac{\beta(i+2n-1)b}{i+n-1} = \frac{\beta(2nn-3n+1)b}{ii-(n-1)^2} = \frac{\beta(n-1)(2n-1)b}{ii-(n-1)^2}.$$

34. Hi iam valores substituantur in prima columna atque orietur sequens aequatio

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\beta(n-1)(2n-1)bb}{ii-(n-1)^2} + 2\beta aa & \\ + \beta bb & -\frac{\beta(i-n-1)aa}{i+n-1} \\ -\frac{\beta iibb}{ii-(n-1)^2} & -\frac{\beta(i+n+1)aa}{i-n+1} \end{array}\right\} = 1.$$

Multiplicando igitur per $ii-(n-1)^2$ prodibit haec aequatio

$$\begin{aligned} ii-(n-1)^2 = {} & 2\beta aa(ii-(n-1)^2) + \beta bb(n-1)(2n-1) \\ & -\beta aa(i-n-1)(i-n+1) + \beta bb(ii-(n-1)^2) \\ & -\beta aa(i+n+1)(i+n-1) - \beta iibb. \end{aligned}$$

Facta autem reductione terminus βaa multiplicabitur per

$$2(ii-(n-1)^2) - (i-n)^2 + 1 - (i+n)^2 + 1$$

sive per

$$-4n(n-1);$$

at vero βbb multiplicabitur per

$$(n-1)(2n-1) + ii - (n-1)^2 - ii$$

sive per

$$n(n-1)$$

sicque erit

$$ii - (n-1)^2 = -4\beta n(n-1)aa + \beta n(n-1)bb$$
$$= \beta n(n-1)(bb - 4aa).$$

Cum igitur posuerimus $b = 1 + aa$, erit

$$bb - 4aa = (1-aa)^2;$$

consequenter hinc elicimus

$$\beta = \frac{ii - (n-1)^2}{n(n-1)(1-aa)^2}.$$

35. Invento iam valore litterae β, ex eo deducimus valorem

$$\alpha = \frac{(2n-1)b}{n(1-aa)^2};$$

valores autem litterarum γ, δ et ε non amplius in censum veniunt et reductio, quam quaerimus, erit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \alpha \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^n} + \beta \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n-1}}$$

sive sublatis fractionibus habebitur ista aequatio

$$n(n-1)(1-aa)^2 \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} = (n-1)(2n-1)(1+aa) \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^n}$$
$$+ (ii - (n-1)^2) \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n-1}},$$

quae aequatio casu $i = 0$ redit ad reductionem praecedentis sectionis.

36. Inventa hac reductione generali pro eius applicatione, cum sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}, \quad \text{ubi } n = 0,$$

ponamus pro sequentibus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^3} A, \quad \text{ubi } n = 1;$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^5} B, \quad \text{ubi } n = 2;$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^4} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^7} C, \quad \text{ubi } n = 3;$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^5} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^9} D, \quad \text{ubi } n = 4;$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^6} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{11}} E, \quad \text{ubi } n = 5;$$

atque adeo in genere sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V;$$

supra autem iam invenimus esse

$$A = i + 1 - (i-1)\,aa$$

sive terminos positive repraesentando

$$A = 1 + i + (1-i)\,aa.$$

37. Quodsi in reductione nostra inventa poneremus $n = 1$, ea daret

$$ii \int \partial\varphi \cos. i\varphi = 0,$$

quod primo verum est casu $i = 0$, tum vero ob

$$\int \partial\varphi \cos. i\varphi = \frac{1}{i} \sin. i\varphi = 0,$$

quod quidem per se patet. Incipiamus igitur a casu $n = 2$ et procedendo per sequentes valores

$$n = 3, \quad n = 4, \quad n = 5 \quad \text{etc.}$$

nanciscemur sequentes aequationes:

I. Si $n = 2$, erit

$$2 \cdot 1 B = 1 \cdot 3 (1 + aa) A + (ii - 1) (1 - aa)^2.$$

II. Si $n = 3$, erit

$$3 \cdot 2 C = 2 \cdot 5 (1 + aa) B + (ii - 4) (1 - aa)^2 A.$$

III. Si $n = 4$, erit

$$4 \cdot 3 D = 3 \cdot 7 (1 + aa) C + (ii - 9) (1 - aa)^2 B.$$

IV. Si $n = 5$, erit

$$5 \cdot 4 E = 4 \cdot 9 (1 + aa) D + (ii - 16) (1 - aa)^2 C.$$

V. Si $n = 6$, erit

$$6 \cdot 5 F = 5 \cdot 11 (1 + aa) E + (ii - 25) (1 - aa)^2 D.$$

etc.

38. Cum igitur sit

$$A = 1 + i + (1 - i) aa,$$

pro prima aequatione erit

$$(1 + aa) A = 1 + i + 2aa + (1 - i) a^4;$$

huius triplo addi oportet

$$(ii - 1) (1 - aa)^2 = ii - 1 - 2 (ii - 1) aa + (ii - 1) a^4,$$

unde oritur primo terminus absolutus $= (2 + i) (1 + i)$, deinde coefficiens ipsius aa erit $8 - 2ii$, coefficiens vero ipsius a^4 erit $(2 - i) (1 - i)$, unde concludimus litteram

$$B = \frac{(2 + i) (1 + i)}{1 \cdot 2} + (2 + i) (2 - i) aa + \frac{(2 - i) (1 - i)}{1 \cdot 2} a^4.$$

39. Ista forma nos manuducit ad coefficientes potestatum binomii, quos, ut iam monuimus, per characteres peculiares repraesentamus, sicque per tales characteres erit

$$A = \left(\frac{1 + i}{1}\right) + \left(\frac{1 - i}{1}\right) aa,$$

tum vero

$$B = \left(\frac{2+i}{2}\right) + \left(\frac{2+i}{1}\right)\left(\frac{2-i}{1}\right)aa + \left(\frac{2-i}{2}\right)a^4.$$

Videamus autem, quomodo haec lex in sequentibus valoribus se sit habitura.

40. Evolvamus igitur aequationem secundam, pro qua sequentes duas multiplicationes institui oportet

$$10\left(\frac{2+3i+ii}{2} + (4-ii)aa + \frac{2-3i+ii}{2}a^4\right) \text{ per } 1+aa,$$

ultimum autem membrum postulat hanc multiplicationem

$$(ii-4)(1-2aa+a^4) \text{ per } 1+i+(1-i)aa;$$

unde primo oritur iste terminus absolutus

$$10+15i+5ii+(ii-4)(1+i),$$

qui reducitur ad hanc formam $(2+i)(1+i)(3+i)$. Pro termino autem aa erit

$$40-10ii+5(2+i)(1+i)+(ii-4)(-2(1+i)+1-i)$$
$$=(4-ii)(11+3i)+5(2+i)(1+i),$$

quae expressio reducitur ad

$$(2+i)(27-3ii)=3(2+i)(3+i)(3-i).$$

Porro coefficiens ipsius a^4 erit

$$(2-i)(27-3ii)=3(2-i)(3+i)(3-i).$$

Denique coefficiens ipsius a^6 erit $(2-i)(1-i)(3-i)$.

41. Calculo ergo hoc peracto habebimus

$$3\cdot 2C=(3+i)(2+i)(1+i)+3(3+i)(2+i)(3-i)aa$$
$$+3(3+i)(2-i)(3-i)a^4+(3-i)(2-i)(1-i)a^6,$$

quae forma commode redigitur ad istam per characteres coefficientium binomii

$$C = \binom{3+i}{3} + \binom{3+i}{2}\binom{3-i}{1}aa + \binom{3+i}{1}\binom{3-i}{2}a^4 + \binom{3-i}{3}a^6.$$

Hic ordo maxime confirmat coniecturam ex casibus praecedentibus deductam neque dubium ullum esse potest, quin sequentes litterae istos sortiantur valores:

$$D = \binom{4+i}{4} + \binom{4+i}{3}\binom{4-i}{1}aa + \binom{4+i}{2}\binom{4-i}{2}a^4 + \binom{4+i}{1}\binom{4-i}{3}a^6 + \binom{4-i}{4}a^8,$$

$$E = \binom{5+i}{5} + \binom{5+i}{4}\binom{5-i}{1}aa + \binom{5+i}{3}\binom{5-i}{2}a^4 + \binom{5+i}{2}\binom{5-i}{3}a^6 + \binom{5+i}{1}\binom{5-i}{4}a^8 + \binom{5-i}{5}a^{10}$$

etc.

Interim tamen fatendum est hunc ordinem egregium tantum per coniecturam se nobis obtulisse; cuius ergo demonstratio rigorosa adhuc desideratur.

42. Cum igitur supra in genere posuerimus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Delta^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V,$$

erit nunc

$$V = \binom{n+i}{n} + \binom{n+i}{n-1}\binom{n-i}{1}aa + \binom{n+i}{n-2}\binom{n-i}{2}a^4 + \binom{n+i}{n-3}\binom{n-i}{3}a^6 + \binom{n+i}{n-4}\binom{n-i}{4}a^8 + \text{etc.},$$

unde sponte deducitur forma in articulo praecedenti conclusa, ubi erat $i = 0$. Pro hoc enim casu erit

$$V = \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1}aa + \binom{n}{n-2}\binom{n}{2}a^4 + \binom{n}{n-3}\binom{n}{3}a^6 + \text{etc.}$$

Cum autem in huiusmodi characteribus perpetuo sit

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n}{n-p}\right),$$

erit prorsus, uti supra coniectavimus,

$$V = \left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)^2 a\,a + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 a^6 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 a^8 + \text{etc.}$$

Hinc igitur operae pretium erit sequens Theorema constituere.

THEOREMA GENERALE

43. *Si formula integralis*

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1 + a\,a - 2a \cos.\varphi)^{n+1}}$$

a termino $\varphi = 0$ *usque ad terminum* $\varphi = 180^0$ *extendatur, valor integralis semper habebit talem formam*

$$\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \left(\frac{n+i}{i}\right) + \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right) a\,a + \left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right) a^4$$
$$+ \left(\frac{n+i}{i+3}\right)\left(\frac{n-i}{3}\right) a^6 + \left(\frac{n+i}{i+4}\right)\left(\frac{n-i}{4}\right) a^8 + \textit{etc.},$$

dummodo fuerit i numerus integer atque adeo tam positivus quam negativus, quandoquidem etiam posteriori casu ista forma veritati consentanea deprehenditur, ita ut ista expressio latius pateat quam omnes casus speciales iunctim sumti, unde eam per coniecturam conclusimus; namque in omnibus casibus specialibus littera i necessario denotabat numeros integros tantum positivos.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS INSIGNIS PER CONIECTURAM ERUTI CIRCA INTEGRATIONEM FORMULAE

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}}$$

M. S. Academiae exhib. die 10. Septembris 1778

Commentatio 674 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 242—259

1.[1]) Cum nuper[2]) hanc formulam integralem tractassem ac potissimum in eius valorem inquisivissem, quem accipit, si integrale a termino $\varphi = 0$ ad terminum $\varphi = 180^0$ usque extendatur, ex pluribus casibus, quos evolvere licuit, conclusi eius integrale in genere ita expressum iri

$$\frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} V,$$

ubi V denotat summam huius seriei

$$V = \binom{n-i}{0}\binom{n+i}{i} + \binom{n-i}{1}\binom{n+i}{i+1} a^2 + \binom{n-i}{2}\binom{n+i}{i+2} a^4 + \text{etc.}$$

---

1) In editione principe paragraphi numeris 83 usque ad 112 signatae sunt. G. F.

2) Vide Commentationes praecedentes 672 et 673. A. K.

Hic scilicet isti characteres clausulis inclusi designant coefficientes potestatis binomialis, dum statuimus

$$(1+x)^m = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)x + \left(\frac{m}{2}\right)x^2 + \left(\frac{m}{3}\right)x^3 + \left(\frac{m}{4}\right)x^4 + \text{etc.}$$

2. Circa hanc autem formulam integralem ante omnia tenendum est litteram i perpetuo significare numeros integros, quandoquidem in analysi constanter assumitur casu $\varphi = 180^0$ semper esse $\sin. i\varphi = 0$; tum vero etiam eius valores perpetuo ut positivi spectari possunt, propterea quod

$$\cos.(-i\varphi) = \cos.(+i\varphi).$$

Interim tamen mox ostendemus nostram formam integralem etiam veritati esse consentaneam, quamvis litterae i valores negativi tribuantur. Ad hoc ostendendum circa characteres in subsidium vocatos sequentia sunt observanda.

1°. Si p et q designent numeros integros ac p quidem[1]) positivos, quoniam in evolutione potestatis binomialis omnes termini primum antecedentes sunt nulli, quoties fuerit q numerus negativus, semper erit $\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

2°. Quia coefficiens tam primi termini quam ultimi semper est unitas, erit tam $\left(\frac{p}{0}\right) = 1$ quam $\left(\frac{p}{p}\right) = 1$.

3°. Quia termini ultimum sequentes pariter sunt nulli, quoties fuerit $q > p$, valor characteris $\left(\frac{p}{q}\right)$ semper pro nihilo haberi poterit.

4°. Quia in evolutione potestatis binomialis coefficientes ordinem tenent retrogradum, hinc sequitur semper fore $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{p-q}\right)$. Sin autem superior numerus p fuerit negativus, ob rationem praecedentem semper etiam erit $\left(\frac{-p}{-q}\right) = 0$.

5°. At si q denotet numeros positivos, character $\left(\frac{-p}{q}\right)$ perpetuo dabit valores alternatim positivos et negativos, cum sit

$$\left(\frac{-p}{0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-p}{1}\right) = -p, \quad \left(\frac{-p}{2}\right) = +\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}, \quad \left(\frac{-p}{3}\right) = -\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \text{etc.}$$

Atque hinc

1) Editio princeps: *ac primo quidem.* G. F.

6°. In genere tales characteres, ubi superior numerus est negativus, ad positivos reduci poterunt, cum sit $\left(\frac{-p}{q}\right) = \pm\left(\frac{p+q-1}{q}\right)$, ubi signum + valet, si q fuerit numerus par, inferius — vero, si impar.

3. His proprietatibus circa characteres hic adhibitos notatis in forma nostra integrali loco i scribamus $-i$ eritque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.(-i\varphi)}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{\pi a^{-i}}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \left(\frac{n+i}{0}\right)\left(\frac{n-i}{-i}\right) + \left(\frac{n+i}{1}\right)\left(\frac{n-i}{-i+1}\right)a^2 + \left(\frac{n+i}{2}\right)\left(\frac{n-i}{-i+2}\right)a^4 + \left(\frac{n+i}{3}\right)\left(\frac{n-i}{-i+3}\right)a^6 + \text{etc.},$$

ubi posteriores factores evanescunt, quamdiu denominatores sunt negativi; primum igitur membrum significatum habens erit

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)\left(\frac{n-i}{-i+i}\right)a^{2i},$$

cuius valor erit

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)a^{2i};$$

sequentia autem membra erunt

$$\left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-}{-i+i+1}\right)a^{2i+2} = \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right)a^{2i+2},$$

tum vero

$$\left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right)a^{2i+4} \text{ etc.}$$

Hoc igitur modo erit

$$V = a^{2i}\left(\left(\frac{n+i}{i}\right)\left(\frac{n-i}{0}\right) + \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right)a^2 + \left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right)a^4 + \text{etc.}\right),$$

qui valor ductus in

$$\frac{\pi a^{-i}}{(1-aa)^{2n+1}}$$

praebet hanc formam

$$\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\left(\frac{n+i}{i}\right)\left(\frac{n-i}{0}\right) + \left(\frac{n+i}{i+1}\right)\left(\frac{n-i}{1}\right)a^2 + \left(\frac{n+i}{i+2}\right)\left(\frac{n-i}{2}\right)a^4 + \text{etc.}\right),$$

quae prorsus congruit cum nostra formula valori positivo ipsius i respondente, qui egregius consensus haud contemnendum firmamentum pro veritate nostrae formae integralis continet.

4. Praeterea vero circa formam nostram integralem imprimis notari debet seriem pro V supra datam semper alicubi abrumpi, quoties n fuerit numerus integer positivus, quippe quod eveniet, quando vel in priore factore, cuius forma est $\binom{n-i}{\lambda}$, pervenitur ad terminum, quo $\lambda > n-i$, vel in posteriore factore, cuius forma est $\binom{n+i}{i+\lambda}$, evadet $\lambda > n$; quae proprietas eo magis est observanda, quod, si series V in infinitum porrigeretur, parum lucrati essemus censendi, id quod praecipue de iis casibus est notandum, quibus n foret numerus fractus, quos ergo casus penitus ab instituto nostro removemus, ita ut pro n tantum numeros integros simus assumturi.

5. Consideremus ergo etiam casus, quibus n est numerus negativus, ac primo quidem iam per se clarum est, quamdiu is minor fuerit quam i ideoque $n+i$ etiamnum numerus positivus, tum seriem pro V datam adeo citius abruptum iri; tum igitur demum in infinitum excurret, quando etiam $n+i$ fuerit numerus negativus. His autem casibus forma integralis supra data ita transformari potest, ut abruptio pariter locum inveniat.

6. Ad hoc ostendendum statuamus $n = -m-1$, ut formula nostra integralis evadat

$$\int \partial\varphi \cos. i\varphi \, (1 + aa - 2a \cos. \varphi)^m$$

eiusque igitur valor

$$= \pi a^i (1 - aa)^{2m+1} V$$

existente iam

$$V = \binom{-m-1-i}{0}\binom{-m-1+i}{i} + \binom{-m-1-i}{1}\binom{-m-1+i}{i+1} a^2$$
$$+ \binom{-m-1-i}{2}\binom{-m-1+i}{i+2} a^4 + \binom{-m-1-i}{3}\binom{-m-1+i}{i+3} a^6 + \text{etc.},$$

quae series manifesto in infinitum excurrit, quam autem ope sequentis lemmatis transformare poterimus.

LEMMA

7. *Ista series per characteres hic introductos procedens*

$$\mathfrak{h} = \left(\frac{f}{0}\right)\left(\frac{h}{e}\right) + \left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x + \left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^2 + \left(\frac{f}{3}\right)\left(\frac{h}{e+3}\right)x^3 + \text{etc.}$$

in hanc sui similem transmutari potest

$$\sigma = \left(\frac{-h-1}{0}\right)\left(\frac{-f-1}{e}\right) + \left(\frac{-h-1}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x + \left(\frac{-h-1}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.},$$

quandoquidem inter earum valores $\mathfrak{h}$ et σ *ista relatio semper locum habere non ita pridem a me est demonstrata*[1])

$$\left(\frac{e+f}{e}\right)\mathfrak{h} = \left(\frac{e-h-1}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}\sigma,$$

cuius demonstratio profundissimae est indaginis, dum adeo per aequationes differentiales secundi gradus procedit.

8. Applicemus iam istud Lemma ad casum nostrum propositum, atque ut series $\mathfrak{h}$ cum nostro V consentiens reddatur, ut fiat $\mathfrak{h} = V$, sumi debet $f = -m-1-i$, $h = -m-1+i$, $e = i$ et $x = aa$, unde altera series σ hanc accipiet formam

$$\sigma = \left(\frac{m-i}{0}\right)\left(\frac{m+i}{i}\right) + \left(\frac{m-i}{1}\right)\left(\frac{m+i}{i+1}\right)aa + \left(\frac{m-i}{2}\right)\left(\frac{m+i}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.},$$

quae series iam certe abrumpitur alicubi, propterea quod hic m denotat numerum integrum positivum; at vero relatio inter superiorem $V = \mathfrak{h}$ et novam hanc seriem σ ita se habebit

$$\left(\frac{-m-1}{i}\right)V = \left(\frac{m}{i}\right)(1-aa)^{-2m-1}\sigma.$$

---

1) Vide Commentationem 710 (indicis Enestroemiani): *Specimen transformationis singularis serierum*, Nova acta acad. sc. Petrop. 12 (1794), 1801, p. 58; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I16. A. K.

9. Hinc igitur [valor] formulae nostrae integralis huius

$$\int \partial\varphi \cos. i\varphi \,(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^m = \frac{\left(\frac{m}{i}\right) \pi a^i \mathcal{J}}{\left(\frac{-m-1}{i}\right)},$$

ubi $\mathcal{J}$ denotat seriem modo ante § 7 expositam, qui valor, cum factorem habeat $\left(\frac{m}{i}\right)$, semper evanescet, quamdiu fuerit $i > m$, ita ut his casibus valor integralis semper nihilo sit aequalis. Ceterum hic notasse iuvabit facta evolutione esse

$$\left(\frac{m}{i}\right) : \left(\frac{-m-1}{i}\right) = \pm \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+i)},$$

ubi signum superius + valet, si i fuerit numerus par, inferius — vero, si impar. His circa indolem nostri Theorematis notatis ipsam eius demonstrationem aggrediamur, quam, quo clarior evadat, in varias partes distribuamus.

DEMONSTRATIONIS PARS PRIMA

10. Quoniam valorem nostrum integralem ad duas formulas accommodavimus, eas distinctionis gratia signis $\odot$ et $\mathfrak{C}$ designemus sitque

$$\odot = \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^{n+1}} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \int \partial\varphi \cos. i\varphi \,(1 + aa - 2a \cos. \varphi)^m \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = 180^0 \end{bmatrix},$$

quarum posterior $\mathfrak{C}$ in priorem $\odot$ convertitur, si loco m scribamus $-n-1$; modo autem vidimus has duas formulas a se invicem pendere, unde a posteriori tanquam simpliciori, siquidem denominatore $(1-aa)^{2n+1}$ caret, incipiamus; quam quo simpliciorem reddamus, statuamus

$$\frac{a}{1+aa} = b;$$

sic enim habebimus

$$\mathfrak{C} = (1 + aa)^m \int \partial\varphi \cos. i\varphi \,(1 - 2b \cos. \varphi)^m,$$

cuius ergo integrale nobis erit investigandum.

11. Ante omnia igitur conveniet potestatem $(1-2b\cos.\varphi)^m$ evolvi, unde fiet

$$(1-2b\cos.\varphi)^m = 1 - \left(\frac{m}{1}\right)2b\cos.\varphi + \left(\frac{m}{2}\right)4b^2\cos.\varphi^2 - \left(\frac{m}{3}\right)8b^3\cos.\varphi^3 + \text{etc.},$$

cuius ergo terminus quicunque erit

$$\pm\left(\frac{m}{\lambda}\right)2^\lambda b^\lambda \cos.\varphi^\lambda,$$

ubi signum + valet, si λ fuerit numerus par, alterum vero —, si impar. Iam, quia hic potestates ipsius $\cos.\varphi$ occurrunt, eas per praecepta satis cognita[1]) in cosinus simplices converti oportet, quibus fit

$$2^2\cos.\varphi^2 = 2\cos.2\varphi + 1\left(\frac{2}{1}\right),$$

$$2^3\cos.\varphi^3 = 2\cos.3\varphi + 2\left(\frac{3}{1}\right)\cos.\varphi,$$

$$2^4\cos.\varphi^4 = 2\cos.4\varphi + 2\left(\frac{4}{1}\right)\cos.2\varphi + 1\left(\frac{4}{2}\right),$$

$$2^5\cos.\varphi^5 = 2\cos.5\varphi + 2\left(\frac{5}{1}\right)\cos.3\varphi + 2\left(\frac{5}{2}\right)\cos.\varphi,$$

$$2^6\cos.\varphi^6 = 2\cos.6\varphi + 2\left(\frac{6}{1}\right)\cos.4\varphi + 2\left(\frac{6}{2}\right)\cos.2\varphi + 1\left(\frac{6}{3}\right)$$

etc.

Ubi notandum in potestatibus paribus postremum membrum $\cos.0\varphi = 1$ dimidio tantum coefficiente esse affectum. Hinc igitur in genere erit

$$2^\lambda\cos.\varphi^\lambda = 2\cos.\lambda\varphi + 2\left(\frac{\lambda}{1}\right)\cos.(\lambda-2)\varphi$$
$$+ 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cos.(\lambda-4)\varphi + 2\left(\frac{\lambda}{3}\right)\cos.(\lambda-6)\varphi + \text{etc.},$$

1) Vide e. g. L. Euleri *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. 1 § 263; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I_8, p. 283. G. F.

ubi notetur, quoties fuerit λ numerus par, puta $\lambda = 2i$, ultimum membrum fore tantum

$$1 \cdot \left(\frac{2i}{i}\right) \cos. 0\varphi.$$

12. Postquam igitur omnes cosinuum potestates ad cosinus simplices fuerint reductae, integrationes nostrae semper ad talem formam redigentur $\int \partial\varphi \cos. i\varphi \cos. \lambda\varphi$, de qua forma hic imprimis est notandum eius integrale a $\varphi = 0$ ad $\varphi = 180^0$ extensum semper esse nullum solo casu $\lambda = i$ excepto. Cum enim sit

$$\cos. i\varphi \cos. \lambda\varphi = \frac{1}{2} \cos. (i + \lambda)\varphi + \frac{1}{2} \cos. (i - \lambda)\varphi,$$

erit illud integrale indefinitum

$$= \frac{\sin. (i+\lambda)\varphi}{2(i+\lambda)} + \frac{\sin. (i-\lambda)\varphi}{2(i-\lambda)},$$

quod pro termino $\varphi = 0$ manifesto evanescit; pro altero vero termino $\varphi = 180^0 = \pi$ ob i et λ numeros integros manifestum est hoc integrale denuo evanescere solo casu excepto, quo $\lambda = i$. Si enim $i - \lambda$ ut infinite parvum spectetur, puta $= \omega$, pars posterior huius integralis erit

$$\frac{\sin. \omega\varphi}{2\omega} = \frac{\pi}{2},$$

id quod etiam inde patet, quod sit

$$\cos. i\varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2i\varphi$$

ideoque

$$\int \partial\varphi \cos. i\varphi^2 = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4i} \sin. 2i\varphi = \frac{1}{2}\pi.$$

13. Ad integrale igitur quaesitum obtinendum ex potestate $(1 - 2b \cos. \varphi)^m$ evoluta eos tantum terminos, qui $\cos. i\varphi$ continent, excerpsisse sufficiet, cum reliqui omnes nihil plane producant; qui si iunctim sumti praebeant $N \cos. i\varphi$, totum nostrum integrale pro $\mathfrak{C}$ erit

$$\mathfrak{C} = (1 + aa)^m \cdot \frac{1}{2} N\pi;$$

quocirca nobis incumbet in omnes superioris formae partes inquirere, quae formula $\cos. i\varphi$ erunt affectae; unde evidens est, quamdiu in illo termino generali $\pm\binom{m}{\lambda} 2^\lambda b^\lambda \cos.\varphi^\lambda$ exponens λ minor fuerit quam i, inde nihil plane in integrale inferri.

14. Primus igitur terminus, qui hic in computum venit, erit

$$\pm\binom{m}{i} 2^i b^i \cos.\varphi^i,$$

pro quo signum superius + valebit, si i fuerit numerus par, inferius — vero, si impar. Hinc autem per superiorem reductionem proveniet

$$2^i \cos.\varphi^i = 2\cos. i\varphi + \text{etc.},$$

ita ut hinc pro N oriatur pars prima $\pm\binom{m}{i} 2b^i$. Tum vero ex termino immediate sequente, qui erit

$$\mp\binom{m}{i+1} 2^{i+1} b^{i+1} \cos.\varphi^{i+1},$$

nullus angulus $i\varphi$ oritur, cum sit

$$2^{i+1}\cos.\varphi^{i+1} = 2\cos.(i+1)\varphi + 2\binom{i+1}{1}\cos.(i-1)\varphi + \text{etc.}$$

At vero terminus sequens

$$\pm\binom{m}{i+2} 2^{i+2} b^{i+2} \cos.\varphi^{i+2}$$

ob

$$2^{i+2}\cos.\varphi^{i+2} = \cos.(i+2)\varphi + 2\binom{i+2}{1}\cos. i\varphi + \text{etc.}$$

partem hinc in litteram N resultantem dat

$$\pm 2\binom{i+2}{1}\binom{m}{i+2} b^{i+2}.$$

Simili modo ex casu $\lambda = i + 3$ nihil nascitur. At ex sequente

$$\pm \left(\frac{m}{i+4}\right) 2^{i+4} b^{i+4} \cos.\, \varphi^{i+4}$$

ob

$$2^{i+4} \cos.\, \varphi^{i+4} = 2 \cos.\, (i+4)\varphi + 2\left(\frac{i+4}{1}\right) \cos.\, (i+2)\varphi + 2\left(\frac{i+4}{2}\right) \cos.\, i\varphi + \text{etc.}$$

pars ad litteram N accedens erit

$$\pm 2\left(\frac{i+4}{2}\right)\left(\frac{m}{i+4}\right) b^{i+4}.$$

Eodem modo ex casu $\lambda = i + 6$ pars ad litteram N accedens erit

$$\pm 2\left(\frac{i+6}{3}\right)\left(\frac{m}{i+6}\right) b^{i+6}$$

et ita porro.

15. His igitur omnibus partibus colligendis nanciscemur valorem completum litterae N, qui erit

$$N = \pm 2b^i \left(\left(\frac{m}{i}\right) + \left(\frac{i+2}{1}\right)\left(\frac{m}{i+2}\right) b^2 + \left(\frac{i+4}{2}\right)\left(\frac{m}{i+4}\right) b^4 + \left(\frac{i+6}{3}\right)\left(\frac{m}{i+6}\right) b^6 + \text{etc.}\right),$$

ubi notasse iuvabit esse, ut sequitur,

$$\left(\frac{i+2}{1}\right)\left(\frac{m}{i+2}\right) = \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right),$$

$$\left(\frac{i+4}{2}\right)\left(\frac{m}{i+4}\right) = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i+2}\right),$$

$$\left(\frac{i+6}{3}\right)\left(\frac{m}{i+6}\right) = \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i+3}\right)$$

etc.

Per hos igitur valores erit

$$N = \pm 2b^i \left(\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{m}{i}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i+1}\right) b^2 + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i+2}\right) b^4 + \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i+3}\right) b^6 + \text{etc.}\right),$$

quo valore invento erit integrale nostrum quaesitum

$$\mathfrak{C} = \pm \pi (1+aa)^m b^i \left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1} b^2 + \text{etc.} \right),$$

quae series manifesto abrumpitur, quoties fuerit m numerus integer positivus. Statim enim atque in hoc charactere $\binom{m-\lambda}{i+\lambda}$ denominator $i+\lambda$ superare incipit numeratorem $m-\lambda$, valor eius in nihilum abit.

DEMONSTRATIONIS PARS SECUNDA

16. Ut autem hanc integralis expressionem ad solam litteram a revocemus, prouti in nostro Theoremate supra est repraesentata, hic loco b restituamus valorem assumtum $\frac{a}{1+aa}$ fietque

$$\mathfrak{C} = \pm \pi a^i (1+aa)^{m-i} \left\{ \begin{array}{l} \binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1} \frac{a^2}{(1+aa)^2} \\ + \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2} \frac{a^4}{(1+aa)^4} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

ubi, ut formam supra datam eliciamus, potestates ipsius $1+aa$ evolvi oportet. Hunc in finem statuamus

$$\mathfrak{C} = \pm \pi a^i A,$$

ita ut iam sit

$$A = \binom{m}{0}\binom{m}{i}(1+aa)^{m-i} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1} a^2 (1+aa)^{m-i-2}$$
$$+ \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2} a^4 (1+aa)^{m-i-4} + \binom{m}{3}\binom{m-3}{i+3} a^6 (1+aa)^{m-i-6} + \text{etc.}$$

Facta autem harum potestatum evolutione fiat

$$A = \alpha + \beta a^2 + \gamma a^4 + \delta a^6 + \varepsilon a^8 + \zeta a^{10} + \eta a^{12} + \text{etc.},$$

quarum litterarum α, β, γ, δ etc. valores investigemus.

17. Primo igitur statim patet esse

$$\alpha = \binom{m}{0}\binom{m}{i};$$

deinde vero reperietur

$$\beta = \binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{1} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}.$$

At vero pars posterior per priorem divisa facta evolutione praebet

$$\frac{m-i-1}{i+1},$$

quo observato erit

$$\beta = \frac{m}{i+1}\binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{1},$$

quod reducitur ad

$$\beta = \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}.$$

Simili modo littera γ constabit ex tribus partibus; erit enim

$$\gamma = \binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{2} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}\binom{m-i-2}{1} + \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2},$$

ubi pars secunda per primam divisa dat

$$\frac{2\,(m-i-2)}{i+1}.$$

At tertius terminus per primum divisus praebet

$$\frac{(m-i-2)\,(m-i-3)}{(i+1)\,(i+2)},$$

unde fit

$$\gamma = \left(1 + \frac{2\,(m-i-2)}{i+1} + \frac{(m-i-2)\,(m-i-3)}{(i+1)\,(i+2)}\right)\binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{2}.$$

At vero est

$$1 + \frac{m-i-2}{i+1} = \frac{m-1}{i+1}$$

et

$$\binom{m-i-2}{i+1}\left(1 + \frac{m-i-3}{i+2}\right) = \frac{m-1}{i+2}\cdot\frac{m-i-2}{i+1},$$

unde colligitur

$$\gamma = \frac{m-1}{i+1}\cdot\frac{m}{i+2}\binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{2},$$

quae expressio contrahitur in hanc

$$\binom{m}{2}\binom{m}{i+2}.$$

18. Cum igitur sit

$$\alpha = \binom{m}{0}\binom{m}{i}, \quad \beta = \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}, \quad \gamma = \binom{m}{2}\binom{m}{i+2},$$

hinc iam satis tuto concludere liceret fore

$$\delta = \binom{m}{3}\binom{m}{i+3}, \quad \varepsilon = \binom{m}{4}\binom{m}{i+4} \text{ etc.}$$

Verum ne hic quicquam coniecturae vel inductioni tribuamus, in genere pro valore litterae A investigemus coefficientem potestatis indefinitae $a^{2\lambda}$, quem vocemus $= \mathcal{A}$, eritque

$$\mathcal{A} = \binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m-i}{\lambda} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{i+1}\binom{m-i-2}{\lambda-1} + \binom{m}{2}\binom{m-2}{i+2}\binom{m-i-4}{\lambda-2} + \binom{m}{3}\binom{m-3}{i+3}\binom{m-i-6}{\lambda-3} + \text{etc.}$$

19. Huius seriei pro A inventae singulos terminos sub hac forma generali complecti licet

$$\binom{m}{\theta}\binom{m-\theta}{i+\theta}\binom{m-i-2\theta}{\lambda-\theta},$$

quae secundum factores evoluta transmutatur in hanc formam

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-i-\lambda-\theta+1)}{1\cdot 2\cdots\theta \times 1\cdot 2\cdots(i+\theta)\times 1\cdot 2\cdots(\lambda-\theta)},$$

ubi numeratoris factores ab m incipientes continuo unitate decrescent usque ad ultimum

$$(m-i-\lambda-\theta+1).$$

Iam ista fractio supra et infra multiplicetur per hoc productum

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-\theta+1)$$

ac prodibit ista fractio

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-\theta+1)\times m(m-1)\cdots(m-i-\lambda-\theta+1)}{1\cdot 2\cdots\theta\times 1\cdot 2\cdots(i+\theta)\times 1\cdot 2\cdots\lambda},$$

in qua primo continetur character $\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)$, deinde etiam ibi continetur character $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$; quod restat dabit characterem $\left(\frac{m-\lambda}{i+\theta}\right)$ sicque habebitur forma A generalis

$$=\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+\theta}\right).$$

Unde si loco θ successive scribamus 0, 1, 2, 3 etc., quia in singulis terminis communis inest factor $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$, erit valor litterae

$$A=\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\left(\frac{\lambda}{0}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i}\right)+\left(\frac{\lambda}{1}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+1}\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{m-\lambda}{i+2}\right)+\text{etc.}\right).$$

Verum ante aliquod tempus demonstravi[1]) huius similis seriei

$$\left(\frac{p}{0}\right)\left(\frac{q}{r}\right)+\left(\frac{p}{1}\right)\left(\frac{q}{r+1}\right)+\left(\frac{p}{2}\right)\left(\frac{q}{r+2}\right)+\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{q}{r+3}\right)+\text{etc.}$$

summam semper esse

$$=\left(\frac{p+q}{p+r}\right)=\left(\frac{p+q}{q-r}\right).$$

Facta ergo applicatione erit

$$p=\lambda,\quad q=m-\lambda,\quad r=i$$

---

1) Vide Commentationem 575 (indicis ENESTROEMIANI): *De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt,* Acta acad. sc. Petrop. 5 I (1781: I), 1784, p. 74—111, imprimis § 32; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I 15, p. 553. G. F.

sicque finito modo habebimus

$$A = \binom{m}{\lambda}\binom{m}{\lambda+i} = \binom{m}{\lambda}\binom{m}{m-\lambda-i};$$

quae est demonstratio coniecturae supra allatae et ex valoribus α, β, γ conclusae.

20. Quodsi iam hic loco λ successive scribamus numeros 0, 1, 2, 3 etc., nanciscemur verum valorem seriei, quam sub littera A complexi; erit scilicet

$$A = \binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2}a^4 + \binom{m}{3}\binom{m}{i+3}a^6 + \text{etc.}$$

atque hinc valor integralis sub signo $\mathfrak{C}$ indicatae formulae erit

$$\mathfrak{C} = \pm \pi a^i \left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2}a^4 + \text{etc.}\right),$$

quae expressio manifesto semper abrumpitur, quoties m est numerus integer positivus. Hic autem meminisse oportet signi ambigui $\pm$ superius locum habere, quando i fuerit numerus par, inferius vero, si impar.

DEMONSTRATIONIS PARS TERTIA.

21. Ista forma, quam pro valore integrali $\mathfrak{C}$ hic sumus adepti, multo adeo est simplicior ea, quam Theorema nostrum nobis suppeditaverat, quippe quae, si loco $\sigma^{\prime}$ seriem, quam designat, scribamus, erit

$$\mathfrak{C} = \frac{\pi a^i \binom{m}{i}}{\binom{-m-1}{i}}\left(\binom{m-i}{0}\binom{m+i}{i} + \binom{m-i}{1}\binom{m+i}{i+1}a^2 + \binom{m-i}{2}\binom{m+i}{i+2}a^4 + \text{etc.}\right)$$

Superest igitur, ut perfectum consensum inter has duas expressiones specie multum a se invicem discrepantes ostendamus. Hic autem plurimum notasse iuvabit esse

$$\binom{-m-1}{i} = \pm\binom{m+i}{i},$$

propterea quod supra § 2 iam observavimus esse in genere

$$\binom{-p}{q} = \pm \binom{p+q-1}{q},$$

ubi signum superius valet, si fuerit q numerus par, inferius vero, si impar; quo notato posterior forma pro $\mathfrak{C}$ inventa erit

$$\mathfrak{C} = \pm \frac{\pi a^i \binom{m}{i}}{\binom{m+i}{i}} \left(\binom{m-i}{0} \binom{m+i}{i} + \binom{m-i}{1} \binom{m+i}{i+1} a^2 + \text{etc.} \right).$$

22. Quoniam nunc ambae formae affectae sunt signo ambiguo $\pm$, demonstrandum nobis incumbit, si utramque expressionem per $\binom{m+i}{i}$ multiplicemus, duas sequentes series inter se prorsus esse aequales

I. $\binom{m}{0}\binom{m}{i}\binom{m+i}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}\binom{m+i}{i} a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2}\binom{m+i}{i} a^4 + \text{etc.},$

II. $\binom{m-i}{0}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i} + \binom{m-i}{1}\binom{m+i}{i+1}\binom{m}{i} a^2 + \binom{m-i}{2}\binom{m+i}{i+2}\binom{m}{i} a^4 + \text{etc.},$

ubi aequalitas primorum terminorum ob

$$\binom{m}{0} \quad \text{et} \quad \binom{m-i}{0} = 1$$

sponte se prodit; deinde vero non difficulter aequalitas inter terminos secundos ipso aa affectos ostendi poterit similique modo etiam de sequentibus hoc idem est tenendum.

23. Verum ne etiam hic inductione uti cogamur, convenientiam binorum terminorum eadem potestate $a^{2\lambda}$ demonstremus. In priore vero serie ista potestas $a^{2\lambda}$ hunc habet coefficientem

$$\binom{m}{\lambda}\binom{m}{i+\lambda}\binom{m+i}{i};$$

in altera vero eiusdem coefficiens est

$$\binom{m-i}{\lambda}\binom{m+i}{i+\lambda}\binom{m}{i}.$$

Evolvatur igitur uterque in factores simplices ac prior deducit ad hanc fractionem

$$\frac{m\cdots(m-\lambda+1)\prec m\cdots(m-i-\lambda+1)\prec(m+i)\cdots(m+1)}{1\cdot2\cdots\lambda\prec 1\cdot2\cdots(i+\lambda)\prec 1\cdot2\cdots i};$$

posterior vero praebet istam

$$\frac{(m-i)\cdots(m-i-\lambda+1)\prec(m+i)\cdots(m-\lambda+1)\prec m\cdots(m-i+1)}{1\cdot2\cdots\lambda\prec 1\cdot2\cdots(i+\lambda)\prec 1\cdot2\cdots i};$$

ubi denominatores utrinque manifesto sunt iidem, ita ut tantum aequalitas inter numeratores sit demonstranda.

24. Primo autem in priore numeratore tertius factor generalis cum primo coniunctus praebet hoc productum

$$(m+i)\cdots(m-\lambda+1),$$

quod etiam in forma posteriori occurrit; his igitur sublatis aequalitatem monstrari oportet inter partes residuas, quae sunt in priori forma

$$m\cdots(m-i-\lambda+1),$$

in altera

$$m\cdots(m-i+1)\prec(m-i)\cdots(m-i-\lambda+1),$$

quae nunc iterum est manifesta. Sic igitur veritas nostri Theorematis, quod demonstrandum suscepimus, iam rigide est ob oculos posita pro formula integrali

$$\mathfrak{C} = \int \partial\varphi \cos. i\varphi (1+aa-2a\cos.\varphi)^n \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \pi \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRATIONIS PARS QUARTA

25. Invento valore formulae $\mathfrak{C}$ tota demonstratio iam confecta est censenda, quandoquidem iam initio ex valore formulae $\odot$ ille rite est derivatus. Interim tamen hic quoque vicissim ex valore $\mathfrak{C}$ alterum valorem $\odot$ derivari conveniet. Utamur autem forma simpliciori ipsius $\mathfrak{C}$, ad quem [valorem] nos ipsa demonstratio immediate perduxit, qui erat

$$\mathfrak{C} = \pm\pi a^i \left(\binom{m}{0}\binom{m}{i} + \binom{m}{1}\binom{m}{i+1}a^2 + \binom{m}{2}\binom{m}{i+2}a^4 + \text{etc.} \right),$$

ubi signum superius valet, si i fuerit numerus par, inferius, si impar.

26. Ex hoc iam valore formulae ☾ alterius formulae ⊙ valor deducitur, si modo loco m scribamus $-n-1$, qui ergo valor hinc erit

$$\odot = \pm \pi a^i \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{-n-1}{0}\right)\left(\frac{-n-1}{i}\right) + \left(\frac{-n-1}{1}\right)\left(\frac{-n-1}{i+1}\right) a^2 \\ + \left(\frac{-n-1}{2}\right)\left(\frac{-n-1}{i+2}\right) a^4 + \text{etc.}, \end{array} \right\},$$

quae autem series nunc in infinitum progreditur, siquidem n fuerit numerus integer positivus; quamobrem hanc seriem in aliam converti oportet, quae abrumpatur, quoties n fuerit numerus integer positivus, id quod ope Lemmatis supra initio allati praestari poterit.

27. Seriem igitur hic inventam cum serie ♄ in Lemmate comparemus, id quod fit statuendo

$$f = -n-1, \quad h = -n-1 \quad \text{et} \quad e = i,$$

ita ut iam sit $\odot = \pm \pi a^i ♄$. Ex his autem valoribus altera series signo ♂ notata fiet ob

$$-h-1 = n, \quad -f-1 = n \quad \text{et} \quad x = a^2$$

$$♂ = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{i}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n}{i+1}\right) a^2 + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{i+2}\right) a^4 + \text{etc.}$$

At vero relatio inter has duas series erit

$$\left(\frac{i-n-1}{i}\right) ♄ = \frac{\left(\frac{n+i}{i}\right) ♂}{(1-aa)^{2n+1}};$$

ubi notetur, cum supra iam observaverimus esse

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = \pm \left(\frac{p+q-1}{q}\right),$$

hic fore

$$\left(\frac{-n-1+i}{i}\right) = \pm \left(\frac{n}{i}\right);$$

ubi iterum signum superius valet, si i fuerit numerus par. Hinc igitur erit

$$♄ = \pm \frac{\left(\frac{n+i}{i}\right) ♂}{\left(\frac{n}{i}\right)(1-aa)^{2n+1}}.$$

28. Substituatur igitur iste valor loco ♄, quo ipso duplex signorum ambiguitas e medio tolletur; loco ♂ autem series modo data scribatur atque pro ☉ sequentem nanciscemur expressionem

$$\odot = \frac{\pi a^i \binom{n+i}{i}}{\binom{n}{i}(1-aa)^{2n+1}} \left(\binom{n}{0}\binom{n}{i} + \binom{n}{1}\left(\frac{n}{i+1}\right)a^2 + \binom{n}{2}\left(\frac{n}{i+2}\right)a^4 + \text{etc.}\right),$$

quae series manifesto semper abrumpitur, quoties n fuerit numerus integer positivus; verumtamen hoc laborat defectu, quod casibus, quibus $n < i$, ob $\binom{n}{i} = 0$ infinita evadere videtur. Verum notandum est his casibus etiam omnes terminos seriei ♂ in nihilum abire; ex quo necesse est, ut in eius verum valorem totiusque expressionis inquiramus. At vero reliquis casibus, quibus $n > i$, haec expressio adeo illi, quam in Theoremate dedimus, praeferenda videtur.

29. Ostendi ergo hic debet omnes terminos nostrae seriei ita transformari posse, ut per denominatorem $\binom{n}{i}$ divisionem admittant. At vero quilibet nostrae seriei terminus sub hac forma continetur $\binom{n}{\lambda}\left(\frac{n}{i+\lambda}\right)$, quae per factorem communem $\binom{n+i}{i}$ multiplicata fit

$$\binom{n+i}{i}\binom{n}{\lambda}\left(\frac{n}{i+\lambda}\right),$$

quae in factores evoluta ad hanc fractionem reducitur

$$\frac{(n+i)\cdots(n+1) \prec n\cdots(n-\lambda+1) \prec n\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots i \prec 1\cdot 2\cdots\lambda \prec 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)},$$

ubi tam numerator quam denominator tres habet factores principales; factores autem singulares in numeratore continuo unitate decrescunt, in denominatore unitate increscunt. Cum igitur sit

$$\binom{n}{i} = \frac{n\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i},$$

superior fractio per hanc divisa ob

$$\frac{n\cdots(n-i-\lambda+1)}{n\cdots(n-i+1)} = (n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)$$

proveniet

$$\frac{(n+i)\cdots(n+1)\prec n\cdots(n-\lambda+1)\prec(n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda\prec 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)},$$

quae manifesto in hanc transit (ob duos priores factores cohaerentes)

$$\frac{(n+i)\cdots(n-\lambda+1)\prec(n-i)\cdots(n-i-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda\prec 1\cdot 2\cdots(i+\lambda)},$$

ita ut omnibus ad characteres reductis sit forma generalis cuiusque termini

$$=\left(\frac{n+i}{i+\lambda}\right)\left(\frac{n-i}{\lambda}\right).$$

30. Nunc igitur loco λ successive scribantur valores 0, 1, 2, 3 etc. atque valor integralis formulae $\odot$ prodibit, prorsus uti in Theoremate est enunciatus, scilicet

$$\odot=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\left(\frac{n-i}{0}\right)\left(\frac{n+i}{i}\right)+\left(\frac{n-i}{1}\right)\left(\frac{n+i}{i+1}\right)a^2+\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(\frac{n+i}{i+2}\right)a^4+\text{etc.}\right)$$

quae expressio iam non solum semper abrumpitur, quoties n fuerit numerus integer positivus, nec ullo amplius laborat defectu, cum omnibus casibus valorem ipsius $\odot$ determinatum exhibeat, sicque adeo nostrum Theorema, quod antea sola coniectura innitebatur, solidissima demonstratione est confirmatum.

DE VALORIBUS INTEGRALIUM A TERMINO VARIABILIS $x = 0$ USQUE AD $x = \infty$ EXTENSORUM

M. S. Academiae exhib. d. 30. Aprilis 1781

Commentatio 675 indicis ENESTROEMIANI
Institutiones calculi integralis 4, 1794, p. 337—345

1.[1]) Talium formularum, quae a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extensae finitum sortiuntur valorem, simplicissima est circularis $\int \frac{\partial x}{1+xx}$, cuius valor est $\frac{\pi}{2}$ denotante π peripheriam pro diametro $= 1$. Deinde etiam methodo prorsus singulari inveni[2]) esse

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} \left[\begin{matrix} \text{a} & x = 0 \\ \text{ad} & x = \infty \end{matrix}\right] = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Praeterea vero hoc modo plures alias formulas huius generis expedivi[3]), in quarum differentialia non solum functiones algebraicae ipsius x, sed etiam lx ingrediatur.

1) In editione principe paragraphi numeris 124 usque ad 140 signatae sunt. G. F.

2) Vide Commentationes 60 et 254 voluminis I17, imprimis p. 54 et 260. A. K.

3) Vide Commentationes 588 et 589 voluminis I18. A. K.

2. Obtulerunt se mihi autem quondam aliae huiusmodi formulae etiam functiones transcendentes involventes, quarum valores desiderati omnes methodos adhuc cognitas respuere videantur. Quaesiveram scilicet eam lineam curvam, in qua radius osculi ubique reciproce esset proportionalis arcui curvae, ita ut posito arcu $= s$ et radio osculi $= r$ esset

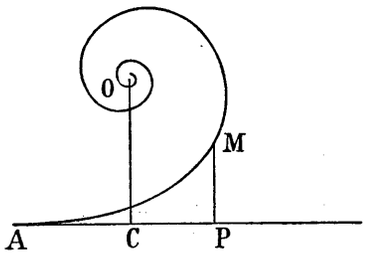

Fig. 1

$$rs = aa.$$

Hinc enim haud difficile est figuram curvae libero quasi manus ductu describere, quandoquidem ea talem habere debet figuram (Fig. 1). Initio nimirum curvae in A constituto inde curva continuo magis incurvabitur et tandem post infinitas spiras in certum punctum O glomerabitur, quod *polum* huius curvae appellare licebit. Propositum igitur mihi fuerat locum huius poli accuratius investigare pro eoque quantitatem coordinatarum AC et CO perscrutari.

3. Hunc in finem introducta in calculum portionis cuiusvis $AM = s$ amplitudine $= \varphi$, ut sit $r = \frac{\partial s}{\partial \varphi}$, fit

$$s\partial s = aa\partial\varphi$$

hincque $ss = 2aa\varphi$ et

$$s = a\sqrt{2\varphi} = 2c\sqrt{\varphi}.$$

Hinc iam prodit $\partial s = \frac{c\partial\varphi}{\sqrt{\varphi}}$, unde posita abscissa pro hoc arcu $AP = x$ et applicata $PM = y$ colligitur fore

$$x = c\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \quad \text{et} \quad y = c\int \frac{\partial\varphi \sin.\varphi}{\sqrt{\varphi}}.$$

4. Hinc ergo pro polo O determinando requiruntur valores harum duarum formularum integralium, postquam a termino $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \infty$ fuerint extensae. Initio quidem sum arbitratus hos valores aliter obtineri non posse nisi approximando, dum utraque formula successive per partes evolvatur; primo scilicet a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \pi$, deinde a $\varphi = \pi$ usque ad $\varphi = 2\pi$,

porro a $\varphi = 2\pi$ usque ad $\varphi = 3\pi$ etc., quippe quo pacto series prodibunt satis prompte convergentes. Verum evidens est hanc operationem longos calculos satis taediosos requirere, quos quidem evolvere non sum ausus. Nuper autem forte fortuna per methodum prorsus singularem perspexi esse tam

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \left[\begin{matrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \infty \end{matrix}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

quam

$$\int \frac{\partial\varphi \sin.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \left[\begin{matrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \infty \end{matrix}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ita ut pro loco poli quaesito O sit

$$AC = c\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad CO = c\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5. Quoniam igitur methodus, qua huc sum perductus, non parum polliceri videtur, Geometris haud ingratum fore arbitror, si eam omni cura hic exposuero. Et quia multo latius quam ad istas formulas patet, eam etiam omni extensione sum propositurus, quae omnia ex consideratione huius formulae satis simplicis

$$\int x^{n-1}\partial x e^{-x}$$

deduxi, cuius ergo integrale pro variis valoribus exponentis n investigare convenit.

6. Ac primo quidem pro casu $n = 1$ huius formulae $\int \partial x e^{-x}$ integrale manifestum est $1 - e^{-x}$, quod casu $x = 0$ evanescit, facto autem $x = \infty$ abit in unitatem. Praeterea, cum huius formulae $x^\lambda e^{-x}$ differentiale sit

$$\lambda x^{\lambda-1}\partial x e^{-x} - x^\lambda \partial x e^{-x},$$

erit vicissim

$$\int x^\lambda \partial x e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1}\partial x e^{-x} - x^\lambda e^{-x},$$

quod postremum membrum tam pro casu $x = 0$ quam $x = \infty$ evanescit, si modo fuerit $\lambda > 0$. Tum igitur pro nostris terminis integrationis erit

$$\int x^\lambda \partial x e^{-x} = \lambda \int x^{\lambda-1}\partial x e^{-x},$$

cuius formulae ope ob $\int \partial x e^{-x} = 1$ sequentes integralium valores deducuntur

$$\int x\, \partial x e^{-x} = 1,$$

$$\int x^2 \partial x e^{-x} = 1 \cdot 2,$$

$$\int x^3 \partial x e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\int x^4 \partial x e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

sicque in genere

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1),$$

cuius producti valores, quoties n fuerit numerus integer positivus, sponte se produnt; quando autem n est numerus fractus, olim[1]) ostendi, quomodo valores per quadraturas curvarum algebraicarum exhiberi queant. Sic pro casu $n = \frac{1}{2}$ constat istum valorem esse $= \sqrt{\pi}$.

7. Cum igitur omnes valores huius producti infiniti $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$ tanquam cogniti spectari queant, eos littera $\triangle$ designabo, ita ut sit

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1),$$

sicque iam adepti sumus hanc insignem formulam integralem

$$\int x^{n-1} \partial x e^{-x} = \triangle,$$

integrali scilicet ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extenso; atque ex hac ipsa formula omnia deduxi, quae ad casum ante memoratum pertinent, ubi quidem ratiocinia penitus singularia adhiberi debent, quae igitur hic diligentius sum expositurus.

8. Posui autem primo $x = ky$, et quoniam ambo termini integralis iidem manent, erit etiam

$$k^n \int y^{n-1} \partial y e^{-ky} = \triangle,$$

---

1) Confer Commentationes 19 et 122 voluminis I_{14}, imprimis p. 11 et 264. A. K.

quandoquidem haec formula etiam ab $y=0$ ad $y=\infty$ usque extenditur; quamobrem per k^n dividendo habebimus

$$\int y^{n-1}\partial y\, e^{-ky} = \frac{\Delta}{k^n},$$

ubi autem notari oportet pro k nullos numeros negativos accipi posse, quia alioquin formula e^{-ky} non amplius evanesceret casu $y=\infty$; atque hic isti soli valores sunt excludendi, ita ut etiam valores imaginarii loco k adhiberi queant, atque hinc illas arduas integrationes sum assecutus.

9. Ponamus ergo

$$k = p + q\sqrt{-1},$$

et cum sit

$$e^{-qy\sqrt{-1}} = \text{cos. } qy - \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } qy$$

et

$$e^{+qy\sqrt{-1}} = \text{cos. } qy + \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } qy,$$

nostra formula nunc induet hanc formam

$$\int y^{n-1}\partial y\, e^{-py}(\text{cos. } qy - \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } qy) = \frac{\Delta}{(p+q\sqrt{-1})^n}.$$

Quamobrem si formulae imaginariae signum mutemus, erit simili modo

$$\int y^{n-1}\partial y\, e^{-py}(\text{cos. } qy + \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } qy) = \frac{\Delta}{(p-q\sqrt{-1})^n}.$$

10. Quo valores inventos commodius exprimere liceat, ponamus

$$p = f\,\text{cos. }\theta \quad \text{et} \quad q = f\,\text{sin. }\theta$$

eritque

$$(p+q\sqrt{-1})^n = f^n(\text{cos. } n\theta + \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } n\theta)$$

et

$$(p-q\sqrt{-1})^n = f^n(\text{cos. } n\theta - \sqrt{-1}\cdot\text{sin. } n\theta);$$

ubi notasse iuvabit fore tang. $\theta = \frac{q}{p}$, unde ex valoribus p et q assumtis erit

etiam $f = \sqrt{(pp + qq)}$. Hoc ergo modo fit priore casu

$$\frac{\triangle}{(p+q\sqrt{-1})^n} = \frac{\triangle}{f^n(\cos. n\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin. n\theta)},$$

pro altero

$$\frac{\triangle}{(p-q\sqrt{-1})^n} = \frac{\triangle}{f^n(\cos. n\theta - \sqrt{-1}\cdot\sin. n\theta)}.$$

Quamobrem si hae duae formulae addantur, prodibit

$$\frac{2\triangle\cos. n\theta}{f^n}.$$

Differentia autem harum formularum dat

$$\frac{2\triangle\sqrt{-1}\cdot\sin. n\theta}{f^n}.$$

11. Addamus igitur quoque ipsas formulas integrales et habebimus

$$\int y^{n-1}\partial y e^{-py}\cos. qy = \frac{\triangle\cos. n\theta}{f^n}.$$

Sin autem subtrahamus et per $2\sqrt{-1}$ dividamus, oritur

$$\int y^{n-1}\partial y e^{-py}\sin. qy = \frac{\triangle\sin. n\theta}{f^n},$$

quae iam duae formulae integrales latissime patent, cum numeri p et q prorsus arbitrio nostro relinquuntur, id tantum observando, ne pro p numeri negativi accipiantur. Operae igitur pretium erit has duas formulas integrales sequentibus binis Theorematibus complecti.

THEOREMA 1

Posito

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$$

et pro litteris p et q numeros quoscunque positivos accipiendo fiat inde

$$V(pp+qq) = f$$

et quaeratur angulus θ, ut sit

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{q}{p},$$

et habebitur ista integratio memorabilis

$$\int x^{n-1}\partial x\, e^{-px} \cos. qx \left[\begin{matrix} \text{a} & x=0 \\ \text{ad} & x=\infty \end{matrix}\right] = \frac{\triangle \cos. n\theta}{f^n}.$$

THEOREMA 2

Posito

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$$

et pro litteris p et q numeros quoscunque positivos accipiendo fiat inde

$$V(pp+qq) = f$$

et quaeratur angulus θ, ut sit

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{q}{p},$$

atque habebitur ista integratio memorabilis

$$\int x^{n-1}\partial x\, e^{-px} \sin. qx \left[\begin{matrix} \text{a} & x=0 \\ \text{ad} & x=\infty \end{matrix}\right] = \frac{\triangle \sin. n\theta}{f^n}.$$

12. Cum igitur pro casu curvae supra consideratae pervenerimus ad has formulas integrales

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \quad \text{et} \quad \int \frac{\partial\varphi \sin.\varphi}{\sqrt{\varphi}},$$

facta applicatione erit $n = \frac{1}{2}$ ideoque $\triangle = \sqrt{\pi}$, tum vero erit $p = 0$ et $q = 1$, unde fit $f = 1$ et tang. $\theta = \frac{q}{p} = \infty$ ideoque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ergo cos. $n\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin. n\theta$. Hinc igitur fiet

$$\int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

simulque

$$\int \frac{\partial\varphi \sin.\varphi}{\sqrt{\varphi}} \begin{bmatrix} \text{a} & \varphi = 0 \\ \text{ad} & \varphi = \infty \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

13. Operae autem pretium erit hunc casum, quo $n = \frac{1}{2}$ et $\triangle = \sqrt{\pi}$, in genere evolvere; et cum posuerimus

$$\sqrt{(pp + qq)} = f \quad \text{et} \quad \frac{q}{p} = \text{tang.}\,\theta,$$

erit

$$\sin.\theta = \frac{q}{f} \quad \text{et} \quad \cos.\theta = \frac{p}{f}.$$

Hinc ergo primo

$$\sin.\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos.\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f-p}{2f}}$$

et

$$\cos.\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos.\theta}{2}} = \sqrt{\frac{f+p}{2f}};$$

unde fit pro valoribus integralibus

$$\frac{\triangle \sin.\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f-p}{2}}$$

et

$$\frac{\triangle \cos.\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

Quamobrem habebimus binas sequentes formulas integrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} e^{-px} \sin. qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f-p}{2}}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} e^{-px} \cos. qx = \frac{\sqrt{\pi}}{f} \cdot \sqrt{\frac{f+p}{2}}.$$

14. Casus autem, quibus pro n sumitur numerus integer positivus ideoque $\triangle$ absolute per numeros integros exhiberi potest, ita sunt comparati, ut etiam per methodos cognitas, ope scilicet formularum integralium reductionis satis notae, expediri queant atque adeo integralia in genere exhiberi. Haec autem operatio postulat calculos non parum prolixos, quamobrem formulae nostrae satis simplices pro casu scilicet $x=\infty$ nihilominus omni attentione sunt dignae. Quando autem exponenti n valores negativos tribuere voluerimus, hi casus statim in initio integrationis additionem constantis infinitae postulant, ut scilicet integralia evanescant casu $x=0$, sicque adeo valores integralium, quos hic quaerimus, manebunt infiniti ideoque ad institutum nostrum non sunt referendi.

15. Casus autem maxime memorabilis hic occurrit, quo $n=0$ et qui prorsus singularem sollertiam postulat; quem igitur accuratius evolvamus. Quoniam posuimus

$$\triangle = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1),$$

statuamus simili modo

$$\triangle' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{et} \quad \triangle'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)$$

eritque manifesto

$$\triangle = \frac{\triangle'}{n} \quad \text{et} \quad \triangle' = \frac{\triangle''}{n+1}$$

ideoque

$$\triangle = \frac{\triangle''}{n(n+1)}.$$

Sumamus nunc $n = \omega$ existente ω infinite parvo, et cum sit $\triangle'' = 1$, inde fit $\triangle = \frac{1}{\omega}$ ideoque eius valor erit infinitus. Cum autem pro formula integrali priore sit $\sin. n\theta = \omega\theta$, evidens est fore $\triangle \sin. n\theta = \theta$; quamobrem ista prior formula integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \sin. qx = \theta,$$

dum nempe integrale a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = \infty$ extenditur. Alterius autem formulae nostrae integralis

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \cos. qx$$

valor erit infinite magnus. Ille autem casus omnino meretur, ut eum singulari Theoremate complectamur.

THEOREMA 3

16. *Si litterae p et q denotent numeros positivos quoscunque atque hinc quaeratur angulus θ, ut sit*

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{q}{p},$$

habebitur sequens integratio maxime memorabilis

$$\int \frac{\partial x}{x} e^{-px} \sin. qx \begin{bmatrix} \text{a} & x = 0 \\ \text{ad} & x = \infty \end{bmatrix} = \theta,$$

cuius theorematis demonstratio dubito quin alio modo quam per approximationes investigari queat.

17. Casus autem simplicissimus, quo $p = 0$ et $q = 1$, iam omnia calculi artificia adhuc cognita superare videtur; quia autem hoc casu fit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{1}{0} = \infty,$$

erit

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

unde oritur haec integratio

$$\int \frac{\partial x}{x} \sin. x = \frac{\pi}{2}.$$

Interim tamen de eius veritate eo minus dubitare licet, quod approximationes adhibitae ad eundem valorem propemodum perducant. Quodsi hunc casum cum initio memorato

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} \sin. x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

comparemus, ingens similitudo summam attentionem meretur, cum huius integrale sit praecise radix quadrata illius.

SPECIMEN INTEGRATIONIS ABSTRUSISSIMAE HAC FORMULA $\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$ CONTENTAE

Conventui exhib. die 26. Mart. 1777

Commentatio 688 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 98—117
Summarium ibidem p. 171—173

SUMMARIUM

C'est par le moyen de deux méthodes entièrement différentes que M. EULER est parvenu à rendre la formule irrationnelle proposée rationnelle et à trouver son intégrale exprimée par des logarithmes et des arcs de cercle. Dans la premiere méthode il se sert des substitutions suivantes

$$x = \frac{yy-3}{4}, \quad y = z\sqrt{-1}, \quad \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v,$$

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

moyennant lesquelles la formule proposée se trouve transformée en deux, savoir

$$-2^{\frac{3}{4}}\int \frac{\partial p}{2-p^4} - 2^{\frac{3}{4}}\int \frac{\partial q}{2-q^4},$$

dont l'intégration n'est sujette à aucune difficulté.

Dans la seconde méthode il met

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = \varrho,$$

ce qui transforme la formule proposée en

$$2\sqrt{2}\int\frac{\varrho\varrho\partial\varrho}{(1-\varrho^4)\sqrt{(1+\varrho^4)}}-2\int\frac{\varrho\varrho\partial\varrho}{1-\varrho^4},$$

dont la seconde partie est déjà rationnelle. Pour dégager la premiere du signe radical l'auteur met

$$\frac{\sqrt{(1+\varrho^4)}}{\varrho}=t\sqrt{2},$$

et elle devient

$$\int\frac{\partial t}{1-t^4}.$$

Cette seconde méthode ayant conduit à une intégrale d'une forme différente de celle que la premiere méthode avoit fournie, M. EULER fait passer celle-ci par quelques transformations qui démontrent le parfait accord des deux résultats.

La seconde méthode a sur la premiere le grand avantage de pouvoir être mise en usage pour ramener à la rationalité d'autres formules irrationnelles beaucoup plus générales. C'est ainsi que la formule

$$\frac{\partial x\,(1-x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n-1)}}$$

peut être transformée en

$$\frac{\partial t}{1-t^{2n}}-\frac{2\varrho^{2n-2}\partial\varrho}{1-\varrho^{2n}},$$

moyennant les substitutions

$$\sqrt[2n]{(2x^n-1)}=\varrho \quad \text{et} \quad \frac{x}{\varrho}=t.$$

Même la formule beaucoup plus générale

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)\left((a+bx)^\lambda-b^\lambda x^{\lambda n}\right)^{\frac{m}{\lambda n}}}$$

peut être rendue rationnelle par les substitutions

$$(a+bx)^\lambda-b^\lambda x^{\lambda n}=\varrho^{\lambda n} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\varrho}=t.$$

Ces profondes recherches, dont le titre de ce Mémoire n'annonce pas toute l'importance, remplissent un vide très considérable dans l'intégration des formules différentielles irrationnelles.

1. Quamquam haec formula non adeo complicata videtur, tamen non dubito asseverare vix quemquam fore, qui, postquam omni cura et sagacitate eius resolutionem fuerit aggressus, tandem non agnoscere debeat se oleum et operam perdidisse. Facile quidem foret istam formulam a signo radicali biquadratico liberare ponendo

$$2xx = \frac{(tt+1)^2}{(tt-1)^2},$$

unde fieret

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = \sqrt{\frac{2t}{tt-1}};$$

tum autem foret

$$x = \frac{tt+1}{(tt-1)\sqrt{2}}$$

ideoque

$$\partial x = -\frac{2t\partial t\sqrt{2}}{(tt-1)^2}$$

et

$$1+x = \frac{tt(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}}{(tt-1)\sqrt{2}},$$

quibus substitutis formula proposita abit in hanc

$$-\frac{2\partial t}{(1+\sqrt{2})tt+1-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2t}{tt-1}}.$$

Haec formula autem ita est comparata, ut dubitem eius integrale ullo alio modo erui posse nisi per praecedentem formam regrediendo atque omnes operationes instituendo, quas hic sum expositurus, quae tandem praeter omnem expectationem ad integrale per logarithmos et arcus circulares expressum perducent.

2. Praecipua substitutio, qua via ad resolutionem sternetur, in hoc consistit, ut ponam

$$x = \frac{yy-3}{4};$$

tum enim erit

$$2xx = \frac{y^4-6yy+9}{8},$$

unde fit

$$2xx - 1 = \frac{y^4 - 6yy + 1}{8};$$

deinde vero erit

$$1 + x = \frac{yy + 1}{4}$$

hincque

$$\frac{\partial x}{1+x} = \frac{2y\partial y}{yy+1}.$$

Quamobrem, si ipsam formulam propositam per V designemus, erit facta hac substitutione

$$V = 2^{\frac{7}{4}} \int \frac{y\partial y}{(yy+1)\sqrt[4]{(y^4 - 6yy + 1)}}.$$

3. Verum ne haec [quidem] formula tractari potest nisi per imaginaria transeundo; poni enim oportet

$$y = z\sqrt{-1},$$

ut oriatur ista forma

$$V = -2^{\frac{7}{4}} \int \frac{z\partial z}{(1-zz)\sqrt[4]{(z^4 + 6zz + 1)}},$$

quam iam singulari illa methodo, cuius aliquot specimina non ita pridem dedi[1]), tractare licebit. Pono igitur brevitatis gratia

$$\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)} = v,$$

ut formula resolvenda sit

$$\int \frac{z\partial z}{v(1-zz)} = Z,$$

indeque porro

$$V = -2^{\frac{7}{4}} Z;$$

ad quam formulam resolvendam introduco duas novas variabiles p et q statuendo

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

unde statim fit

$$p^4 + q^4 = \frac{2 + 12zz + 2z^4}{v^4} = 2.$$

1) Vide Commentationem 668 huius voluminis, imprimis § 7 et sequentes. Confer etiam huius voluminis Commentationes 689, imprimis § 1, 695, imprimis § 2, 701, imprimis § 10. G. F.

4. Praeterea vero ex binis formulis assumtis erit primo

$$p+q=\frac{2}{v} \quad \text{et} \quad p-q=\frac{2z}{v},$$

unde colligitur

$$z=\frac{p-q}{p+q};$$

hinc differentiando erit

$$\partial z=\frac{2(q\partial p-p\partial q)}{(p+q)^2},$$

ubi loco $p+q$ scribamus valorem $\frac{2}{v}$, fietque

$$\partial z=\frac{1}{2}vv(q\partial p-p\partial q);$$

porro vero habebimus

$$1-zz=pqvv.$$

His valoribus substitutis erit

$$Z=\frac{1}{2}\int\frac{(p-q)(q\partial p-p\partial q)}{pqv(p+q)},$$

quae formula posito loco v valore $\frac{2}{p+q}$ abit in hanc

$$Z=\frac{1}{4}\int\frac{(p-q)(q\partial p-p\partial q)}{pq}=\frac{1}{4}\int(p-q)\left(\frac{\partial p}{p}-\frac{\partial q}{q}\right).$$

5. Facta ergo evolutione habebimus

$$4\partial Z=\partial p+\partial q-\frac{q\partial p}{p}-\frac{p\partial q}{q}.$$

Cum autem sit $p^4+q^4=2$, erit $p^4=2-q^4$ et hinc

$$\frac{\partial p}{p}=-\frac{q^3\partial q}{2-q^4}$$

similique modo

$$\frac{\partial q}{q}=-\frac{p^3\partial p}{2-p^4};$$

hincque colligitur

$$-\frac{q\partial p}{p}=\frac{q^4\partial q}{2-q^4} \quad \text{et} \quad -\frac{p\partial q}{q}=\frac{p^4\partial p}{2-p^4},$$

quocirca nanciscimur

$$4\partial Z = \frac{2\partial p}{2-p^4} + \frac{2\partial q}{2-q^4},$$

sicque pertigimus ad binas formulas differentiales, in quibus binae variabiles p et q a se invicem sunt separatae; consequenter pro Z habebimus sequentem expressionem

$$Z = \frac{1}{2}\int \frac{\partial p}{2-p^4} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial q}{2-q^4},$$

unde iam manifestum est valorem Z per logarithmos et arcus circulares exprimi posse.

6. Ponamus enim $p = r\sqrt[4]{2}$, ut fiat

$$\frac{\partial p}{2-p^4} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{\partial r}{1-r^4}.$$

Constat autem esse

$$\int \frac{\partial r}{1-r^4} = \frac{1}{4}\, l\, \frac{1+r}{1-r} + \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\, r$$

hincque adeo erit

$$\int \frac{\partial p}{2-p^4} = \frac{1}{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\, l\, \frac{\sqrt[4]{2}+p}{\sqrt[4]{2}-p} + \frac{1}{2\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\,\text{A tang.}\, \frac{p}{\sqrt[4]{2}};$$

quod cum simili modo se habeat cum altera parte $\int \frac{\partial q}{2-q^4}$, reperimus tandem

$$Z = \frac{1}{8\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\, l\, \frac{\sqrt[4]{2}+p}{\sqrt[4]{2}-p} + \frac{1}{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\,\text{A tang.}\, \frac{p}{\sqrt[4]{2}}$$
$$+ \frac{1}{8\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\, l\, \frac{\sqrt[4]{2}+q}{\sqrt[4]{2}-q} + \frac{1}{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}\,\text{A tang.}\, \frac{q}{\sqrt[4]{2}},$$

ubi tantum opus est loco p et q valores assumtos restituere, qui sunt

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

7. Cum iam ipsum integrale quaesitum sit $V = -2^{\frac{7}{4}} Z$, erit nunc

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{\sqrt[4]{2} + p}{\sqrt[4]{2} - p} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{p}{\sqrt[4]{2}}$$
$$-\frac{1}{4} l \frac{\sqrt[4]{2} + q}{\sqrt[4]{2} - q} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{q}{\sqrt[4]{2}},$$

atque si loco p et q scribantur valores assignati, prodibit

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{v\sqrt[4]{2} + 1 + z}{v\sqrt[4]{2} - 1 - z} - \frac{1}{4} l \frac{v\sqrt[4]{2} + 1 - z}{v\sqrt[4]{2} - 1 + z}$$
$$-\frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{1+z}{v\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{1-z}{v\sqrt[4]{2}}.$$

Hic primum observo ambos arcus circulares commode in unum contrahi posse ope formulae

$$\text{A tang.}\, a + \text{A tang.}\, b = \text{A tang.} \frac{a+b}{1-ab},$$

quo facto erit

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{v\sqrt[4]{2} + 1 + z}{v\sqrt[4]{2} - 1 - z} - \frac{1}{4} l \frac{v\sqrt[4]{2} + 1 - z}{v\sqrt[4]{2} - 1 + z}$$
$$-\frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2} - 1 + zz}.$$

8. Simili modo etiam logarithmos tam numeratorum quam denominatorum in unum contrahere licet eritque

$$l\left(v\sqrt[4]{2} + 1 + z\right) + l\left(v\sqrt[4]{2} + 1 - z\right) = l\left((v\sqrt[4]{2} + 1)^2 - zz\right),$$

$$l\left(v\sqrt[4]{2} - 1 - z\right) + l\left(v\sqrt[4]{2} - 1 + z\right) = l\left((v\sqrt[4]{2} - 1)^2 - zz\right),$$

hincque habebimus sequentem formam

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{(v\sqrt[4]{2} + 1)^2 - zz}{(v\sqrt[4]{2} - 1)^2 - zz} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2} - 1 + zz},$$

ubi notetur esse $v = \sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}$.

9. Nunc ulterius regrediamur; et quia posuimus $y = z\sqrt{-1}$, fiet nunc $zz = -yy$ et iam erit

$$v = \sqrt[4]{(1 - 6yy + y^4)}$$

hincque per y integrale quaesitum hoc modo exprimetur

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{(v\sqrt[4]{2}+1)^2 + yy}{(v\sqrt[4]{2}-1)^2 + yy} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{2v\sqrt[4]{2}}{vv\sqrt{2} - 1 - yy}.$$

10. Quoniam igitur posueramus

$$x = \frac{yy - 3}{4},$$

erit

$$yy = 4x + 3;$$

eratque

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = \sqrt[4]{\frac{1 - 6yy + y^4}{8}} = \frac{v}{\sqrt[4]{8}} = \frac{v\sqrt[4]{2}}{2},$$

unde fit

$$v\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{(2xx-1)},$$

quibus valoribus substitutis integrale quaesitum erit

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{(2\sqrt[4]{(2xx-1)}+1)^2 + 4x + 3}{(2\sqrt[4]{(2xx-1)}-1)^2 + 4x + 3} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{4\sqrt[4]{(2xx-1)}}{4\sqrt{(2xx-1)} - 4x - 4}.$$

Facta autem evolutione reperietur

$$V = -\frac{1}{4} l \frac{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} + \sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} - \sqrt[4]{(2xx-1)}} - \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{\sqrt{(2xx-1)} - x - 1},$$

quae expressio etiam ita referri potest

$$V = + \frac{1}{4} l \frac{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} - \sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} + \sqrt[4]{(2xx-1)}}$$
$$+ \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 + x - \sqrt{(2xx-1)}}.$$

Hunc igitur valorem operae pretium erit per sequens Theorema in medium proferre.

THEOREMA

Proposita hac formula differentiali

$$\partial V = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

eius integrale sequenti modo per logarithmos et arcus circulares exprimetur:

$$V = + \frac{1}{4} l \frac{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} - \sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 + x + \sqrt{(2xx-1)} + \sqrt[4]{(2xx-1)}}$$
$$+ \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 + x - \sqrt{(2xx-1)}}.$$

COROLLARIUM 1

Hinc ergo si loco x scribamus $-x$, erit

$$\int \frac{\partial x}{(1-x)\sqrt[4]{(2xx-1)}} = \frac{1}{4} l \frac{1 - x + \sqrt{(2xx-1)} - \sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 - x + \sqrt{(2xx-1)} + \sqrt[4]{(2xx-1)}}$$
$$+ \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt[4]{(2xx-1)}}{1 - x - \sqrt{(2xx-1)}}.$$

COROLLARIUM 2

Hae integrationes eo magis sunt notatu dignae, quod formulam differentialem non generaliorem admittant. Ita haec formula differentialis

$$\frac{\partial x}{(1+\alpha x)\sqrt[4]{(\beta xx-1)}}$$

integrationem haud admittit nisi casibus $\alpha = \pm 1$ et $\beta = 2$ vel generalius, nisi fuerit $\beta = 2\alpha\alpha$.

11. Ipsam autem formulam nostram integralem pluribus modis transformare licet, ut signum radicale biquadraticum elidatur. Commodissime hoc praestabitur ponendo

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = s,$$

unde fit $2xx = 1 + s^4$, consequenter

$$x = \sqrt{\frac{1+s^4}{2}}$$

hincque

$$\partial x = \frac{s^3 \partial s \sqrt{2}}{\sqrt{1+s^4}},$$

quo valore substituto erit

$$V = \int \frac{2ss\partial s}{(\sqrt{2} + \sqrt{(1+s^4)})\sqrt{(1+s^4)}},$$

cuius ergo formulae integrale erit

$$V = \frac{1}{4} l \frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1+s^4)} + ss\sqrt{2} - s\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{(1+s^4)} + ss\sqrt{2} + s\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{(1+s^4)} - ss\sqrt{2}}.$$

12. Haec autem formula si supra et infra multiplicetur per

$$\sqrt{2} - \sqrt{(1+s^4)},$$

ita in duas partes discerpetur, ut sit

$$V = \int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} - \int \frac{2ss\partial s}{1-s^4}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{2ss}{1-s^4} = \frac{1}{1-ss} - \frac{1}{1+ss},$$

erit

$$\int \frac{2ss\partial s}{1-s^4} = \frac{1}{2} l \frac{1+s}{1-s} - \text{A tang. } s$$

sicque prodibit ista aequatio memorabilis

$$\int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} = \frac{1}{2} l \frac{1+s}{1-s} - \text{A tang. } s$$
$$+ \frac{1}{4} l \frac{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+(s-1)s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}+(s+1)s\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}-ss\sqrt{2}},$$

ubi notasse iuvabit esse

$$\text{A tang. } s = \frac{1}{2} \text{A tang. } \frac{2s}{1-ss}.$$

Verum si has partes coniungere vellemus, in formulas fere inextricabiles illaberemur. Olim autem, cum huiusmodi formulas tractassem, iam incidi in hanc integrationem[1])

$$\int \frac{ss\partial s}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

unde pro nostro casu fit

$$\int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} = \frac{1}{2} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss} - \frac{1}{2} \text{A tang. } \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

cuius expressionis consensus cum ante inventa propter radicalium complicationem minus facile perspici potest.

---

1) Vide Commentationem 539 voluminis praecedentis, imprimis p. 106. G. F.

ALIA RESOLUTIO FORMULAE PROPOSITAE

$$V = \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[4]{(2xx-1)}}$$

13. Utamur hic substitutione modo memorata

$$\sqrt[4]{(2xx-1)} = s,$$

ut sit

$$x = \sqrt{\frac{1+s^4}{2}},$$

atque iam vidimus formulam nostram hoc modo exprimi

$$V = \int \frac{2ss\partial s}{(\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)})\sqrt{(1+s^4)}} = \int \frac{2ss\partial s\sqrt{2}}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} - \int \frac{2ss\partial s}{1-s^4}.$$

Cum igitur istud integrale duabus constet partibus, id hoc modo repraesentemus

$$V = 2\sqrt{2}\cdot M - 2N,$$

ita ut sit

$$M = \int \frac{ss\partial s}{(1-s^4)\sqrt{(1+s^4)}} \quad \text{et} \quad N = \int \frac{ss\partial s}{1-s^4},$$

ubi posterior pars nullam habet difficultatem. Cum enim sit

$$\frac{ss}{1-s^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-ss} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+ss},$$

erit

$$N = \frac{1}{4} l \frac{1+s}{1-s} - \frac{1}{2} \text{A tang. } s.$$

14. Pro priore vero parte, quae exigit maiorem sagacitatem, ponamus

$$\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s} = t\sqrt{2}$$

eritque differentiando

$$-\frac{\partial s(1-s^4)}{ss\sqrt{(1+s^4)}} = \partial t\sqrt{2},$$

unde fit

$$\partial s = -\frac{ss\partial t\sqrt{2}\sqrt{(1+s^4)}}{1-s^4},$$

quo valore susbtituto erit

$$\partial M = -\frac{s^4 \partial t \sqrt{2}}{(1-s^4)^2}.$$

Cum iam sit $\sqrt{(1+s^4)} = st\sqrt{2}$, erit $1+s^4 = 2sstt$ et denuo quadrando $1+2s^4+s^8 = 4s^4t^4$; hinc auferatur utrinque $4s^4$ fietque

$$1-2s^4+s^8 = 4s^4(t^4-1) = (1-s^4)^2,$$

quo valore substituto erit

$$\partial M = \frac{-\partial t}{2\sqrt{2}\cdot(t^4-1)} = \frac{\partial t}{2(1-t^4)\sqrt{2}}$$

ideoque tota pars prior

$$2\sqrt{2}\cdot M = \int \frac{\partial t}{1-t^4}.$$

15. Cum nunc sit

$$\frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-tt} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+tt},$$

erit ista pars

$$2\sqrt{2}\cdot M = \frac{1}{4} l \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2} \text{A tang.}\, t$$

hincque pro t restituto valore $t = \frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}}$ erit

$$2\sqrt{2}\cdot M = \frac{1}{4} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}} + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}};$$

consequenter valor integralis quaesitus erit

$$V = \frac{1}{4} l \frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}} + \frac{1}{2} \text{A tang.} \frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}} - \frac{1}{2} l \frac{1+s}{1-s} + \text{A tang.}\, s.$$

16. Est vero

$$\sqrt{(s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)})} = \sqrt{\frac{s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}}{2}} + \sqrt{\frac{s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}}{2}},$$

eodem modo

$$\sqrt{(s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)})}=\sqrt{\frac{s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1}}{2}}-\sqrt{\frac{s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1}}{2}}$$

hincque ergo prior logarithmus

$$\frac{1}{4}l\frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}-\sqrt{(1+s^4)}}$$

transmutatur in hanc formam

$$\frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1})}+\sqrt{(s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1})}}{\sqrt{(s\sqrt{2}+(1-ss)\sqrt{-1})}-\sqrt{(s\sqrt{2}-(1-ss)\sqrt{-1})}},$$

quae forma porro reducitur ad hanc

$$\frac{1}{2}l\frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{(1-ss)\sqrt{-1}},$$

ubi imaginarium in denominatore non turbat, quoniam addita constante $l\sqrt{-1}$ tollitur, ita ut habeamus istam partem logarithmicam

$$=\frac{1}{2}l\frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{1-ss}-\frac{1}{2}l\frac{1+s}{1-s}=\frac{1}{2}l\frac{s\sqrt{2}+\sqrt{(1+s^4)}}{(1+s)^2}.$$

17. Pari modo etiam ambos arcus circulares in unum contrahere licebit, hoc modo. Ponatur

$$\text{A tang.}\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}}=\text{A tang.}\frac{2u}{1-uu}$$

eritque

$$\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}}=\text{A tang.}\,u.$$

Erit igitur

$$\frac{\sqrt{(1+s^4)}}{s\sqrt{2}}=\frac{2u}{1-uu},$$

unde colligitur

$$u=\frac{1-s\sqrt{2}+ss}{\sqrt{(1+s^4)}},$$

sicque ambo arcus erunt

$$\text{A tang.}\frac{1-s\sqrt{2+ss}}{\sqrt{(1+s^4)}}+\text{A tang. }s=\text{A tang.}\frac{1-s\sqrt{2+ss+s\sqrt{(1+s^4)}}}{\sqrt{(1+s^4)}-s+ss\sqrt{2-s^3}}.$$

18. Etsi autem talibus reductionibus calculus irrationalium non mediocriter illustratur, tamen formulae non evadunt simpliciores; ideoque iis, quas immediate invenimus, utamur, ubi, quia posuimus $\sqrt[4]{(2xx-1)}=s$, commode litteram s loco huius formulae in calculo retinere poterimus. Tantum igitur loco $\sqrt{(1+s^4)}$ eius valorem, qui est $x\sqrt{2}$, scribamus, unde fiet integrale quaesitum

$$V=\frac{1}{4}l\frac{s+x}{s-x}-\frac{1}{2}l\frac{1+s}{1-s}+\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{x}{s}+\text{A tang. }s.$$

19. Quoniam vero quantitatem constantem quamcunque adiicere licet, loco $l(s-x)$ scribamus $l(x-s)$, et quia $\text{A tang.}\frac{x}{s}=90^0-\text{A tang.}\frac{s}{x}$, habebimus

$$V=\frac{1}{4}l\frac{x+s}{x-s}-\frac{1}{2}l\frac{1+s}{1-s}-\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{x}+\text{A tang. }s.$$

Quodsi vero in forma, quam prior solutio suppeditaverat, etiam loco $\sqrt[4]{(2xx-1)}$ scribamus s, ea erit

$$V=\frac{1}{4}l\frac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s}+\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{1+x-ss},$$

quae forma maxime a praecedente discrepare videtur, quia nulli adeo communes factores deprehenduntur. Interim tamen egregie inter se conveniunt, ad quod ostendendum singularis dexteritas in calculo irrationalium requiritur.

DEMONSTRATIO CONSENSUS HARUM DUARUM FORMULARUM

$$V=\frac{1}{4}l\frac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s}+\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{1+x-ss}$$

et

$$V=\frac{1}{4}l\frac{x+s}{x-s}-\frac{1}{2}l\frac{1+s}{1-s}-\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{x}+\text{A tang. }s.$$

20. Quoniam logarithmi et arcus circulares nullo modo inter se comparari patiuntur, necesse est, ut utrinque tam logarithmi quam arcus inter

se seorsim aequentur. Incipiamus igitur a logarithmis et ostendendum est fore

$$l\frac{1+x+ss-s}{1+x+ss+s} = l\frac{x+s}{x-s} - 2l\frac{1+s}{1-s}$$

sive

$$l\frac{(x-s)(1+x+ss-s)}{(x+s)(1+x+ss+s)} = +2l\frac{1-s}{1+s}.$$

21. Evolvamus nunc tam numeratorem quam denominatorem prioris fractionis ac numerator abibit in hanc formam

$$-s(1+ss) - 2sx + ss + x(1+ss) + xx,$$

quae porro ob $xx = \frac{1+s^4}{2}$ abit in hanc

$$-s(1+ss) - 2sx + ss + x(1+ss) + \frac{1}{2}(1+s^4),$$

ubi termini solam s continentes sunt

$$-s(1+ss) + ss + \frac{1}{2}(1+s^4) = -s(1+ss) + \frac{1}{2}(1+ss)^2$$
$$= +\frac{1}{2}(1+ss)(1-s)^2;$$

termini vero litteram x continentes sunt

$$-2sx + x(1+ss) = x(1-s)^2$$

sicque numerator ad hanc formam est reductus

$$\frac{1}{2}(1-s)^2(2x+1+ss).$$

22. Simili modo denominatorem tractemus eritque facta evolutione

$$s(1+ss) + 2sx + ss + x(1+ss) + xx,$$

ubi termini solam s continentes sunt

$$s(+ss) + ss + \frac{1}{2}(1+s^4) = s(1+ss) + \frac{1}{2}(1+ss)^2 = \frac{1}{2}(1+ss)(1+s)^2;$$

termini vero litteram x continentes erunt

$$2sx + x(1 + ss) = x(1 + s)^2$$

ideoque denominator hanc induit formam

$$\frac{1}{2}(1 + s)^2(2x + 1 + ss).$$

Cum igitur numerator et denominator habeat communem factorem

$$\frac{1}{2}(2x + 1 + ss),$$

pars sinistra nostrae aequationis fit

$$l\frac{(1-s)^2}{(1+s)^2} = 2l\frac{1-s}{1+s},$$

uti postulabatur.

23. Superest igitur, ut etiam aequalitatem inter arcus circulares demonstremus, hoc est, ut sit

$$\frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{1+x-ss} = \text{A tang. } s - \frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{s}{x}.$$

Transferamus hunc in finem A tang. $\frac{s}{x}$ in alteram partem; et cum sit

$$\text{A tang. } a + \text{A tang. } b = \text{A tang.}\frac{a+b}{1-ab},$$

haec aequatio proveniet

$$\text{A tang.}\frac{2sx+s-s^3}{x+xx-ssx-ss} = 2\text{ A tang. } s.$$

At vero, si loco xx scribatur valor $\frac{1}{2}(1 + s^4)$, denominator evadet

$$(1 - ss)\left(\frac{1}{2}(1 - ss) + x\right),$$

numerator vero

$$s(2x + 1 - ss) = 2s\left(\frac{1}{2}(1 - ss) + x\right)$$

sicque adest factor communis $\frac{1}{2}(1-ss)+x$, quo sublato fiet

$$\text{A tang.}\frac{2s}{1-ss} = 2\,\text{A tang.}\,s.$$

Sicque perfecta aequalitas rigide est demonstrata, quia notum est revera esse

$$2\,\text{A tang.}\,s = \text{A tang.}\frac{2s}{1-ss}.$$

24. Manifestum est in universa hac tractatione plura occurrere artificia analytica minime obvia et communia; quam ob causam confido istam speculationem Geometris non fore ingratam. Imprimis autem mihi maxime notatu dignum videtur, quod simili modo, quo posteriorem resolutionem adornavimus, etiam ista formula differentialis multo latius patens

$$\partial V = \frac{\partial x(1-x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n-1)}}$$

ad integrabilitatem per logarithmos et arcus circulares reduci potest, ad quod ostendendum sequens Problema adiungamus.

PROBLEMA

Hanc formulam differentialem

$$\partial V = \frac{\partial x(1-x^{n-1})}{(1-x^n)\sqrt[2n]{(2x^n-1)}}$$

ad rationalitatem perducere.

SOLUTIO

25. Ponatur brevitatis gratia

$$\sqrt[2n]{(2x^n-1)} = s,$$

ut sit

$$2x^n = 1+s^{2n}$$

et

$$1-x^n = x^n - s^{2n} = \frac{1-s^{2n}}{2},$$

unde forma proposita hoc modo repraesentari potest

$$\partial V = \frac{\partial x (1 - x^{n-1})}{s(x^n - s^{2n})},$$

quae in has partes discerpatur

$$\frac{\partial x}{s(x^n - s^{2n})} = \partial M \quad \text{et} \quad \frac{x^{n-1}\partial x}{s(x^n - s^{2n})} = \partial N,$$

ita ut sit

$$\partial V = \partial M - \partial N.$$

Cum autem sit $2x^n = 1 + s^{2n}$, erit differentiando $x^{n-1}\partial x = s^{2n-1}\partial s$ ideoque

$$\partial x = \frac{s^{2n-1}\partial s}{x^{n-1}},$$

quibus substitutis erit

$$\partial M = \frac{s^{2n-2}\partial s}{x^{n-1}(x^n - s^{2n})} \quad \text{et} \quad \partial N = \frac{s^{2n-2}\partial s}{x^n - s^{2n}} = \frac{2s^{2n-2}\partial s}{1 - s^{2n}},$$

quae posterior forma iam est rationalis, ita ut sola ∂M nobis tractanda relinquatur.

26. Ponatur igitur $x = st$ eritque differentiando $\partial x = s\partial t + t\partial s$. Cum autem supra invenerimus

$$\partial x = \frac{s^{2n-1}\partial s}{x^{n-1}},$$

erit

$$x^{n-1}(s\partial t + t\partial s) = s^{2n-1}\partial s = s^{n-1}t^{n-1}(s\partial t + t\partial s),$$

unde fit

$$\partial s = \frac{t^{n-1}s\partial t}{s^n - t^n};$$

quo valore substituto fit

$$\partial M = \frac{s^{2n-1}t^{n-1}\partial t}{x^{n-1}(x^n - s^{2n})(s^n - t^n)},$$

quae forma porro reducetur ad hanc

$$\partial M = -\frac{\partial t}{(t^n - s^n)^2}.$$

Cum autem sit $2x^n = 2s^n t^n = 1 + s^{2n}$, erit

$$(t^n - s^n)^2 = t^{2n} - 1,$$

unde fit

$$\partial M = + \frac{\partial t}{1 - t^{2n}}$$

ideoque

$$\partial V = \frac{\partial t}{1 - t^{2n}} - \frac{2 s^{2n-2} \partial s}{1 - s^{2n}}.$$

27. Hoc igitur modo formulam propositam ad duas alias ab irrationalitate prorsus liberatas perduximus, quarum integratio nulla amplius laborat difficultate et manifesto per logarithmos et arcus circulares absolvi potest. Quo autem haec integrationis operatio, si instituere lubet, facilius et uno quasi ictu perfici queat, priorem partem $\frac{\partial t}{1 - t^{2n}}$ ad posteriorem formam reducemus, quod fit ope huius substitutionis

$$t = \frac{1}{u};$$

fit enim hinc $\partial t = - \frac{\partial u}{uu}$ et $1 - t^{2n} = \frac{u^{2n} - 1}{u^{2n}}$ ideoque

$$\frac{\partial t}{1 - t^{2n}} = + \frac{u^{2n-2} \partial u}{1 - u^{2n}},$$

quo notato erit

$$V = \int \frac{u^{2n-2} \partial u}{1 - u^{2n}} - 2 \int \frac{s^{2n-2} \partial s}{1 - s^{2n}}.$$

28. Simili modo etiam tractari possunt sequentes formulae integrales[1]) multo latius patentes:

I. $\int \frac{\partial x}{(a + b x^n) \sqrt[2n]{(a + 2 b x^n)}}$,

II. $\int \frac{\partial x}{(a + b x^n) \sqrt[3n]{(aa + 3 a b x^n + 3 b b x^{2n})}}$,

III. $\int \frac{\partial x}{(a + b x^n) \sqrt[4n]{(a^3 + 4 a a b x^n + 6 a b b x^{2n} + 4 b^3 x^{3n})}}$,

IV. $\int \frac{\partial x}{(a + b x^n) \sqrt[5n]{(a^4 + 5 a^3 b x^n + 10 a a b b x^{2n} + 10 a b^3 x^{3n} + 5 b^4 x^{4n})}}$;

1) Confer Commentationem 669 huius voluminis, imprimis p. 106. A. K.

quae omnes ponendo quantitatem irrationalem denominatoris $= s$, tum vero $x = st$, ad rationalitatem perducuntur ideoque integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt.

29. Quo hoc exemplo illustretur, sumatur

$$V = \int \frac{\partial x}{(a+bxx)\sqrt[8]{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)}},$$

et cum esse debeat

$$\sqrt[8]{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)} = s$$

et $x = st$, erit

$$t = \frac{x}{\sqrt[8]{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)}}$$

et differentiando

$$\partial t = \frac{\partial x(a^3+3aabxx+3abbx^4+b^3x^6)}{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)^{\frac{9}{8}}}$$

sive

$$\partial t = \frac{\partial x(a+bxx)^3}{(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)^{\frac{9}{8}}}$$

ideoque

$$\partial x = \frac{\partial t(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)^{\frac{9}{8}}}{(a+bxx)^3},$$

quo valore substituto fit

$$\partial V = \frac{\partial t(a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6)}{(a+bxx)^4} = \frac{s^8\partial t}{(a+bxx)^4}$$

sive

$$\partial V = \frac{x^8\partial t}{t^8(a+bxx)^4}.$$

Est vero

$$s^8 = \frac{x^8}{t^8} = a^3+4aabxx+6abbx^4+4b^3x^6 = \frac{(a+bxx)^4-b^4x^8}{a},$$

unde fit

$$(a+bxx)^4 = \frac{ax^8}{t^8} + b^4x^8,$$

quo substituto prodit denique

$$\partial V = \frac{\partial t}{a + b^4 t^8},$$

quae igitur forma iam est rationalis.

30. Quin etiam haec formula adhuc generalior ope similium substitutionum ad rationalitatem perduci ideoque integrari potest

$$V = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^n)\left((a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}\right)^{\frac{m}{\lambda n}}},$$

quod ita ostenditur. Ponatur

$$(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n} = s^{\lambda n},$$

ut habeatur

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^m}{(a+bx^n)s^m}.$$

Ponatur porro

$$\frac{x}{s} = t$$

eritque

$$\partial V = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{t^m}{a+bx^n}.$$

Porro cum sit $\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial s}{s}$, ob

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{(bx^{n-1}(a+bx^n)^{\lambda-1} - b^\lambda x^{\lambda n-1})\partial x}{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}$$

erit

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial x}{x}\left(1 - \frac{bx^n(a+bx^n)^{\lambda-1} - b^\lambda x^{\lambda n}}{(a+bx^n)^\lambda - b^\lambda x^{\lambda n}}\right) = \frac{a\partial x}{x} \cdot \frac{(a+bx^n)^{\lambda-1}}{s^{\lambda n}}$$

sive

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{a\partial x}{x}(a+bx^n)^{\lambda-1} \cdot \frac{t^{\lambda n}}{x^{\lambda n}},$$

unde fit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{x^{\lambda n}}{at^{\lambda n}(a+bx^n)^{\lambda-1}},$$

quo valore substituto prodit

$$\partial V = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{x^{\lambda n} t^m}{a t^{\lambda n} (a + b x^n)^\lambda}.$$

Est vero

$$(a + b x^n)^\lambda = s^{\lambda n} + b^\lambda x^{\lambda n} = \frac{x^{\lambda n}(1 + b^\lambda t^{\lambda n})}{t^{\lambda n}},$$

unde fit

$$\partial V = \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{t^m}{a(1 + b^\lambda t^{\lambda n})} = \frac{t^{m-1} \partial t}{a(1 + b^\lambda t^{\lambda n})}.$$

Miro igitur modo etiam hanc posteriorem formulam generalissimam ad rationalitatem perduximus, quae reductio ideo notatu maxime digna mihi visa est, quod tales substitutiones singularem dexteritatem et plura artificia calculi requirunt.

INTEGRATIO FORMULAE DIFFERENTIALIS MAXIME IRRATIONALIS QUAM TAMEN PER LOGARITHMOS ET ARCUS CIRCULARES EXPEDIRE LICET

Conventui exhib. die 26. Mart. 1777

Commentatio 689 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 118—126
Summarium ibidem p. 173—174

SUMMARIUM

La formule irrationnelle qui fait le sujet de ce Mémoire est

$$\frac{\partial z\,(1-zz)^2}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}}$$

et la méthode dont l'auteur se sert pour la rendre rationnelle et pour trouver son intégrale convient avec la premiere des deux méthodes du Mémoire précédent. Car les mêmes substitutions

$$\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v, \quad \frac{1+z}{v} = p, \quad \frac{1-z}{v} = q$$

transforment la formule proposée en

$$\frac{2pp\,\partial p}{1-p^4} - \frac{2qq\,\partial q}{1-q^4}.$$

Ayant trouvé l'intégrale de la formule proposée, M. EULER cherche aussi celle de

$$\frac{\partial z\,(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}},$$

qu'on obtient en écrivant $z\sqrt{-1}$ à la place de z, de sorte que toute l'intégrale est représentée sous une forme imaginaire qu'il est facile de ramener à la réalité. Cette seconde intégration est d'autant plus remarquable qu'il paroît impossible d'y parvenir par une voye directe.

PROBLEMA 1

Proposita hac formula differentiali

$$\partial V = \frac{\partial z(1-zz)^2}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares expressum invenire.

SOLUTIO

1. Ponatur brevitatis gratia

$$\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v,$$

ut formula proposita sit

$$\partial V = \frac{\partial z(1-zz)^2}{(1+zz)v^3};$$

et nunc loco z binae variabiles p et q in calculum introducantur ponendo

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

eritque

$$p^4 + q^4 = 2$$

ideoque

$$p^3\partial p + q^3\partial q = 0.$$

Porro vero erit

$$p+q = \frac{2}{v} \quad \text{et} \quad p-q = \frac{2z}{v}$$

hincque fiet

$$\frac{p-q}{p+q} = z$$

existente $v = \frac{2}{p+q}$.

2. Cum igitur sit $z = \frac{p-q}{p+q}$, erit

$$\partial z = \frac{2(q\partial p - p\partial q)}{(p+q)^2},$$

ubi ob $p+q = \frac{2}{v}$ erit

$$\partial z = \frac{1}{2} vv(q\partial p - p\partial q).$$

Deinde vero, quia est $\partial p = -\frac{q^3 \partial q}{p^3}$, erit

$$q\partial p - p\partial q = -\frac{2\partial q}{p^3}.$$

Simili modo posito $\partial q = -\frac{p^3 \partial p}{q^3}$ erit

$$q\partial p - p\partial q = \frac{2\partial p}{q^3},$$

propterea quod $p^4 + q^4 = 2$; sicque elementum ∂z duplici modo, scilicet per ∂p et per ∂q, habebimus expressum eritque primo $\partial z = -\frac{vv\partial q}{p^3}$, tum vero $\partial z = +\frac{vv\partial p}{q^3}$; quam duplicem expressionem per

$$\partial z = vv\partial\omega$$

repraesentemus existente vel $\partial\omega = -\frac{\partial q}{p^3}$ vel $\partial\omega = +\frac{\partial p}{q^3}$.

3. Deinde vero ob $1+z = pv$ et $1-z = qv$ erit $1-zz = pqvv$ ideoque

$$(1-zz)^2 = p^2 q^2 v^4;$$

sicque numerator nostrae formulae erit

$$\partial z(1-zz)^2 = v^6 ppqq\partial\omega.$$

Pro denominatore autem habebimus $1+zz = \frac{1}{2}(pp+qq)vv$, ita ut iam totus denominator sit $\frac{1}{2}v^5(pp+qq)$, quocirca ipsa formula nostra proposita ita repraesentabitur

$$\partial V = \frac{2vppqq\partial\omega}{pp+qq} = \frac{4ppqq\partial\omega}{(p+q)(pp+qq)}.$$

Multiplicemus autem porro supra et infra per $p - q$, ut prodeat ista forma

$$\partial V = \frac{4(p-q)ppqq\partial\omega}{p^4 - q^4}.$$

4. Quoniam nunc numerator ex duabus partibus constat, utramque seorsim evolvamus. Pars igitur prior, quae est $\frac{4p^3qq\partial\omega}{p^4-q^4}$, si loco $\partial\omega$ valorem priorem supra datum scribamus, scilicet $\partial\omega = -\frac{\partial q}{p^3}$, erit $= -\frac{4qq\partial q}{p^4-q^4}$; quamobrem si hic in denominatore pro p^4 scribamus eius valorem $2 - q^4$, ista pars erit per solam variabilem q ita expressa

$$-\frac{2qq\partial q}{1-q^4}.$$

Simili modo altera nostrae formulae pars $-\frac{4ppq^3\partial\omega}{p^4-q^4}$, si loco $\partial\omega$ scribamus valorem $+\frac{\partial p}{q^3}$, induet hanc formam $-\frac{4pp\partial p}{p^4-q^4}$. Hic igitur loco q^4 scribatur $2 - p^4$ ac pars ista iam per solam variabilem p exprimetur fietque

$$+\frac{2pp\partial p}{1-p^4};$$

consequenter ipsa formula proposita reducta est ad has partes

$$\partial V = \frac{2pp\partial p}{1-p^4} - \frac{2qq\partial q}{1-q^4},$$

quae non solum sunt rationales, sed etiam binas variabiles p et q penitus separatas involvunt.

5. Ad integrale igitur inveniendum notetur esse

$$\frac{2pp}{1-p^4} = \frac{1}{1-pp} - \frac{1}{1+pp},$$

unde erit prioris partis integrale

$$\int\frac{2pp\partial p}{1-p^4} = \int\frac{\partial p}{1-pp} - \int\frac{\partial p}{1+pp} = \frac{1}{2}l\frac{1+p}{1-p} - \text{A tang.}\, p,$$

eodemque modo altera pars erit

$$\int \frac{2qq\partial q}{1-q^4} = \frac{1}{2} l \frac{1+q}{1-q} - \text{A tang. } q;$$

quamobrem totum integrale quaesitum erit

$$V = \frac{1}{2} l \frac{1+p}{1-p} - \frac{1}{2} l \frac{1+q}{1-q} + \text{A tang. } q - \text{A tang. } p.$$

6. Restituamus nunc loco p et q valores assumtos, scilicet

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

eritque

$$V = \frac{1}{2} l \frac{v+1+z}{v-1-z} - \frac{1}{2} l \frac{v+1-z}{v-1+z} + \text{A tang. } \frac{1-z}{v} - \text{A tang. } \frac{1+z}{v};$$

ubi, cum sit

$$\text{A tang. } a - \text{A tang. } b = \text{A tang. } \frac{a-b}{1+ab},$$

erit

$$\text{A tang. } \frac{1-z}{v} - \text{A tang. } \frac{1+z}{v} = -\text{A tang. } \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

Deinde etiam logarithmi invicem combinari possunt et resultabit

$$V = \frac{1}{2} l \frac{(v+1+z)(v-1+z)}{(v-1-z)(v+1-z)} - \text{A tang. } \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

Quin etiam utile erit logarithmos hoc modo iterum separare, ut sit

$$V = \frac{1}{2} l \frac{v+1+z}{v+1-z} + \frac{1}{2} l \frac{v-1+z}{v-1-z} - \text{A tang. } \frac{2vz}{vv+1-zz}.$$

7. Hactenus constantem per integrationem addendam negleximus; eam igitur nunc ita definiamus, ut posito $z = 0$ ipsum integrale V evanescat. Hunc in finem consideremus z tanquam minimum, et quia

$$v = (1 + 6zz + z^4)^{\frac{1}{4}},$$

erit

$$v = 1 + \frac{3}{2} zz;$$

evidens autem est huius particulae minimae $\frac{3}{2}zz$ rationem tantum in posteriore logarithmo esse habendam, quoniam in eo occurrit $v-1$. Hoc igitur valore substituto erit nunc nostrum integrale

$$V = \frac{1}{2} l \frac{2+z}{2-z} + \frac{1}{2} l \frac{\frac{3}{2}zz+z}{\frac{3}{2}zz-z} - \text{A tang.} \frac{2z}{2-zz}.$$

8. Hic iam quia z est quantitas minima, erit

$$\frac{1}{2} l \frac{2+z}{2-z} = \frac{z}{2};$$

alter vero logarithmus erit $\frac{1}{2} l \frac{3z+2}{3z-2}$, ubi loco constantis adiici debet $l-1$, ut haec altera pars fiat

$$\frac{1}{2} l \frac{2+3z}{2-3z},$$

cuius valor erit $\frac{3z}{2}$, ita ut ambo logarithmi iunctim praebeant $2z$. Deinde vero ex arcu circulari fit

$$\text{A tang.} \frac{2z}{2-zz} = \text{A tang.} z = z,$$

ita ut tota formula praebeat $V = 2z - z = z$, qui valor cum formula proposita egregie conspirat; posito enim z infinite parvo habetur $\partial V = \partial z$ ideoque $V = z$.

9. Quoniam igitur constans addenda reperta est $l-1$, in superiori expressione loco $l(v-1-z)$ scribamus $l(1+z-v)$, ut iam totum integrale rite determinatum sit

$$V = \frac{1}{2} l \frac{v+1+z}{v+1-z} + \frac{1}{2} l \frac{v+z-1}{1+z-v} - \text{A tang.} \frac{2vz}{1+vv-zz},$$

qui valor evanescit sumto $z = 0$.

PROBLEMA 2

Proposita hac formula differentiali

$$\partial V = \frac{\partial z(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}}$$

eius integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.

SOLUTIO

10. Solutio huius problematis vix aliter erui posse videtur, nisi ex praecedente solutione derivetur. Consideremus igitur formulam prioris problematis hac ratione repraesentatam

$$\int \frac{\partial y(1-yy)^2}{(1+yy)\sqrt[4]{(1+6yy+y^4)^3}} = U;$$

et facta debita immutatione positoque $\sqrt[4]{(1+6yy+y^4)} = u$ integrale ita erit expressum

$$U = \frac{1}{2} l \frac{u+1+y}{u+1-y} + \frac{1}{2} l \frac{u-1+y}{u-1-y} - \text{A tang.} \frac{2uy}{uu+1-yy}.$$

11. In hac forma ponamus $y = z\sqrt{-1}$ et statuamus formulam radicalem hinc natam

$$\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)} = v,$$

quo facto erit

$$U = \int \frac{\partial z\sqrt{-1}\cdot(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}},$$

unde patet esse $U = V\sqrt{-1}$, ita ut invento valore U eruatur valor quaesitus

$$V = \frac{U}{\sqrt{-1}} = -U\sqrt{-1}.$$

Posito autem $y = z\sqrt{-1}$ et loco u scripto v integrale U accipiet hanc formam

$$U = \frac{1}{2} l \frac{v+1+z\sqrt{-1}}{v+1-z\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} l \frac{v-1+z\sqrt{-1}}{v-1-z\sqrt{-1}} - \text{A tang.} \frac{2vz\sqrt{-1}}{vv+1+zz}.$$

Totum igitur negotium huc redit, ut isti logarithmi imaginarii cum arcu imaginario ad realitatem reducantur, id quod sequenti modo commodissime perficietur.

12. In subsidium vocetur istud Lemma satis notum[1])

$$l(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(aa+bb) + \sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

ubi ergo, si loco b scribamus $-b$, erit

$$l(a-b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(aa+bb) - \sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

quae forma a praecedente subtracta nobis dat

$$l \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{b}{a},$$

atque si hic faciamus $b = c\sqrt{-1}$, erit

$$l \frac{a-c}{a+c} = 2\sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{c\sqrt{-1}}{a}$$

hincque vicissim

$$\text{A tang.} \frac{c\sqrt{-1}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{a-c}{a+c} = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot l \frac{a+c}{a-c}.$$

13. Iam pro priore logarithmo imaginario erit $a = v+1$ et $b = z$, unde habebimus

$$l \frac{v+1+z\sqrt{-1}}{v+1-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \text{A tang.} \frac{z}{v+1}.$$

---

1) Vide notam 1 p. 132. G. F.

Pro altero vero logarithmo erit $a = v - 1$ et $b = z$ hincque

$$l\frac{v-1+z\sqrt{-1}}{v-1-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot \text{A tang.}\frac{z}{v-1}.$$

Denique pro arcu erit $c = 2vz$ et $a = vv + 1 + zz$, unde colligitur

$$\text{A tang.}\frac{2vz\sqrt{-1}}{vv+1+zz} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot l\frac{(v+z)^2+1}{(v-z)^2+1},$$

quibus valoribus substitutis erit

$$U = \sqrt{-1}\cdot \text{A tang.}\frac{z}{v+1} + \sqrt{-1}\cdot \text{A tang.}\frac{z}{v-1} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot l\frac{1+(v+z)^2}{1+(v-z)^2};$$

qui valor ductus in $-\sqrt{-1}$ praebet ipsum valorem quaesitum

$$V = -\frac{1}{2}l\frac{1+(v+z)^2}{1+(v-z)^2} + \text{A tang.}\frac{z}{v+1} + \text{A tang.}\frac{z}{v-1},$$

quae expressio arcubus in unum contractis transmutatur in hanc

$$V = \frac{1}{2}l\frac{1+(v-z)^2}{1+(v+z)^2} - \text{A tang.}\frac{2vz}{1+zz-vv}.$$

14. Haec solutio eo magis est notatu digna, quod per imaginaria est traducta atque adeo nulla via patere videtur eam directe inveniendi. Fortasse autem, si forma integralis inventa probe perpendatur, inde methodus excogitari poterit, cuius ope sine subsidio imaginariorum ista solutio directe elici queat, hocque argumentum utique dignum videtur, in quo Geometrae sagacitatem suam exerceant.

15. At vero, quoniam nulla via patet integrale posterioris formulae directe inveniendi, operae pretium erit rursus ex aequatione integrali differentialem propositam elicere visuri, num forsan haec operatio nobis inservire possit aliam resolutionem detegendi quam per imaginaria progrediendo; quem in finem sequens problema coronidis loco adiungamus.

PROBLEMA

Invenire differentiale huius expressionis

$$V = \frac{1}{2} l \frac{1. + zz + vv - 2vz}{1 + zz + vv + 2vz} - \text{A tang.} \frac{2vz}{1 + zz - vv},$$

existente $v = \sqrt[4]{(1 - 6zz + z^4)}$.

SOLUTIO

16. Ponatur

$$\frac{2vz}{1 + zz + vv} = p \quad \text{et} \quad \frac{2vz}{1 + zz - vv} = q$$

eritque

$$V = \frac{1}{2} l \frac{1 - p}{1 + p} - \text{A tang.} q,$$

unde fit differentiando

$$\partial V = - \frac{\partial p}{1 - pp} - \frac{\partial q}{1 + qq}.$$

Est vero

$$\partial p = \frac{2v\partial z(1 - zz + vv) + 2z\partial v(1 + zz - vv)}{(1 + zz + vv)^2}$$

et

$$\partial q = \frac{2v\partial z(1 - zz - vv) + 2z\partial v(1 + zz + vv)}{(1 + zz - vv)^2}.$$

Deinde

$$1 - pp = \frac{1 + 2zz + 2vv + z^4 - 2vvzz + v^4}{(1 + zz + vv)^2}$$

sive ob $v^4 = 1 - 6zz + z^4$ erit

$$1 - pp = \frac{2(1 - zz)(1 - zz + vv)}{(1 + zz + vv)^2}$$

eodemque modo

$$1 + qq = \frac{2(1 - zz)(1 - zz - vv)}{(1 + zz - vv)^2},$$

quibus substitutis fit

$$\partial V = - \frac{v\partial z(1 - zz + vv) + z\partial v(1 + zz - vv)}{(1 - zz)(1 - zz + vv)} - \frac{v\partial z(1 - zz - vv) + z\partial v(1 + zz + vv)}{(1 - zz)(1 - zz - vv)}.$$

17. Reducatur haec expressio ad eundem denominatorem

$$(1 - zz)((1 - zz)^2 - v^4) = 4zz(1 - zz)$$

fietque

$$\partial V = - \frac{2v\partial z((1-zz)^2 - v^4) + z\partial v((1-vv)^2 + (1+vv)^2 - 2z^4)}{4zz(1-zz)}.$$

Haec forma porro reducitur ad hanc

$$\partial V = - \frac{2vz\partial z + \partial v(1 - 3zz)}{z(1-zz)},$$

quae si supra et infra per v^3 multiplicetur, ob

$$v^4 = 1 - 6zz + z^4$$

et

$$v^3\partial v = -3z\partial z + z^3\partial z = z\partial z(zz - 3)$$

abibit in sequentem formam

$$\partial V = - \frac{2\partial z(1 - 6zz + z^4) + \partial z(zz-3)(1-3zz)}{(1-zz)v^3},$$

qua evoluta prodit denique

$$\partial V = \frac{\partial z(1+zz)^2}{(1-zz)\sqrt[4]{(1-6zz+z^4)^3}}.$$

Haec igitur formula cum proposita formula differentiali superioris problematis prorsus convenit, ita ut certi simus huius formulae integrale revera esse

$$V = \frac{1}{2} l \frac{1 + (v-z)^2}{1 + (v+z)^2} - \text{A tang.} \frac{2vz}{1 + zz - vv},$$

etiamsi non pateat, quomodo hoc integrale methodo directa elici queat.

EVOLUTIO FORMULAE INTEGRALIS

$$\int \frac{\partial z(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$$

PER LOGARITHMOS ET ARCUS CIRCULARES

Conventui exhib. die 26. Mart. 1777

Commentatio 690 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1791), 1795, p. 127—131
Summarium ibidem p. 174—175

SUMMARIUM

Les transformations que M. EULER fait subir à cette formule pour la rendre rationnelle différent de celles dont il a fait usage dans les deux Mémoires précédens. Il met

$$z = \frac{1+x}{1-x},$$

et la formule proposée se change en

$$2^{\frac{5}{4}} \frac{\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}} + 2^{\frac{5}{4}} \frac{x^3 \partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}}.$$

Et en mettant dans la première

$$\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}} = t,$$

et dans l'autre

$$1 + x^4 = u^4,$$

on aura à la place de la formule proposée ces deux à intégrer

$$2^{\frac{5}{4}}\frac{\partial t}{1-2t^4}+2^{\frac{5}{4}}\frac{uu\,\partial u}{2-u^4},$$

qui étant rationnelles, la principale difficulté qui s'opposoit à l'intégration est levée.

1. Videtur hoc nullo alio modo fieri posse, nisi statuatur $z=\frac{1+x}{1-x}$. Hinc autem fiet

$$\partial z=\frac{2\,\partial x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \frac{3+zz}{1+zz}=\frac{2(1-x+xx)}{1+xx}=\frac{2(1+x^3)}{(1+x)(1+xx)},$$

tum vero

$$1+6zz+z^4=\frac{8(1+x^4)}{(1-x)^4}$$

ideoque

$$\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}=2^{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt[4]{(1+x^4)}}{(1-x)},$$

quibus substitutis formula proposita induet hanc formam

$$2^{\frac{5}{4}}\int\frac{\partial x(1+x^3)}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}}.$$

2. Discerpamus istam formam in has duas partes $2^{\frac{5}{4}}(P+Q)$, ita ut sit

$$P=\int\frac{\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

et

$$Q=\int\frac{x^3\partial x}{(1-x^4)\sqrt[4]{(1+x^4)}},$$

quas seorsim evolvamus. Pro priore quidem parte statuamus

$$\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}=t,$$

ut sit

$$P=\int\frac{t\partial x}{x(1-x^4)};$$

tum autem fiet

$$\frac{x^4}{1+x^4} = t^4 \quad \text{hincque} \quad x^4 = \frac{t^4}{1-t^4},$$

ergo

$$1 - x^4 = \frac{1-2t^4}{1-t^4},$$

deinde ob $4lx = 4lt - l(1-t^4)$ erit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1-t^4)}$$

hocque ergo modo prodibit

$$P = \int \frac{\partial t}{1-2t^4}.$$

At pro altera parte Q ponatur

$$1 + x^4 = u^4,$$

ut fiat

$$\sqrt[4]{(1+x^4)} = u \quad \text{et} \quad x^3 \partial x = u^3 \partial u,$$

unde deducitur

$$Q = \int \frac{uu\partial u}{2-u^4};$$

sicque totum negotium ad formulas rationales est reductum.

3. Quo nunc has formulas commodius tractare queamus, pro priore ponamus $t = \frac{p}{\sqrt[4]{2}}$ hocque modo erit

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int \frac{\partial p}{1-p^4}.$$

Nunc vero est

$$\frac{1}{1-p^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-pp} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+pp},$$

unde fit

$$P = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \int \frac{\partial p}{1-pp} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \int \frac{\partial p}{1+pp}$$

ideoque integrando

$$P = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} l \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \text{A tang.}\, p;$$

sicque erit pars prior

$$2^{\frac{5}{4}} P = \frac{1}{2} l \frac{1+p}{1-p} + \text{A tang. } p,$$

ubi notetur esse $p = t\sqrt[4]{2}$, porro vero

$$t = \frac{x}{\sqrt[4]{(1+x^4)}};$$

et quoniam posuimus $z = \frac{1+x}{1-x}$, erit

$$x = \frac{z-1}{z+1},$$

sicque tota haec pars prior integralis quaesiti per z exprimi poterit.

4. Pro altera parte Q ponatur

$$u = q\sqrt[4]{2}$$

fietque

$$Q = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int \frac{qq\partial q}{1-q^4}.$$

Nunc vero est

$$\frac{qq}{1-q^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-qq} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+qq},$$

unde fiet

$$\int \frac{qq\partial q}{1-q^4} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial q}{1-qq} - \frac{1}{2} \int \frac{\partial q}{1+qq} = \frac{1}{4} l \frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{2} \text{A tang. } q.$$

Hoc ergo modo prodit

$$Q = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} l \frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \text{A tang. } q;$$

consequenter ipsa altera pars integralis erit

$$2^{\frac{5}{4}} Q = \frac{1}{2} l \frac{1+q}{1-q} - \text{A tang. } q,$$

ubi est $q = \frac{u}{\sqrt[4]{2}}$, porro vero

$$u = \sqrt[4]{(1+x^4)};$$

denique vero, ut vidimus, est

$$x = \frac{z-1}{z+1}.$$

5. Quoniam igitur omnes isti valores sunt cogniti, formulae propositae integrale quaesitum erit

$$\int \frac{\partial z\,(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+q}{1-q} + \text{A tang. } p - \text{A tang. } q,$$

ubi notetur esse[1])

$$p = \frac{z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}{z+1}.$$

6. His ergo valoribus substitutis nostrum integrale erit

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}+z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}-z+1} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+z+\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}{1+z-\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$$
$$+ \text{A tang. } \frac{z-1}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} - \text{A tang. } \frac{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}{z+1};$$

ubi notetur ambos arcus circulares ita in unum colligi posse, ut prodeat

$$\text{A tang. } \frac{z^2-1-\sqrt{(1+6zz+z^4)}}{2z\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}};$$

ambo autem logarithmi ita in unum colligi poterunt

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{2z\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}+z^2-1+\sqrt{(1+6zz+z^4)}}{2z\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}-z^2+1-\sqrt{(1+6zz+z^4)}}.$$

---

1) Editio princeps: $q = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$. Propterea etiam formulae sequentes corrigendae erant. A. L.

7. Haec adhuc commodius exprimi poterunt. Si enim brevitatis gratia ponamus $\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)} = v$, pars logarithmica nostri integralis erit

$$\frac{1}{2}\, l\, \frac{2vz+z^2-1+vv}{2vz-z^2+1-vv} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{(1+v+z)(z-1+v)}{(v-1-z)(z-1-v)},$$

altera vero pars circularis est [1])

$$\text{A tang.}\, \frac{z^2-1-vv}{2vz}.$$

---

1) Editio princeps:

$$\frac{1}{2}\, l\, \frac{vz+z-1+vv}{vz-z+1-vv} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{(1+v)(z-1+v)}{(v-1)(z-1-v)};$$

altera vero pars circularis est

$$\textit{A tang.}\, \frac{z-1-vv}{vz}.$$

Correxit A. L.

ULTERIOR DISQUISITIO DE FORMULIS INTEGRALIBUS IMAGINARIIS

Conventui exhib. die 21. Mart. 1777

Commentatio 694 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1792), 1797, p. 3—19
Summarium ibidem p. 215—217

SUMMARIUM

Quand on désigne par la lettre Z une fonction quelconque de z laquelle, en mettant $z = x + y\sqrt{-1}$, reçoit la forme $M + N\sqrt{-1}$, la même fonction devient $M - N\sqrt{-1}$, lorsqu'on met $z = x - y\sqrt{-1}$, où M et N sont toujours des quantités réelles. De là il suit que, si dans la formule intégrale $\int Z\partial z$ on met $z = x + y\sqrt{-1}$, de sorte que $Z = M + N\sqrt{-1}$, son intégrale aura la forme $P + Q\sqrt{-1}$, où

$$P = \int (M\partial x - N\partial y) \quad \text{et} \quad Q = \int (N\partial x + M\partial y).$$

C'est d'après ces principes que l'Auteur de ce Mémoire a traité autrefois la formule

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$$

dans un des Mémoires du Tome VII de nos nouveaux Actes[1]), et c'est en suivant la même méthode qu'il a cherché dans le présent Mémoire l'intégrale de la formule beaucoup plus générale

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(a+bz^n)^\lambda}$$

1) Voir les mémoires 656 et 657 de ce volume. A. L.

pour les cas où z est une quantité imaginaire de la forme $x + y\sqrt{-1}$, en déterminant les valeurs des quantités réelles P et Q qui composent cette intégrale $P + Q\sqrt{-1}$, par des formules dont l'intégration se fait selon les mêmes lois que celle de la formule proposée $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(a+bz^n)^\lambda}$, lorsque z est une quantité réelle; de sorte que, cette formule étant intégrable, soit algébriquement, soit par des logarithmes et des arcs de cercle, les valeurs de P et Q seront aussi exprimées de la même maniere.

Cette recherche conduit l'Auteur à un Théorème très général de calcul intégral, savoir que si P et Q marquent des fonctions rationnelles de la forme x^n, on puisse toujours intégrer

$$\frac{\partial x\,(Px^{m-1} + Qx^{n-1})}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}}$$

par des logarithmes et des arcs circulaires, Théorème dont la démonstration termine ce Mémoire.

L'Auteur observe encore qu'il seroit à souhaiter que ces dernieres intégrations pussent être faites sans le secours des quantités imaginaires; mais il avoue qu'il n'en voit pas le moyen, ce qui donne une nouvelle preuve de la grande utilité que l'Analyse retire de l'introduction des quantités imaginaires, par le moyen desquelles feu M. EULER a résolu nombre de problèmes de calcul intégral, et même des questions relatives à l'Analyse de DIOPHANTE[1]), qui sans le secours des quantités imaginaires n'auroient jamais été résolues.

1. Universa Theoria Imaginariorum, unde tot egregia incrementa nunc quidem in Analysin sunt illata, hoc potissimum nititur fundamento, quod, si Z fuerit functio quaecunque ipsius z eaque posito $z = x + y\sqrt{-1}$ abeat in hanc formam $M + N\sqrt{-1}$, tum eadem functio Z posito $z = x - y\sqrt{-1}$ evadat $= M - N\sqrt{-1}$; ubi quidem litterae M et N semper denotant quantitates reales. Hinc si proponatur ista formula differentialis $Z\partial z$, cuius integrale sit $\int Z\partial z = V$ in eaque ponatur $z = x + y\sqrt{-1}$, unde prodeat $Z = M + N\sqrt{-1}$, ipsum integrale erit huius formae $V = P + Q\sqrt{-1}$. Cum enim sit

$$\partial V = Z\partial z = M\partial x - N\partial y + (N\partial x + M\partial y)\sqrt{-1},$$

1) Voir le mémoire 683 (suivant l'index d'ENESTROEM): *De singulari genere quaestionum DIOPHANTEARUM et methodo maxime recondita eas resolvendi,* Nova acta acad. sc. Petrop. **9** (1791), 1795, p. 3—18; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_4. G. F.

integrale erit

$$\int(M\partial x - N\partial y) + \sqrt{-1}\cdot\int(N\partial x + M\partial y) = P + Q\sqrt{-1}.$$

Necesse igitur est, ut posito $z = x - y\sqrt{-1}$ fiat

$$P - Q\sqrt{-1} = \int(M\partial x - N\partial y) - \sqrt{-1}\cdot\int(N\partial x + M\partial y).$$

Hinc autem manifestum est fore

$$P = \int(M\partial x - N\partial y) \quad \text{et} \quad Q = \int(N\partial x + M\partial y).$$

Ex quo intelligitur in huiusmodi substitutionibus semper partes reales et imaginarias seorsim inter se aequari debere.

2. Haec evolutio nobis iam suppeditat insignes proprietates, quae inter quantitates M, N, P et Q intercedunt. Primo enim cum sit

$$P = \int(M\partial x - N\partial y),$$

quoniam haec formula semper integrationem admittit, erit per criterium huiusmodi formularum generale[1])

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Eodem autem modo, quia habemus

$$Q = \int(N\partial x + M\partial y),$$

ob integrabilitatem huius formulae erit

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

Ecce ergo per talem substitutionem semper inveniuntur eiusmodi duae functiones M et N binarum variabilium x et y his insignibus proprietatibus praeditae, ut sit tam

1) Vide notam 1 p. 22 huius voluminis. G. F.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

quam

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

3. Similis proprietas etiam convenit quantitatibus P et Q. Cum enim sit

$$\partial P = M\partial x - N\partial y \quad \text{et} \quad \partial Q = M\partial y + N\partial x,$$

erit per similes characteres

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = M \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -N,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = N \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = M,$$

unde manifestum est fore

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Tales autem relationes eo magis sunt notatu dignae, quod earum ratio minus perspicitur, simulac pro Z functiones aliquanto magis complicatae accipiuntur.

4. Non ita pridem contemplatus sum secundum haec principia formulam integralem[1])

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1 \pm z^n},$$

unde plures huiusmodi relationes non contemnendas sum adeptus. Deinde etiam hanc speculationem extendi ad formulam

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[n]{(1+z^n)}};$$

cuius integrale cum semper per logarithmos et arcus circulares exprimere liceat[2]), inde etiam pro litteris P et Q eiusmodi formulae prodire debent, quae

1) Vide Commentationes 656 et 657 huius voluminis. G. F.

2) Vide notam 1 p. 85 huius voluminis. G. F.

similem integrationem admittant, etiamsi vix ulla via pateat istam integrationem exsequendi. Hocque modo deductus sum ad Theorema quoddam maxime memorabile, cuius demonstratio propemodum vires Analyseos superare videbatur; interim tamen deinceps eius demonstrationem elicui; quam ob rem constitui istud argumentum aliquanto generalius retractare.

5. Considerabo igitur hic istam formulam integralem multo latius patentem

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(a+bz^n)^\lambda} = V,$$

ubi, ut calculus commodius succedat, loco z substituo istam formulam imaginariam

$$z = v\,(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta),$$

quippe quae omnia imaginaria in se complectitur; tum vero hic angulum θ pro constante sum habiturus, ita ut sola v nobis sit variabilis, unde ergo statim fit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v}.$$

Cum igitur sit

$$z^m = v^m\,(\cos.\,m\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,m\theta),$$

numerator huius formulae statim fit

$$z^{m-1}\partial z = v^{m-1}\,(\cos.\,m\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,m\theta)\,\partial v.$$

Ex hac autem substitutione sumamus prodire istum valorem integralem

$$V = P + Q\sqrt{-1}.$$

6. Pro denominatore autem obtinebimus

$$a + bz^n = a + bv^n\,(\cos.\,n\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,n\theta),$$

cuius ergo pars realis est

$$a + bv^n\cos.\,n\theta,$$

pars imaginaria vero

$$bv^n\sqrt{-1}\cdot\sin.\,n\theta;$$

unde, si exponens esset numerus integer, imaginaria facile ex denominatore in numeratorem transferri possent, dum scilicet supra et infra multiplicaremus per

$$(a + b v^n (\cos. n\theta - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\theta))^\lambda.$$

Verum quia hi casus nulla laborant difficultate, calculum potissimum ad exponentes fractos pro λ accipiendos accommodari convenit.

7. Hunc in finem loco variabilis v aliam in calculum introducamus s cum certo angulo φ, ita ut sit

$$a + b v^n \cos. n\theta = s \cos. \varphi \quad \text{et} \quad b v^n \sin. n\theta = s \sin. \varphi,$$

unde ergo certa relatio inter hanc novam variabilem s et angulum φ definitur, ita ut vel sola littera s vel solus angulus φ in calculum introduci queat. Evidens autem est has duas quantitates per variabilem v ita definiri, ut sit

$$\text{I}^0. \quad ss = aa + 2ab v^n \cos. n\theta + bb v^{2n},$$

$$\text{II}^0. \quad \text{tang.}\, \varphi = \frac{b v^n \sin. n\theta}{a + b v^n \cos. n\theta}.$$

8. Hic autem statim intelligitur ipsam quantitatem s loco ipsius v non commode in calculum introduci posse, quandoquidem angulum φ, cuius varia multipla occurrunt, nullo modo ex calculo eliminare liceret, vel saltem formulae inextricabiles in calculum implicarentur. Quamobrem conveniet totum calculum ad solam variabilem φ revocare, ita ut nobis incumbat ambas quantitates v et s per istam novam variabilem φ determinare.

9. Ante autem quam hoc exsequamur, observemus denominatorem nostrae formulae per binas variabiles assumtas s et φ ita concinne expressum iri, ut fiat

$$a + b z^n = s (\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi)$$

hincque totus denominator

$$(a + b z^n)^\lambda = s^\lambda (\cos. \lambda\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \lambda\varphi).$$

Quodsi igitur supra et infra per

$$\cos.\,\lambda\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\lambda\varphi$$

multiplicemus, formula nostra proposita retento adhuc numeratore sequentem accipiet formam

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v\,(\cos.\,m\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,m\theta)\,(\cos.\,\lambda\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\lambda\varphi)}{s^{\lambda}} = V,$$

quae contrahitur in hanc formam satis simplicem

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v}{s^{\lambda}}\left(\cos.\,(m\theta - \lambda\varphi) + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,(m\theta - \lambda\varphi)\right);$$

cuius valor, cum positus sit

$$= P + Q\sqrt{-1},$$

realia ab imaginariis separando erit

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v\cos.\,(m\theta - \lambda\varphi)}{s^{\lambda}}$$

et

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\partial v\sin.\,(m\theta - \lambda\varphi)}{s^{\lambda}}.$$

10. Ut nunc hinc binas litteras v et s abigamus, recurramus ad binas positiones ante stabilitas

$$\text{I.}\quad a + b v^{n}\cos.\,n\theta = s\cos.\,\varphi,$$

$$\text{II.}\quad b v^{n}\sin.\,n\theta = s\sin.\,\varphi.$$

Hic primo quantitas s eliminabitur per hanc combinationem:

$$\text{I.}\sin.\,\varphi - \text{II.}\cos.\,\varphi,$$

unde fit

$$a\sin.\,\varphi = b v^{n}\sin.\,(n\theta - \varphi),$$

ideoque

$$v^{n} = \frac{a\sin.\,\varphi}{b\sin.\,(n\theta - \varphi)}$$

sicque iam valorem litterae v per angulum φ sumus adepti. Porro vero haec combinatio

$$\text{I. sin. } n\theta - \text{II. cos. } n\theta$$

praebet

$$a \text{ sin. } n\theta = s \text{ sin. } (n\theta - \varphi),$$

unde fit

$$s = \frac{a \text{ sin. } n\theta}{\text{sin. } (n\theta - \varphi)},$$

ex quo valore nanciscimur

$$P = \frac{1}{a^\lambda \text{ sin. } n\theta^\lambda} \int v^{m-1} \partial v \text{ sin. } (n\theta - \varphi)^\lambda \text{ cos. } (m\theta - \lambda\varphi)$$

et

$$Q = \frac{1}{a^\lambda \text{ sin. } n\theta^\lambda} \int v^{m-1} \partial v \text{ sin. } (n\theta - \varphi)^\lambda \text{ sin. } (m\theta - \lambda\varphi).$$

11. Quoniam porro invenimus

$$v^n = \frac{a \text{ sin. } \varphi}{b \text{ sin. } (n\theta - \varphi)},$$

sumtis logarithmis habebimus

$$n l v = l a \text{ sin. } \varphi - l b \text{ sin. } (n\theta - \varphi)$$

hincque differentiando

$$\frac{n\partial v}{v} = \frac{\partial\varphi \text{ cos. } \varphi}{\text{sin. } \varphi} + \frac{\partial\varphi \text{ cos. } (n\theta - \varphi)}{\text{sin. } (n\theta - \varphi)} = \frac{\partial\varphi \text{ sin. } n\theta}{\text{sin. } \varphi \text{ sin. } (n\theta - \varphi)}.$$

Deinde vero erit

$$v^m = \left(\frac{a \text{ sin. } \varphi}{b \text{ sin. } (n\theta - \varphi)}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

His igitur valoribus substitutis ad sequentes formulas integrales deducemur

$$P = \frac{1}{n a^\lambda \text{ sin. } n\theta^{\lambda-1}} \int \left(\frac{a \text{ sin. } \varphi}{b \text{ sin. } (n\theta - \varphi)}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{\partial\varphi \text{ sin. } (n\theta - \varphi)^\lambda \text{ cos. } (m\theta - \lambda\varphi)}{\text{sin. } \varphi \text{ sin. } (n\theta - \varphi)},$$

$$Q = \frac{1}{n a^\lambda \text{ sin. } n\theta^{\lambda-1}} \int \left(\frac{a \text{ sin. } \varphi}{b \text{ sin. } (n\theta - \varphi)}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{\partial\varphi \text{ sin. } (n\theta - \varphi)^\lambda \text{ sin. } (m\theta - \lambda\varphi)}{\text{sin. } \varphi \text{ sin. } (n\theta - \varphi)}.$$

Quodsi iam brevitatis gratia ponamus

$$n\theta - \varphi = \psi,$$

ut sit $\varphi + \psi = n\theta$ ideoque $\partial\varphi + \partial\psi = 0$, ambae formulae concinnius sequenti modo repraesentari poterunt:

$$P = \frac{a^{\frac{m}{n}-\lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin.n\theta^{\lambda-1}}\int\partial\varphi\sin.\varphi^{\frac{m-n}{n}}\sin.\psi^{\lambda-\frac{m}{n}-1}\cos.(m\theta-\lambda\varphi),$$

$$Q = \frac{a^{\frac{m}{n}-\lambda}}{nb^{\frac{m}{n}}\sin.n\theta^{\lambda-1}}\int\partial\varphi\sin.\varphi^{\frac{m-n}{n}}\sin.\psi^{\lambda-\frac{m}{n}-1}\sin.(m\theta-\lambda\varphi).$$

12. En ergo deducti sumus ad binas formulas integrales, quarum integratio, quantumvis ob exponentem fractum $\frac{m}{n}$ videatur difficilis, tamen semper pendet a formula principali proposita

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{(a\pm bz^n)^\lambda},$$

cuius ergo integrale si vel algebraice vel saltem per logarithmos et arcus circulares assignari queat, etiam certo affirmare poterimus ambas formulas hic inventas secundum eandem legem integrari posse. Hic quidem primo se offert casus $m = n$, quo adeo integrale algebraice exhiberi potest; verum quia hoc casu $\frac{m}{n}$ non amplius est fractio, eum praetereamus.

13. Imprimis autem hic occurrit casus maxime memorabilis, quo $\lambda = \frac{m}{n}$, quippe quo integrationem per logarithmos et arcus circulares expedire licet Si enim pro nostra formula integrali

$$\int\frac{\partial z}{z}\cdot\frac{z^m}{(a+bz^n)^{\frac{m}{n}}}$$

statuamus

$$\frac{z}{(a+bz^n)^{\frac{1}{n}}} = t,$$

ut formula integranda sit

$$\int t^m \frac{\partial z}{z},$$

erit

$$t^n = \frac{z^n}{a + b z^n},$$

unde colligitur

$$z^n = \frac{a t^n}{b t^n - 1};$$

hincque differentiando sumtis logarithmis erit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial t}{t} - \frac{b t^{n-1} \partial t}{b t^n - 1} = \frac{-\partial t}{t(b t^n - 1)},$$

ita ut formula nostra integranda sit

$$-\int \frac{t^{m-1} \partial t}{b t^n - 1};$$

quae cum sit rationalis, semper per logarithmos et arcus circulares integrari potest, quod ergo etiam de binis nostris formulis P et Q erit tenendum.

14. Statuamus igitur in nostris formulis supra inventis $\lambda = \frac{m}{n}$ eaeque transmutabuntur in sequentes

$$P = \frac{1}{n b^{\frac{m}{n}} \text{ sin. } n\theta^{\lambda-1}} \cdot \int \frac{\partial \varphi \text{ sin. } \varphi^{\frac{m}{n}-1} \text{ cos. } \left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\text{sin. } \psi},$$

$$Q = \frac{1}{n b^{\frac{m}{n}} \text{ sin. } n\theta^{\lambda-1}} \cdot \int \frac{\partial \varphi \text{ sin. } \varphi^{\frac{m}{n}-1} \text{ sin. } \left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\text{sin. } \psi},$$

ubi brevitatis gratia loco coefficientis constantis scribatur C, et cum ex indole formulae propositae semper sit $m < n$, has formulas ita succinctius exhibere licet:

$$P = C\int \frac{\partial\varphi \cos.\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin.\psi \sin.\varphi^{\frac{n-m}{n}}}$$

et

$$Q = C\int \frac{\partial\varphi \sin.\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin.\psi \sin.\varphi^{\frac{n-m}{n}}},$$

quae ergo formulae, quicunque numeri pro m et n accipiantur, semper a logarithmis et arcubus circularibus pendere sunt censendae.

15. Quodsi binae formulae

$$\cos.\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right) \quad \text{et} \quad \sin.\left(m\theta - \frac{m}{n}\varphi\right)$$

evolvantur, ambae formulae integrales inventae commode in unam contrahi poterunt, quae hanc habebit formam

$$C\int \partial\varphi \frac{\alpha \sin.\frac{m}{n}\varphi + \beta \cos.\frac{m}{n}\varphi}{\sin.\psi \sin.\varphi^{\frac{n-m}{m}}},$$

quae praefata lege integrationem admittet, quicunque valores litteris α et β tribuantur. Deinde quia $\psi = n\theta - \varphi$, facta evolutione loco $\sin.\psi$ eiusve multipli cuiusque scribi poterit $\gamma \sin.\varphi + \delta \cos.\varphi$ sicque nunc formula nostra erit

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin.\varphi^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha \sin.\frac{m}{n}\varphi + \beta \cos.\frac{m}{n}\varphi}{\gamma \sin.\varphi + \delta \cos.\varphi},$$

ubi litterae α, β, γ, δ pro lubitu accipi possunt; quamobrem si ad fractiones tollendas statuamus

$$\varphi = n\omega,$$

ut sit

$$\frac{m}{n}\varphi = m\omega,$$

ad sequens perducimur Theorema notatu dignissimum.

THEOREMA

Si litterae m et n denotent numeros integros quoscunque, integratio huius formulae

$$\int \frac{\partial\omega}{(\sin.\, n\omega)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha \sin.\, m\omega + \beta \cos.\, m\omega}{\gamma \sin.\, n\omega + \delta \cos.\, n\omega}$$

semper ad logarithmos et arcus circulares reduci potest, quicunque etiam valores litteris α, β, γ, δ *tribuantur.*

16. Quam ardua huius Theorematis demonstratio sit, clarius intelligemus, si hanc formulam ab angulis ad quantitates ordinarias revocemus. Ponamus igitur

$$\text{tang.}\, \omega = t,$$

erit

$$\partial\omega = \frac{\partial t}{1+tt};$$

deinde si brevitatis gratia uncias potestatum binomii hoc modo designemus, ut sit

$$(1+x)^\lambda = 1 + \left(\frac{\lambda}{1}\right)x + \left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\lambda}{3}\right)x^3 + \text{etc.},$$

sinus et cosinus angulorum multiplorum ipsius ω sequenti modo per t exprimentur

$$\sin.\, m\omega = \frac{\left(\frac{m}{1}\right)t - \left(\frac{m}{3}\right)t^3 + \left(\frac{m}{5}\right)t^5 - \left(\frac{m}{7}\right)t^7 + \text{etc.}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}},$$

$$\cos.\, m\omega = \frac{1 - \left(\frac{m}{2}\right)t^2 + \left(\frac{m}{4}\right)t^4 - \left(\frac{m}{6}\right)t^6 + \text{etc.}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}.$$

Ponamus autem porro brevitatis ergo

$$\left(\frac{m}{1}\right)t - \left(\frac{m}{3}\right)t^3 + \left(\frac{m}{5}\right)t^5 - \text{etc.} = M,$$

$$1 - \left(\frac{m}{2}\right)t^2 + \left(\frac{m}{4}\right)t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{M}$$

similique modo etiam ponamus

$$\left(\frac{n}{1}\right)t - \left(\frac{n}{3}\right)t^3 + \left(\frac{n}{5}\right)t^5 - \text{etc.} = N,$$

$$1 - \left(\frac{n}{2}\right)t^2 + \left(\frac{n}{4}\right)t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{N},$$

ut habeamus

$$\sin. m\omega = \frac{M}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}, \quad \cos. m\omega = \frac{\mathfrak{M}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}},$$

$$\sin. n\omega = \frac{N}{(1+tt)^{\frac{n}{2}}}, \quad \cos. n\omega = \frac{\mathfrak{N}}{(1+tt)^{\frac{n}{2}}};$$

quibus valoribus substitutis formula nostra integralis sequentem induet formam

$$\int \frac{(1+tt)^{n-m-1}\,\partial t\,(\alpha M + \beta \mathfrak{M})}{N^{\frac{n-m}{n}}\,(\gamma N + \delta \mathfrak{N})}.$$

Ubi omnia quidem sunt rationalia praeter formulam $N^{\frac{m}{n}}$, quae autem, quia abit in

$$\left(\left(\frac{n}{1}\right)t - \left(\frac{n}{3}\right)t^3 + \left(\frac{n}{5}\right)t^5 - \text{etc.}\right)^{\frac{m}{n}},$$

statim atque n binarium superat tantopere fit irrationalis, ut nulla plane via pateat irrationalitatem tollendi, si tantum fuerit $n = 3$; multo minus, si exponens n magis increscat, ullo modo reductionem ad rationalitatem sperare licebit. Interim tamen sequentem demonstrationem mihi eruere contigit.

DEMONSTRATIO SUPERIORIS THEOREMATIS

17. Ante omnia hic in subsidium vocari convenit formulas illas imaginarias, quibus iam saepius cum egregio successu sum usus[1]), quibus pono

1) Vide e. g. EULERI Commentationes 246 et 562 (indicis ENESTROEMIANI): *Subsidium calculi sinuum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 5 (1754/5), 1760, p. 164, et *Quomodo sinus et cosinus angulorum multiplorum per producta exprimi qucant,* Opuscula analytica 1, 1783, p. 353; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I_{14}, p. 542, imprimis § 2, et I_{15}, p. 509. G. F.

$$\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega = p \quad \text{et} \quad \cos.\omega - \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega = q,$$

eritque

$$pq = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{p} = \partial\omega\sqrt{-1}.$$

Deinde vero hinc pro sinibus et cosinibus angulorum multiplorum habebimus

$$\sin.m\omega = \frac{p^m - q^m}{2\sqrt{-1}} = \frac{p^{2m}-1}{2p^m\sqrt{-1}}$$

et

$$\cos.m\omega = \frac{p^m + q^m}{2} = \frac{p^{2m}+1}{2p^m}$$

similique modo

$$\sin.n\omega = \frac{p^{2n}-1}{2p^n\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \cos.n\omega = \frac{p^{2n}+1}{2p^n}.$$

18. Quo substitutio horum valorum magis sublevetur, observasse iuvabit coefficientes constantes nihil ad integrabilitatem conferre ideoque vel omitti vel sub alia forma referri posse. Hanc ob rem statuemus

$$\partial\omega = \frac{\partial p}{p} \quad \text{et} \quad \sin.n\omega = \frac{p^{2n}-1}{p^n};$$

deinde vero mutata constantium forma poni poterit

$$\alpha\sin.m\omega + \beta\cos.m\omega = \frac{\alpha' p^{2m} + \beta'}{p^m}$$

eodemque modo

$$\gamma\sin.n\omega + \delta\cos.n\omega = \frac{\gamma' p^{2n} + \delta'}{p^n}.$$

His igitur valoribus substitutis formula nostra hanc induet formam

$$\int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha' p^{2m} + \beta'}{\gamma' p^{2n} + \delta'}.$$

19. Haec iam formula ultro se scindit in duas partes, quas ita seorsim repraesentemus

$$\alpha' \int \frac{p^{2n-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')} + \beta' \int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')}$$

et nunc non amplius difficile erit utramque harum formularum seorsim ad rationalitatem reducere. In priore enim tantum opus est statuere

$$p^{2n}-1 = x^{2n};$$

tum enim erit

$$p^{2n-1}\partial p = x^{2n-1}\partial x \quad \text{et} \quad (p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}} = x^{2n-2m}$$

sicque formula prior accipiet hanc formam

$$\alpha' \int \frac{x^{2m-1}\partial x}{\gamma' x^{2n}+\gamma'+\delta'},$$

cuius ergo integrale per logarithmos et arcus circulares exhibere licet.

20. Quod vero ad alteram formulam attinet, reductio etiam se facile offeret, si ipsa formula hoc modo repraesentetur

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \cdot \frac{p^{2n-2m}}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')}$$

sive

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \left(\frac{p^2}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{\gamma' p^{2n}+\delta'}.$$

Si enim hic ponatur

$$\frac{p^2}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}} = y^2,$$

fiet

$$\frac{p^{2n}}{p^{2n}-1} = y^{2n}$$

hincque

$$p^{2n} = \frac{y^{2n}}{y^{2n}-1},$$

unde sumtis logarithmis et differentiando prodit

$$\frac{\partial p}{p} = \frac{-\partial y}{y(y^{2n}-1)},$$

quibus valoribus substitutis ista formula evadet

$$-\beta' \int \frac{y^{2n-2m-1}\partial y}{(\gamma'+\delta')y^{2n}-\delta'},$$

quae ergo pariter est rationalis.

21. Hoc igitur modo veritas nostri Theorematis satis firmiter est demonstrata atque iste casus ita est comparatus, ut tota formula ope unius substitutionis nullo modo rationalis reddi queat, quae circumstantia eo magis est notatu digna, quod vulgo statui solet omnes formulas differentiales, quantumvis fuerint irrationales, si earum integralia per logarithmos et arcus circulares exhiberi possunt, eas semper ope certae substitutionis ad rationalitatem perduci posse. Nunc igitur videmus hoc effatum ita restringi debere, ut tantum ad singulas partes totius formulae propositae extendatur, quandoquidem fieri potest, ut quaelibet pars peculiarem substitutionem postulet.

22. Quodsi hanc demonstrationem attentius perpendamus, facile videre licebit eam ad formulas multo latius patentes extendi posse. Apparebit enim sequentem formulam multo generaliorem semper ad rationalitatem perduci posse, id quod in sequente Theoremate clarius explicemus.

THEOREMA MAXIME GENERALE

23. *Si litterae P et Q denotent functiones quascunque rationales formae x^n, istius formulae*

$$\int \frac{\partial x\,(Px^{m-1} + Qx^{n-1})}{(a + bx^n)^{\frac{m}{n}}}$$

integrale semper per logarithmos et arcus circulares exprimetur.

DEMONSTRATIO

Secetur, ut supra fecimus, ista formula etiam in duas partes, quae sint

$$\int \frac{Px^{m-1}\partial x}{(a + bx^n)^{\frac{m}{n}}} \quad \text{et} \quad \int \frac{Qx^{n-1}\partial x}{(a + bx^n)^{\frac{m}{n}}},$$

atque statim patet posteriorem partem rationalem reddi ponendo

$$a + bx^n = r^n;$$

tum enim erit

$$(a + bx^n)^{\frac{m}{n}} = r^m,$$

tum vero

$$x^n = \frac{r^n - a}{b}$$

et

$$x^{n-1}\partial x = \frac{r^{n-1}\partial r}{b}.$$

Quia nunc Q est functio rationalis ipsius x^n, facta hac substitutione prodibit certe functio rationalis ipsius r^n sicque pars posterior accipiet hanc formam

$$\frac{1}{b}\int Qr^{n-m-1}\partial r.$$

Quo prior pars ad rationalitatem revocetur, statuatur

$$\frac{x}{(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} = s,$$

ut fiat

$$\frac{x^m}{(a+bx^n)^{\frac{m}{n}}} = s^m,$$

tum vero erit

$$x^n = \frac{as^n}{1-bs^n};$$

qui ergo valor si in P loco x^n substituatur, manifesto dabit functionem rationalem ipsius s^n; deinde vero hinc fit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial s}{s(1-bs^n)},$$

ex quibus valoribus oritur pars nostra prior

$$= \int \frac{Ps^{m-1}\partial s}{1-bs^m},$$

quae ergo formula etiam est rationalis.

Quin etiam in angulis Theorema multo generalius proponi potest, quod ita se habebit:

THEOREMA GENERALE

24. *Si litterae P et Q denotent functiones quascunque rationales binarum formularum* $\sin. 2n\omega$ *et* $\cos. 2n\omega$, *sequens formula integralis semper per logarithmos et arcus circulares expediri poterit*

$$\int (P \sin. m\omega + Q \cos. m\omega)\, \partial \cdot (\sin. n\omega)^{\frac{m}{n}},$$

ubi notetur esse

$$\partial (\sin. n\omega)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\partial\omega \cos. n\omega}{(\sin. n\omega)^{\frac{n-m}{n}}};$$

cuius demonstratio simili modo succedet ut supra, dum pariter ad binas partes pervenietur, quarum utramque certa substitutione rationalem reddere licebit.

25. Pluribus fortasse displicebit, quod resolutio postremae formulae per substitutiones imaginarias peragatur, cum tamen hic nobis sit propositum imaginaria a realibus separare; plurimum igitur optandum esset, ut hoc negotium sine imaginariis absolvi posset; verum equidem fateri cogor me neutiquam perspicere, quomodo hoc praestari queat. Ceterum quia reductio imaginariorum ad realia iam satis est exculta, tale remedium non adeo desiderandum videtur. Quin potius hic novus se prodit usus imaginariorum in ipsa resolutione formularum integralium, dum eiusmodi formulae integrabiles exhiberi possunt, quarum integralia sine auxilio imaginariorum eruere non licet.

INTEGRATIO SUCCINCTA FORMULAE INTEGRALIS MAXIME MEMORABILIS

$$\int \frac{\partial z}{(3 \pm zz)\sqrt[3]{(1 \pm 3zz)}}$$

Conventui exhib. die 28. April. 1777

Commentatio 695 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **10** (1792), 1797, p. 20—26
Summarium ibidem p. 217—218

SUMMARIUM

Comme dans le calcul intégral tout revient à transformer, par des substitutions convenables, une formule différentielle proposée en une autre, dont l'intégrale est déjà connue, de même dans l'intégration des formules différentielles irrationnelles tout l'art consiste à imaginer des substitutions qui transforment cette formule en une ou plusieurs autres équivalentes, dégagées du signe radical. Feu M. EULER, à qui tout le calcul intégral doit ses plus grands progrès, a fait voir dans son grand ouvrage: *Institutiones calculi integralis* Tome I, Chapitre 2[1]), et dans un Mémoire postérieur, qui sert de Supplément à ce chapitre et qui se trouve dans le Tome IV, partie 1 des Actes pour l'année 1780[2]), comment on doit traiter les formules différentielles irrationnelles. Aussi le dernier volume des nouveaux Actes pour l'année 1791 contient trois mémoires qui roulent sur de pareilles intégrations.[3])

1) *LEONHARDI EULERI Opera omnia* I11, p. 52. A. K.
2) Commentatio 539 voluminis I18, p. 83. A. L.
3) Commentationes 688, 689, 690 huius voluminis. A. L.

Quant à l'intégration de la formule qui fait le sujet du présent mémoire l'Auteur y donne deux méthodes pour la rendre rationnelle. Dans la premiere les substitutions

$$\sqrt[3]{(1+3zz)} = v, \quad p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

transforment la formule proposée en ces deux

$$\frac{\partial p}{4(1-p^3)} - \frac{\partial q}{4(1-q^3)}.$$

Dans la seconde la substitution

$$z = \frac{1+x}{1-x}$$

transforme la formule proposée en deux autres irrationnelles, qui seront dégagées du signe radical, la premiere en mettant

$$\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)^3}} = t,$$

et la seconde en mettant

$$\sqrt{(1-x^3)} = u.$$

Car alors la formule différentielle irrationnelle proposée devient

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\partial t}{1+2t^3} + \frac{u\partial u}{2-u^3}\right).$$

Ainsi moyennant l'une et l'autre méthode on parvient à des formules rationnelles, dont l'intégration peut s'achever par les règles connues, et celles de la premiere méthode même très facilement.

Quant aux cas où dans la formule proposée le signe inférieur négatif a lieu, il faudra mettre

$$z = y\sqrt{-1},$$

et on pourra traiter la formule qui en résulte selon les mêmes méthodes et obtenir l'intégrale sous une forme réelle, en faisant usage de la transformation connue des arcs circulaires imaginaires en logarithmes réels, et réciproquement, des logarithmes imaginaires en arcs de cercle réels; moyennant quoi les multiplicateurs imaginaires sortent du calcul.

1. Valeant primo signa superiora sitque

$$\partial V = \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}},$$

ac posito

$$\sqrt[3]{(1 + 3zz)} = v,$$

ut sit $1 + 3zz = v^3$, erit $z\partial z = \frac{1}{2} vv\partial v$ ideoque

$$\partial z = \frac{vv\partial v}{2z},$$

unde fit

$$\partial V = \frac{v\partial v}{2z(3 + zz)}.$$

2. Statuatur nunc

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

eritque

$$p^3 + q^3 = 2 \quad \text{et} \quad p^3 - q^3 = \frac{6z + 2z^3}{v^3},$$

unde fit

$$\partial V = \frac{\partial v}{vv(p^3 - q^3)}.$$

Cum porro sit $p + q = \frac{2}{v}$, erit $\partial p + \partial q = -\frac{2\partial v}{vv}$ ideoque

$$\partial V = -\frac{(\partial p + \partial q)}{2(p^3 - q^3)}.$$

3. Discerpatur iam haec formula in duas partes ponendo

$$\frac{\partial p}{p^3 - q^3} = \partial P \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{p^3 - q^3} = \partial Q,$$

ut sit

$$\partial V = -\frac{1}{2}\partial P - \frac{1}{2}\partial Q,$$

et quia $q^3 = 2 - p^3$, erit

$$\partial P = -\frac{\partial p}{2(1 - p^3)};$$

tum vero ob $p^3 = 2 - q^3$ erit

$$\partial Q = + \frac{\partial q}{2(1-q^3)}$$

sicque habebimus

$$4\partial V = + \frac{\partial p}{1-p^3} - \frac{\partial q}{1-q^3}.$$

4. Cum nunc constet esse

$$\int \frac{\partial p}{1-p^3} = \frac{1}{3} l \frac{\sqrt{(1+p+pp)}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p},$$

ob

$$1 + p + pp = \frac{1-p^3}{1-p}$$

erit

$$\int \frac{\partial p}{1-p^3} = \frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{(1-p)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p}.$$

5. Cum igitur simili modo sit

$$\int \frac{\partial q}{1-q^3} = \frac{1}{6} l \frac{1-q^3}{(1-q)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q},$$

erit integrale quaesitum quater sumtum

$$4V = \frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{(1-p)^3} - \frac{1}{6} l \frac{1-q^3}{(1-q)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

6. Quodsi iam logarithmi hoc modo contrahantur, ut fiant

$$\frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{1-q^3} + \frac{1}{6} l \frac{(1-q)^3}{(1-p)^3},$$

haec expressio ob $1 - p^3 = -(1 - q^3)$ praebet

$$\frac{1}{6} l -1 + \frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p},$$

ubi pars prior, quia est constans, omitti potest, ita ut logarithmi iunctim sumti faciant $\frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p}$ ideoque habeatur

$$4V = \frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

Bini autem arcus circulares contrahuntur in unum

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}$$

sicque integrale quaesitum erit

$$V = \frac{1}{8} l \frac{1-q}{1-p} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}.$$

7. Cum nunc posuerimus

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

pars logarithmica accipiet hanc formam

$$\frac{1}{8} l \frac{v-1+z}{v-1-z} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-z}{1-v+z}.$$

Pro arcu circulari autem erit $p - q = \frac{2z}{v}$, tum vero ob

$$p+q = \frac{2}{v} \quad \text{et} \quad pq = \frac{1-zz}{vv}$$

arcus fiet

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{vz\sqrt{3}}{1+v+vv-zz}$$

sicque adepti sumus hanc integrationem satis concinnam

$$\int \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-z}{1-v+z} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{vz\sqrt{3}}{1+v+vv-zz}$$

existente

$$v = \sqrt[3]{(1+3zz)}.$$

8. Iam pro altero casu, quo signa inferiora valent, statuamus

$$z = y\sqrt{-1},$$

ut sit

$$v = \sqrt[3]{(1-3yy)};$$

unde fit integratio superior

$$\int \frac{\partial y\sqrt{-1}}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-y\sqrt{-1}}{1-v+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{vy\sqrt{3}\sqrt{-1}}{1+v+vv+yy},$$

ubi tantum opus est imaginaria tollere.

9. Hunc in finem, cum sit in genere

$$\text{A tang.}\, t\sqrt{-1} = \int \frac{\partial t\sqrt{-1}}{1-tt} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t},$$

nostro casu ob

$$t = \frac{vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy}$$

erit pars posterior formulae inventae

$$\frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}} l \frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}}.$$

Pro parte logarithmica in formula canonica ponatur

$$t = u\sqrt{-1}$$

fietque

$$-\text{A tang.}\, u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}$$

ideoque

$$l \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\, u.$$

Pro nostro iam casu est

$$u = -\frac{y}{1-v}$$

ideoque

$$l\frac{1-v-y\sqrt{-1}}{1-v+y\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\text{ A tang.} -\frac{y}{1-v},$$

quibus valoribus substitutis integrale praesentis formulae imaginariae erit

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\text{ A tang.}\frac{y}{1-v} + \frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\, l\,\frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}}.$$

10. Hic manifesto omnia per $\sqrt{-1}$ sunt divisibilia sicque sublatis imaginariis nacti sumus hanc alteram integrationem

$$\int \frac{\partial y}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\, l\,\frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\text{ A tang.}\frac{y}{1-v},$$

ubi notetur, si fractionem logarithmo adiunctam supra et infra per $1-v$ multiplicemus, ob $1-v^3 = 3yy$ eam fore

$$\frac{y(4-v)+v(1-v)\sqrt{3}}{y(4-v)-v(1-v)\sqrt{3}}.$$

Hocque modo nostra integratio hanc induit formam

$$\int \frac{\partial y}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\, l\,\frac{y(4-v)+v(1-v)\sqrt{3}}{y(4-v)-v(1-v)\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\text{ A tang.}\frac{y}{1-v}$$

existente $v = \sqrt[3]{(1-3yy)}$.

RESOLUTIO MAGIS NATURALIS FORMULAE DIFFERENTIALIS PROPOSITAE

11. Quanquam solutio superior totum negotium pulcherrime conficit, tamen id in ea desiderari potest, quod nulla ratio patet, quae substitutiones ibi adhibitas suadere potuerit; quamobrem haud ingratum erit aliam solutionem subiungere, cuius ratio quodammodo clarius perspici queat.

12. Considerantem autem formulam priorem

$$\partial V = \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}}$$

expressiones $1+3zz$ et $3z+z^3$ admonere possunt huiusmodi substitutionem

$$z = \frac{1+x}{1-x}$$

haud sine successu in usum vocari posse, cum altera superiorum expressionum sit summa duorum cuborum, altera differentia. Hinc autem fit

$$\partial z = \frac{2\partial x}{(1-x)^2},$$

tum vero

$$3+zz = \frac{4-4x+4xx}{(1-x)^2} = \frac{4(1+x^3)}{(1+x)(1-x)^2},$$

denique erit

$$1+3zz = \frac{4+4x+4xx}{(1-x)^2} = \frac{4(1-x^3)}{(1-x)^3},$$

unde fit

$$\sqrt[3]{(1+3zz)} = \frac{\sqrt[3]{4(1-x^3)}}{1-x},$$

quibus substitutis prodit

$$\partial V = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{(1-xx)\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

13. Hoc modo formula inventa ultro in duas partes discerpitur atque integratio hoc modo repraesentari potest

$$2V\sqrt[3]{4} = \int \frac{\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \int \frac{xx\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

quarum formularum prior ad rationalitatem perduci potest ponendo

$$\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = t,$$

ita ut pars prior sit

$$\int \frac{t\partial x}{x(1+x^3)};$$

tum autem erit $x^3 = t^3 - t^3x^3$, ideoque $x^3 = \frac{t^3}{1+t^3}$, unde statim fit

$$1 + x^3 = \frac{1 + 2t^3}{1 + t^3}.$$

Sumtis autem logarithmis differentiando colligitur

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1 + t^3)}$$

sicque pars ista prior evadet

$$\int \frac{\partial t}{t + 2t^3},$$

cuius integratio est in promtu.

14. Partis posterioris tractatio adhuc magis est obvia. Posito enim

$$\sqrt[3]{(1 - x^3)} = u$$

fit $x^3 = 1 - u^3$, tum vero $xx\partial x = -uu\partial u$ et $1 + x^3 = 2 - u^3$; hoc ergo modo habebitur

$$\int \frac{xx\partial x}{(1 + x^3)\sqrt[3]{(1 - x^3)}} = -\int \frac{u\partial u}{2 - u^3}.$$

Totum igitur integrale quaesitum erit

$$2V\sqrt[3]{4} = \int \frac{\partial t}{1 + 2t^3} + \int \frac{u\partial u}{2 - u^3}.$$

15. Hoc igitur modo formulam propositam etiam transformavimus in duas alias formulas mere rationales, quarum ergo integratio per regulas cognitas facile expeditur; unde idcirco idem integrale resultare debet, quod prior methodus suppeditavit, si modo debitae reductiones rite instituantur. Facile autem patet priore methodo formulam finalem multo facilius obtineri, quam si has postremas formulas evolvere vellemus, atque ob hanc ipsam causam methodus ante tradita huic palmam praeripere est censenda.

16. Si alteram formulam

$$\frac{\partial z}{(3-zz)\sqrt[3]{(1-3zz)}}$$

simili modo tractare velimus, statui oportebit

$$z = \frac{1+x}{1-x}\sqrt{-1},$$

ita ut ista resolutio non aliter nisi per imaginaria institui possit, unde paradoxon iam ante allatum multo magis confirmatur, quo eiusmodi formulas differentiales exhiberi posse affirmaveram, quarum integratio nonnisi per imaginaria procedendo perfici queat, ex quo summus usus calculi imaginariorum in analysi multo magis perspicitur.

FORMAE GENERALES DIFFERENTIALIUM QUAE ETSI NULLA SUBSTITUTIONE RATIONALES REDDI POSSUNT TAMEN INTEGRATIONEM PER LOGARITHMOS ET ARCUS CIRCULARES ADMITTUNT

Conventui exhibita die 24. April. 1777

Commentatio 701 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 27—77
Summarium ibidem p. 161—162

SUMMARIUM

Dans un Mémoire qui se trouve parmi ceux du neuvième volume des Nova Acta[1]), feu M. EULER avoit donné l'intégrale d'une formule très irrationnelle qui cependant n'est qu'un cas très particulier d'autres formules beaucoup plus générales, dans lesquelles l'irrationalité est tellement compliquée qu'aucune substitution seule n'est suffisante pour la faire disparaître, et dont néanmoins l'intégrale peut être assignée par des logarithmes et des arcs de cercle. On trouve ici reduites à la rationalité, par des substitutions partielles et par des décompositions, deux formules dont l'une est affectée dans le numérateur et l'autre dans le dénominateur par le radical

$$\sqrt[n]{a(\alpha+\gamma z)^n+b(\beta+\delta z)^n}.$$

1) Commentatio 695 huius voluminis. A. K.

On y trouve aussi le développement d'un grand nombre de cas particuliers et l'intégration de formules qui se sont refusées à toutes les méthodes connues et employées jusqu'ici. Mais ce Mémoire qui enrichit tant une partie du calcul intégral très importante et peu entamée par les Géomètres, n'est pas susceptible d'extrait, parce qu'il est impossible de donner une idée claire de la méthode sans entrer dans des calculs que les amateurs de ce genre de recherches aimeront mieux lire dans le Mémoire même, auquel par la raison susdite, nous sommes forcés de renvoyer le lecteur de ces extraits.

1. Quae non ita pridem de integratione huius formulae differentialis

$$\frac{\partial z(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$$

per logarithmos et arcus circulares in medium attuli[1]), eo maiori attentione sunt digna, quod ista formula tam complicatam irrationalitatem involvit, ut nulla plane substitutione ad rationalitatem perduci queat. Est vero ista formula casus specialissimus formarum maxime generalium, in quibus tam obstrusa irrationalitas involvitur, ut nulla certe substitutio sufficiat iis ad rationalitatem reducendis, quarum tamen integralia in genere per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt. Quoniam igitur tales formae generales in Analysin maximi momenti incrementa afferre posse sunt censendae, eas hoc loco accuratius explicare constitui.

2. Quo autem huius generis formulas clarius exponam, a formula irrationali, quae in iis inest, inchoari convenit, quam hoc modo repraesento

$$v = \sqrt[n]{[a(\alpha+\gamma z)^n + b(\beta+\delta z)^n]},$$

quae irrationalitas, statim atque exponens n binarium superat, tantopere est abstrusa, ut nullo plane modo ad rationalitatem revocari possit. Deinde denotent litterae maiusculae A, B, C, D sive quantitates constantes sive functiones quascunque rationales formulae $\frac{(\alpha+\gamma z)^n}{(\beta+\delta z)^n}$ atque binae formulae integrales sequentes

1) Vide Commentationem 695 huius voluminis. A. K.

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(\alpha+\gamma z)^{m-1}(\beta+\delta z)^{m-1}(A(\alpha+\gamma z)^{n-m}+B(\beta+\delta z)^{n-m})}{v^m(C(\alpha+\gamma z)^n+D(\beta+\delta z)^n)},$$

$$\mathfrak{4} = \int \frac{\partial z\,(A(\alpha+\gamma z)^{n-m}+B(\beta+\delta z)^{n-m})\,v^m}{(\alpha+\gamma z)(\beta+\delta z)(C(\alpha+\gamma z)^n+D(\beta+\delta z)^n)}$$

semper per logarithmos et arcus circulares expediri possunt. Harum scilicet formularum prior $\mathfrak{h}$ irrationalitatem v^m in denominatore, posterior vero $\mathfrak{4}$ in numeratore complectitur; hae igitur duae formae Theorema maxime memorabile analyticum constituunt, cuius veritatem duplici demonstratione sum ostensurus.

DEMONSTRATIO PRIMA FORMULARUM ANTE PROPOSITARUM

3. Ponatur

$$\beta+\delta z = x(\alpha+\gamma z)$$

eritque formula irrationalis

$$v = (\alpha+\gamma z)\sqrt[n]{(a+bx^n)}$$

ideoque

$$v^m = (\alpha+\gamma z)^m\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}.$$

Deinde vero hinc erit

$$z = \frac{\alpha x-\beta}{\delta-\gamma x}$$

ideoque

$$\partial z = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\partial x}{(\delta-\gamma x)^2};$$

vel etiam, cum sit $x = \frac{\beta+\delta z}{\alpha+\gamma z}$, erit

$$\partial x = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\partial z}{(\alpha+\gamma z)^2},$$

unde fit

$$\partial z = \frac{\partial x(\alpha+\gamma z)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

4. Quodsi iam hi valores in priori forma $\mathfrak{h}$ substituantur, ea sequenti modo satis commode per solam variabilem x exprimi reperietur

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\int \frac{x^{m-1}\partial x(A + Bx^{n-m})}{(C + Dx^n)\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}}.$$

Simili vero etiam modo altera forma $\mathfrak{k}$ per solam variabilem x commode exprimetur

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\int \frac{\partial x(A + Bx^{n-m})\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}}{x(C + Dx^n)},$$

ubi litterae A, B, C, D, nisi fuerint constantes, erunt functiones rationales huius formulae $\frac{1}{x^n}$ sive ipsius x^n.

EVOLUTIO FORMAE PRIORIS $\mathfrak{h}$

5. Posito brevitatis gratia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \theta$$

haec forma in duas partes resolvatur, quae erunt

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\theta}\int \frac{Ax^{m-1}\partial x}{(C + Dx^n)\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}} + \frac{1}{\theta}\int \frac{Bx^{n-1}\partial x}{(C + Dx^n)\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}},$$

quarum prior rationalis reddetur ponendo

$$\frac{x}{\sqrt[n]{(a + bx^n)}} = t;$$

erit enim $\frac{x^n}{a + bx^n} = t^n$, unde elicitur $x^n = \frac{at^n}{1 - bt^n}$; unde patet litteras A, B, C, D, quae in hac parte occurrunt, fore functiones rationales ipsius t^n; porro vero ob

$$nlx = la + nlt - l(1 - bt^n)$$

erit differentiando

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t} + \frac{bt^{n-1}\partial t}{1 - bt^n} = \frac{\partial t}{t(1 - bt^n)}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{x^m}{\sqrt[n]{(a + bx^n)^m}} = t^m \quad \text{et} \quad C + Dx^n = \frac{C + t^n(aD - bC)}{1 - bt^n},$$

his substitutis pars prior formulae ♄ erit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{At^{m-1}\partial t}{C+t^n(aD-bC)},$$

quae ergo est rationalis, eiusque propterea integrale per logarithmos atque arcus circulares exhiberi potest.

6. Pro altera autem parte formulae ♄ primo notetur eam per praecedentem substitutionem rationalem reddi non posse; verum hoc multo facilius praestabitur ponendo

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)} = u,$$

unde, cum fiat $a+bx^n = u^n$, erit

$$x^n = \frac{u^n-a}{b} \quad \text{atque} \quad x^{n-1}\partial x = \frac{u^{n-1}\partial u}{b},$$

et iam litterae B, C et D erunt functiones rationales ipsius u^n; quamobrem, cum sit

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)^m} = u^m \quad \text{et} \quad C+Dx^n = \frac{bC-aD+Du^n}{b},$$

his valoribus substitutis pars posterior formulae ♄ erit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{Bu^{n-m-1}\partial u}{bC-aD+Du^n},$$

quae, cum etiam sit rationalis, pariter per logarithmos atque arcus circulares exhiberi poterit.

EVOLUTIO FORMAE POSTERIORIS ♃

7. Haec forma pariter in duas partes resoluta ita repraesentetur

$$♃ = \frac{1}{\theta}\int \frac{A\partial x\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{x(C+Dx^n)} + \frac{1}{\theta}\int \frac{Bx^{n-m-1}\partial x\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{C+Dx^n}.$$

Prior autem pars statim rationalis redditur ponendo

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)} = u, \quad \text{unde fit} \quad x^n = \frac{u^n - a}{b}$$

sumtisque logarithmis

$$nlx = l(u^n - a) - lb$$

ideoque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{u^{n-1}\partial u}{u^n - a} \quad \text{et} \quad C + Dx^n = \frac{bC - aD + Du^n}{b},$$

quibus substitutis pars prior evadit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{Abu^{n+m-1}\partial u}{(u^n - a)(bC - aD + Du^n)},$$

quae forma ob A, C, D functiones rationales ipsius u^n utique ipsa est rationalis.

8. Altera autem pars formae 4, quae est

$$\frac{1}{\theta}\int \frac{Bx^{n-m-1}\partial x \sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{C + Dx^n},$$

ita repraesentetur

$$\frac{1}{\theta}\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{Bx^n}{C + Dx^n} \cdot \frac{\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{x^m}$$

et nunc manifestum est scopum propositum obtentum iri ope prioris substitutionis ante usurpatae

$$\frac{x}{\sqrt[n]{(a+bx^n)}} = t;$$

sic enim postremus factor erit $= \frac{1}{t^m}$. Deinde supra vidimus fore

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1 - bt^n)}.$$

Denique vero fiet

$$\frac{Bx^n}{C + Dx^n} = \frac{aBt^n}{C + t^n(aD - bC)};$$

his autem substitutis altera pars ipsius 24 erit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{aBt^{n-m-1}\partial t}{(1-bt^n)(C+t^n(aD-bC))},$$

quae etiam est rationalis ob litteras B, C, D functiones rationales ipsius t^n.

9. Ex hac evolutione liquet, si litterarum A et B altera evanescat, formulas propositas ope idoneae substitutionis utique ad rationalitatem perduci posse, ita ut his casibus nostrae formulae nihil, quod memoratu esset adeo dignum, continerent; at vero si harum litterarum neutra evanescat, quoniam utraque peculiarem postulat substitutionem, evidens est totum negotium ope unicae substitutionis nullo modo confici posse, atque ob hanc ipsam causam nostrae formulae generales eo maiori attentione dignae sunt censendae.

DEMONSTRATIO ALIA METHODO PRORSUS MIRABILI INNIXA

10. Quoniam vidimus ambas nostras formas tantum distribui debere, loco variabilis z statim duas novas variabiles p et q in calculum introducamus ponendo

$$p = \frac{\alpha+\gamma z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{\beta+\delta z}{v}.$$

Hinc autem primo erit

$$\delta p - \gamma q = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{v};$$

unde, si ut ante ponamus $\alpha\delta - \beta\gamma = \theta$, erit

$$v = \frac{\theta}{\delta p - \gamma q}.$$

Deinde vero erit

$$\alpha q - \beta p = \frac{z(\alpha\delta-\beta\gamma)}{v} = \frac{\theta z}{v},$$

unde colligimus

$$z = \frac{v(\alpha q-\beta p)}{\theta} = \frac{\alpha q-\beta p}{\delta p-\gamma q};$$

unde differentiando colligitur

$$\partial z = \frac{\theta(p\partial q - q\partial p)}{(\delta p-\gamma q)^2},$$

quae expressio ob $\delta p - \gamma q = \frac{\theta}{v}$ concinne ita refertur

$$\partial z = \frac{vv}{\theta}(p\,\partial q - q\,\partial p).$$

11. Deinde vero ex positionibus factis colligitur

$$ap^n + bq^n = \frac{a(\alpha+\gamma z)^n + b(\beta+\delta z)^n}{v^n} = 1$$

ob $v^n = a(\alpha+\gamma z)^n + b(\beta+\delta z)^n$, unde facile sive p per q sive q per p definiri potest, cum sit

$$\text{vel}\quad p^n = \frac{1-bq^n}{a}\quad \text{vel}\quad q^n = \frac{1-ap^n}{b}.$$

Porro vero, quia est

$$ap^{n-1}\partial p + bq^{n-1}\partial q = 0,$$

erit

$$\partial p = -\frac{bq^{n-1}\partial q}{ap^{n-1}}\quad \text{et}\quad \partial q = -\frac{ap^{n-1}\partial p}{bq^{n-1}}.$$

Hinc iam formula $p\,\partial q - q\,\partial p$ pro lubitu sive per ∂q sive per ∂p exhiberi poterit; priore scilicet modo erit

$$p\,\partial q - q\,\partial p = \frac{\partial q(ap^n + bq^n)}{ap^{n-1}} = \frac{\partial q}{ap^{n-1}},$$

posteriore vero modo erit

$$p\,\partial q - q\,\partial p = -\frac{\partial p(ap^n + bq^n)}{bq^{n-1}} = -\frac{\partial p}{bq^{n-1}}.$$

Quovis igitur casu sive priore sive posteriore valore uti licebit, prouti commodius fuerit visum.

12. Nunc igitur hos novos valores in calculum introducamus eliminando litteram z, veruntamen ipsam litteram v in calculo retineamus, quippe quae tandem sponte ex calculo excedet. Primo igitur, ut iam vidimus, erit

$$\partial z = \frac{vv}{\theta}(p\,\partial q - q\,\partial p)$$

atque ob

$$\alpha + \gamma z = pv \quad \text{et} \quad \beta + \delta z = qv$$

erit

$$(\alpha + \gamma z)(\beta + \delta z) = pqvv,$$

$$A(\alpha + \gamma z)^{n-m} + B(\beta + \delta z)^{n-m} = v^{n-m}(Ap^{n-m} + Bq^{n-m})$$

ac denique

$$C(\alpha + \gamma z)^n + D(\beta + \delta z)^n = v^n(Cp^n + Dq^n),$$

quibus valoribus substitutis binae nostrae formae generales sequenti modo referentur

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\theta}\int \frac{p^{m-1}q^{m-1}(p\partial q - q\partial p)(Ap^{n-m} + Bq^{n-m})}{Cp^n + Dq^n}$$

et

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\theta}\int \frac{(p\partial q - q\partial p)(Ap^{n-m} + Bq^{n-m})}{pq(Cp^n + Dq^n)},$$

ubi notetur litteras A, B, C, D, nisi sint constantes, iam fore functiones rationales formulae $\frac{p^n}{q^n}$ ideoque ob $ap^n + bq^n = 1$ vel ipsius p^n vel ipsius q^n.

EVOLUTIO FORMULAE $\mathfrak{h}$

13. Hinc iterum ista formula per suas partes repraesentetur

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\theta}\int \frac{Ap^{n-1}q^{m-1}(p\partial q - q\partial p)}{Cp^n + Dq^n} + \frac{1}{\theta}\int \frac{Bq^{n-1}p^{m-1}(p\partial q - q\partial p)}{Cp^n + Dq^n}.$$

Et quoniam pro $p\partial q - q\partial p$ supra geminum valorem exhibuimus, alterum per ∂q, alterum vero per ∂p expressum, priori valore utamur pro parte priori, quae evadet

$$= \frac{1}{a\theta}\int \frac{Aq^{m-1}\partial q}{Cp^n + Dq^n},$$

quae porro ob $p^n = \frac{1 - bq^n}{a}$ transit in hanc formam

$$\frac{1}{\theta}\int \frac{Aq^{m-1}\partial q}{C + q^n(aD - bC)};$$

ubi cum A, C, D per solam q rationaliter exprimi queant, sola variabilis q inest idque rationaliter, unde integrale per logarithmos et arcus circulares exprimi poterit.

14. Pro parte autem secunda formulae ♄ utamur valore posteriore pro $p\partial q - q\partial p$, qui est $-\frac{\partial p}{bq^{n-1}}$. Hinc enim ista pars prodibit

$$= -\frac{1}{\theta b}\int \frac{Bp^{m-1}\partial p}{Cp^n + Dq^n},$$

quae ob $q^n = \frac{1-ap^n}{b}$ abit in hanc

$$-\frac{1}{\theta}\int \frac{Bp^{m-1}\partial p}{D - p^n(aD - bC)},$$

quae expressio solam variabilem p rationaliter comprehendit, quandoquidem litterae B, C, D, nisi sint constantes, sunt functiones ipsius p^n. His igitur partibus iunctis erit

$$♄ = \frac{1}{\theta}\int \frac{Aq^{m-1}\partial q}{C + q^n(aD - bC)} - \frac{1}{\theta}\int \frac{Bp^{m-1}\partial p}{D - p^n(aD - bC)}.$$

EVOLUTIO FORMULAE ♃

15. Haec formula simili modo per suas partes ita repraesentabitur

$$♃ = \frac{1}{\theta}\int \frac{Ap^{n-m-1}(p\partial q - q\partial p)}{q(Cp^n + Dq^n)} + \frac{1}{\theta}\int \frac{Bq^{n-m-1}(p\partial q - q\partial p)}{p(Cp^n + Dq^n)}.$$

Pro priore parte utamur valore

$$p\partial q - q\partial p = -\frac{\partial p}{bq^{n-1}};$$

unde ista pars fiet

$$= -\frac{1}{\theta b}\int \frac{Ap^{n-m-1}\partial p}{q^n(Cp^n + Dq^n)},$$

quae porro ob

$$q^n = \frac{1 - ap^n}{b}$$

induet hanc formam

$$-\frac{b}{\theta}\int \frac{Ap^{n-m-1}\partial p}{(1 - ap^n)(D - p^n(aD - bC))}.$$

16. Pro parte autem posteriore utamur altero valore

$$p\,\partial q - q\,\partial p = \frac{\partial q}{a p^{n-1}},$$

ex quo ista pars evadet

$$\frac{1}{a\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{p^n (C p^n + D q^n)},$$

quae porro ob

$$p^n = \frac{1 - b q^n}{a}$$

reducitur ad hanc formam

$$\frac{a}{\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{(1 - b q^n)(C + q^n (aD - bC))}.$$

Hoc igitur modo altera formula generalis $\mathfrak{A}$ ita repraesentetur

$$\mathfrak{A} = -\frac{b}{\theta}\int \frac{A p^{n-m-1}\partial p}{(1 - a p^n)(D - p^n (aD - bC))} + \frac{a}{\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{(1 - b q^n)(C + q^n (aD - bC))}.$$

Quanquam haec posterior methodus a praecedente prorsus differt, tamen egregia harmonia elucet.

17. Quoniam autem haec nimis sunt generalia, quam ut clare percipi queant, paulatim ad magis particularia descendamus ac primo quidem sumamus litteris A, B, C, D perpetuo quantitates constantes designari, hicque statim se offert casus memorabilis, quo $C = a$ et $D = b$, siquidem hinc oritur

$$C(\alpha + \gamma z)^n + D(\beta + \delta z)^n = v^n$$

sicque binae nostrae formae erunt

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\partial z\,(\alpha + \gamma z)^{m-1}(\beta + \delta z)^{m-1}(A(\alpha + \gamma z)^{n-m} + B(\beta + \delta z)^{n-m})}{v^{m+n}}$$

et

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(A(\alpha + \gamma z)^{n-m} + B(\beta + \delta z)^{n-m})}{v^{n-m}(\alpha + \gamma z)(\beta + \delta z)}.$$

18. Hoc igitur casu si ponatur

$$p = \frac{\alpha + \gamma z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{\beta + \delta z}{v},$$

integralia harum formarum hoc modo exprimentur

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\theta}\int \frac{A q^{m-1}\partial q}{a} - \frac{1}{\theta}\int \frac{B p^{m-1}\partial p}{b}$$

sicque iste valor adeo algebraice exhiberi poterit; erit enim

$$\mathfrak{h} = \frac{A}{m\theta a}\, q^m - \frac{B}{m\theta b}\, p^m$$

sive erit

$$\mathfrak{h} = \frac{A(\beta + \delta z)^m}{m\theta a v^m} - \frac{B(\alpha + \gamma z)^m}{m\theta b v^m}.$$

Pro altera autem forma habebimus

$$\mathfrak{k} = -\frac{1}{\theta}\int \frac{A p^{n-m-1}\partial p}{1 - a p^n} + \frac{1}{\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{1 - b q^n},$$

quae quidem forma aliter integrari nequit nisi per logarithmos et arcus circulares, sed ob concinnitatem imprimis est notatu digna.

19. Imprimis autem formulae notabiles prodibunt, si statuamus

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \text{at} \quad \delta = -1;$$

unde fit $\theta = -2$ et iam binae nostrae formae generales sequentem faciem induent

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1 - z z)^{m-1}(A(1 + z)^{n-m} + B(1 - z)^{n-m})}{v^m (C(1 + z)^n + D(1 - z)^n)}$$

et

$$\mathfrak{k} = \int \frac{\partial z\,(A(1 + z)^{n-m} + B(1 - z)^{n-m})\, v^m}{(1 - z z)\,(C(1 + z)^n + D(1 - z)^n)},$$

ubi iam est

$$v = \sqrt[n]{(a(1 + z)^n + b(1 - z)^n)}.$$

Tum vero posito

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{v}$$

valores harum formarum sequenti modo exprimentur

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2}\int\frac{q^{m-1}\partial q}{C+q^n(aD-bC)} + \frac{B}{2}\int\frac{p^{m-1}\partial p}{D-p^n(aD-bC)}$$

et

$$\mathfrak{A} = \frac{Ab}{2}\int\frac{p^{n-m-1}\partial p}{(1-ap^n)(D-p^n(aD-bC))} - \frac{Ba}{2}\int\frac{q^{n-m-1}\partial q}{(1-bq^n)(C+q^n(aD-bC))}.$$

20. Combinemus nunc hanc posteriorem hypothesin cum praecedente, qua erat $C=a$ et $D=b$, ac formae nostrae erunt

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^{m-1}(A(1+z)^{n-m}+B(1-z)^{n-m})}{v^{m+n}}$$

et

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z(A(1+z)^{n-m}+B(1-z)^{n-m})}{v^{n-m}(1-zz)};$$

tum autem per nostram reductionem erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{A(1-z)^m}{2mav^m} + \frac{B(1+z)^m}{2mbv^m}$$

et

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int\frac{Ap^{n-m-1}\partial p}{1-ap^n} - \frac{1}{2}\int\frac{Bq^{n-m-1}\partial q}{1-bq^n}.$$

21. Quoniam autem hic forma $\mathfrak{h}$, utpote algebraice integrabilis, nulla laborat difficultate, eius loco aliam contemplabimur affinem ponendo $C=a$, at $D=-b$, ita ut iam sit $aD-bC=-2ab$, eritque

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^{m-1}(A(1+z)^{n-m}+B(1-z)^{n-m})}{v^m(a(1+z)^n-b(1-z)^n)},$$

cuius valor per p et q ita exprimitur, ut sit

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2}\int\frac{q^{m-1}\partial q}{a-2abq^n} + \frac{B}{2}\int\frac{p^{m-1}\partial p}{2abp^n-b}$$

sive

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2}\int\frac{q^{m-1}\partial q}{a-2abq^n} - \frac{B}{2}\int\frac{p^{m-1}\partial p}{b-2abp^n}.$$

In sequentibus istam formam $\mathfrak{h}$ cum praecedente forma $\mathfrak{A}$ coniunctim considerabimus atque bini casus seorsim tractandi se offerunt.

EVOLUTIO CASUS QUO $a = \frac{1}{2}$ ET $b = -\frac{1}{2}$

22. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}(1+z)^n - \tfrac{1}{2}(1-z)^n\right)};$$

huius ergo valores pro simplicioribus exponentibus n erunt, uti sequuntur:

Si $n = 2$, erit $v = \sqrt{2z}$,

si $n = 3$, erit $v = \sqrt[3]{(3z + z^3)}$,

si $n = 4$, erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$,

si $n = 5$, erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$,

si $n = 6$, erit $v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}$.

Expediamus nunc primo postremam formam pro $\mathfrak{h}$ datam, et quoniam in eius denominatore occurrit forma

$$a(1+z)^n - b(1-z)^n,$$

eius loco scribamus brevitatis gratia s, ita ut ob

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{2}$$

sit

$$s = \frac{1}{2}(1+z)^n + \frac{1}{2}(1-z)^n$$

ideoque

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^{m-1} (A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m})}{v^m s},$$

atque per litteras p et q erit

$$\mathfrak{h} = -A\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1+q^n} + B\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n},$$

ubi notentur pro simplicioribus exponentibus n valores:

Si $n = 2$, erit $s = 1 + zz$,

si $n = 3$, erit $s = 1 + 3zz$,

si $n = 4$, erit $s = 1 + 6zz + z^4$,

si $n = 5$, erit $s = 1 + 10zz + 5z^4$,

si $n = 6$, erit $s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6$.

23. Postrema autem forma $\mathfrak{A}$ hoc casu evadit

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m})}{v^{n-m}(1-zz)},$$

cuius valor per p et q expressus erit

$$\mathfrak{A} = A\int \frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - B\int \frac{q^{n-m-1}\partial q}{2+q^n}.$$

EVOLUTIO CASUS QUO $a = \frac{1}{2}$ ET $b = \frac{1}{2}$

24. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2}(1+z)^n + \tfrac{1}{2}(1-z)^n\right)},$$

huius ergo valores pro simplicioribus exponentibus n erunt, ut sequitur:

Si $n = 2$, erit $v = \sqrt[2]{(1+zz)}$,

si $n = 3$, erit $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$,

si $n = 4$, erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$,

si $n = 5$, erit $v = \sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}$,

si $n = 6$, erit $v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}$.

25. Expediamus nunc postremam formam pro ϸ datam, in qua loco

$$a(1+z)^n - b(1-z)^n$$

scribamus brevitatis gratia T, ita ut sit

$$T = \frac{1}{2}(1+z)^n - \frac{1}{2}(1-z)^n,$$

sicque ipsa forma erit

$$ϸ = \int \frac{\partial z (1-zz)^{m-1}(A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m})}{v^m T},$$

quae per litteras p et q ita exprimitur

$$ϸ = -A\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1-q^n} - B\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n},$$

ubi pro exponentibus simplicioribus erit, ut sequitur:

Si $n = 2$, erit $T = 2z$,

si $n = 3$, erit $T = 3z + z^3$,

si $n = 4$, erit $T = 4z + 4z^3$,

si $n = 5$, erit $T = 5z + 10z^3 + z^5$,

si $n = 6$, erit $T = 6z + 20z^3 + 6z^5$.

Hoc autem casu evadet

$$ϔ = \int \frac{\partial z (A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m})}{v^{n-m}(1-zz)},$$

cuius valor per p et q expressus erit

$$ϔ = A\int \frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - B\int \frac{q^{n-m-1}\partial q}{2-q^n}$$

26. In his autem formulis perpetuo accipiamus

$$A = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g;$$

tum igitur formula, ubi hae litterae occurrunt, hanc induet speciem $fF + gG$ eritque

$$F = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \frac{1}{2}(1-z)^{n-m}$$

et

$$G = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \frac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

unde ergo sequentes valores pro casibus simplicioribus emergunt:

Si $n-m=1$, erit $F=1$ et $G=z$,

si $n-m=2$, erit $F=1+zz$ et $G=2z$,

si $n-m=3$, erit $F=1+3zz$ et $G=3z+z^3$,

si $n-m=4$, erit $F=1+6zz+z^4$ et $G=4z+4z^3$,

si $n-m=5$, erit $F=1+10zz+5z^4$ et $G=5z+10z^3+z^5$,

si $n-m=6$, erit $F=1+15zz+15z^4+z^6$ et $G=6z+20z^3+6z^5$.

27. Secundum istas quatuor formas iam satis particulares totidem ordines formularum specialium constituamus, dum scilicet exponentibus indefinitis m et n valores determinati simpliciores assignabuntur, ubi quidem pro m numeri minores quam n capientur.

ORDO PRIMUS FORMULARUM SPECIALIUM EX FORMA

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^{m-1}(fF+gG)}{v^m s}$$

28. Cuiusmodi valores litteris F, G, v et s sint tribuendi, supra iam est ostensum, ubi etiam vidimus, si statuatur

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

fore

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1+q^n} + \frac{f-g}{2}\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n}.$$

Hinc iam sequentes formulas speciales derivemus:

1°. SIT $n = 2$ ET $m = 1$

29. Hic igitur erit

$$v = \sqrt{2z}, \quad s = 1 + zz, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 + zz)\sqrt{2z}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int \frac{\partial q}{1+qq} + \frac{f-g}{2}\int \frac{\partial p}{1-pp}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt{2z}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt{2z}}.$$

2°. SIT $n = 3$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 2$

30. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(3z + z^3)}, \quad s = 1 + 3zz, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + zz) + 2gz)}{(1 + 3zz)\sqrt[3]{(3z + z^3)}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int \frac{\partial p}{1+q^3} + \frac{f-g}{2}\int \frac{\partial p}{1-p^3}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}.$$

3°. SIT $n = 3$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 1$

31. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(2z + z^3)}, \quad s = 1 + 3zz, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (1 - zz)(f + gz)}{(1 + 3zz)\sqrt[3]{(3z + z^3)^2}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int\frac{q\,\partial q}{1+q^3} + \frac{f-g}{2}\int\frac{p\,\partial p}{1-p^3}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}.$$

4°. SIT $n = 4$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 3$

32. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(4z+4z^3)}, \quad s = 1+6zz+z^4, \quad F = 1+3zz \quad \text{et} \quad G = 3z+z^3$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(1+6zz+z^4)\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

Hoc casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int\frac{\partial q}{1+q^4} + \frac{f-g}{2}\int\frac{\partial p}{1-p^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

5°. SIT $n = 4$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 2$

33. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(4z+4z^3)}, \quad s = 1+6zz+z^4, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+zz)+2gz)}{(1+6zz+z^4)\sqrt{(4z+4z^3)}}.$$

Hoc igitur casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int\frac{q\,\partial q}{1+q^4} + \frac{f-g}{2}\int\frac{p\,\partial p}{1-p^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

6°. SIT $n = 4$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 1$

33. Hic manent ut ante

$$v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}, \quad s = 1 + 6zz + z^4, \quad \text{at erit} \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^2 (f + gz)}{(1 + 6zz + z^4) \sqrt[4]{(4z + 4z^3)^3}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2} \int \frac{qq\,\partial q}{1+q^4} + \frac{f-g}{2} \int \frac{pp\,\partial p}{1-p^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

7°. SIT $n = 5$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 4$

34. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}, \quad s = 1 + 10zz + 5z^4, \quad F = 1 + 6zz + z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z + 4z^3,$$

ex quibus oritur formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3))}{(1 + 10zz + 5z^4) \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}},$$

cuius valor hoc casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2} \int \frac{\partial q}{1+q^5} + \frac{f-g}{2} \int \frac{\partial p}{1-p^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

8°. SIT $n = 5$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 3$

35. Hic erit

$$v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}, \quad s = 1 + 10zz + 5z^4, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3,$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(1+10zz+5z^4)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^2}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int \frac{q\,\partial q}{1+q^5} + \frac{f-g}{2}\int \frac{p\,\partial p}{1-p^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

9°. SIT $n = 5$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 2$

36. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}, \quad s = 1+10zz+5z^4, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^2\,(f(1+zz)+2gz)}{(1+10zz+5z^4)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^3}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int \frac{qq\,\partial q}{1+q^5} + \frac{f-g}{2}\int \frac{pp\,\partial p}{1-p^5}$$

existente ut ante

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

10°. SIT $n = 5$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 1$

37. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}, \quad s = 1+10zz+5z^4, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^3\,(f+gz)}{(1+10zz+5z^4)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^4}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{f+g}{2}\int\frac{q^3\partial q}{1+q^5} + \frac{f-g}{2}\int\frac{p^3\partial p}{1-p^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

11°. SIT $n = 6$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 5$

38. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}, \quad s = 1+15zz+15z^4+z^6,$$
$$F = 1+10zz+5z^4 \quad \text{et} \quad G = 5z+10z^3+z^5$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(f(1+10zz+5z^4)+g(5z+10z^3+z^5))}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}$$

hocque casu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial q}{1+q^6} + \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

12°. SIT $n = 6$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 4$

39. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}, \quad s = 1+15zz+15z^4+z^6,$$
$$F = 1+6zz+z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z+4z^3$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+6zz+z^4)+4g(z+z^3))}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[3]{(6z+20z^3+6z^5)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q\partial q}{1+q^6} + \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

13°. SIT $n = 6$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 3$

40. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}, \quad s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6,$$

$$F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^2(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt{(6z+20z^3+6z^5)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{qq\partial q}{1+q^6} + \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{pp\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

14°. SIT $n = 6$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 2$

41. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}, \quad s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^3(f(1+zz)+2gz)}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[3]{(6z+20z^3+6z^5)^2}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q^3\partial q}{1+q^6} + \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p^3\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

15°. SIT $n = 6$ ET $m = 5$ IDEOQUE $n - m = 1$

42. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}, \quad s = 1+15zz+15z^4+z^6, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^4(f+gz)}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)^5}},$$

cuius ergo valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q^4\partial q}{1+q^6} + \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p^4\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

OBSERVATIO IN HAS FORMULAS

43. Hic ii casus imprimis notatu sunt digni, quibus $n = 2m$, propterea quod tum in formulam integralem tantum signum $\sqrt{}$ quadraticum ingreditur; hos ergo casus evolvisse operae erit pretium. Posito igitur $n = 2m$ habebitur

$$v = \sqrt[2m]{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}.$$

Ac si loco

$$\frac{1}{2}(f+g) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(f-g)$$

litteras A et B restituamus, erit formula nostra

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^{m-1}(A(1+z)^m + B(1-z)^m)}{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}},$$

cuius integrale sumtis

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

erit

$$\text{Þ} = -A\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1+q^{2m}} + B\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^{2m}}.$$

44. Has autem formulas in genere integrare licet. Pro priore enim ponamus $q^m = t$ eritque $q^{m-1}\partial q = \frac{\partial t}{m}$ sicque pars prior erit

$$-\frac{A}{m}\int \frac{\partial t}{1+tt} = -\frac{A}{m}\text{ Ar. tang. } t = -\frac{A}{m}\text{ Ar. tang. } q^m.$$

Pro altera forma si ponamus $p^m = u$, erit altera pars

$$= \frac{B}{m}\int \frac{\partial u}{1-uu} = \frac{B}{2m}\, l\frac{1+p^m}{1-p^m},$$

sicque ipsum integrale erit

$$= \frac{B}{2m}\, l\frac{1+p^m}{1-p^m} - \frac{A}{m}\text{ Ar. tang. } q^m$$

sive

$$\text{Þ} = \frac{B}{2m}\, l\frac{v^m+(1+z)^m}{v^m-(1+z)^m} - \frac{A}{m}\text{ Ar. tang. }\frac{(1-z)^m}{v^m}.$$

ORDO SECUNDUS FORMULARUM SPECIALIUM EX FORMA

$$\text{Þ} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^{m-1}(fF+gG)}{v^m T}$$

45. Pro hac formula valores litterarum v et T supra in § 24 et 25, litterarum vero F et G in § 26 sunt assignati, ubi etiam vidimus, si ponatur

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

tum valorem integralem fore

$$\text{Þ} = -\frac{1}{2}(f+g)\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1-q^n} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n}$$

Hinc iam sequentes formulas speciales derivemus.

1°. SIT $n = 2$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 1$

46. Hic igitur erit

$$v = \sqrt{(1 + zz)}, \quad T = 2z, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc iam formula specialis erit

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(f + gz)}{2z\sqrt{(1 + zz)}},$$

cuius ergo integrale est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial q}{1 - qq} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial p}{1 - pp}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt{(1 + zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt{(1 + zz)}}.$$

2°. SIT $n = 3$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 2$

47. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(1 + 3zz)}, \quad T = 3z + z^3, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z,$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + zz) + 2gz)}{(3z + z^3)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial q}{1 - q^3} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial p}{1 - p^3}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{(1 + 3zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[3]{(1 + 3zz)}}.$$

3°. SIT $n = 3$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 1$

48. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(1 + 3zz)}, \quad T = 3z + z^3, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1 - zz)\,(f + gz)}{(3z + z^3)\sqrt[3]{(1 + 3zz)^2}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q\partial q}{1-q^3} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p\partial p}{1-p^3}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

4°. SIT $n=4$ ET $m=1$ IDEOQUE $n-m=3$

49. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}, \quad T = 4z+4z^3, \quad F = 1+3zz \quad \text{et} \quad G = 3z+z^3$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(4z+4z^3)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial q}{1-q^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial p}{1-p^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

5°. SIT $n=4$ ET $m=2$ IDEOQUE $n-m=2$

50. Hic erit

$$v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}, \quad T = 4z+4z^3, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+zz)+2gz)}{(4z+4z^3)\sqrt{(1+6zz+z^4)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q\partial q}{1-q^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p\partial q}{1-p^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

6°. SIT $n = 4$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 1$

51. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}, \quad T = 4z + 4z^3, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1 - zz)^2 (f + gz)}{(4z + 4z^3)\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)^3}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f + g)\int \frac{qq\partial q}{1 - q^4} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{pp\partial p}{1 - p^4}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}}.$$

7°. SIT $n = 5$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 4$

52. Hic igitur est

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad T = 5z + 10z^3 + z^5, \quad F = 1 + 6zz + z^4, \quad G = 4z + 4z^3$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3))}{(5z + 10z^3 + z^5)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial q}{1 - q^5} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial p}{1 - p^5}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}}$$

8°. SIT $n = 5$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 3$

53. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad T = 5z + 10z^3 + z^5, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+3zz)+g(3z+z^3)}{(5z+10z^3+z^5)\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)^2}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int \frac{q\partial q}{1-q^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{p\partial p}{1-p^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}}.$$

9°. SIT $n = 5$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 2$

54. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}, \quad T = 5z+10z^3+z^5, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^2\,(f(1+zz)+2gz)}{(5z+10z^3+z^5)\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)^3}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int \frac{qq\partial q}{1-q^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{pp\partial p}{1-p^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}}.$$

10°. SIT $n = 5$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 1$

55. Hic igitur est

$$v = \sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}, \quad T = 5z+10z^3+z^5, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^3\,(f+gz)}{(5z+10z^3+z^5)\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)^4}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q^3\partial q}{1-q^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p^3\partial p}{1-p^5}$$

existente ut ante

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}}.$$

11°. SIT $n = 6$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 5$

56. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}, \quad T = 6z+20z^3+6z^5,$$
$$F = 1+10zz+5z^4 \quad \text{et} \quad G = 5z+10z^3+z^5$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(f(1+10zz+5z^4)+g(5z+10z^3+z^5))}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial q}{1-q^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

12°. SIT $n = 6$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 4$

57. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}, \quad T = 6z+20z^3+6z^5,$$
$$F = 1+6zz+z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z+4z^3$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)\,(f(1+6zz+z^4)+4g(z+z^3))}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt[3]{(1+15zz+15z^4+z^6)}},$$

cuius valor erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q\partial q}{1-q^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p\partial p}{1-p^6}$$

existente ut ante

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

13°. SIT $n = 6$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 3$

58. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}, \quad T = 6z+20z^3+6z^5,$$

$$F = 1+3zz \quad \text{et} \quad G = 3z+z^3$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)^2(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt{(1+15zz+15z^4+z^6)}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{qq\partial q}{1-q^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{pp\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

14°. SIT $n = 6$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 2$

59. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}, \quad T = 6z+20z^3+6z^5,$$

$$F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z\,(1-zz)^3(f(1+zz)+2gz)}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt[3]{(6+15zz+15z^4+z^6)^2}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q^3\partial q}{1-q^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p^3\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

15°. SIT $n = 6$ ET $m = 5$ IDEOQUE $n - m = 1$

60. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}, \quad T = 6z+20z^3+6z^5, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

hincque formula specialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^4(f+gz)}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)^5}},$$

cuius valor est

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{2}(f+g)\int\frac{q^4\partial q}{1-q^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{p^4\partial p}{1-p^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

OBSERVATIO IN HAS FORMULAS

61. Hic igitur etiam casus notatu dignus occurrit, si $n = 2m$; quo fit

$$v = \sqrt[2m]{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}$$

ideoque

$$v^m = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}.$$

At si loco

$$\frac{1}{2}(f+g) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(f-g)$$

restituantur litterae A et B, erit formula nostra

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)^{m-1}(A(1+z)^m + B(1-z)^m)}{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}},$$

cuius integrale sumtis

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

erit

$$\mathfrak{h} = -A\int\frac{q^{m-1}\partial q}{1-q^{2m}} - B\int\frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^{2m}}.$$

Quodsi ergo faciamus ut ante

$$q^m = t \quad \text{et} \quad p^m = u,$$

integrale quaesitum erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{m}\int\frac{\partial t}{1-tt} - \frac{B}{m}\int\frac{\partial u}{1-uu}$$

sive

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2m}\,l\,\frac{1+q^m}{1-q^m} - \frac{B}{2m}\,l\,\frac{1+p^m}{1-p^m}$$

sive

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2m}\,l\,\frac{v^m+(1-z)^m}{v^m-(1-z)^m} - \frac{B}{2m}\,l\,\frac{v^m+(1+z)^m}{v^m-(1+z)^m}.$$

ORDO TERTIUS FORMULARUM SPECIALIUM EX FORMA

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z\,(fF+g\,G)}{v^{n-m}(1-zz)}$$

62. Hoc igitur casu est

$$F = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \frac{1}{2}(1-z)^{n-m}$$

et

$$G = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \frac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

tum vero

$$v = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}(1+z)^n - \frac{1}{2}(1-z)^n\right)},$$

unde positis

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

integrale inventum est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^{n-m-1}\partial q}{2+q^n}.$$

Hinc ergo formulae speciales prodibunt sequentes.

1°. SIT $n=2$ ET $m=1$ IDEOQUE $n-m=1$

63. Hic igitur erit

$$v = \sqrt{2z},\quad F=1 \quad \text{et} \quad G=z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z(f+gz)}{(1-zz)\sqrt{2z}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{\partial p}{2-pp} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial q}{2+qq}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt{2z}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt{2z}}.$$

2°. SIT $n=3$ ET $m=1$ IDEOQUE $n-m=2$

64. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(3z+z^3)},\quad F=1+zz \quad \text{et} \quad G=2z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1+zz)+2gz)}{(1-zz)\sqrt[3]{(3z+z^3)^2}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\partial p}{2-p^3} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\partial q}{2+q^3}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}.$$

3°. SIT $n = 3$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 1$

65. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(3z + z^3)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[3]{(3z + z^3)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - p^3} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 + q^3}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{(3z + z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[3]{(3z + z^3)}}.$$

4°. SIT $n = 4$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 3$

66. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + 3zz) + g\,(3z + z^3))}{(1 - zz)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)^3}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{pp\partial p}{2 - p^4} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{qq\partial q}{2 + q^4}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

5°. SIT $n = 4$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 2$

67. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + zz) + 2gz)}{(1 - zz)\sqrt{(4z + 4z^3)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\,\partial p}{2 - p^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\,\partial q}{2 + q^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

6°. SIT $n = 4$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 1$

68. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z$$

ideoque formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{\partial p}{2 - p^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial q}{2 + q^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

7°. SIT $n = 5$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 4$

69. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}, \quad F = 1 + 6zz + z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z + 4z^3;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3))}{(1 - zz)\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)^4}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^3 \partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^3 \partial q}{2+q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

8°. SIT $n = 5$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 3$

70. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}, \quad F = 1+3zz \quad \text{et} \quad G = 3z+z^3;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1+3zz)+g(3z+z^3))}{(1-zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^3}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{pp\partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{qq\partial q}{2+q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

9°. SIT $n = 5$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 2$

71. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1+zz)+2gz)}{(1-zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^2}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\partial q}{2+q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

10°. SIT $n = 5$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 1$

72. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - p^5} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 + q^5}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}}.$$

11°. SIT $n = 6$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 5$

73. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}, \quad F = 1 + 10zz + 5z^4 \quad \text{et} \quad G = 5z + 10z^3 + z^5;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 10zz + 5z^4) + g(5z + 10z^3 + z^5))}{(1 - zz)\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)^5}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{p^4 \partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{q^4 \partial q}{2 + q^6}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}}.$$

12°. SIT $n = 6$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 4$

74. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}, \quad F = 1 + 6zz + z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z + 4z^3;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 6zz + z^4) + 4gz(1 + zz))}{(1 - zz)\sqrt[3]{(6z + 20z^3 + 6z^5)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^3 \partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^3 \partial q}{2 + q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

13°. SIT $n = 6$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 3$

75. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 3zz) + g(3z + z^3))}{(1 - zz)\sqrt{(6z + 20z^3 + 6z^5)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{pp\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{qq\partial q}{2 + q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

14°. SIT $n = 6$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 2$

76. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + zz) + 2gz)}{(1 - zz)\sqrt[3]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\,\partial p}{2-p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\,\partial q}{2+q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

15°. SIT $n = 6$ ET $m = 5$ IDEOQUE $n - m = 1$

77. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f+gz)}{(1-zz)\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{\partial p}{2-p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial q}{2+q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

OBSERVATIO IN HAS FORMULAS

78. Consideremus hic iterum casum, quo $n = 2m$, et quia

$$v = \sqrt[2m]{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)},$$

erit

$$v^{n-m} = v^m = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)},$$

$$F = \frac{1}{2}(1+z)^m + \frac{1}{2}(1-z)^m \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{2}(1+z)^m - \frac{1}{2}(1-z)^m,$$

quo ergo casu erit

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(A(1+z)^m + B(1-z)^m)}{(1-zz)\sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}};$$

tum vero posito

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

integrale erit

$$\mathfrak{A} = A\int\frac{p^{m-1}\partial p}{2-p^{2m}} - B\int\frac{q^{m-1}\partial q}{2+q^{2m}},$$

quae formula posito

$$p^m = u \quad \text{et} \quad q^m = t$$

transit in hanc formam

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{m}\int\frac{\partial u}{2-uu} - \frac{B}{m}\int\frac{\partial t}{2+tt}$$

sive integrando erit

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{2m\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+p^m}{\sqrt{2}-p^m} - \frac{B}{m\sqrt{2}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{q^m}{\sqrt{2}}.$$

ORDO QUARTUS FORMULARUM SPECIALIUM EX FORMA

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial z(fF+gG)}{v^{n-m}(1-zz)}$$

78a.[1]) Hic est ut ante

$$F = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \frac{1}{2}(1-z)^{n-m}$$

et

$$G = \frac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \frac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

at vero

$$v = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}(1+z)^n + \frac{1}{2}(1-z)^n\right)};$$

tum vero posito

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

integrale inventum est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{q^{n-m-1}\partial q}{2-q^n},$$

formulae ergo speciales sequuntur:

1) In editione principe numerus 78 per errorem iteratur. G. F.

1°. SIT $n = 2$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 1$

79. Hic igitur erit

$$v = \sqrt{(1 + zz)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt{(1 + zz)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - pp} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 - qq}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt{(1 + zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt{(1 + zz)}}.$$

2°. SIT $n = 3$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 2$

80. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[3]{(1 + 3zz)}, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + zz) + 2gz)}{(1 - zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)^2}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{p\,\partial p}{2 - p^3} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{q\,\partial q}{2 - q^3}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{(1 + 3zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{\sqrt[3]{(1 + 3zz)}}.$$

3°. SIT $n = 3$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 1$

81. Hic igitur est

$$v = \sqrt[3]{(1 + 3zz)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial p}{2-p^3} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial q}{2-q^3}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

4°. SIT $n=4$ ET $m=1$ IDEOQUE $n-m=3$

82. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}, \quad F = 1+3zz \quad \text{et} \quad G = 3z+z^3;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z\,(f(1+3zz)+gz(3+zz))}{(1-zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}},$$

cuius integrale est

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{pp\partial p}{2-p^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{qq\partial q}{2-q^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

5°. SIT $n=4$ ET $m=2$ IDEOQUE $n-m=2$

83. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}, \quad F = 1+zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula specialis

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z\,(f(1+zz)+2gz)}{(1-zz)\sqrt{(1+6zz+z^4)}}$$

ideoque eius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{p\partial p}{2-p^4} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{q\partial q}{2-q^4}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

6°. SIT $n = 4$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 1$

84. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - p^4} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 - q^4}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{v}.$$

7°. SIT $n = 5$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 4$

85. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad F = 1 + 6zz + z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z(1 + zz);$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 6zz + z^4) + 4gz(1 + zz))}{(1 - zz)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^4}}$$

ideoque eius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{p^3 \partial p}{2 - p^5} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{q^3 \partial q}{2 - q^5}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{v}.$$

8°. SIT $n = 5$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 3$

86. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = z(3 + zz);$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z (f(1 + 3zz) + gz(3 + zz))}{(1 - zz)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^3}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{pp\partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{qq\partial q}{2-q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

9°. SIT $n = 5$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 2$

87. Hic erit

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z(f(1+zz)+2gz)}{(1-zz)\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{p\partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{q\partial q}{2-q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

10°. SIT $n = 5$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 1$

88. Hic erit

$$v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int\frac{\partial z(f+gz)}{(1-zz)\sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial p}{2-p^5} - \frac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial q}{2-q^5}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

11°. SIT $n = 6$ ET $m = 1$ IDEOQUE $n - m = 5$

89. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}, \quad F = 1 + 10zz + 5z^4 \quad \text{et} \quad G = 5z + 10z^3 + z^5;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + 10zz + 5z^4) + g(5z + 10z^3 + z^5))}{(1 - zz)\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)^5}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^4\,\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^4\,\partial q}{2 - q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

12°. SIT $n = 6$ ET $m = 2$ IDEOQUE $n - m = 4$

90. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}, \quad F = 1 + 6zz + z^4 \quad \text{et} \quad G = 4z(1 + zz);$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + 6zz + z^4) + 4gz(1 + zz))}{(1 - zz)\sqrt[3]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^3\,\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^3\,\partial q}{2 - q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

13°. SIT $n = 6$ ET $m = 3$ IDEOQUE $n - m = 3$

91. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}, \quad F = 1 + 3zz \quad \text{et} \quad G = 3z + z^3;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + 3zz) + gz(3 + zz))}{(1 - zz)\sqrt{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f+g)\int \frac{pp\,\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f-g)\int \frac{qq\,\partial q}{2 - q^6}$$

existente

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}.$$

14°. SIT $n = 6$ ET $m = 4$ IDEOQUE $n - m = 2$

92. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}, \quad F = 1 + zz \quad \text{et} \quad G = 2z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f(1 + zz) + 2gz)}{(1 - zz)\sqrt[3]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{p\,\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{q\,\partial q}{2 - q^6}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{v}.$$

15°. SIT $n = 6$ ET $m = 5$ IDEOQUE $n - m = 1$

93. Hic erit

$$v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}, \quad F = 1 \quad \text{et} \quad G = z;$$

hinc formula

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - p^6} - \frac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 - q^6}$$

existente

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - z}{v}.$$

OBSERVATIO IN HAS FORMULAS

94. Evolvamus iterum casum, quo in genere est $n = 2m$ ideoque

$$v = \sqrt[2m]{\left(\frac{1}{2}(1 + z)^{2m} + \frac{1}{2}(1 - z)^{2m}\right)},$$

$$F = \frac{1}{2}(1 + z)^m + \frac{1}{2}(1 - z)^m$$

et

$$G = \frac{1}{2}(1 + z)^m - \frac{1}{2}(1 - z)^m,$$

unde fit

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial z\,(A(1+z)^m + B(1-z)^m)}{(1-zz)\sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}\right)}},$$

cuius integrale posito

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

ita expressum invenitur

$$\mathfrak{A} = A\int \frac{p^{m-1}\partial p}{2-p^{2m}} - B\int \frac{q^{m-1}\partial q}{2-q^{2m}}.$$

Quodsi iam hic ponamus $p^m = u$ et $q^m = t$, erit

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{m}\int \frac{\partial u}{2-uu} - \frac{B}{m}\int \frac{\partial t}{2-tt}.$$

Supra autem vidimus esse

$$\int \frac{\partial u}{2-uu} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}$$

ideoque etiam

$$\int \frac{\partial t}{2-tt} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t},$$

quocirca valor integralis per meros logarithmos ita exprimetur

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{2m\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+p^m}{\sqrt{2}-p^m} - \frac{B}{2m\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+q^m}{\sqrt{2}-q^m}.$$

DE INSIGNI USU CALCULI IMAGINARIORUM IN CALCULO INTEGRALI

Conventui exhibuit die 3. Nov. 1777

Commentatio 707 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **12** (1794), 1801, p. 3—21
Summarium ibidem p. 59—60

SUMMARIUM

Lorsque Z indique une fonction de z telle que l'intégrale $\int Z\partial z = V$ puisse être exprimée soit algébriquement, soit par des logarithmes ou des arcs de cercle, en substituant à la place de z une quantité imaginaire quelconque

$$z = y\,(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta),$$

la fonction Z prendra la forme

$$Z = M + N\sqrt{-1};$$

l'intégrale V se revêtira aussi d'une forme pareille

$$V = P + Q\sqrt{-1}$$

et il y aura

$$\int M\partial y = \dot{P}\cos.\,\theta + Q\sin.\,\theta,$$

$$\int N\partial y = Q\cos.\,\theta - P\sin.\,\theta,$$

de sorte que, lorsque les quantités P et Q seront trouvées, on sera en état d'assigner les valeurs de $\int M\partial y$ et $\int N\partial y$, ce qui n'aura aucune difficulté, toutes les fois que l'intégrale V sera algébrique; mais lorsqu'elle renferme des logarithmes ou des arcs circulaires, il n'est

pas si facile de trouver les valeurs de P et Q, parceque la réduction de V à la forme $P + Q\sqrt{-1}$ rencontre quelquefois d'assez grandes difficultés. L'objet de ce mémoire est de faciliter cette réduction, en faisant voir que

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l(\sqrt{aa + bb}) + \sqrt{-1} \cdot \text{A tg.}\frac{b}{a},$$

$$l\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \text{A tg.}\frac{b}{a},$$

$$la(\cos.\alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin.\alpha) = la + \alpha\sqrt{-1},$$

$$\text{A tg.}(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\text{A tg.}\frac{2a}{1-aa-bb} + \frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{(1+b)^2+aa}{(1-b)^2+aa},$$

$$\text{A tg.}\, a(\cos.\alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin.\alpha) = \frac{1}{2}\text{A tg.}\frac{2a\cos.\alpha}{1-aa} + \frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{1+2a\sin.\alpha+aa}{1-2a\sin.\alpha+aa}.$$

Ces transformations servent de base à une suite de problèmes, où une fonction donnée Z de z est réduite à la forme $A + B\sqrt{-1}$, après avoir mis

$$z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\theta).$$

L'intégration de la formule différentielle

$$\frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}},$$

servant d'exemple de l'utilité de ces réductions dans le calcul intégral, termine le mémoire.

1. Cum nuper integrale formulae differentialis

$$\frac{\partial x(1+xx)^2}{(1-xx)\sqrt[4]{(1-6xx+x^4)^3}}$$

eruissem, quod posito brevitatis gratia

$$\sqrt[4]{(1-6xx+x^4)} = v$$

inveneram [1])

$$= \frac{1}{2}l\frac{1+xx+vv-2vx}{1+xx+vv+2vx} - \text{Arc. tang.}\frac{2vx}{1+xx-vv},$$

1) Vide Commentationem 689 huius voluminis p. 251. A. K.

affirmare non dubitavi hoc ipsum integrale non nisi ope Calculi imaginariorum obtineri posse. Tractaveram enim ante istam formulam differentialem

$$\frac{\partial y\,(1-yy)^2}{(1+yy)\sqrt[4]{(1+6yy+y^4)^3}},$$

ex qua illa oritur, si statuatur $y = x\sqrt{-1}$. Nunc ergo quoque, postquam in integrali posterioris loco y scripsissem $x\sqrt{-1}$, integrale superioris prodire debebat. Ad hoc autem requirebatur, ut tam logarithmi quam arcus quantitatum imaginariarum ita evolverentur, ut ad formam generalem $A + B\sqrt{-1}$ reducerentur.

2. Hoc autem phaenomenon in innumeris aliis casibus occurrere potest, qui ex hac consideratione originem trahunt. Sit Z eiusmodi functio ipsius z, ut formulae differentialis $Z\partial z$ integrale utcunque, sive algebraice sive per logarithmos sive arcus circulares, exprimi queat, quod integrale per litteram V designemus, ut sit

$$\int Z\partial z = V.$$

Iam loco z substituamus quantitatem imaginariam quamcunque, quam, uti constat, semper tali forma repraesentare licet

$$z = y\,(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta),$$

ubi angulum θ ut constantem spectabimus, ita ut sola y sit variabilis; hoc modo erit

$$\partial z = \partial y\,(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta);$$

functio autem Z recipiat similem formam

$$Z = M + N\sqrt{-1},$$

ita ut iam formula integranda sit

$$\int Z\partial z = \int \partial y\,(M\cos.\,\theta - N\sin.\,\theta) + \sqrt{-1}\cdot\int \partial y\,(M\sin.\,\theta + N\cos.\,\theta),$$

cuius prior pars est realis, posterior vero imaginaria.

3. Fiat nunc eadem substitutio, nempe $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\theta)$, in integrali invento V, unde pariter forma imaginaria

$$P + Q\sqrt{-1}$$

prodeat necesse est; et quoniam partes reales et imaginariae seorsim inter se comparari debent, hinc orientur duae sequentes aequalitates

$$P = \cos.\theta \int M\partial y - \sin.\theta \int N\partial y,$$

$$Q = \sin.\theta \int M\partial y + \cos.\theta \int N\partial y,$$

unde colligimus

$$\int M\partial y = P\cos.\theta + Q\sin.\theta$$

et

$$\int N\partial y = Q\cos.\theta - P\sin.\theta,$$

hocque modo, si inventae fuerint binae quantitates P et Q, ambo integralia tam $\int M\partial y$ quam $\int N\partial y$ exhiberi poterunt.

4. Nisi autem functio proposita Z fuerit admodum simplex, plerumque litterae M et N hinc proveniunt functiones tam complicatae novae variabilis y, ut vix alia via pateat harum formularum $\int M\partial y$ et $\int N\partial y$ integralia investigandi praeter hanc ipsam, quam modo indicavimus et quae per imaginaria procedit; totum ergo negotium huc redit, ut ex invento integrali V ambae quantitates P et Q inde oriundae definiantur. Quatenus igitur istud integrale V partes continet algebraicas, ista operatio nulla laborat difficultate; quando autem logarithmos et arcus circulares involvit, haud exigua sagacitate opus est, ut eius valor in formam $P + Q\sqrt{-1}$ transmutetur; quamobrem subsidia hic sum traditurus, quibus omnes huiusmodi transformationes perfici queant.

5. Cuncta autem haec subsidia commodissime repeti possunt ex sola formula

$$\text{Arc. tang.}\, t\sqrt{-1}.$$

Cum enim eius differentiale sit

$$= \frac{\partial t\sqrt{-1}}{1-tt},$$

huius integrale vicissim erit

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t},$$

siquidem ita definiatur, ut evanescat posito $t = 0$, quandoquidem hoc casu etiam arcus evanescit. Hinc igitur iam nacti sumus hanc primam reductionem

$$\text{Arc. tang. } t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t},$$

ubi in generali forma $A + B\sqrt{-1}$ est $A = 0$.

6. Ponamus nunc

$$t = u\sqrt{-1}$$

eritque

$$t\sqrt{-1} = -u \quad \text{et} \quad \text{Arc. tang. } t\sqrt{-1} = -\text{Arc. tang. } u,$$

ex quo habebimus

$$-\text{Arc. tang. } u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}},$$

unde vicissim colligitur

$$l \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = -\frac{2}{\sqrt{-1}} \text{Arc. tang. } u = +2\sqrt{-1} \cdot \text{Arc. tang. } u.$$

Cum porro sit

$$\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = \frac{(1+u\sqrt{-1})^2}{1+uu},$$

erit

$$l \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = 2l(1+u\sqrt{-1}) - 2l\sqrt{(1+uu)} = 2\sqrt{-1} \cdot \text{Arc. tang. } u,$$

unde colligitur haec nova reductio

$$l(1+u\sqrt{-1}) = l\sqrt{(1+uu)} + \sqrt{-1} \cdot \text{Arc. tang. } u.$$

7. Cum igitur omnes formulae imaginariae ad formam

$$p(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin. \alpha)$$

reduci queant, erit

$$lp(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha) = lp\cos.\alpha + l(1 + \sqrt{-1}\cdot\tang.\alpha)$$

et posito $u = \tang.\alpha$ fiet

$$l(1 + \tang.\alpha\sqrt{-1}) = -l\cos.\alpha + \alpha\sqrt{-1}.$$

Hinc deducimus istam reductionem non minus memorabilem

$$lp(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha) = lp + \alpha\sqrt{-1}$$

ideoque

$$l(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha) = \alpha\sqrt{-1}.$$

8. Hinc igitur iam facilem modum impetravimus omnium quantitatum imaginariarum logarithmos ad formam $A + B\sqrt{-1}$ revocandi. At vero pro arcubus imaginariis hanc solam reductionem adhuc sumus nacti, qua erat

$$\text{Arc. tang.}\, t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\frac{1+t}{1-t}.$$

Desideratur ergo adhuc regula huiusmodi arcum imaginarium

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1})$$

ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reducendi. Talis quidem regula iam passim reperitur[1]); quia autem plerumque nimis operose est eruta, sequenti modo eam immediate ex solo principio hic stabilito deducemus.

9. Quaeramus scilicet primo summam huiusmodi binorum arcuum, quae sit

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) + \text{Arc. tang.}\,(p - q\sqrt{-1}),$$

quam designemus littera R, et cum in genere sit

$$\text{Arc. tang.}\, a + \text{Arc. tang.}\, b = \text{Arc. tang.}\,\frac{a+b}{1-ab},$$

1) Vide notam 1 p. 13 et notam 1 p. 132 huius voluminis. G. F.

ob

$$a = p + q\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad b = p - q\sqrt{-1}$$

erit

$$R = \text{Arc. tang.} \frac{2p}{1-pp-qq}.$$

Simili modo ponatur eorundem arcuum differentia

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) - \text{Arc. tang.}\,(p - q\sqrt{-1}) = S,$$

et quia

$$\text{Arc. tang.}\, a - \text{Arc. tang.}\, b = \text{Arc. tang.} \frac{a-b}{1+ab},$$

erit

$$S = \text{Arc. tang.} \frac{2q\sqrt{-1}}{1+pp+qq}.$$

Initio autem vidimus esse

$$\text{Arc. tang.}\, t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l \frac{1+t}{1-t},$$

unde sumto

$$t = \frac{2q}{1+pp+qq}$$

erit

$$S = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l \frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp}.$$

10. Inventis igitur binarum illarum formularum tam summa R quam differentia S utramque seorsim exhibere licet; erit enim

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) = \frac{R+S}{2}$$

ideoque

$$\text{Arc. tang.}\,(p + q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.} \frac{2p}{1-pp-qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l \frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp}$$

similique modo erit

$$\text{Arc. tang.}\,(p - q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.} \frac{2p}{1-pp-qq} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l \frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp},$$

quae quidem ex priore sponte deducitur loco q scribendo $-q$. Hic commode

$$\text{Arc. tang.}\frac{2p}{1-pp-qq}$$

in duos resolvere licet, quo facto erit

$$\text{Arc. tang.}\,(p+q\sqrt{-1})$$
$$=\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\frac{p}{1-q}+\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\frac{p}{1+q}+\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{(1+q)^2+pp}{(1-q)^2+pp}.$$

11. Nunc igitur loco $p+q\sqrt{-1}$ substituamus formam

$$r\,(\cos.\,\alpha+\sqrt{-1}\cdot\sin.\,\alpha),$$

ut sit

$$p=r\cos.\,\alpha \quad \text{et} \quad q=r\sin.\,\alpha,$$

ac reperietur

$$\text{Arc. tang.}\,r\,(\cos.\,\alpha+\sqrt{-1}\cdot\sin.\,\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\frac{2r\cos.\,\alpha}{1-rr}+\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{1+2r\sin.\,\alpha+rr}{1-2r\sin.\,\alpha+rr}.$$

Per posteriorem autem formam erit quoque

$$\text{Arc. tang.}\,r\,(\cos.\,\alpha+\sqrt{-1}\cdot\sin.\,\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\frac{r\cos.\,\alpha}{1-r\sin.\,\alpha}+\frac{1}{2}\,\text{Arc. tang.}\frac{r\cos.\,\alpha}{1+r\sin.\,\alpha}+\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{1+2r\sin.\,\alpha+rr}{1-2r\sin.\,\alpha+rr}.$$

12. Hae iam formulae hactenus inventae omnia subsidia complectuntur, quibus indigebimus ad omnes logarithmos et arcus circulares imaginarios resolvendos. Formulas autem inventas hic simul aspectui exponamus

I. $$l\,(a+b\sqrt{-1})=la+l\left(1+\frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)=l\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{b}{a},$$

unde deducitur ista saepissime occurrens

$$l\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{b}{a}.$$

Porro etiam notetur haec formula

$$la(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha) = la + \alpha\sqrt{-1}.$$

Pro arcubus autem has adepti sumus formulas

$$\text{II. Arc. tang. } (a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\text{ Arc. tang. }\frac{2a}{1-aa-bb} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{(1+b)^2+aa}{(1-b)^2+aa}$$

vel etiam

$$\text{Arc. tang. } a\,(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\text{ Arc. tang. }\frac{2a\cos.\alpha}{1-aa} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{1+2a\sin.\alpha+aa}{1-2a\sin.\alpha+aa}.$$

13. His fundamentis constitutis consideremus casus, quibus integrale $\int Z\partial z$ per logarithmos et arcus circulares exprimi potest, id quod semper evenit, quando Z est functio rationalis ipsius z; tum autem integrale componitur ex huiusmodi partibus

$$\text{I.} \qquad l\,(1 \pm z),$$

$$\text{II.} \quad l\,(1 - 2z\cos.\alpha + zz),$$

$$\text{III.} \quad \text{Arc. tang. }\frac{z\sin.\alpha}{1 - z\cos.\alpha},$$

vel saltem integralia, quae reperiuntur, facile ad tales formas redigi possunt. Harum ergo resolutionum, quando statuitur $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$, nonnullas in sequentibus problematibus expediemus.

PROBLEMA 1

14. *Hanc formulam logarithmicam*

$$l\,(1 \pm z)$$

posito $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$ *ad formam generalem* $A + B\sqrt{-1}$ *reducere.*

SOLUTIO

Evolvamus primo formulam

$$l(1+z) = l(1 + y\cos.\theta + y\sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$$

et comparatione cum superiore forma generali facta erit

$$a = 1 + y\cos.\theta \quad \text{et} \quad b = y\sin.\theta,$$

unde colligitur

$$l(1+z) = l\sqrt{(1 + 2y\cos.\theta + yy)} + \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.\theta}{1+y\cos.\theta}.$$

Hinc autem alter casus $l(1-z)$ sponte derivatur sumendo y negative eritque ergo

$$l(1-z) = l\sqrt{(1 - 2y\cos.\theta + yy)} - \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.\theta}{1-y\cos.\theta}.$$

Saepenumero autem in integralibus occurrere solet formula $l\frac{1+z}{1-z}$, cuius ergo valor posito

$$z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$$

sequenti modo exprimetur

$$l\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\,l\frac{1+2y\cos.\theta+yy}{1-2y\cos.\theta+yy} + \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.\theta}{1+y\cos.\theta}$$
$$+ \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.\theta}{1-y\cos.\theta};$$

quare si ambo arcus in unum contrahantur, prodibit

$$l\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\,l\frac{1+2y\cos.\theta+yy}{1-2y\cos.\theta+yy} + \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{2y\sin.\theta}{1-yy}.$$

PROBLEMA 2

15. *Proposita formula logarithmica*

$$l(1 - 2z\cos.\alpha + zz),$$

si in ea ponatur $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$, *eius valorem ad formulam postulatam* $A + B\sqrt{-1}$ *reducere.*

SOLUTIO

Si hic immediate substitutionem facere vellemus, in calculos satis molestos delaberemur; quos ut evitemus, observasse iuvabit formulam

$$1 - 2z\cos.\alpha + zz$$

esse productum ex his factoribus

$$(1 - z(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha))(1 - z(\cos.\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha)),$$

quorum ergo logarithmos invicem addi oportet.

Tractemus ergo primo formulam

$$l(1 - z(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha)),$$

et cum sit

$$y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha) = z(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha),$$

quoniam in genere est

$$(\cos.\beta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\beta)(\cos.\gamma + \sqrt{-1}\cdot\sin.\gamma) = \cos.(\beta+\gamma) + \sqrt{-1}\cdot\sin.(\beta+\gamma),$$

erit

$$l(1 - z(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha)) = l\left(1 - y(\cos.(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\cdot\sin.(\alpha+\theta))\right).$$

Hic ergo facta comparatione erit

$$a = 1 - y\cos.(\alpha+\theta) \quad \text{et} \quad b = -y\sin.(\alpha+\theta),$$

unde eius valor resolutus erit

$$l(1 - z(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha))$$
$$= \frac{1}{2} l(1 - 2y\cos.(\alpha+\theta) + yy) - \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.(\alpha+\theta)}{1-y\cos.(\alpha+\theta)}.$$

Hinc altera formula facile deducitur sumendo angulum α negative eritque

$$l(1 - z(\cos.\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha))$$
$$= \frac{1}{2} l(1 - 2y\cos.(\theta-\alpha) + yy) - \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.(\theta-\alpha)}{1-y\cos.(\theta-\alpha)}.$$

Nunc igitur tantum opus est ambos valores, quos modo invenimus, invicem addere sicque prodibit haec reductio

$$l(1 - 2z\cos.\alpha + zz)$$
$$= \frac{1}{2} l(1 - 2y\cos.(\alpha+\theta) + yy) - \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.(\alpha+\theta)}{1-y\cos.(\alpha+\theta)}$$
$$+ \frac{1}{2} l(1 - 2y\cos.(\theta-\alpha) + yy) - \sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{y\sin.(\theta-\alpha)}{1-y\cos.(\theta-\alpha)}.$$

PROBLEMA 3

16. *Proposita formula pro arcu circulari*

$$T = \text{Arc. tang.}\frac{z\sin.\alpha}{1-z\cos.\alpha},$$

si in ea ponatur $z = y(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$, *eius valorem inde resultantem ad formam* $A + B\sqrt{-1}$ *revocare.*

SOLUTIO

Quia hic in numeratore et denominatore imaginaria occurrunt, ad simpliciorem formam perveniemus, si utrinque addamus Arc. α sive Arc. tang. $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$; sic enim erit

$$T + \alpha = \text{Arc. tang.}\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha - z} = 90^0 - \text{Arc. tang.}\frac{\cos.\alpha - z}{\sin.\alpha},$$

ideoque

$$T = 90^0 - \alpha - \text{Arc. tang.} \frac{\cos. \alpha - z}{\sin. \alpha}.$$

Iam in hac postrema formula ponamus

$$z = y(\cos. \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin. \theta)$$

fietque

$$\text{Arc. tang.} \frac{\cos. \alpha - z}{\sin. \alpha} = \text{Arc. tang.} \frac{\cos. \alpha - y \cos. \theta - y\sqrt{-1} \cdot \sin. \theta}{\sin. \alpha},$$

quae expressio comparata cum formula generali Arc. tang. $(a + b\sqrt{-1})$ dat

$$a = \frac{\cos. \alpha - y \cos. \theta}{\sin. \alpha} \quad \text{et} \quad b = -\frac{y \sin. \theta}{\sin. \alpha}.$$

Hinc igitur erit

$$1 - aa - bb = -\frac{\cos. 2\alpha - 2y \cos. \alpha \cos. \theta + yy}{\sin. \alpha^2}$$

ideoque

$$\frac{2a}{1 - aa - bb} = \frac{\sin. 2\alpha - 2y \sin. \alpha \cos. \theta}{-\cos. 2\alpha + 2y \cos. \alpha \cos. \theta - yy},$$

ergo

$$\text{Arc. tang.} \frac{2a}{1 - aa - bb} = -\text{Arc. tang.} \frac{\sin. 2\alpha - 2y \sin. \alpha \cos. \theta}{\cos. 2\alpha - 2y \cos. \alpha \cos. \theta + yy}.$$

Iam pro parte imaginaria erit

$$1 + aa + bb = \frac{1 - 2y \cos. \alpha \cos. \theta + yy}{\sin. \alpha^2},$$

unde colligitur numerator

$$(1 + b)^2 + aa = \frac{1 - 2y \cos. (\theta - \alpha) + yy}{\sin. \alpha^2}$$

et denominator

$$(1 - b)^2 + aa = \frac{1 - 2y \cos. (\alpha + \theta) + yy}{\sin. \alpha^2},$$

sicque pars imaginaria erit

$$\frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{(1 + b)^2 + aa}{(1 - b)^2 + aa} = \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{1 - 2y \cos. (\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y \cos. (\alpha + \theta) + yy};$$

quamobrem hinc colligimus

$$\text{Arc. tang.}\frac{\cos.\alpha - z}{\sin.\alpha} = -\frac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{\sin. 2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{\cos. 2\alpha - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy}$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{1 - 2y\cos.(\theta-\alpha) + yy}{1 - 2y\cos.(\alpha+\theta) + yy}.$$

His iam formulis inventis reductio ipsius formulae propositae ita se habebit

$$\text{Arc. tang.}\frac{z\sin.\alpha}{1 - z\cos.\alpha} = 90^0 - \alpha + \frac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{\sin. 2\alpha - 2y\sin.\alpha\cos.\theta}{\cos. 2\alpha - 2y\cos.\alpha\cos.\theta + yy}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{1 - 2y\cos.(\theta-\alpha) + yy}{1 - 2y\cos.(\alpha+\theta) + yy}.$$

Hae iam reductiones haud difficulter ad omnes formulas accommodari poterunt; quod quo clarius appareat, sequens exemplum adiungamus.

INTEGRATIO FORMULAE DIFFERENTIALIS

$$\frac{\partial x}{(3 - xx)\sqrt[3]{(1 - 3xx)}} = \partial V$$

17. Quoniam nondum apparet, quomodo hanc ipsam formulam tractari conveniat, eam ad sequentem formam imaginariam ponendo

$$x = z\sqrt{-1}$$

reducamus, ut sit

$$\partial V = \frac{\partial z\sqrt{-1}}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}};$$

quae forma iam ita comparata deprehenditur, ut per praecepta non ita pridem tradita[1]) ad integrationem perduci possit; eius ergo resolutionem sequenti modo expedire poterimus.

---

1) Vide Commentationem 695 huius voluminis, p. 287. G. F.

18. Ponamus igitur

$$\frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} = \partial T,$$

ut sit

$$V = T\sqrt{-1}.$$

Hanc autem formam sequenti modo repraesentemus

$$\partial T = \frac{z\partial z}{(3z+z^3)\sqrt[3]{(1+3zz)}},$$

ubi brevitatis gratia statuamus

$$\sqrt[3]{(1+3zz)} = v,$$

ut sit

$$\partial T = \frac{z\partial z}{v(3z+z^3)},$$

hicque secundum nostra praecepta statuamus

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{et} \quad q = \frac{1-z}{v},$$

unde fit

$$p+q = \frac{2}{v} \quad \text{et} \quad p-q = \frac{2z}{v}$$

hincque

$$z = \frac{p-q}{p+q}$$

ideoque differentiando

$$\partial z = \frac{2q\partial p - 2p\partial q}{(p+q)^2} = \frac{1}{2}vv(q\partial p - p\partial q),$$

quo valore substituto impetramus

$$\partial T = \frac{vz(q\partial p - p\partial q)}{2(3z+z^3)}.$$

19. Cum iam sit

$$1+z = pv \quad \text{et} \quad 1-z = qv,$$

erit primo

$$2z = v(p-q),$$

tum vero summa cuborum dabit

$$(1+z)^3+(1-z)^3=v^3(p^3+q^3)=2+6zz.$$

Quoniam igitur posuimus

$$\sqrt[3]{(1+3zz)}=v,$$

erit

$$v^3=1+3zz;$$

quamobrem habebimus

$$(p^3+q^3)(1+3zz)=2+6zz,$$

consequenter

$$p^3+q^3=2.$$

Denique vero differentia cuborum praebet

$$(p^3-q^3)v^3=6z+2z^3;$$

unde patet esse

$$3z+z^3=\frac{1}{2}(p^3-q^3)v^3;$$

at vero differentia quadratorum dat

$$(pp-qq)vv=4z,$$

unde fit

$$z=\frac{1}{4}vv(pp-qq).$$

20. Substituantur nunc isti valores loco z et $3z+z^3$ atque nostra formula evadet

$$\partial T=\frac{(pp-qq)(q\partial p-p\partial q)}{4(p^3-q^3)},$$

ubi ergo tantum binae litterae p et q occurrunt, quae ita a se invicem pendent, ut sit $p^3+q^3=2$, ideoque differentiando

$$pp\partial p+qq\partial q=0,$$

consequenter

$$\text{sive}\quad \partial p=\frac{-qq\partial q}{pp}\quad \text{sive}\quad \partial q=\frac{-pp\partial p}{qq}.$$

21. Dividatur nunc haec forma in duas partes ponendo

$$\frac{pp(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial P \quad \text{et} \quad \frac{qq(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial Q,$$

ut sit

$$\partial T = \frac{1}{4}\partial P - \frac{1}{4}\partial Q,$$

hicque statim patet, si in priore formula loco $pp\partial p$ scribatur $-qq\partial q$, tum prodire

$$\partial P = -\frac{\partial q(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3}.$$

Quia vero est $p^3 + q^3 = 2$ ideoque $p^3 = 2 - q^3$, elementum ∂P per solam litteram q ita exprimetur, ut sit

$$\partial P = -\frac{\partial q}{1 - q^3}.$$

22. Simili modo si in altera formula, ∂Q, loco $qq\partial q$ scribatur $-pp\partial p$, prodibit

$$\partial Q = \frac{\partial p\,(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3},$$

quae ergo ob relationem inter p et q suppeditat hanc formulam

$$\partial Q = \frac{\partial p}{p^3 - 1} = \frac{-\partial p}{1 - p^3}.$$

His igitur coniunctis erit

$$4\partial T = \frac{\partial p}{1 - p^3} - \frac{\partial q}{1 - q^3}$$

sicque totum negotium perductum est ad duas formulas differentiales rationales, quas ergo per logarithmos et arcus circulares integrare licet.

23. Ad haec integralia invenienda statuatur

$$\frac{1}{1 - p^3} = \frac{F}{1 - p} + \frac{G}{1 + p + pp},$$

ubi notetur fore

$$F = \frac{1-p}{1-p^3} = \frac{1}{1+p+pp}$$

posito $1-p=0$ sive $p=1$, unde fit $F=\frac{1}{3}$; tum vero erit

$$G = \frac{1+p+pp}{1-p^3} = \frac{1}{1-p}$$

posito $1+p+pp=0$. Hic iam, ut littera p ex denominatore tolli queat, multiplicetur supra et infra per $2+p$; fiet

$$G = \frac{2+p}{2-p-pp}.$$

Quia igitur est $p+pp=-1$, erit

$$G = \frac{2+p}{3};$$

quamobrem habebimus

$$\frac{3\partial p}{1-p^3} = \frac{\partial p}{1-p} + \frac{(2+p)\partial p}{1+p+pp}.$$

Constat autem esse

$$\int \frac{\partial p}{1-p} = -l(1-p)$$

et

$$\int \frac{p\partial p + 2\partial p}{pp+p+1} = \frac{1}{2} l(1+p+pp) + \frac{3}{2}\int \frac{\partial p}{1+p+pp}.$$

Novimus autem in genere esse

$$\int \frac{\partial p}{1-2p\cos.\alpha+pp} = \frac{1}{\sin.\alpha} \text{Arc. tang.} \frac{p \sin.\alpha}{1-p\cos.\alpha},$$

unde patet sumi debere $\alpha = 120^0$, et ob

$$\sin.\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

erit

$$\int \frac{\partial p}{1+p+pp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc. tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p}$$

sicque totum integrale erit

$$3\int\frac{\partial p}{1-p^3}=-l(1-p)+\frac{1}{2}l(1+p+pp)$$
$$+\sqrt{3}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{p\sqrt{3}}{2+p}$$

similique modo erit

$$3\int\frac{\partial q}{1-q^3}=-l(1-q)+\frac{1}{2}l(1+q+qq)$$
$$+\sqrt{3}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

24. His igitur inventis erit

$$12\,T=l\frac{1-q}{1-p}+\frac{1}{2}\,l\frac{1+p+pp}{1+q+qq}$$
$$+\sqrt{3}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{p\sqrt{3}}{2+p}-\sqrt{3}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

Quare, cum sit

$$p=\frac{1+z}{v}\quad\text{et}\quad q=\frac{1-z}{v},$$

habebimus

$$T=\frac{1}{12}\,l\frac{v-1+z}{v-1-z}+\frac{1}{24}\,l\frac{vv+v(1+z)+(1+z)^2}{vv+v(1-z)+(1-z)^2}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{(1-z)\sqrt{3}}{2v+1-z}.$$

25. Nunc secundum praecepta supra exposita, ubi sumsimus

$$z=y(\cos.\,\theta+\sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta),$$

quia est

$$x=z\sqrt{-1},$$

erit

$$z=-x\sqrt{-1}=y(\cos.\,\theta+\sqrt{-1}\cdot\sin.\,\theta),$$

unde patet statui debere

$$\theta=90^0\quad\text{et}\quad y=-x;$$

hocque notato, ut superiores reductiones ad nostrum casum propius accommodemus, ibi ubique loco z et y scribamus $\frac{z}{s}$ et $\frac{y}{s}$, quo facto reductiones erunt

$$\text{I. } l(s+z) = +\frac{1}{2} l(ss + 2sy\cos.\theta + yy) + \sqrt{-1}\cdot \text{Arc. tang.} \frac{y \sin.\theta}{s + y\cos.\theta},$$

$$\text{II. } l(ss - 2sz\cos.\alpha + zz) = \frac{1}{2} l(ss - 2sy\cos.(\alpha+\theta) + yy)$$
$$- \sqrt{-1}\cdot \text{Arc. tang.} \frac{y\sin.(\alpha+\theta)}{s - y\cos.(\alpha+\theta)} + \frac{1}{2} l(ss - 2sy\cos.(\theta-\alpha) + yy)$$
$$- \sqrt{-1}\cdot \text{Arc. tang.} \frac{y\sin.(\theta-\alpha)}{s - y\cos.(\theta-\alpha)},$$

$$\text{III. Arc. tang.} \frac{z\sin.\alpha}{s - z\cos.\alpha} = 90^0 - \alpha + \frac{1}{2}\text{ Arc. tang.} \frac{ss\sin.2\alpha - 2sy\sin.\alpha\cos.\theta}{ss\cos.2\alpha - 2sy\cos.\alpha\cos.\theta + yy}$$
$$- \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{ss - 2sy\cos.(\theta-\alpha) + yy}{ss - 2sy\cos.(\alpha+\theta) + yy}.$$

26. Iam haec praecepta ad singulas partes integralis inventi applicemus, ac primo quidem pro formula $l(v-1+z)$ erit $s = v-1$, et ob

$$y = -x \quad \text{et} \quad \theta = 90^0$$

colligitur

$$\text{I. } l(v-1+z) = \frac{1}{2} l((v-1)^2 + xx) - \sqrt{-1}\cdot \text{Arc. tang.} \frac{x}{v-1},$$

$$\text{II. } l(v-1-z) = \frac{1}{2} l((v-1)^2 + xx) + \sqrt{-1}\cdot \text{Arc. tang.} \frac{x}{v-1}.$$

III. Pro formula $l(vv + v(1+z) + (1+z)^2)$ patet fore

$$ss = vv + v + 1 \quad \text{seu} \quad s = \sqrt{(vv+v+1)},$$

$$\cos.\alpha = -\frac{v+2}{2\sqrt{(vv+v+1)}} \quad \text{et} \quad \sin.\alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{(vv+v+1)}},$$

unde ob $\theta = 90^0$ erit

$$\cos.(\alpha+\theta) = -\sin.\alpha, \quad \cos.(\theta-\alpha) = \sin.\alpha,$$
$$\sin.(\alpha+\theta) = \cos.\alpha \quad \text{et} \quad \sin.(\theta-\alpha) = \cos.\alpha;$$

quo observato erit

$$l(vv+v(1+z)+(1+z)^2) = \frac{1}{2}l(vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx)$$
$$+\frac{1}{2}l(vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx)$$
$$-\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$-\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}},$$

hinc simul mutato signo litterarum z et x erit

$$l(vv+v(1-z)+(1-z)^2) = \frac{1}{2}l(vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx)$$
$$+\frac{1}{2}l(vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx)$$
$$+\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}}$$
$$+\sqrt{-1}\cdot\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}.$$

27. Nunc porro pro

$$\text{Arc. tang.}\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z},$$

quae forma in regula nostra non continetur, notetur esse

$$\text{Arc. tang.}\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z} = \text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{3}}{2v+1} + \text{Arc. tang.}\frac{vz\sqrt{3}}{2(vv+v+1)+(v+2)z},$$

qui postremus valor comparatus cum

$$\text{Arc. tang.}\frac{z\sin.\alpha}{1-z\cos.\alpha}$$

iterum praebet

$$\sin.\alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{(vv+v+1)}},$$

sicque anguli $\alpha + \theta$ et $\theta - \alpha$ manent iidem ut ante; unde reductio praebet

$$\text{Arc. tang.}\frac{vz\sqrt{3}}{2(vv+v+1)+(v+2)z} = 90^0 - \alpha - \frac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

Nacti ergo sumus has reductiones

$$\text{Arc. tang.}\frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z} = 90^0 - \alpha + \text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{3}}{2v+1} - \frac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}$$

et

$$\text{Arc. tang.}\frac{(1-z)\sqrt{3}}{2v+1-z} = 90^0 - \alpha + \text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{3}}{2v+1} - \frac{1}{2}\text{Arc. tang.}\frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}.$$

28. Quodsi iam omnes has partes rite colligamus, reperiemus

$$T = -\frac{\sqrt{-1}}{6}\text{Arc. tang.}\frac{x}{v-1} - \frac{\sqrt{-1}}{12}\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}}{12}\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

29. Hic igitur commode usu venit, ut omnes partes reales se mutuo destruxerint, imaginariae vero duplicatae prodierint, quemadmodum natura rei manifesto postulat. Cum igitur integrale quaesitum sit $V = T\sqrt{-1}$, nunc eius valor pulcherrime prodit realis, quocirca perducti sumus ad hanc integrationem

$$\int \frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}} = +\frac{1}{6}\text{Arc. tang.}\frac{x}{v-1}$$
$$+\frac{1}{12}\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)-vx\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{12}\text{Arc. tang.}\frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{3}}\,l\,\frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx},$$

ubi est

$$v = \sqrt[3]{(1-3xx)}.$$

Hae formulae aliquanto simpliciores reddi possunt considerando, quod sit

$$1-v^3 = 3xx$$

ideoque

$$1+v+vv = \frac{3xx}{1-v};$$

unde, cum plures substitutiones adhiberi queant, iis hic non immorandum censemus, sed contenti esse possumus istius formulae differentialis integrale eruisse, ad quod per nullam aliam methodum aditus patere videtur.

30. Ceterum calculus facilior evadet, si in integrali primum invento ambo arcus per $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ multiplicati in unum colligantur; inde enim prodit

$$\frac{1}{4\sqrt{3}}\text{Arc. tang.}\frac{vz\sqrt{3}}{vv+v+1-zz}.$$

Hic iam statim ponatur

$$z = -x\sqrt{-1},$$

ut formula prodeat

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\text{Arc. tang.}\frac{vx\sqrt{3}\sqrt{-1}}{vv+v+1+xx},$$

quae comparata cum canonica

$$\text{Arc. tang. } t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{1+t}{1-t}$$

ob

$$t = \frac{vx\sqrt{3}}{vv+v+1+xx}$$

statim perducit ad hanc formulam reductam

$$-\frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\, l\, \frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}.$$

DE INTEGRATIONIBUS DIFFICILLIMIS QUARUM INTEGRALIA TAMEN ALIUNDE EXHIBERI POSSUNT

Conventui exhibita die 21. Martii 1777

Commentatio 721 indicis Enestroemiani
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 14 (1797/8), 1805, p. 62—74
Summarium ibidem p. 65—66

SUMMARIUM

C'est une chose connue que, si dans la formule intégrale $\int Z\partial z$, dans laquelle Z dénote une fonction quelconque de z, on met $z = v(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$, cette formule $\int Z\partial z$ se décompose en deux autres, $\int p\partial v + \sqrt{-1}\cdot\int q\partial v$, où p et q sont des fonctions réelles de v. Or, toutes les fois que l'intégrale d'une pareille formule $\int Z\partial z$ est connue, il sera facile d'en déduire les intégrales dérivées $\int p\partial v$ et $\int q\partial v$, qui cependant, pour peu que la fonction Z soit compliquée, surtout si elle implique des irrationnelles, deviennent tellement embarrassées que personne n'oseroit en tenter l'intégration. C'est ainsi qu'en mettant

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1-zz)}},$$

de sorte que $\int Z\partial z = \text{A. sin.}\, z$, si au lieu de z on met $v(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)$, on obtient l'arc dont cette quantité est le sinus, exprimé par quatre formules intégrales extrêmement compliquées, dont cependant l'auteur parvient enfin, après plusieurs artifices, à trouver l'intégrale *a priori*. En mettant

$$Z = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+z^n)}}$$

on est conduit à deux formules, $\int p\partial v$ et $\int q\partial v$, dont les intégrales peuvent très certainement être exprimées par des logarithmes et des arcs de cercle, quoiqu'on ne voye pas comment et par quelles substitutions ces formules puissent être dégagées de leur irrationalité. C'est donc un vaste champ que feu Mr. EULER abandonne aux Géomètres pour y exercer leur sagacité.

1. Cum hodie quidem nemo Geometrarum amplius dubitet, quin omnia imaginaria, undecunque originem trahant, ad hanc formam

$$A + B\sqrt{-1}$$

reduci queant, quanquam haec veritas nondum satis firmis et claris rationibus est demonstrata, certum etiam erit omnem formulam integralem $\int Z\partial z$, quaecunque Z fuerit functio ipsius z, si in ea loco z scribatur formula imaginaria $v(\cos.\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta)$, resolvi posse in duas huiusmodi formulas integrales $\int p\,\partial v + \sqrt{-1}\cdot\int q\partial v$, ita ut litterae p et q sint functiones reales ipsius v.

2. Hoc equidem nuper[1]) fusius ostendi circa formulas integrales

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} \quad \text{et} \quad \int\frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n},$$

unde posito $z = v(\cos.\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta)$ ortae sunt eiusmodi formulae integrales, quarum evolutio plura haud contemnenda calculi artificia requirebat. Ex quo intelligitur, si huiusmodi formulae magis fuerint complicatae atque adeo quantitates irrationales in se involvant, tum formulas inde derivatas $\int p\partial v$ et $\int q\partial v$ ita prodituras esse perplexas, ut nemo facile earum integrationem suscipere ausus fuerit, cum tamen, si formulae principalis $\int Z\partial z$ integrale fuerit cognitum, exinde valores formularum derivatarum haud difficulter deduci queant.

3. Ad hoc clarius explicandum considerabo hic formulam simplicissimam

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}},$$

1) Vide Commentationes 656 et 657 huius voluminis. A. K.

quae exprimit arcum circularem, cuius sinus $= z$. Quodsi iam hic statuatur

$$z = v(\cos. \vartheta + \sqrt{-1} \cdot \sin. \vartheta),$$

ita ut quaeri debeat forma finita, quae exhibeat arcum, cuius sinus est

$$v(\cos. \vartheta + \sqrt{-1} \cdot \sin. \vartheta),$$

facile patet facta hac substitutione resolutionem formulae integralis haud exiguas ambages postulare. Tum enim denominator induet hanc formam

$$\sqrt{1 - vv(\cos. 2\vartheta + \sqrt{-1} \cdot \sin. 2\vartheta)};$$

unde ante omnia imaginaria elidere oportet, quod quidem fieret, si numerator et denominator multiplicarentur per formulam

$$\sqrt{1 - vv(\cos. 2\vartheta - \sqrt{-1} \cdot \sin. 2\vartheta)};$$

tum enim denominator prodiret realis

$$= \sqrt{1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4}.$$

At vero numerator fieret aeque intricatus, siquidem signum radicale etiamnunc involveret tam realia quam imaginaria, quae tamen a se invicem separari necesse est.

4. Hanc ob rem ipsum denominatorem ante omnia in binas partes separatas, alteram realem, alteram simpliciter imaginariam, resolvi conveniet, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Introducatur quantitas s, ut sit

$$s = \sqrt{1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4},$$

et quaeratur angulus ω, ut sit

$$\cos. 2\omega = \frac{1 - vv \cos. 2\vartheta}{s} \quad \text{et} \quad \sin. 2\omega = \frac{vv \sin. 2\vartheta}{s};$$

tum enim denominator noster induet hanc formam

$$\sqrt{s\cos.2\omega - s\sqrt{-1}\cdot\sin.2\omega},$$

quae forma iam sponte transit in hanc

$$(\cos.\omega - \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega)\sqrt{s}.$$

5. Nunc igitur fractionem nostram $\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$ multiplicemus supra et infra per $\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega$ eaque abibit in hanc formam

$$\frac{\partial z\,(\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega)}{\sqrt{s}}.$$

Quare cum sit

$$\partial z = \partial v\,(\cos.\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta),$$

formula nostra integranda erit

$$\frac{\partial v\,(\cos.(\vartheta+\omega) + \sqrt{-1}\cdot\sin.(\vartheta+\omega))}{\sqrt{s}},$$

quae ergo iam ultro in duas partes requisitas resolvitur, quae sunt

$$\int\frac{\partial v\cos.(\vartheta+\omega)}{\sqrt{s}} + \sqrt{-1}\cdot\int\frac{\partial v\sin.(\vartheta+\omega)}{\sqrt{s}};$$

ubi est

$$s = \sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4},$$

tum vero angulum ω ita sumi oportet, ut sit

$$\text{tang.}\,2\omega = \frac{vv\sin.2\vartheta}{1 - vv\cos.2\vartheta}.$$

Hic autem evidens est, si loco s et ω hos valores re ipsa substituere vellemus, has formulas tantopere fieri complicatas, ut vix ulla via pateat eas resolvendi.

6. Quo hoc clarius eluceat, retineamus primo quantitatem s in calculo, et cum sit

$$\cos. 2\omega = \frac{1 - vv \cos. 2\vartheta}{s},$$

hinc deducimus

$$\cos. \omega = \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\omega}{2}} = \sqrt{\frac{s + 1 - vv \cos. 2\vartheta}{2s}}$$

et

$$\sin. \omega = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\omega}{2}} = \sqrt{\frac{s - 1 + vv \cos. 2\vartheta}{2s}},$$

unde pro formula reali integrali erit

$$\cos. (\vartheta + \omega) = \cos. \vartheta \sqrt{\frac{s + 1 - vv \cos. 2\vartheta}{2s}} - \sin. \vartheta \sqrt{\frac{s - 1 + vv \cos. 2\vartheta}{2s}}.$$

Hinc iam formula realis

$$\int \frac{\partial v \cos. (\vartheta + \omega)}{\sqrt{s}}$$

resolvetur in duas sequentes

$$\cos. \vartheta \int \frac{\partial v}{s\sqrt{2}} \sqrt{(s + 1 - vv \cos. 2\vartheta)} - \sin. \vartheta \int \frac{\partial v}{s\sqrt{2}} \sqrt{(s - 1 + vv \cos. 2\vartheta)}.$$

Quodsi iam hic insuper loco s suum valorem surrogare velimus, unde fieret $s = \sqrt{(1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4)}$, vix credo quemquam fore, qui voluerit in formula tantopere intricata resolvenda vires suas saltem tentare. Facta enim substitutione loco s hae duae formulae sequenti modo prodibunt expressae

$$\frac{\cos. \vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1 - 2v^2 \cos. 2\vartheta + v^4} + 1 - vv \cos. 2\vartheta)}}{\sqrt{(1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4)}},$$

$$- \frac{\sin. \vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4} - 1 + vv \cos. 2\vartheta)}}{\sqrt{(1 - 2vv \cos. 2\vartheta + v^4)}}.$$

7. Simili modo pro parte imaginaria ob

$$\sin. (\vartheta + \omega) = \sin. \vartheta \cos. \omega + \cos. \vartheta \sin. \omega$$

ista pars componetur ex binis sequentibus formulis integralibus

$$\frac{\sin.\vartheta\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}+1-vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}}$$
$$+\frac{\cos.\vartheta\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int\frac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}-1+vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}}.$$

Unde etiam perspicuum est totum laborem ad integrationem duarum tantum formularum integralium esse perductum, quae autem ita sunt complicatae, ut vix quisquam laborem sit suscepturus.

8. Eo magis igitur erit mirandum, si haec ipsa integralia actu assignari poterunt. Cum enim iis iunctim sumtis exprimatur arcus circuli, cuius sinus est $v(\cos.\vartheta+\sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta)$, si hunc arcum designemus per $x+y\sqrt{-1}$, ita ut x exhibeat integrale binarum illarum formularum realium, at $y\sqrt{-1}$ integrale binarum formularum imaginariarum, erit vicissim

$$v(\cos.\vartheta+\sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta)=\sin.(x+y\sqrt{-1})=\sin.x\cos.y\sqrt{-1}+\cos.x\sin.y\sqrt{-1}.$$

Cum iam constet esse

$$\cos.\Psi=\frac{1}{2}(e^{\Psi\sqrt{-1}}+e^{-\Psi\sqrt{-1}}),$$

posito $\Psi=y\sqrt{-1}$ erit

$$\cos.y\sqrt{-1}=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{+y}).$$

Deinde quia est

$$\sin.\Psi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\Psi\sqrt{-1}}-e^{-\Psi\sqrt{-1}}),$$

erit

$$\sin.y\sqrt{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-y}-e^{+y}).$$

9. Substituantur igitur isti valores ac prodibit ista aequatio

$$v(\cos.\vartheta+\sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta)=\frac{1}{2}\sin.x(e^{-y}+e^{+y})+\frac{\cos.x}{2\sqrt{-1}}(e^{-y}-e^{+y}),$$

ubi partes reales et imaginarias seorsim aequari oportet, unde duae sequentes determinationes emergunt:

$$v \cos. \vartheta = \frac{1}{2} \sin. x (e^{-y} + e^{+y})$$

et

$$v \sin. \vartheta = \frac{1}{2} \cos. x (e^{y} - e^{-y}).$$

Neque iam adeo erit difficile hinc binas quantitates x et y determinare.

10. Cum ex priore aequatione habeamus

$$\sin. x = \frac{2v \cos. \vartheta}{e^{y} + e^{-y}},$$

ex altera vero

$$\cos. x = \frac{2v \sin. \vartheta}{e^{y} - e^{-y}},$$

horum valorum quadrata invicem addita producent hanc aequationem

$$1 = \frac{4vv \cos. \vartheta^2}{(e^{y} + e^{-y})^2} + \frac{4vv \sin. \vartheta^2}{(e^{y} - e^{-y})^2},$$

unde ergo quantitatem y elicere oportet. Ad hoc autem notasse plurimum iuvabit esse

$$(e^{y} + e^{-y})^2 = e^{2y} + e^{-2y} + 2 \quad \text{et} \quad (e^{y} - e^{-y})^2 = e^{2y} + e^{-2y} - 2,$$

unde si brevitatis gratia statuamus

$$e^{2y} + e^{-2y} = 2t,$$

aequatio inventa induet hanc formam

$$1 = \frac{2vv \cos. \vartheta^2}{t+1} + \frac{2vv \sin. \vartheta^2}{t-1},$$

unde resultat ista aequatio quadratica

$$tt - 1 = 2tvv - 2vv \cos. 2\vartheta.$$

11. Huius iam aequationis resolutio praebet

$$t = vv + \sqrt{v^4 - 2vv\cos.2\vartheta + 1} = vv + s.$$

Iam cum posuerimus $e^{2y} + e^{-2y} = 2t$, hinc elicitur

$$e^{2y} = t + \sqrt{tt-1} \quad \text{ideoque} \quad e^{-2y} = t - \sqrt{tt-1}.$$

Quoniam igitur quantitatem t per v definivimus, logarithmis sumendis erit

$$y = \frac{1}{2} l(t + \sqrt{tt-1}),$$

quae ergo formula aequatur binis posterioribus formulis integralibus imaginario $\sqrt{-1}$ omisso.

12. Deinde vero, cum sit

$$e^y + e^{-y} = \sqrt{2t+2} \quad \text{et} \quad e^y - e^{-y} = \sqrt{2t-2},$$

pro quantitate x invenienda geminam habebimus aequationem, scilicet

$$\sin. x = \frac{2v\cos.\vartheta}{\sqrt{2t+2}} \quad \text{et} \quad \cos. x = \frac{2v\sin.\vartheta}{\sqrt{2t-2}},$$

sicque ipsa quantitas x erit

$$= \text{A}\sin. \frac{2v\cos.\vartheta}{\sqrt{2t+2}}$$

atque hic ipse arcus circularis aequabitur summae binarum priorum formularum integralium realium.

13. Postquam igitur posuerimus brevitatis gratia

$$t = vv + \sqrt{(1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4)},$$

valores integralium supra inventorum ita se habebunt

$$\text{A sin.}\frac{2v\cos.\vartheta}{\sqrt{(2t+2)}} = \begin{cases} \dfrac{\cos.\vartheta}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}+1-vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}} \\ -\dfrac{\sin.\vartheta}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}-1+vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}}. \end{cases}$$

Similique modo erit

$$\frac{1}{2}l(t+\sqrt{tt-1}) = \begin{cases} \dfrac{\sin.\vartheta}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}+1-vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}} \\ +\dfrac{\cos.\vartheta}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{\partial v\sqrt{(\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4}-1+vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{(1-2vv\cos.2\vartheta+v^4)}}, \end{cases}$$

ubi notetur loco

$$\text{A sin.}\frac{2v\cos.\vartheta}{\sqrt{(2t+2)}}$$

scribi posse

$$\text{A tang.}\frac{\cos.\vartheta\sqrt{(t-1)}}{\sin.\vartheta\sqrt{(t+1)}}.$$

14. Hos autem valores integrales per t expressos penitius perscrutari operae erit pretium. Cum enim sit

$$t+1 = 1+vv+\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4},$$

erit radicem extrahendo

$$\sqrt{t+1} = \sqrt{\frac{1+2v\cos.\vartheta+vv}{2}} + \sqrt{\frac{1-2v\cos.\vartheta+vv}{2}}.$$

Simili modo, cum sit

$$t-1 = vv-1+\sqrt{1-2vv\cos.2\vartheta+v^4},$$

erit

$$\sqrt{t-1} = \sqrt{\frac{-1+2v\sin.\vartheta\sqrt{-1}+vv}{2}} + \sqrt{\frac{-1-2v\sin.\vartheta\sqrt{-1}+vv}{2}}.$$

His igitur valoribus substitutis pro priore integratione fiet

$$\text{A tang.}\frac{\cos.\vartheta\sqrt{(t-1)}}{\sin.\vartheta\sqrt{(t+1)}}$$

$$=\text{A tang.}\frac{\cos.\vartheta\left(\sqrt{-1+2v\sin.\vartheta\sqrt{-1+vv}}+\sqrt{-1-2v\sin.\vartheta\sqrt{-1+vv}}\right)}{\sin.\vartheta\left(\sqrt{1+2v\cos.\vartheta+vv}+\sqrt{1-2v\cos.\vartheta+vv}\right)}.$$

Pro altera autem forma logarithmica, quoniam est

$$\frac{1}{2}l(t+\sqrt{tt-1})=l\left(\sqrt{\frac{t+1}{2}}+\sqrt{\frac{t-1}{2}}\right),$$

erit valor integralis posterior

$$\log\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sqrt{1+2v\cos.\vartheta+vv}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2v\cos.\vartheta+vv}\\+\frac{1}{2}\sqrt{-1+2v\sin.\vartheta\sqrt{-1+vv}}+\frac{1}{2}\sqrt{-1-2v\sin.\vartheta\sqrt{-1+vv}}\end{array}\right\}.$$

15. Haud incommode autem ipsos hos valores integrales etiam per formulas integrales exprimere licet. Cum enim sit

$$\partial\cdot\text{A tang.}\frac{\cos.\vartheta\sqrt{(t-1)}}{\sin.\vartheta\sqrt{(t+1)}}=\frac{\partial t\sin.\vartheta\cos.\vartheta}{(t-\cos.2\vartheta)\sqrt{(tt-1)}},$$

prior integratio nunc erit

$$=\int\frac{\partial t\sin.\vartheta\cos.\vartheta}{(t-\cos.2\vartheta)\sqrt{(tt-1)}},$$

scilicet binae formulae integrales priores aequabuntur huic unicae; binae posteriores vero, quae aequales erant

$$\frac{1}{2}l(t+\sqrt{tt-1}),$$

aequabuntur huic formulae integrali

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial t}{\sqrt{(tt-1)}}.$$

16. Quantumvis autem hae formulae integrales difficiles videbantur, tamen, quia earum integralia constant atque adeo per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt, non amplius tantopere difficile erit in methodum inquirere haec ipsa integralia eruendi, id quod sequenti modo commodissime expediri posse videtur.

INTEGRATIO FORMULARUM

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4} + 1 - 2vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4}}$$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial v \sqrt{(\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4} - 1 + vv\cos.2\vartheta)}}{\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4}}$$

17. Hic ante omnia opus est formulam radicalem

$$\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4}$$

ex calculo expellere, quod aptissime fiet loco v introducendo ipsam quantitatem t, quae erat

$$t = vv + \sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4},$$

unde elicitur

$$vv = \frac{1 - tt}{2(\cos.2\vartheta - t)},$$

atque hinc habebimus

$$\sqrt{1 - 2vv\cos.2\vartheta + v^4} = \frac{tt - 2t\cos.2\vartheta + 1}{2t - 2\cos.2\vartheta}.$$

Deinde vero erit

$$1 - vv\cos.2\vartheta = \frac{-tt\cos.2\vartheta + 2t - \cos.2\vartheta}{2t - 2\cos.2\vartheta}.$$

18. His iam valoribus substitutis nostrae formulae integrales sequentes induent formas

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial v\,(t+1)\sqrt{2(t - \cos.2\vartheta)(1 - \cos.2\vartheta)}}{tt - 2t\cos.2\vartheta + 1}$$

et

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\partial v\,(t-1)\sqrt{2(t - \cos.2\vartheta)(1 + \cos.2\vartheta)}}{tt - 2t\cos.2\vartheta + 1},$$

quae ob

$$1 - \cos.2\vartheta = 2\sin.\vartheta^2 \quad \text{et} \quad 1 + \cos.2\vartheta = 2\cos.\vartheta^2$$

transibunt in has

$$\mathfrak{h} = \int \frac{2\partial v (t+1) \sin.\vartheta \sqrt{t - \cos. 2\vartheta}}{tt - 2t\cos. 2\vartheta + 1},$$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{2\partial v (t-1) \cos.\vartheta \sqrt{t - \cos. 2\vartheta}}{tt - 2t\cos. 2\vartheta + 1}.$$

19. Tantum igitur superest, ut loco ∂v valor debitus substituatur. Cum igitur sit

$$2vv = \frac{tt-1}{t - \cos. 2\vartheta},$$

erit differentiando

$$4v\partial v = \frac{\partial t (tt - 2t\cos. 2\vartheta + 1)}{(t - \cos. 2\vartheta)^2}$$

ideoque

$$\partial v = \frac{(tt - 2t\cos. 2\vartheta + 1)\partial t \sqrt{2}}{4\sqrt{tt-1}\,(t - \cos. 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

hocque valore introducto fiet

$$\mathfrak{h} = \frac{\sin.\vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial t \sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}\,(t - \cos. 2\vartheta)}$$

et

$$\mathfrak{A} = \frac{\cos.\vartheta}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial t \sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}\,(t - \cos. 2\vartheta)},$$

quarum formularum integratio nulla amplius laborat difficultate, quandoquidem facile ab omni irrationalitate liberari possunt.

20. Tantum enim opus est poni

$$\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} = u;$$

tum enim erit

$$t = \frac{uu+1}{uu-1}$$

ideoque

$$t - \cos. 2\vartheta = \frac{uu(1 - \cos. 2\vartheta) + 1 + \cos. 2\vartheta}{uu-1} = \frac{2uu \sin.\vartheta^2 + 2\cos.\vartheta^2}{uu-1},$$

tum vero erit

$$\partial t = -\frac{4u\partial u}{(uu-1)^2},$$

quocirca erit

$$\frac{\partial t}{t - \cos. 2\vartheta} = -\frac{2u\partial u}{(uu-1)(uu \sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2)},$$

ex quo ambae nostrae formulae ita prodibunt rationaliter expressae

$$\mathfrak{h} = -\sin.\vartheta \sqrt{2} \int \frac{uu\partial u}{(uu-1)(uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2)},$$

$$\mathfrak{z} = -\cos.\vartheta \sqrt{2} \int \frac{\partial u}{(uu-1)(uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2)},$$

quarum ergo integratio per regulas notissimas facile expeditur.

21. Quoniam denominator duobus constat factoribus, pro priore formula statuamus

$$\frac{uu}{(uu-1)(uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2)} = \frac{F}{uu-1} + \frac{G}{uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2}$$

ac reperietur

$$F = \frac{uu}{uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2}$$

posito $uu - 1 = 0$ sicque erit

$$F = 1;$$

tum vero reperitur

$$G = \frac{uu}{uu-1}$$

posito $uu \sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2 = 0$ sive $uu \sin.\vartheta^2 = -\cos.\vartheta^2$, unde fit

$$G = \cos.\vartheta^2.$$

Hinc $\mathfrak{h}$ in has duas formulas resolvitur

$$\mathfrak{h} = -\sin.\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u}{uu-1} - \sin.\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u\cos.\vartheta^2}{uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2}.$$

Est vero

$$\int\frac{\partial u}{uu-1} = \frac{1}{2}\,l\frac{u-1}{u+1}$$

et

$$\int\frac{\partial u}{uu\sin.\vartheta^2 + \cos.\vartheta^2} = \frac{1}{\sin.\vartheta\cos.\vartheta}\,\text{A tang.}\,\frac{u\sin.\vartheta}{\cos.\vartheta},$$

quamobrem habebimus

$$\mathfrak{h} = -\frac{\sin.\vartheta}{\sqrt{2}}\, l\frac{u \mp 1}{u+1} - \sqrt{2}\cos.\vartheta\ \text{A tang.}\ \frac{u\sin.\vartheta}{\cos.\vartheta}.$$

Quodsi iam hic loco u scribamus valorem $\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$, erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{\sin.\vartheta}{\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} - \cos.\vartheta\sqrt{2}\ \text{A tang.}\ \frac{\sin.\vartheta\sqrt{t+1}}{\cos.\vartheta\sqrt{t-1}},$$

cuius consensus cum integralibus supra exhibitis facile perspicitur.

22. Simili modo pro $\mathfrak{4}$ statuamus

$$\frac{1}{(uu-1)(uu\sin.\vartheta^2+\cos.\vartheta^2)} = \frac{F}{uu-1} + \frac{G}{uu\sin.\vartheta^2+\cos.\vartheta^2}$$

eritque

$$F = \frac{1}{uu\sin.\vartheta^2+\cos.\vartheta^2}$$

posito $uu-1=0$ sive $u=1$, unde ergo prodit

$$F = 1.$$

Deinde erit

$$G = \frac{1}{uu-1}$$

posito

$$uu = -\frac{\cos.\vartheta^2}{\sin.\vartheta^2}$$

ideoque

$$G = -\sin.\vartheta^2;$$

sicque formula pro $\mathfrak{4}$ inventa in has partes resolvitur

$$\mathfrak{4} = -\cos.\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u}{uu-1} + \cos.\vartheta\sqrt{2}\int\frac{\partial u\sin.\vartheta^2}{uu\sin.\vartheta^2+\cos.\vartheta^2}.$$

Vidimus autem esse

$$\int\frac{\partial u}{uu-1} = \frac{1}{2}\, l\frac{u-1}{u+1},$$

hic vero erit

$$\int \frac{\partial u \sin.\vartheta^2}{uu \sin.\vartheta^2 - \cos.\vartheta^2} = \frac{\sin.\vartheta}{\cos.\vartheta} \text{A tang.} \frac{u \sin.\vartheta}{\cos.\vartheta}$$

sicque habebimus

$$\mathfrak{A} = -\frac{\cos.\vartheta}{\sqrt{2}} l \frac{u-1}{u+1} + \sin.\vartheta \sqrt{2} \text{ A tang.} \frac{u \sin.\vartheta}{\cos.\vartheta}.$$

Ac si hic iterum loco u scribamus valorem $\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}}$, erit

$$\mathfrak{A} = -\frac{\cos.\vartheta}{\sqrt{2}} l \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} + \sin.\vartheta \sqrt{2} \text{ A tang.} \frac{\sin.\vartheta \sqrt{t+1}}{\cos.\vartheta \sqrt{t-1}}.$$

23. Haec autem resolutio ideo successit, quod formula principalis proposita $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$ fuit in suo genere quasi simplicissima; unde facile intelligitur, si eius loco aliae formulae difficiliores proponantur, tum resolutionem sine dubio multo magis futuram esse arduam neque adeo expediri posse, nisi ipsa formula proposita per logarithmos et arcus circulares integrari queat. Sin autem hoc contigerit, quemadmodum evenit in hac formula [1])

$$\int \frac{\partial z}{(1 \pm z^n)^{\frac{1}{n}}}$$

sive adeo in hac [1])

$$\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(1 \pm z^n)^{\frac{m}{n}}},$$

tum etiam posito $z = v(\cos.\vartheta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\vartheta)$ certum erit formulas integrales inde deductas, quantumvis fuerint perplexae, tamen semper etiam per logarithmos et arcus circulares resolvi posse, id quod unico exemplo ostendere conabimur.

---

1) Vide Commentationem 694 huius voluminis, imprimis § 13; confer etiam notam 1 p. 85.
G. F.

PROBLEMA

Si in formula integrali

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{1+z^3}}$$

ponatur

$$z = v(\cos.\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta),$$

unde haec formula resolvatur in has

$$\int P\partial v + \sqrt{-1}\cdot\int Q\partial v,$$

ambas istas formulas integrales, quippe quae semper reales esse possunt, investigare.

SOLUTIO

24. Hic ergo pro denominatore statim erit

$$1 + z^3 = 1 + v^3(\cos.3\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.3\vartheta),$$

unde statuamus

$$\sqrt{1 + 2v^3\cos.3\vartheta + v^6} = s$$

et quaeramus angulum 3ω, ut sit

$$\cos.3\omega = \frac{1+v^3\cos.3\vartheta}{s} \quad \text{et} \quad \sin.3\omega = \frac{v^3\sin.3\vartheta}{s},$$

quo facto erit

$$1 + z^3 = s(\cos.3\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.3\omega)$$

ideoque

$$\sqrt[3]{(1+z^3)} = \sqrt[3]{s}\cdot(\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega);$$

unde formula proposita erit

$$\int \frac{\partial z}{(\cos.\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega)\sqrt[3]{s}} = \int \frac{\partial z\,(\cos.\omega - \sqrt{-1}\cdot\sin.\omega)}{\sqrt[3]{s}}.$$

25. Cum nunc sit

$$\partial z = \partial v(\cos.\vartheta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\vartheta),$$

formula resolvenda erit

$$\int \frac{\partial v\,(\cos.(\vartheta-\omega) + \sqrt{-1}\cdot\sin.(\vartheta-\omega))}{\sqrt[3]{s}},$$

quamobrem pro resolutione quaesita erit

$$\int P\partial v = \int \frac{\partial v\cos.(\vartheta-\omega)}{\sqrt[3]{s}}$$

et

$$\int Q\partial v = \int \frac{\partial v\sin.(\vartheta-\omega)}{\sqrt[3]{s}},$$

quarum ergo formularum integralia investigari oportet. Evidens autem est hinc angulum ω neutiquam commode per v exprimi posse. Etsi enim

$$\text{tang.}\,3\omega = \frac{v^3\sin.3\vartheta}{1+v^3\cos.3\vartheta},$$

hic trisectione anguli opus foret, unde formulae nostrae plane inextricabiles prodirent.

26. Maxime igitur memorabile est has ambas formulas integrales, in quibus est

$$s = \sqrt{(1+2v^3\cos.3\vartheta+v^6)}$$

et

$$\text{tang.}\,3\omega = \frac{v^3\sin.3\vartheta}{1+v^3\cos.3\vartheta},$$

quas vix ac ne vix quidem per solam v referre liceret, nihilominus per logarithmos et arcus circulares integrari posse. Facile autem intelligitur per idoneam substitutionem loco v aliam variabilem idoneam in calculum intro-

duci debere, cuius ope hae formulae simpliciores reddi queant, id quod commodissime fieri posse videtur, si loco v angulus φ introducatur, ita ut sit

$$\varphi = \vartheta - \omega,$$

unde statim oritur

$$\int P \partial v = \int \frac{\partial v \cos. \varphi}{\sqrt[3]{s}}$$

et

$$\int Q \partial v = \int \frac{\partial v \sin. \varphi}{\sqrt[3]{s}},$$

ubi ergo litteras v et s per φ exprimi oportet.

27. Cum sit

$$\text{tang. } 3\omega = \frac{v^3 \sin. 3\vartheta}{1 + v^3 \cos. 3\vartheta},$$

si hunc angulum 3ω introducamus, erit

$$\text{tang. } (3\vartheta - 3\omega) = \frac{\text{tang. } 3\vartheta - \text{tang. } 3\omega}{1 + \text{tang. } 3\vartheta \text{ tang. } 3\omega},$$

unde ob $3\vartheta - 3\omega = 3\varphi$ elicitur

$$\text{tang. } 3\varphi = \frac{\sin. 3\vartheta}{v^3 + \cos. 3\vartheta},$$

unde reperimus

$$v^3 + \cos. 3\vartheta = \frac{\sin. 3\vartheta}{\text{tang. } 3\varphi}.$$

Hinc sumtis quadratis erit

$$v^6 + 2v^3 \cos. 3\vartheta + \cos. 3\vartheta^2 = \sin. 3\vartheta^2 \frac{\cos. 3\varphi^2}{\sin. 3\varphi^2}.$$

Addatur utrinque $\sin. 3\vartheta^2$ eritque

$$v^6 + 2v^3 \cos. 3\vartheta + 1 = ss = \frac{\sin. 3\vartheta^2}{\sin. 3\varphi^2}$$

ideoque

$$s = \frac{\sin. 3\vartheta}{\sin. 3\varphi}.$$

Hactenus igitur nostrae formulae ad sequentes formas sunt reductae

$$\int P\partial v = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin.\,3\vartheta}}\int \partial v \cos.\,\varphi \sqrt[3]{\sin.\,3\varphi},$$

$$\int Q\partial v = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin.\,3\vartheta}}\int \partial v \sin.\,\varphi \sqrt[3]{\sin.\,3\varphi}.$$

28. Cum denique sit

$$v^3 = \frac{\sin.\,3\vartheta}{\text{tang.}\,3\varphi} - \cos.\,3\vartheta,$$

erit differentiando

$$3vv\partial v = -\frac{3\partial\varphi \sin.\,3\vartheta}{\sin.\,3\varphi^2}$$

ideoque

$$\partial v = -\frac{\partial\varphi \sin.\,3\vartheta}{vv \sin.\,3\varphi^2}.$$

Cum igitur sit

$$v^3 = \frac{\sin.\,3(\vartheta-\varphi)}{\sin.\,3\varphi},$$

erit

$$vv = \frac{(\sin.\,3(\vartheta-\varphi))^{\frac{2}{3}}}{(\sin.\,3\varphi)^{\frac{2}{3}}},$$

unde fit

$$\partial v = -\frac{\partial\varphi \sin.\,3\vartheta}{(\sin.\,3(\vartheta-\varphi))^{\frac{2}{3}}(\sin.\,3\varphi)^{\frac{4}{3}}},$$

sicque formulae nostrae ad solam variabilem φ reductae erunt

$$\int P\partial v = -(\sin.\,3\vartheta)^{\frac{2}{3}}\int \frac{\partial\varphi \cos.\,\varphi}{\sin.\,3\varphi\,(\sin.\,3(\vartheta-\varphi))^{\frac{2}{3}}},$$

$$\int Q\partial v = -(\sin.\,3\vartheta)^{\frac{2}{3}}\int \frac{\partial\varphi \sin.\,\varphi}{\sin.\,3\varphi\,(\sin.\,3(\vartheta-\varphi))^{\frac{2}{3}}},$$

quarum formularum integratio haud exiguam dexteritatem in calculo angulorum postulat.

29. Ut calculum ad solitas quantitates revocemus, statuamus tang. $\varphi = t$, ut sit

$$\text{sin. } \varphi = \frac{t}{\sqrt{1+tt}} \quad \text{et} \quad \text{cos. } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tt}},$$

unde fit

$$\partial\varphi \text{ cos. } \varphi = \frac{\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \partial\varphi \text{ sin. } \varphi = -\frac{t\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}.$$

Praeterea vero habebitur

$$\text{tang. } 3\varphi = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt},$$

unde fit

$$\text{sin. } 3\varphi = \frac{3t - t^3}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \text{cos. } 3\varphi = \frac{1 - 3tt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc porro [ponendo tang. $3\vartheta = \alpha$] conficitur

$$\text{sin. } 3(\vartheta - \varphi) = \frac{\alpha(1 - 3tt) - 3t + t^3}{\sqrt{1+\alpha\alpha}(1+tt)^{\frac{3}{2}}}$$

ideoque

$$(\text{sin. } 3(\vartheta - \varphi))^{\frac{2}{3}} = \frac{(\alpha(1 - 3tt) - 3t + t^3)^{\frac{2}{3}}}{(1+\alpha\alpha)^{\frac{1}{3}}(1+tt)}.$$

Hisque valoribus substitutis nanciscemur

$$\int P\partial v = -\alpha^{\frac{2}{3}} \int \frac{\partial t(1+tt)}{(3t - t^3)(\alpha(1 - 3tt) - 3t + t^3)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\int Q\partial v = +\alpha^{\frac{2}{3}} \int \frac{t\partial t(1+tt)}{(3t - t^3)(\alpha(1 - 3tt) - 3t + t^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Certo igitur affirmare licet has formulas ab irrationalitate penitus liberari posse, etiamsi mihi quidem nulla via patere videatur hoc praestandi; unde Geometris amplissimus campus aperitur suam sagacitatem exercendi.

30. Si loco formulae $\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{1+z^3}}$ assumsissemus generalem $\int \frac{\partial z}{\sqrt[n]{(1+z^n)}}$ eamque simili modo tractavissemus, pervenissemus ad sequens Theorema[1]):

1) Confer Commentationem 694 huius voluminis, imprimis § 14. A. K.

INTEGRALIA HARUM DUARUM FORMULARUM

$$\int \frac{\partial\varphi \sin.\varphi}{\sin.n\varphi\,(\sin.(n\vartheta - n\varphi))^{\frac{n-1}{n}}} \quad \text{ET} \quad \int \frac{\partial\varphi \cos.\varphi}{\sin.n\varphi\,(\sin.(n\vartheta - n\varphi))^{\frac{n-1}{n}}}$$

certe per logarithmos et arcus circulares exprimi possunt ideoque dabitur certa substitutio, cuius ope hae formulae ad rationalitatem perduci possunt; unde haec observatio eo maiorem attentionem meretur.

DE INTEGRALIBUS QUIBUSDAM INVENTU DIFFICILLIMIS

Conventui exhibuit die 1. Maii 1780

Commentatio 752 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 6 (1813/4), 1818, p. 30—53

1. Obtulerat se mihi iam dudum[1]) haec formula integralis

$$-\int \frac{\partial x lx}{\sqrt{1-xx}},$$

cuius valorem ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum cognoscere optabam. Suspicabar enim, non sine ratione, eum partim per quadraturam circuli, partim per logarithmos exprimi. Verum omnes conatus istum valorem investigandi irriti fuere atque semper in eiusmodi series infinitas incidi, quarum summam assignare nullo modo licebat. Primo enim evolvi formam radicalem in seriem more solito, ut haberem hanc formulam

$$s = -\int \partial x lx \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \text{etc.}\right);$$

pro qua integranda cum sit

$$\int -x^n \partial x lx = -\frac{x^{n+1}}{n+1} lx + \int \frac{x^n \partial x}{n+1} = -\frac{x^{n+1}}{n+1} lx + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

1) Vide Commentationem 499 voluminis praecedentis p. 23. A. K.

sumendo $x = 1$ erit

$$\int -x^n \partial x lx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et singulis terminis hoc modo integratis reperitur

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Haec autem series ita est comparata, ut eius summatio nullo modo pateat.

2. Conatus igitur eram factorem lx in seriem resolvere, cuius singuli termini perducerent ad formulas integrabiles, sed pluribus tentaminibus institutis res non successit, donec tandem nuper in idoneam resolutionem ipsius lx in seriem incidi, qua totum negotium feliciter expediri poterat. Scilicet cum sit $lx = \frac{1}{2} lxx$, hic loco xx scripsi $1 - (1 - xx)$. Hinc enim statim prodibat

$$-lxx = \frac{1-xx}{1} + \frac{(1-xx)^2}{2} + \frac{(1-xx)^3}{3} + \text{etc.}$$

sicque formula proposita in hanc transformabatur

$$s = \int \partial x \left(\frac{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{6} + \text{etc.} \right),$$

cuius omnes partes facile ad quadraturam circuli reducuntur.

3. Quo hoc facilius praestari possit, constituamus hanc reductionem

$$\int \partial x (1-xx)^n = Ax(1-xx)^n + B\int \partial x (1-xx)^{n-1},$$

unde differentiando et per $\partial x (1-xx)^{n-1}$ dividendo oritur haec aequatio

$$1 - xx = A(1-xx) - 2nAx^2 + B,$$

unde fieri debet

$$A + B = 1 \quad \text{et} \quad A + 2nA = 1.$$

Hinc colligitur

$$A = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad B = \frac{2n}{2n+1},$$

quocirca sumto $x = 1$ habebitur ista reductio generalis

$$\int \partial x\,(1 - xx)^n = \frac{2n}{2n+1}\int \partial x\,(1 - xx)^{n-1}$$

et loco n scribendo $\lambda + \frac{1}{2}$ erit

$$\int \partial x\,(1 - xx)^{\lambda+\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda+1}{2\lambda+2}\int \partial x\,(1 - xx)^{\lambda-\frac{1}{2}}.$$

4. Cum nunc integrationes semper ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendendo sit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \frac{\pi}{2},$$

reperietur per istam reductionem

$$\int \partial x\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int \partial x\,(1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int \partial x\,(1 - xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int \partial x\,(1 - xx)^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

etc.

His igitur valoribus ordine introductis nanciscemur sequentem seriem

$$s = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} + \text{etc.}\right),$$

quae series multo simplicior est ea, quam supra attulimus; interim tamen insignem affinitatem tenet atque adeo istae duae series inter se sunt aequales.

5. Ut summam huius seriei investigemus, consideremus hanc generaliorem

$$v = \frac{t^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4}\,t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}\,t^6 + \text{etc.},$$

unde differentiando adipiscimur

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{t}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^5 + \text{etc.},$$

cuius valor manifesto est $\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-tt}} - 1\right)$. Hinc ergo fiet

$$v = \int \frac{\partial t}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-tt)}} - 1\right),$$

quo integrali invento poni debebit $t = 1$; ac tum erit summa quaesita

$$s = \frac{\pi}{2}v.$$

6. Hic primo irrationalitatem abigamus ponendo

$$\sqrt{1-tt} = u,$$

ut sit $t = \sqrt{1-uu}$. Nunc autem integrationem extendi oportebit a termino $t = 0$, hoc est $u = 1$, usque ad $t = 1$, hoc est $u = 0$. Tum autem erit

$$\frac{\partial t}{t} = -\frac{u\partial u}{1-uu},$$

ex quo conficitur

$$v = -\int \frac{u\partial u}{1-uu}\left(\frac{1-u}{u}\right) = -\int \frac{\partial u}{1+u},$$

cuius integrale praebet

$$v = C - l(1+u),$$

ubi constans C esse debet $l2$. Nunc igitur facto $u = 0$ prodit $v = l2$ ideoque

$$s = \frac{1}{2}\pi l2,$$

qui ergo est valor formulae initio propositae tantopere desideratus. Praeterea vero etiam series ante inventas nunc summare licet, scilicet series ex § 1, quae erat

$$\frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\pi l2,$$

tum vero

$$\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\text{etc.}=l2,$$

quae summationes per se satis abstrusae videri possunt. Hinc subiungimus sequens

THEOREMA

Proposita formula integrali

$$\int\frac{-\partial x lx}{\sqrt{1-xx}}$$

eius valor a termino $x=0$ *usque ad* $x=1$ *extensus est* $=\frac{1}{2}\pi l2$.

7. Si hanc formulam comparemus cum ista simpliciore $\int\frac{-\partial x lx}{1-x}$, mirum utique erit hanc non simili modo tractari posse, cum tamen aliunde[1]) constet, eius valorem ab $x=0$ ad $x=1$ extensum esse $=\frac{\pi\pi}{6}$. Cum enim sit

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\text{etc.}$$

et

$$\int -x^{n-1}\partial x lx\left[\begin{matrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{matrix}\right]=\frac{1}{nn},$$

inde orietur haec series

$$\int\frac{-\partial x lx}{1-x}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.},$$

cuius summam olim[2]) primus inveni esse $=\frac{\pi\pi}{6}$, quem tamen valorem ex ipsa formula integrali nullo adhuc modo elicere potui. Hinc ergo sequitur ista proportio satis memorabilis

$$\int\frac{-\partial x lx}{1-x}:\int\frac{-\partial x lx}{\sqrt{1-xx}}=\pi:3l2.$$

---

1) Confer Commentationem 463 voluminis I17, p. 395, necnon notam 2 p. 161 voluminis I14 adiectam. A. K.

2) Vide Commentationem 41 voluminis I14, imprimis p. 80. A. K.

8. His vestigiis insistenti formulam integralem multo latius patentem mihi simili modo tractare licuit, quam operationem in sequente problemate explicabo.

PROBLEMA

Proposita formula integrali

$$S = \int \frac{-x^{m-1}\partial x l x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

eius valorem ab $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensum per expressionem finitam, tantum arcubus circularibus et logarithmis constantem, exhibere.*

SOLUTIO

9. Hic ante omnia observasse iuvabit hanc formulam

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

ab irrationalitate prorsus liberari posse ponendo [1])

$$\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = t.$$

Hinc enim ista formula abit in hanc $\int \frac{t^m \partial x}{x}$; tum autem erit $x^n = t^n(1-x^n)$ ideoque $x^n = \frac{t^n}{1+t^n}$ sive in logarithmis

$$n l x = n l t - l(1+t^n),$$

unde differentiando prodit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1+t^n)},$$

ita ut per hanc substitutionem prodeat

$$\int \frac{t^{m-1} dt}{1+t^n},$$

1) Vide Commentationem 694 huius voluminis, imprimis p. 276, necnon Commentationem 254 voluminis I_{17}, imprimis p. 236. G. F.

ubi, quia sumto $x = 0$ fit etiam $t = 0$, at posito $x = 1$ fit $t = \infty$, hoc integrale a $t = 0$ usque ad $t = \infty$ est extendendum. Iam dudum autem demonstravi[1]) istius formulae valorem hoc casu esse

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Hinc ergo sequitur etiam formulae integralis

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae valorem esse

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}},$$

cuius loco brevitatis gratia scribamus $\triangle$.

10. Hoc praenotato in ipsa formula proposita loco lx scribamus $\frac{1}{n} lx^n$ huiusque loco porro $\frac{1}{n} l(1-(1-x^n))$, sicque facta evolutione habebimus

$$-lx = \frac{1-x^n}{n} + \frac{(1-x^n)^2}{2n} + \frac{(1-x^n)^3}{3n} + \text{etc.},$$

qua serie substituta formula nostra integralis induet hanc formam

$$S = \int x^{m-1}\partial x \left(\frac{1}{n}(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}} + \frac{1}{2n}(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}} + \frac{1}{3n}(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}} + \text{etc.}\right),$$

cuius singula membra ad valorem ante introductum $\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$ revocare licebit. Hunc enim in finem constituamus hanc reductionem generalem

$$\int x^{m-1}\partial x (1-x^n)^\lambda = A \int x^{m-1}\partial x (1-x^n)^{\lambda-1} + B x^m (1-x^n)^\lambda$$

factaque differentiatione ac divisione per $x^{m-1}\partial x (1-x^n)^{\lambda-1}$ prodit haec aequatio

$$1 - x^n = A + Bm(1-x^n) - \lambda n B x^n,$$

1) Vide Commentationem 60 voluminis I_{17}, imprimis p. 54. A. K.

unde litterae A et B ita definiuntur

$$A = \frac{\lambda n}{m + \lambda n} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{m + \lambda n}.$$

Quamobrem, quia omnia haec integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ sunt extendenda, habebimus hanc reductionem generalem

$$\int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^\lambda = \frac{\lambda n}{m + \lambda n} \int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^{\lambda - 1}.$$

11. Huius reductionis ope singulas partes evolvamus; ac pro prima parte erit $\lambda = 1 - \frac{m}{n}$ ideoque $\lambda n = n - m$, unde colligitur

$$\int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^{1 - \frac{m}{n}} = \frac{n - m}{n} \triangle.$$

Pro secunda parte erit $\lambda = 2 - \frac{m}{n}$ sive $\lambda n = 2n - m$ hincque colligitur pars secunda

$$\int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^{2 - \frac{m}{n}} = \frac{n - m}{n} \cdot \frac{2n - m}{2n} \cdot \triangle.$$

Pro tertia parte ob $\lambda = 3 - \frac{m}{n}$ et $\lambda n = 3n - m$ erit

$$\int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^{3 - \frac{m}{n}} = \frac{n - m}{n} \cdot \frac{2n - m}{2n} \cdot \frac{3n - m}{3n} \cdot \triangle.$$

Eodemque modo erit pars quarta

$$\int x^{m-1} \partial x (1 - x^n)^{4 - \frac{m}{n}} = \frac{n - m}{n} \cdot \frac{2n - m}{2n} \cdot \frac{3n - m}{3n} \cdot \frac{4n - m}{4n} \cdot \triangle$$

et ita porro.

His igitur singulis partibus colligendis pro valore quaesito S hanc habebimus expressionem

$$S = \triangle \left(\frac{n - m}{n \cdot n} + \frac{(n - m)(2n - m)}{n \cdot 2n \cdot 2n} + \frac{(n - m)(2n - m)(3n - m)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 3n} + \text{etc.} \right),$$

cuius ergo seriei summam investigari oportet.

12. Hunc in finem consideremus istam seriem generaliorem

$$T = \frac{n-m}{n \cdot n} t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n \cdot 2n \cdot 2n} t^{2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 3n} t^{3n} + \text{etc.}$$

eritque differentiatione instituta et per t multiplicando

$$\frac{t\partial T}{\partial t} = \frac{n-m}{n} t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n \cdot 2n} t^{2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n \cdot 2n \cdot 3n} t^{3n} + \text{etc.},$$

cuius seriei summa manifesto est $(1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}} - 1$, unde ergo deducitur

$$\partial T = \frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}} - 1\right);$$

consequenter habebimus

$$T = \int \frac{\partial t}{t}\left((1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}} - 1\right),$$

quod integrale a termino $t = 0$ usque ad $t = 1$ extendi debet, quo facto erit noster valor quaesitus

$$S = \triangle T.$$

13. Nunc igitur iam tantum sumus lucrati, ut res deducta sit ad novam quidem formulam integralem, sed nullos logarithmos involventem. Hanc vero formulam adeo ad rationalitatem perducere licebit statuendo

$$1 - t^n = u^n;$$

tum enim fiet

$$\frac{\partial t}{t} = -\frac{u^{n-1}\partial u}{1-u^n}$$

atque hinc nanciscemur

$$T = -\int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\partial u}{1-u^n},$$

quod integrale, cum a termino $t = 0$ usque ad $t = 1$ extendi deberet, nunc extendi debet ab $u = 1$ usque ad $u = 0$.

Permutatis igitur terminis integrationis fiet

$$S = \Delta \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1})\,\partial u}{1 - u^n} \begin{bmatrix} \text{ab } u = 0 \\ \text{ad } u = 1 \end{bmatrix},$$

quod integrale iam certe per logarithmos et arcus circulares exprimere licet, sicque problemati proposito plane est satisfactum.

14. Huius formulae pars posterior integrationem sponte admittit, cum sit

$$\int \frac{u^{n-1}\partial u}{1 - u^n} = -\frac{1}{n}\, l\,(1 - u^n),$$

qui valor iam evanescit facto $u = 0$, at vero pro altero termino prodit infinitus; pars prior integrata continet quoque tale membrum $-\frac{1}{n}\, l\,(1 - u)$, quod cum praecedente coniunctum dat $\frac{1}{n}\, l \frac{1 - u^n}{1 - u}$. Cum igitur sit $\frac{1 - u^n}{1 - u} = n$, ambo haec membra iunctim sumta praebebunt $\frac{1}{n}\, ln$, omnes autem reliquae integralis partes habebunt finitam magnitudinem.

15. Quanquam autem iam passim praecepta sunt tradita integralia talium formularum inveniendi, haud inutile fore arbitror totam hanc integrationem ex primis principiis repetere atque modo parumper discrepante tractare; quam ergo investigationem succinctius, quam vulgo fieri solet, hic adiungam.

PROBLEMA

Proposita formula integrali hac

$$T = \int \frac{u^{m-1} - u^{n-1}}{1 - u^n}\, \partial u$$

eius valorem a termino $u = 0$ *usque ad* $u = 1$ *extensum investigare.*

SOLUTIO

16. Modo notavimus partis posterioris integrale esse

$$\frac{1}{n}\, l\,(1 - u^n)$$

eiusque valorem infinitum casu $u = 1$ a parte priore iterum destrui, unde solius partis prioris integrationem tradere sufficiet; hanc ob rem statuamus

$$U = \int \frac{u^{m-1}\,\partial u}{1-u^n},$$

ita ut sit

$$\partial U = \frac{u^{m-1}\,\partial u}{1-u^n};$$

ubi cum denominator manifesto habeat factorem $1-u$, inde nascitur talis fractio partialis

$$\frac{A\,\partial u}{1-u},$$

ubi erit

$$A = \frac{u^{m-1}(1-u)}{1-u^n},$$

posito scilicet $u = 1$. Modo autem vidimus fractionis $\frac{1-u}{1-u^n}$ valorem esse $\frac{1}{n}$, ita ut sit

$$A = \frac{1}{n},$$

hincque orietur prima pars integralis

$$\frac{1}{n}\int \frac{\partial u}{1-u} = -\frac{1}{n}\,l(1-u),$$

quae cum posteriore parte ipsius T coniuncta producit, ut vidimus, valorem

$$\frac{1}{n}\,l\,n.$$

17. Pro reliquis partibus huius integralis inveniendis sit

$$1 - 2u\cos.\theta + uu$$

factor quicunque denominatoris $1-u^n$, quem ita comparatum esse oportet, ut posito

$$uu = 2u\cos.\theta - 1$$

etiam ipse denominator evanescat, ex qua conditione angulum θ determinare licebit. Hinc autem sequitur fore in genere

$$u^\lambda = 2u^{\lambda-1}\cos.\theta - u^{\lambda-2},$$

ex qua forma intelligitur potestates ipsius u seriem constituere recurrentem cuius scala relationis est $2\cos.\theta, -1$; atque hinc omnes potestates altiores ipsius u per solam primam et constantes definire licebit. Evidens autem est etiam quaevis multipla harum potestatum, veluti

$$Auu,\ Au^3,\ Au^4 \text{ etc.},$$

secundum eandem scalam relationis $2\cos.\theta, -1$ progredi, ita ut ex binis quibuscunque sequens facile colligi queat.

18. Observavi autem hanc progressionem fieri simplicissimam sumto $A = \sin.\theta$; quo facto in subsidium vocamus hoc lemma notissimum

$$\sin.(\lambda+1)\theta = 2\cos.\theta\sin.\lambda\theta - \sin.(\lambda-1)\theta,$$

hincque series harum potestatum sequenti modo adornabitur:

$$u\sin.\theta = u\sin.\theta,$$

$$u^2\sin.\theta = u\sin.2\theta - \sin.\theta,$$

$$u^3\sin.\theta = u\sin.3\theta - \sin.2\theta,$$

$$u^4\sin.\theta = u\sin.4\theta - \sin.3\theta,$$

$$u^5\sin.\theta = u\sin.5\theta - \sin.4\theta$$

etc.

atque hinc in genere concludimus fore

$$u^\lambda\sin.\theta = u\sin.\lambda\theta - \sin.(\lambda-1)\theta.$$

19. Cum nunc sit

$$\text{sin.}\,(\lambda - 1)\,\theta = \text{sin.}\,\lambda\theta\,\text{cos.}\,\theta - \text{cos.}\,\lambda\theta\,\text{sin.}\,\theta,$$

hinc fiet

$$u^{\lambda}\,\text{sin.}\,\theta = u\,\text{sin.}\,\lambda\theta - \text{sin.}\,\lambda\theta\,\text{cos.}\,\theta + \text{cos.}\,\lambda\theta\,\text{sin.}\,\theta,$$

consequenter

$$u^{\lambda} = \frac{(u - \text{cos.}\,\theta)\,\text{sin.}\,\lambda\theta}{\text{sin.}\,\theta} + \text{cos.}\,\lambda\theta,$$

quae formula ad sequentem usum optime est accommodata. Nunc ad ipsum angulum θ quaerendum sumamus $\lambda = n$; erit

$$u^{n} = \frac{(u - \text{cos.}\,\theta)\,\text{sin.}\,n\theta}{\text{sin.}\,\theta} + \text{cos.}\,n\theta,$$

unde colligitur denominator

$$1 - u^{n} = \frac{\text{sin.}\,\theta\,(1 - \text{cos.}\,n\theta) - (u - \text{cos.}\,\theta)\,\text{sin.}\,n\theta}{\text{sin.}\,\theta},$$

qui, cum debeat nihilo aequari, praebet has duas aequalitates

$$\text{sin.}\,n\theta = 0 \quad \text{et} \quad \text{cos.}\,n\theta = 1,$$

unde patet fore $n\theta = i\pi$, ubi i est numerus integer sive par sive impar; quia vero cos. $n\theta$ debet esse $= 1$, evidens est pro i sumi debere numeros pares, ita ut valores pro angulo θ assumendi sint

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{n}, \quad \frac{8\pi}{n} \quad \text{etc.},$$

quorum primus 0 dat factorem denominatoris $1 - u$, quem iam supra expedivimus.

20. Denotet nunc θ quemcunque alium istorum valorum eritque haec formula $1 - 2u\,\text{cos.}\,\theta + uu$ certe factor nostri denominatoris $1 - u^{n}$ atque fractio $\frac{u^{m-1}}{1 - u^{n}}$ resoluta certe continebit partem huius formae

$$\frac{N}{1 - 2u\,\text{cos.}\,\theta + uu},$$

cuius numerator N reperietur, uti alibi[1]) demonstravi, ex hac forma

$$N = \frac{u^{n-1}(1 - 2u\cos.\theta + uu)}{1 - u^n},$$

posito scilicet $uu - 2u\cos.\theta + 1 = 0$, quo ergo casu tam numerator quam denominator evanescet; unde ad valorem huius fractionis

$$\frac{1 - 2u\cos.\theta + uu}{1 - u^n}$$

inveniendum differentialia loco numeratoris et denominatoris substituta dabunt[2])

$$\frac{2(u - \cos.\theta)}{-nu^{n-1}},$$

quod ob $u^n = 1$ fit

$$\frac{2u(u - \cos.\theta)}{-n},$$

sicque numerator quaesitus N erit

$$-\frac{2u^m(u - \cos.\theta)}{n} = \frac{2}{n}(u^m\cos.\theta - u^{m+1}).$$

Supra autem invenimus

$$u^\lambda = \frac{(u - \cos.\theta)\sin.\lambda\theta}{\sin.\theta} + \cos.\lambda\theta,$$

quamobrem erit

$$u^m\cos.\theta = \frac{(u - \cos.\theta)\cos.\theta\sin.m\theta}{\sin.\theta} + \cos.\theta\cos.m\theta,$$

$$-u^{m+1} = -\frac{(u - \cos.\theta)\sin.(m+1)\theta}{\sin.\theta} - \cos.(m+1)\theta,$$

1) Vide Commentationem 162 voluminis I_{17}, imprimis p. 113. A. K.

2) In editione principe hic factor 2 omissus est, unde etiam sequentes formulae erant corrigendae. A. L.

hinc

$$N = \frac{2}{n}\left(\frac{(u - \cos.\theta)(\cos.\theta \sin.m\theta - \sin.(m+1)\theta)}{\sin.\theta} + \cos.\theta\cos.m\theta - \cos.(m+1)\theta\right),$$

sive

$$N = \frac{2}{n}\left(-\frac{(u - \cos.\theta)\sin.\theta\cos.m\theta}{\sin.\theta} + \sin.m\theta\sin.\theta\right)$$

sive

$$N = \frac{2}{n}(\sin.\theta\sin.m\theta - (u - \cos.\theta)\cos.m\theta).$$

21. Nostra igitur fractio $\frac{u^{n-1}}{1-u^n}$ hanc continebit fractionem partialem

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{\sin.\theta\sin.m\theta - (u - \cos.\theta)\cos.m\theta}{1 - 2u\cos.\theta + uu},$$

quam ergo per ∂u multiplicatam integrari oportet. Quia autem duabus constat partibus, earum postrema

$$\frac{2}{n}\int\frac{(u - \cos.\theta)\cos.m\theta\partial u}{1 - 2u\cos.\theta + uu}$$

integrata dat

$$\frac{\cos.m\theta}{n}l(1 - 2u\cos.\theta + uu),$$

prior vero pars

$$\frac{2}{n}\sin.m\theta\int\frac{\partial u\sin.\theta}{1 - 2u\cos.\theta + uu} = \frac{2}{n}\sin.m\theta\,\text{A tang.}\frac{u\sin.\theta}{1 - u\cos.\theta}.$$

Sicque totum integrale huius partis erit

$$= -\frac{\cos.m\theta}{n}l(1 - 2u\cos.\theta + uu) + \frac{2\sin.m\theta}{n}\,\text{A tang.}\frac{u\sin.\theta}{1 - u\cos.\theta}.$$

22. Hoc integrale manifesto iam evanescit posito $u = 0$. Superest igitur tantum, ut loco u scribamus 1, quo facto pars logarithmica erit

$$\frac{\cos.m\theta}{n}l(2 - 2\cos.\theta) = \frac{\cos.m\theta}{n}l\,4\sin.\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{2\cos.m\theta}{n}l\,2\sin.\frac{1}{2}\theta.$$

Pars autem circularis erit

$$\frac{2\sin. m\theta}{n} \text{A tang.} \frac{\sin. \theta}{1-\cos. \theta} = \frac{2\sin. m\theta}{n} \text{A tang.} \frac{\cos. \frac{1}{2}\theta}{\sin. \frac{1}{2}\theta} = \frac{(\pi-\theta)\sin. m\theta}{n},$$

consequenter totum integrale ortum ex denominatoris factore

$$1 - 2u\cos. \theta + uu$$

erit

$$-\frac{2\cos. m\theta}{n} l\, 2\sin. \frac{1}{2}\theta + \frac{\pi-\theta}{n}\sin. m\theta.$$

Quodsi iam in hac formula loco θ successive substituantur valores supra assignati, qui erant

$$\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{6\pi}{n} \quad \text{etc.}$$

et in genere $\frac{2i\pi}{n}$, summa omnium harum formularum dat verum valorem ipsius T, postquam scilicet addiderimus terminum $\frac{1}{n} ln$. Posito autem in genere

$$\theta = \frac{2i\pi}{n}$$

integralis pars inde orta erit

$$-\frac{2}{n}\cos. \frac{2mi\pi}{n} l\, 2\sin. \frac{i\pi}{n} + \frac{(n-2i)\pi}{nn}\sin. \frac{2mi\pi}{n},$$

ubi loco i scribi debent numeri 1, 2, 3, 4 etc., donec integrale fiat completum[1]); quibus omnibus expeditis erit valor quaesitus T inventus.

Illustremus haec aliquot exemplis.

EXEMPLUM 1

23. Sit $n = 2$, et quia m minus esse debet quam n, ne quantitas[2])

$$\triangle = \int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}$$

---

1) Si n est numerus impar, loco i scribi debent numeri $1, 2, 3, \cdots \frac{n-1}{2}$; si n est numerus par, scribi debent numeri $1, 2, 3, \cdots \frac{n}{2} - 1$, sed in hoc casu accedit terminus $-\frac{1}{n}(\cos. m\pi) l2$ ex factore denominatoris $1 + u$ oriundus. A. L.

2) Editio princeps $\triangle = \frac{\pi}{n\sin. \frac{m\pi}{n}}$. Correxit A. L.

fiat infinita, necessario erit $m = 1$ ideoque $\triangle = \frac{\pi}{2}$. Tum vero erit

$$T = \frac{1}{2} l 2.$$

Addatur igitur terminus $\frac{1}{2} l 2$ prodibitque $T = l 2$; sicque erit, ut ante invenimus,

$$S = \frac{\pi}{2} l 2,$$

qui est valor formulae

$$\int \frac{-\partial x l x}{\sqrt{1 - xx}}.$$

EXEMPLUM 2

24. Sit nunc $n = 3$ eritque m vel 1 vel 2. Ex utroque autem valore prodit

$$\triangle = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Tum vero sumi debet

$$\theta = \frac{2\pi}{3},$$

quem valorem solum sumsisse sufficiet, ex quo[1])

$$T = -\frac{2}{3} \cos. \frac{2}{3} m\pi \, l\sqrt{3} + \frac{1}{9} \pi \sin. \frac{2}{3} m\pi,$$

ubi insuper addi debet $\frac{1}{3} l 3$. Pro casu igitur $m = 1$ erit[2])

$$T = \frac{1}{2} l 3 + \frac{1}{6\sqrt{3}} \pi \quad \text{hincque} \quad S = \frac{\pi\pi}{3 \cdot 9} + \frac{\pi l 3}{3\sqrt{3}},$$

qui est valor formulae integralis

$$\int \frac{-\partial x l x}{\sqrt[3]{1 - x^3}}.$$

---

1) Editio princeps: $T = -\frac{1}{3} \cos. \frac{2}{3} m\pi \, l\sqrt{3} + \frac{1}{18} \pi \sin. \frac{2}{3} m\pi.$ Correxit A. L.

2) Editio princeps: $T = \frac{5}{12} l 3 + \frac{1}{12\sqrt{3}} \pi$, *hincque* $S = \frac{\pi\pi}{3 \cdot 18} + \frac{5\pi l 3}{18\sqrt{3}}.$ Correxit A. L.

Pro altero casu, ubi $m = 2$, erit ut ante

$$\triangle = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

at vero[1])

$$T = \frac{1}{2} l\,3 - \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi, \quad \text{hinc} \quad S = \frac{\pi l\,3}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi\pi}{27},$$

qui ergo est valor huius formulae integralis

$$\int \frac{-x\partial x l x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

25. Loco plurium exemplorum formulam generalem tradamus pro numero quocunque n sumendo

$$\theta = \frac{2i\pi}{n},$$

donec fiat $2i > n$, quippe quos casus omnes reiici oportet. Tum igitur ex forma pro casu

$$\theta = \frac{2i\pi}{n}$$

evoluta et loco i ordine scribendo 1, 2, 3 etc. reperiemus hunc valorem

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{n} l n - \frac{2}{n} \cos.\frac{2m\pi}{n} l\,2 \sin.\frac{\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{nn} \sin.\frac{2m\pi}{n} \\ & - \frac{2}{n} \cos.\frac{4m\pi}{n} l\,2 \sin.\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-4)\pi}{nn} \sin.\frac{4m\pi}{n} \\ & - \frac{2}{n} \cos.\frac{6m\pi}{n} l\,2 \sin.\frac{3\pi}{n} + \frac{(n-6)\pi}{nn} \sin.\frac{6m\pi}{n} \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

Has scilicet partes eo usque continuari oportet, quamdiu fuerit[2]) $i < \frac{1}{2}n$, atque hoc valore invento habebitur pro problemate primo $S = \triangle T$ existente

$$\triangle = \frac{\pi}{n \sin.\frac{m\pi}{n}}.$$

---

1) Editio princeps: $T = \frac{5}{12} l\,3 - \frac{1}{12\sqrt{3}}\pi$, *hinc* $S = \frac{5\pi l\,3}{18\sqrt{3}} - \frac{\pi\pi}{54}$. Correxit A. L.

2) Vide notam 1 p. 405. A. L.

26. Duplicis igitur generis termini in hac expressione occurrunt, quorum priores tantum logarithmos involvunt, posteriores autem quadraturam circuli π, atque hic commode usu venit, ut istae posteriores partes omnes in unicam formulam contrahi queant; quod si etiam circa priores partes logarithmicas praestari posset, id pro invento maximi momenti esset habendum. Quod autem ad partes circulares attinet, earum contractionem sequenti problemate docebimus.

PROBLEMA

Omnes partes circulares, ad quas in problemate praecedente sumus perducti, in unam summam contrahere sive omisso factore communi $\frac{\pi}{2nn}$ *hanc seriem*

$$(n-2)\sin.\frac{2m\pi}{n}+(n-4)\sin.\frac{4m\pi}{n}+\cdots+(n-2i)\sin.\frac{2im\pi}{n}$$

summare, quousque scilicet $2i$ *non superat* n.

SOLUTIO

27. Ponamus brevitatis gratia $\frac{m\pi}{n}=\varphi$ atque series proposita sponte in has duas resolvitur

$$n\sin.2\varphi+n\sin.4\varphi+n\sin.6\varphi+\cdots+n\sin.2i\varphi,$$
$$2\sin.2\varphi+4\sin.4\varphi+6\sin.6\varphi+\cdots+2i\sin.2i\varphi;$$

tum enim prior demta posteriore dabit valorem, quem quaerimus.

28. Pro priore iam statuamus

$$p=\sin.2\varphi+\sin.4\varphi+\sin.6\varphi+\cdots+\sin.2i\varphi$$

ac multiplicando per $2\sin.\varphi$ fiet

$$2p\sin.\varphi=\cos.\varphi-\cos.3\varphi-\cos.5\varphi-\cdots-\cos.(2i-1)\varphi-\cos.(2i+1)\varphi$$
$$+\cos.3\varphi+\cos.5\varphi+\cdots+\cos.(2i-1)\varphi,$$

unde fit

$$p=\frac{\cos.\varphi-\cos.(2i+1)\varphi}{2\sin.\varphi}.$$

29. Pro altera serie summanda consideremus primo hanc seriem

$$q = \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi + \cos. 6\varphi + \cdots + \cos. 2i\varphi,$$

cuius differentiale statim dat

$$\frac{-\partial q}{\partial \varphi} = 2 \sin. 2\varphi + 4 \sin. 4\varphi + 6 \sin. 6\varphi + \cdots + 2i \sin. 2i\varphi.$$

Iam vero reperiemus

$$2q \sin. \varphi = -\sin. \varphi + \sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi + \cdots + \sin. (2i-1)\varphi + \sin. (2i+1)\varphi$$
$$- \sin. 3\varphi - \sin. 5\varphi - \cdots - \sin. (2i-1)\varphi$$

sive

$$2q \sin. \varphi = -\sin. \varphi + \sin. (2i+1)\varphi$$

ideoque

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{\sin. (2i+1)\varphi}{2 \sin. \varphi};$$

consequenter habebimus

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{(2i+1) \cos. (2i+1)\varphi}{2 \sin. \varphi} - \frac{\sin. (2i+1)\varphi \cos. \varphi}{2 \sin. \varphi^2},$$

quibus valoribus inventis series prior demta posteriore, hoc est $np + \frac{\partial q}{\partial \varphi}$, dabit valorem quaesitum, series vero in problemate proposita ducta in $\frac{\pi}{nn}$ dabit summam omnium partium circularium, quam quaerimus.

30. Verum ad valores p et q inveniendos duos casus considerari convenit, prouti n fuerit vel numerus par vel numerus impar. Sit igitur primo par ponaturque $n = 2i$, ita ut i superare nequeat $\frac{n}{2}$, et quoniam posuimus $\varphi = \frac{m\pi}{n}$, erit nunc $\varphi = \frac{m\pi}{2i}$, unde deducimus

$$p = \frac{1}{2} \cot. \frac{m\pi}{2i} - \frac{1}{2} \cos. m\pi \cot. \frac{m\pi}{2i} + \frac{1}{2} \sin. m\pi;$$

quae expressio ob $\sin. m\pi = 0$ reducitur ad hanc

$$p = \frac{1}{2} \cot. \frac{m\pi}{2i} (1 - \cos. m\pi),$$

ubi est $\cos. m\pi = \pm 1$, prouti m fuerit vel numerus par vel impar, atque priori casu erit $p = 0$, posteriori vero $p = \cot. \frac{m\pi}{2i}$.

31. Porro autem hoc casu $n = 2i$ erit

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = i \cos. m\pi \cot. \frac{m\pi}{2i} - \frac{1}{2}(2i+1) \sin. m\pi - \frac{1}{2} \sin. m\pi \cot. \frac{m\pi^2}{2i},$$

quae expressio ob $\sin. m\pi = 0$ abit in hanc

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = i \cos. m\pi \cot. \frac{m\pi}{2i}.$$

Quare cum summa quaesita sit $np + \frac{\partial q}{\partial \varphi}$, ea erit $i \cot. \frac{m\pi}{2i}$, consequenter loco $2i$ restituendo n erit summa

$$= \frac{1}{2} n \cot. \frac{m\pi}{n}.$$

32. Evolvamus nunc etiam alterum casum, quo n est numerus impar, et quoniam $2i+1$ superare non debet n, manifesto poni poterit $2i+1 = n$, quo facto statim habemus

$$p = \frac{1}{2} \cot. \frac{m\pi}{n} - \frac{\cos. m\pi}{2 \sin. \frac{m\pi}{n}},$$

deinde vero

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{n \cos. m\pi}{2 \sin. \frac{m\pi}{n}} - \frac{\sin. m\pi \cot. \frac{m\pi}{n}}{2 \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

hincque ipsa summa quaesita

$$np + \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{n \cos. \frac{m\pi}{n}}{2 \sin. \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2} n \cot. \frac{m\pi}{n}.$$

33. Cum igitur, sive n sit numerus par sive impar, eadem summa prodeat, scilicet $\frac{1}{2} n \cot. \frac{m\pi}{n}$, haec per $\frac{\pi}{nn}$ multiplicata dabit summam omnium

partium circularium, quarum ergo summa erit $\frac{\pi}{2n}\cot.\frac{m\pi}{n}$; consequenter formula generalis supra pro T inventa erit nunc [1])

$$T = \frac{1}{n} ln + \frac{\pi}{2n}\cot.\frac{m\pi}{n} - \frac{1}{n}\cos.\frac{2m\pi}{n} l2 \sin.\frac{\pi}{n}$$
$$- \frac{1}{n}\cos.\frac{4m\pi}{n} l2 \sin.\frac{2\pi}{n}$$
$$- \frac{1}{n}\cos.\frac{6m\pi}{n} l2 \sin.\frac{3\pi}{n}$$
$$- \text{etc.},$$

quae expressio porro ducta in

$$\frac{\pi}{n \sin.\frac{m\pi}{n}}$$

dabit valorem expressionis in primo problemate tractatae, sicque nunc ex hac nova formula multo facilius erit exempla particularia, quotquot libuerit, evolvere.

34. Circa formulam integralem in problemate primo tractatam casus prorsus singularis occurrit, quando $m = n$; tum enim fit $\Delta = \infty$. At vero habebitur $T = \int 0 \partial u$ sicque prodit $S = \Delta T = \infty \cdot 0$, cuius ergo valor hoc modo plane non determinatur. Eum ergo immediate ex ipsa prima formula eruere convenit. Posito autem $m = n$ erit

$$S = -\int \frac{x^{n-1} \partial x lx}{1 - x^n},$$

quae formula per seriem ita evolvitur

$$S = \int - x^{n-1} \partial x lx (1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.});$$

quae ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa ob

$$\int - x^{\lambda - 1} \partial x lx = \frac{1}{\lambda\lambda}$$

1) Vide notam 1 p. 405. A. L.

statim ducit ad hanc seriem

$$S = \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\right);$$

cuius seriei summa cum sit $\frac{\pi\pi}{6}$, erit

$$S = \frac{\pi\pi}{6nn}.$$

At vero nulla via patet hunc valorem ex praecedente solutione derivandi.

PROBLEMA

Proposita formula integrali hac

$$V = \int -\partial v\,(1-v)^{\theta-1} lv$$

eius valorem a termino $v = 0$ *ad* $v = 1$ *extensum per expressionem finitam repraesentare.*

SOLUTIO

35. Cum sit $lv = l(1-(1-v))$, erit per seriem

$$-lv = \frac{1-v}{1} + \frac{(1-v)^2}{2} + \frac{(1-v)^3}{3} + \text{etc.}$$

sicque erit

$$V = \int \partial v \left(\frac{(1-v)^\theta}{1} + \frac{(1-v)^{\theta+1}}{2} + \frac{(1-v)^{\theta+2}}{3} + \text{etc.}\right).$$

Quare cum in genere sit

$$\int \partial v (1-v)^\lambda = -\frac{(1-v)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C,$$

hoc ut evanescat posito $v = 0$, fieri debet $C = \frac{1}{\lambda+1}$. Facto nunc $v = 1$ erit pro nostro casu

$$\int \partial v (1-v)^\lambda = \frac{1}{\lambda+1}.$$

Quamobrem habebimus

$$V = \frac{1}{1(\theta+1)} + \frac{1}{2(\theta+2)} + \frac{1}{3(\theta+3)} + \text{etc.}$$

36. Cum nunc sit

$$\frac{1}{1(\theta+1)} = \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta+1}\right)$$

et in genere

$$\frac{1}{\alpha(\theta+\alpha)} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta+\alpha}\right),$$

series nostra in duas partes resolvitur. Erit enim

$$V = \frac{1}{\theta}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{\theta+3} - \frac{1}{\theta+4} - \frac{1}{\theta+5} - \text{etc.} \end{array}\right\};$$

quae quo facilius ad formulas integrales redigi queant, prior ita repraesentetur

$$p = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \text{etc.},$$

altera vero hoc modo

$$q = \frac{y^{\theta+1}}{\theta+1} + \frac{y^{\theta+2}}{\theta+2} + \frac{y^{\theta+3}}{\theta+3} + \text{etc.},$$

quippe quae casu $y = 1$ in nostras series abeunt. Inde vero prodit

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.} = \frac{1}{1-y},$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = y^\theta + y^{\theta+1} + y^{\theta+2} + y^{\theta+3} + \text{etc.} = \frac{y^\theta}{1-y}.$$

Hinc igitur habebimus

$$\partial p - \partial q = \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y};$$

consequenter erit

$$p - q = \int \frac{\partial y(1-y^\theta)}{1-y}.$$

Formulam istam integralem ab $y = 0$ ad $y = 1$ extendendo valor noster quaesitus erit

$$V = \frac{1}{\theta} \int \frac{\partial y (1 - y^\theta)}{1 - y},$$

qui utique semper per logarithmos et arcus circulares assignari poterit.

COROLLARIUM 1

37. Quo has formulas ad maiorem affinitatem cum ante tractata reducamus, ponamus primo $v = x^n$, ita ut ipsa formula proposita nunc sit

$$V = nn \int - x^{n-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\theta - 1} lx.$$

Tum vero in formula, ad quam sumus perducti, statuamus simili modo $y = u^n$ fietque

$$V = \frac{n}{\theta} \int \frac{u^{n-1} \partial u \, (1 - u^{n\theta})}{1 - u^n},$$

cuius formulae iam denominator et alterum membrum cum forma supra inventa

$$T = \int \frac{(u^{m-1} - u^{n-1}) \partial u}{1 - u^n}$$

congruit. Quare ut paritas perfecta reddatur, statuamus $n\theta + n = m$ ideoque $\theta = \frac{m - n}{n}$ sicque forma proposita fiet

$$V = nn \int - x^{n-1} \partial x \, (1 - x^n)^{\frac{m-2n}{n}} lx$$

sive

$$V = nn \int \frac{- x^{n-1} \partial x lx}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{2n-m}}}.$$

Tum vero idem valor etiam ita exprimetur

$$V = \frac{nn}{m - n} \int \frac{u^{n-1} - u^{m-1}}{1 - u^n} \partial u,$$

hoc est

$$V = \frac{nn}{n - m} T.$$

Hinc ergo, cum ex problemate primo sit $S = \triangle T$, nunc ambae formulae S et V ita a se invicem pendent, ut sit

$$V = \frac{nn}{n-m}\frac{S}{\triangle}.$$

SCHOLION

38. Haec reductio ad similitudinem adhuc alio modo peragi potest, statuendo $n\theta = m$ sive $\theta = \frac{m}{n}$, atque nunc formula proposita erit

$$V = nn\int -x^{n-1}\partial x\, lx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

sive

$$V = nn\int \frac{-x^{n-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}};$$

tum vero formula inde derivata erit

$$V = \frac{nn}{m}\int \frac{u^{n-1}-u^{m+n-1}}{1-u^n}\partial u.$$

Cum autem sit

$$u^{m+n-1} = u^{m-1}\,(1-(1-u^n)),$$

haec formula transformabitur in hanc

$$\frac{nn}{m}\int u^{m-1}\partial u + \frac{nn}{m}\int \frac{u^{n-1}-u^{m-1}}{1-u^n}\partial u$$

ideoque

$$V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}T,$$

quamobrem istae duae formulae integrales

$$S = \int \frac{-x^{m-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} \quad \text{et} \quad \frac{V}{nn} = \int \frac{-x^{n-1}\partial x\, lx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

ita inter se cohaerent, ut ob $T = \frac{S}{\triangle}$ sit

$$V = \frac{nn}{mm} - \frac{nn}{m}\frac{S}{\triangle};$$

unde, quia formula posterior tanquam simplicior ipsius S spectari potest, valore ipsius V invento erit

$$S = \triangle\left(\frac{1}{m} - \frac{m}{nn}V\right).$$

Haec autem reductio longe est praeferenda illi, quam ante invenimus, quippe quae laborabat hoc defectu, quod fractio differentialis ibi integranda erat spuria, cum in numeratore occurrat potestas $u^{n\theta+n-1}$, quae utique altior est quam potestas denominatoris u^n; quocirca nunc demum integrale pro quantitate T ante evolutum hic usurpari poterit.

SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES

(Conf. commentationem de eodem argumento in Actor. Acad. Berolinensis tomo V. A. 1749 p. 139.)[1])

Commentatio 807 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 1, Petropoli 1862, p. 269—281

1. Dans le commerce littéraire de MM. LEIBNITZ et JEAN BERNOULLI, on trouve une grande controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, controverse qui a été traitée, de part et d'autre, avec beaucoup de force, sans pourtant que ces deux grands hommes fussent tombés d'accord sur cette matière, quoiqu'on remarque d'ailleurs entr'eux une très parfaite harmonie sur tous les autres points de l'Analyse. Cette dissension paraît d'autant plus remarquable qu'elle roule sur un article de cette partie des Mathématiques qu'on nomme pures, et qu'on ne croit ordinairement susceptible d'aucune contestation, tout y étant fondé sur les plus rigoureuses démonstrations. Car on sait que les autres questions sur lesquelles les Mathématiciens ne sont pas d'accord appartiennent à la partie appliquée des Mathématiques, où les diverses manières d'envisager les objets et de les ramener à des idées mathématiques peuvent donner lieu à des controverses réelles; et on se vante même souvent qu'elles sont tout à fait bannies de l'Analyse ou des Mathématiques pures.

1) Voir, dans le volume I_{17}, le mémoire 168 qui est une seconde version du mémoire 807. G. F.

2. En effet, la gloire d'infaillibilité que cette science s'est acquise souffrirait une grande atteinte, s'il y avait des questions sur lesquelles les sentiments seraient non seulement partagés, mais où il serait même impossible de découvrir la vérité par une démonstration évidente qui puisse mettre fin à toutes les disputes. Comme il n'y a aucun doute qu'un tel accommodement entre les divers sentiments de MM. LEIBNITZ et BERNOULLI n'ait lieu, je vais examiner l'un et l'autre, en pesant les arguments que chacun allègue tant pour la confirmation de son sentiment que pour la réfutation du contraire, et j'espère bien développer cette matière et la mettre dans tout son jour, de sorte qu'il n'y reste plus aucun doute et que l'une et l'autre partie sera obligée de reconnaître la solidité de la décision que je donnerai, et qui mettra fin à toutes les disputes qui pourraient encore naître sur cette matière.

3. M. LEIBNITZ donna le premier occasion à cette controverse avec M. BERNOULLI, quand il avança dans la CXC épître[1]) que la raison de 1 à -1 ou de -1 à $+1$ était imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison était imaginaire, où il supposait évidemment que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires ou impossibles. Là-dessus, M. BERNOULLI déclara, dans la CXCIII épître[2]), qu'il n'était point du même avis et qu'il croyait même que les logarithmes des nombres négatifs étaient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris affirmativement. Il soutient donc que

$$l(+x) = l(-x),$$

ce qu'il veut prouver par l'égalité de leurs différentielles, vu que

$$dlx = \frac{dx}{x}$$

et de même

$$dl(-x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Contre cet argument M. LEIBNITZ réplique que la règle commune de différentier les logarithmes, en divisant la différentielle du nombre par le nombre

1) *Virorum celeberr. Got. Gul. LEIBNITII et JOHAN. BERNOULLII commercium philosophicum et mathematicum,* t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716. Lausannae et Genevae 1745, p. 268, lettre du 16 mai 1712. A. L.

2) Même lieu, p. 275, lettre du 25 mai 1712. A. L.

même, n'avait lieu que pour les nombres affirmatifs et que, par conséquent, cette différentiation $dlx = \frac{dx}{x}$ n'était juste que lorsque x marquait une quantité affirmative. Mais j'avoue que cette réponse, si elle était juste, ébranlerait le fondement de toute l'Analyse qui consiste principalement dans la généralité des règles et des opérations qui sont jugées vraies, de quelque nature qu'on suppose être les quantités auxquelles on les applique.

4. Mais, quoique la règle de différentier les logarithmes soit généralement vraie, de sorte que $dlx = \frac{dx}{x}$, soit que x fût une quantité affirmative ou négative, l'argument de M. Bernoulli ne prouve pas ce qu'il veut prouver. Je dis que de ce que les différentielles des quantités lx et $l(-x)$ sont égales, il ne s'ensuit nullement que les quantités mêmes soient égales entr'elles; puisqu'on sait que deux quantités qui diffèrent d'une constante ont la même différentielle. Ainsi, les différentielles de $x+1$ et de $x-1$ sont l'une et l'autre $= dx$, sans qu'on en puisse conclure une égalité entre les quantités $x+1$ et $x-1$. Outre cela, M. Bernoulli aurait prouvé par le même raisonnement que $l2x = lx$ puisque

$$dl2x = \frac{2\,dx}{2\,x} = \frac{dx}{x} = dlx$$

et en général, il s'en suivrait que $lnx = lx$, n marquant un nombre quelconque. C'est pourquoi de l'égalité entre les différentielles des lx et $l(-x)$ on ne peut rien conclure, sinon que ces deux logarithmes diffèrent entre eux d'une quantité constante. Et en effet, $l(-x)$ à cause de $-x = x \cdot -1$ n'est autre chose que $lx + l(-1)$. Il est vrai que M. Bernoulli prétend que $l(-1) = l1 = 0$, auquel cas il serait sans doute $l(-x) = l(+x)$, mais c'est justement ce que M. Leibnitz avait nié et que M. Bernoulli voulait prouver par cet argument; de sorte que, de ce côté-ci, rien n'est encore décidé.

5. Dans le même passage que je viens d'examiner, M. Bernoulli se sert encore d'un autre argument, mais qui ne diffère du précédent que dans la manière de le proposer, quand il soutient que la courbe logarithmique a, des deux côtés de son asymptote, deux parties égales et semblables, de sorte qu'à chaque abscisse ou logarithme répondent deux ordonnées ou nombres égaux, l'un affirmatif, l'autre négatif. Car, considérant l'équation de cette courbe

$$ydx = ady,$$

où x marque l'abscisse prise sur l'asymptote de la logarithmique, y l'ordonnée et a la sous-tangente constante, il en paraît suivre que, si à la même abscisse x répond la valeur $y = u$, il y répondra aussi $y = -u$, puisque, si $+udx = +adu$, il y aura aussi $-udx = -adu$. Mais ce raisonnement est semblable au précédent, et il en suivrait de même qu'à l'abscisse $= x$ répondrait aussi l'ordonnée $y = 2u$, et généralement $y = nu$, de sorte que cette courbe aurait non seulement deux ordonnées, $y = u$ et $y = -u$, qui répondraient à l'abscisse $= x$, mais le nombre des ordonnées serait infini; conséquence qu'on est pourtant bien éloigné d'admettre. D'où l'on voit que cet argument ne prouve pas que la logarithmique ait deux branches pareilles des deux côtés de son asymptote.

6. Mais on m'objectera peut-être que c'est pourtant le plus sûr moyen que de juger de la figure d'une ligne courbe et du nombre de ses branches par son équation, et que c'est par ce principe que les Géomètres déterminent les formes de toutes les courbes algébriques. A quoi je réponds que cette méthode n'a lieu que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique ou du moins conçue en termes finis, et que jamais une équation différentielle n'est propre à ce dessein. Car on sait qu'une équation différentielle est toujours indéterminée, à cause d'une quantité constante arbitraire qu'elle renferme et qu'on doit introduire dans l'intégration, de sorte qu'une telle équation embrasse toujours une infinité de courbes à la fois. On n'a qu'à regarder l'équation différentielle pour la parabole

$$2ydy = adx,$$

et l'on verra qu'elle contient non seulement cette équation finie

$$y^2 = ax,$$

mais aussi celle-ci

$$y^2 = ax \pm ab,$$

quelque valeur qu'on donne à la quantité b. Par conséquent, en ne considérant que l'équation différentielle $2ydy = adx$, on devrait conclure qu'à la même abscisse $= x$ répond non seulement l'ordonnée $y = \sqrt{ax}$, mais encore $y = \sqrt{(ax \pm a^2)}$ et en général $y = \sqrt{(ax \pm ab)}$. Cette réflexion est suffisante pour faire voir qu'on ne peut guère juger de la forme d'une ligne courbe en ne regardant que son équation différentielle.

7. Or, M. Bernoulli, aussi bien que plusieurs Mathématiciens qui soutiennent encore le même sentiment, tâche de prouver encore par d'autres arguments que l'asymptote de la logarithmique est en même temps son diamètre. Ces arguments sont fondés ou sur la construction de cette courbe, ou sur l'analogie. On se sert de l'analogie, en considérant, au lieu de l'équation pour la logarithmique $dx = \frac{dy}{y}$, celle-ci qui est plus grande

$$dx = \frac{dy}{y^n}$$

et dont l'intégrale est

$$x = C - \frac{1}{(n-1)y^{n-1}};$$

on y remarque que toutes les fois que n est un nombre impair, la courbe a sans contredit un diamètre ou deux branches égales et semblables. Cela remarqué, dit-on, qu'on suppose $n = 1$, et puisque 1 est un nombre impair, la logarithmique doit avoir la même propriété. C'est, à mon avis, le plus fort argument qu'on ait apporté jusqu'ici pour prouver que la logarithmique a un diamètre; or, je ferai voir néanmoins que cette conclusion qu'on en veut tirer n'est pas assez sûre.

8. Quand il s'agit, dans l'Analyse, des cas d'intégrabilité ou, dans la Géométrie, de certaines propriétés des lignes courbes, on trouve rarement des propositions assez générales et il y faut presque toujours excepter un ou plusieurs cas auxquels on ne peut pas faire l'application. On peut bien dire que cette formule $x^n dx$ est généralement intégrable, quelque nombre qu'on mette pour n, pourvu qu'on en excepte le cas $n = -1$. Et il en est de même de plusieurs autres formules générales dont on ne peut presque jamais affirmer qu'elles soient intégrables dans tous les cas sans exception. Ainsi, quand on dirait que l'équation

$$dx = \frac{dy}{y^n}$$

représente toujours une courbe algébrique, quelque nombre rationnel qu'on mette pour n, cette proposition ne souffrirait qu'une seule exception, celle du cas $n = 1$. Donc, puisque ce cas est si particulièrement distingué de tous les autres, qui sera garant qu'il ne faut pas aussi faire une exception à la règle mentionnée à l'égard d'un diamètre qu'on voudrait attribuer à la

courbe comprise sous l'équation $dx = \frac{dy}{y}$? Car, dans tous les autres cas où n est égal à un nombre impair, nous reconnaissons avec évidence la nécessité d'un diamètre, puisque dans ces cas l'équation est intégrable; mais dans le cas $n = 1$ cette évidence cesse entièrement, à cause de l'impossibilité de l'intégration. Par conséquent, on est au moins obligé d'avouer que la conclusion qu'on veut tirer de cet argument n'est pas assez sûre.

9. On doutera peut-être que le jugement de la propriété d'un diamètre soit assujetti à de semblables exceptions qu'on doit reconnaître dans les intégrations; mais je ferai voir très clairement que, même dans les courbes algébriques, il faut souvent admettre quelque exception par rapport à la propriété des diamètres. Qu'on considère par exemple cette équation générale

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{(a^3(b+x))},$$

et on n'hésitera pas de conclure que cette courbe a toujours un diamètre, puisqu'en la réduisant à la rationalité on parvient à une équation du 8^{me} degré où tous les exposants des puissances de y sont pairs. Cependant, quelque sûre que paraisse cette conclusion, on en doit excepter le cas où $b = 0$. Car alors, si l'on délivre l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ de l'irrationalité, on aura précisément

$$y^2 - 2y\sqrt{ax} + ax = \sqrt{a^3x}$$

ou

$$y^2 + ax = (2y + a)\sqrt{ax}\,^{1})$$

et partant, prenant encore les carrés,

$$y^4 + 2axy^2 + a^2x^2 = 4axy^2 + 4a^2xy + a^3x$$

ou

$$y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$$

qui, à cause du terme $4a^2xy$, est destituée de diamètre. Donc, puisque dans les courbes algébriques on est obligé de reconnaître quelquefois des exceptions,

1) Cette équation n'est équivalente à l'équation donnée $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$ que si l'on borne le radical $\sqrt{ax}$ à des valeurs non négatives. G. F.

comment peut-on être assuré que le cas en question n'en exige pas aussi? Et partant, il s'en faut de beaucoup pour que l'argument apporté prouve invinciblement que la logarithmique ait un diamètre.

10. La même incertitude se trouve dans les autres arguments qu'on tire de la construction de la courbe logarithmique par la quadrature de l'hyperbole. Car, quand même on tournerait cette construction en sorte qu'il en résulterait nécessairement deux branches de la logarithmique, on aurait encore des raisons assez fortes pour douter que ces deux branches appartienent nécessairement ensemble et qu'elles ne constituent qu'une seule ligne continue. Pour le prouver, je pourrais rapporter plusieurs exemples de constructions par lesquelles on obtient deux lignes courbes différentes qui ne sont pas liées ensemble par le lien de la continuité. Car, comme on peut toujours comprendre deux lignes courbes, quelque différentes qu'elles soient, sous une équation, en multipliant leurs équations ensemble, on n'a qu'à imaginer une telle construction qui convienne à cette équation composée, et elle fournira les deux courbes proposées, comme si elles ne formaient qu'une seule ligne courbe. Ou bien, ayant décrit sur le même axe les deux paraboles

$$v^2 = ax \quad \text{et} \quad u^4 = a^3x,$$

qu'on en construise une nouvelle courbe dont l'ordonnée, y, qui répond à la même abscisse x, soit égale à la somme des ordonnées $v + u$ des deux paraboles proposées; or, chacune de ces ordonnées pouvant être prise tant affirmativement que négativement, on trouvera pour chaque abscisse x quatre ordonnées $v + u$, $-v - u$, $v - u$, $-v + u$, et la courbe construite aura un diamètre. Néanmoins, l'équation

$$y = v + u = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$$

nous fait voir que la courbe n'a pas de diamètre, comme je viens de remarquer dans l'article précédent.

11. De plus, comme il y a des constructions desquelles on tire deux courbes différentes, il y a aussi des constructions défectueuses qui ne donnent qu'une partie d'une ligne courbe. Car, soit décrit un cercle dont le diamètre $= a$, sur lequel prenant l'abscisse $= x$, l'ordonnée y sera $= \sqrt{(ax - x^2)}$; qu'on

prolonge ensuite chaque ordonnée jusqu'à ce qu'elle devienne égale à la corde $V(x^2+y^2)=Vax$, et cette nouvelle ordonnée qui soit nommée $z=Vax$ marquera une parabole. Mais cette description de la parabole ne s'étend pas au-delà du cercle, quoique la parabole même s'étende à l'infini. Cette circonstance prouve encore qu'il n'est pas toujours sûr de juger de la vraie forme d'une ligne courbe et de toutes les parties qu'elle renferme, par quelque construction qu'on en puisse donner.

12. D'ailleurs, la méthode même de juger de toutes les parties qui appartiennent à la même ligne courbe n'a proprement lieu que dans les courbes algébriques. Car, après avoir délivré l'équation qui exprime la nature de la ligne courbe de toute irrationalité, on considère l'équation rationnelle qui en résulte, si elle renferme des facteurs rationnels ou non. Dans le premier cas, on juge que la courbe est composée d'autant de courbes différentes qu'il y a de facteurs; mais si l'équation n'est pas résoluble en facteurs rationnels, on conclut que tous les points qui sont marqués par cette équation appartiennent à la même courbe. C'est pourquoi, quand il s'agit de courbes transcendantes, puisque l'équation même n'est pas algébrique, on ne saurait pas même former la question si elle a des facteurs rationnels ou non, et partant, le jugement des parties qui appartiennent à la même courbe n'a plus lieu, si ces parties ne sont pas immédiatement liées ensemble. Et partant, on n'est pas en état de décider, si la logarithmique a deux branches égales qui se rapportent de part et d'autre à la même asymptote ou non. Au moins doit-on convenir que cette décision, quelle qu'elle soit, n'est pas nécessairement liée avec le sujet en question, de savoir si les logarithmes des nombres négatifs sont réels ou imaginaires.

13. Les logarithmes sont fondés sur un nombre constant, pris à volonté, et dont on suppose le logarithme $=1$. Soit ce nombre e, et que x marque le logarithme du nombre y, de sorte que $x=ly$, et alors on aura $y=e^x$. Donc, le logarithme x d'un nombre proposé $=y$ n'est autre chose que l'exposant de la puissance de e qui est égale au nombre y. Dans les tables vulgaires, on suppose ce nombre arbitraire $e=10$, et alors x sera le logarithme du nombre y, si $10^x=y$; et dans les logarithmes qu'on nomme hyperboliques et dont la propriété est que, si ω marque une fraction infiniment petite, le logarithme du nombre $1+\omega$ est égal à ω, le nombre e dont le logarithme

$= 1$ devient égal à 2,718281828459. Or, quelque valeur qu'on donne à ce nombre e, pourvu qu'elle soit > 1, on voit de la formule $y = e^x$ que, toutes les fois que y est un nombre affirmatif, il est possible d'assigner à x une valeur réelle de sorte que e^x devienne égale à y. Mais il est aussi évident que, si y est un nombre négatif, on ne saurait trouver pour x une valeur réelle de sorte que la puissance e^x devienne négative et $= y$.

14. Il est vrai cependant que, si x est une fraction d'un dénominateur pair, la puissance ou plutôt la racine e^x puisse être prise tant affirmativement que négativement, de sorte que, si le logarithme x est $= \frac{1}{2}$, le nombre y dont le logarithme $= \frac{1}{2}$ puisse être aussi bien $= -\sqrt{e}$ que $= +\sqrt{e}$. Mais cette ambiguïté ne se rencontre que dans les cas où x est une fraction dont le dénominateur est un nombre pair; et si le logarithme x était $= 2$, il serait certainement faux que 2 fût le logarithme de $y = -ee$, puisque $-ee$ n'est nullement égal à ee; et partant, il faut au moins avouer que les logarithmes des nombres négatifs en général ne sont pas réels. Mais pour ce qui regarde l'ambiguïté de la formule e^x dans les cas où x est une fraction d'un dénominateur pair, je ne sais pas si on la peut admettre dans les logarithmes. Car, ayant égard à la nature et à l'usage des logarithmes, il semble qu'à chaque logarithme ne puisse répondre qu'un seul nombre.

15. Quoi qu'il en soit, on ne prouvera jamais, par de semblables raisonnements, que le logarithme de -1 est égal à celui de $+1$ ou à zéro, puisque e^0 ne peut avoir d'autres valeurs que $+1$. Si quelqu'un disait que e^0 peut être regardé comme $e^{\frac{0}{2}}$ et partant comme $\sqrt{e^0}$ ou $\sqrt{1}$, ce qui serait tant -1 que $+1$, on pourrait, par la même raison, prouver que x^1, étant $= x^{\frac{2}{2}}$, serait égal tant à $+x$ qu'à $-x$, et de plus que $a + x$ serait la même chose que $a - x$; et on pourrait soutenir, par le même argument, que toutes les quantités sont égales entre elles. Mais si le logarithme de -1 n'est pas $= 0$, il sera nécessairement imaginaire; et puisque $-y = -1 \cdot y$, nous aurons $l(-y) = l(-1) + ly$, d'où il est clair que, le logarithme de $+y$ étant réel, le logarithme de $-y$ doit absolument être imaginaire.

16. La thèse qu'à tout logarithme x ne puisse répondre qu'un seul nombre y sera encore confirmée, quand on considère la résolution de la formule

e^x en cette série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots,$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Cette série étant regardée dans l'Analyse comme tout à fait équivalente à l'expression e^x, on ne saurait douter que sa valeur ne soit déterminée dès qu'on donne à x une valeur donnée, puisque cette série est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on substitue pour x. Et par cette raison, on est en droit de soutenir qu'en tant que l'expression e^x marque le nombre dont le logarithme $= x$, elle ne renferme jamais aucune ambiguïté et que sa valeur est toujours unique et affirmative, quelque fraction qu'on prenne pour x, de sorte que, bien que x soit une fraction comme $\frac{1}{2}$, l'expression de e^x n'aura toujours qu'une seule valeur affirmative.

17. Si l'on voulait insister que la formule e^x, au cas $x = \frac{1}{2}$, eût une double valeur et que $\frac{1}{2}$ fût le logarithme tant de $-\sqrt{e}$ que de $+\sqrt{e}$, il s'en suivrait que les logarithmes des nombres imaginaires sont pareillement réels. Car supposons $x = \frac{1}{3}$, et l'on sait que la formule $e^{\frac{1}{3}}$ renferme trois valeurs

$$\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e},$$

de chacune desquelles le logarithme serait $= \frac{1}{3}$. Supposons $x = \frac{1}{4}$ et les valeurs de $y = e^{\frac{1}{4}}$ seront

$$\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt[4]{e}, \quad +\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{e}.$$

Donc nous aurions

$$l(+\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{e}) = l(-\sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{e}) = \frac{1}{4}.$$

Mais $l\sqrt[4]{e} = \frac{1}{4}le = \frac{1}{4}$, d'où il suivrait que $l\sqrt{-1} = 0$. Or, M. Bernoulli ayant fait cette belle découverte que $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ marque la quadrature du cercle[1]),

1) Joh. Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral etc.*, Mém. de l'acad. des sc. de Paris 1702, p. 289, et *Opera omnia* t. I, p. 393. Voir surtout les deux derniers corollaires de ce mémoire. G. F.

puisque $\sqrt{-1}$ est imaginaire sans contredit, il faut que $l\sqrt{-1}$ le soit aussi, et personne n'aura moins de droit que M. BERNOULLI lui-même de soutenir désormais que $l\sqrt{-1}$ soit $= 0$.

18. Ayant donc fait voir que personne n'a encore suffisamment prouvé que les logarithmes des nombres négatifs soient réels, mais que plutôt le sentiment opposé, selon lequel les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires, est conforme à la vérité, je proposerai les difficultés qu'on rencontre de part et d'autre, soit qu'on soutienne que les logarithmes des nombres négatifs sont réels, soit qu'on les prenne pour imaginaires. Ces difficultés paraîtront si fortes et même tellement remplies de contradictions, qu'on comprendra à peine comment il sera possible de se tirer d'affaire et de mettre la théorie des logarithmes à l'abri de toute attaque; or, j'espère néanmoins en venir à bout.

19. Si l'on veut avec M. BERNOULLI que les logarithmes des nombres négatifs soient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs ou, ce qui revient au même, que $l(-1) = 0$, on trouve la difficulté suivante: Ou il est vrai que

$$la^x = x\,la$$

généralement, ou non; s'il est vrai, il y aura de même

$$l(-1)^x = x\,l(-1) = 0$$

ce dont on sera aisément d'accord, si x est un nombre entier. Mais si x est une fraction, on aura aussi $l\sqrt{-1} = 0$, et par conséquent, la réduction de M. BERNOULLI des arcs de cercle aux logarithmes imaginaires serait fausse; ce qui serait absurde, puisque cette découverte est établie sur les plus solides démonstrations de l'Analyse. Mais si l'on nie que $la^x = x\,la$, on renverse toute la théorie des logarithmes; car, quoiqu'on voulût admettre la résolution $la^x = x\,la$ aux cas que x fût un nombre entier, elle deviendrait pourtant tout à fait inutile, si x marquait un nombre en général ou inconnu.

20. Qu'on dise donc avec M. DE LEIBNITZ que les logarithmes des nombres négatifs ne sont point réels, mais imaginaires, et l'on s'apercevra bientôt qu'on retombe dans le même embarras. Car, soit $l(-1) = p$, de sorte que p soit

un nombre imaginaire, et l'on ne pourra nier que $l(-1)^n = np$, surtout quand n est un nombre entier. Soit donc $n = 2$, et nous aurons

$$l(-1)^2 = l(+1) = 2p.$$

Mais dans la doctrine des logarithmes, c'est le premier principe que $l(+1) = 0$; par conséquent, il y aurait $2p = 0$ et partant $p = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On prouvera de même que

$$l\sqrt{-1}, \quad l\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

et les logarithmes des plus hautes racines de l'unité devraient tous également être $= 0$, d'où résulteraient les mêmes contradictions qui se sont rencontrées dans l'hypothèse précédente.

21. Voilà donc des contradictions assez palpables qu'on rencontre, de quelque côté qu'on se tourne; je ne doute pas que la plupart des Mathématiciens ne s'en soient aperçus, bien qu'ils n'aient pas jugé à propos de publier leurs doutes sur cette matière, de peur de rendre l'Analyse trop suspecte, s'ils n'étaient pas en état de sauver la théorie des logarithmes. Car ce serait sans doute une tache indélébile dans l'Analyse, si la doctrine des logarithmes était tellement remplie de contradictions qu'il fût impossible de trouver une conciliation. Aussi y a-t-il longtemps que ces difficultés m'ont tourmenté, et je me suis fait plusieurs illusions là-dessus, pour me satisfaire en quelque manière, sans être obligé de renverser tout à fait la théorie des logarithmes. Je me suis imaginé que, de même qu'une quantité admet toujours deux racines carrées, trois racines cubiques, quatre racines biquadratiques etc., ainsi une quantité pourrait avoir une double moitié, un triple tiers, un quadruple quart etc. dont l'un seulement serait réel, les autres imaginaires. Ainsi, posant $ly = x$, je concevais que

$$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad l(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x'$$

et que $\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}x'$ puissent être différents, quoique le double de l'un et de l'autre soit le même $= x$. De la même manière, pour les trois racines cubiques de y, il serait

$$l\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x, \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x' \quad \text{et} \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x'',$$

où

$$\frac{1}{3}x, \quad \frac{1}{3}x' \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}x''$$

soient des nombres différents, le premier, $\frac{1}{3}x$, réel, et les deux autres, $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$, imaginaires, bien que le triple de chacun soit $= x$. Cette explication me paraissait bien extrêmement paradoxe et insoutenable, mais pourtant moins absurde que les contradictions que j'aurais été obligé d'admettre dans la théorie des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

22. Ayant fait bien sentir l'importance de toutes ces difficultés qui se trouvent dans la doctrine des logarithmes et qui même paraissent des contradictions ouvertes, on aura de la peine à comprendre qu'il soit possible de lever toutes ces difficultés sans porter aucune atteinte à la certitude de l'Analyse et des règles sur lesquelles elle est fondée. Cependant, la vérité est trop solidement établie pour qu'elle puisse être assujettie à aucune contradiction, et ce ne sont que les manières peu justes dont nous l'envisageons qui peuvent nous éblouir. Souvent, il est si difficile de s'apercevoir de ce défaut de justesse qui se trouve dans nos idées et qui nous fait voir de si grandes difficultés, qu'il nous semble tout à fait impossible de sauver la vérité. Cela est précisément le cas où nous nous trouvons par rapport aux logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; car, après avoir bien pesé toutes les difficultés que je viens d'étaler, j'ai trouvé qu'elles ne viennent que de ce que nous supposons que chaque nombre n'a qu'un seul logarithme. Car, si cette supposition était vraie, il serait bien certain qu'on ne saurait guère trouver le moyen de se tirer de l'embarras où cette matière nous jette. Mais, dès que nous accordons qu'un nombre peut avoir plusieurs, et même une infinité de logarithmes, alors toutes les difficultés mentionnées perdent leur force et s'évanouissent tout à fait, et l'on reconnaîtra la plus parfaite harmonie entre toutes les vérités.

23. Je dis donc que, quoique le nombre dont on suppose le logarithme $= 1$ soit déterminé, chaque nombre a néanmoins une infinité de logarithmes dont tous, à l'exception d'un seul, sont imaginaires, si le nombre est affirmatif; mais s'il est négatif ou imaginaire, tous ses logarithmes seront égale-

ment imaginaires. En conséquence de cela, le logarithme de l'unité sera non seulement $= 0$, mais il y aura encore une infinité de quantités imaginaires dont chacune tient aussi bien lieu du logarithme de l'unité que 0. Soient donc tous les logarithmes de l'unité

$$0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \vartheta \text{ etc.}$$

et, puisque le logarithme de la racine carrée est la moitié du logarithme de la puissance, $\sqrt{1}$ étant tant $+1$ que -1, les logarithmes de la première valeur, $+1$, seront

$$0,\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta,\ \frac{1}{2}\zeta,\ \frac{1}{2}\vartheta \text{ etc.}$$

et les logarithmes de l'autre valeur, -1, seront

$$\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}\gamma,\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \frac{1}{2}\eta \text{ etc.}$$

qui sont différents des précédents, quoique leurs doubles donnent les logarithmes de l'unité. De même, prenant les racines cubiques, il y aura

$$l1 = 0,\quad \frac{1}{3}\gamma,\ \frac{1}{3}\zeta,\ \frac{1}{3}\iota \text{ etc.},$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}\delta,\ \frac{1}{3}\eta \text{ etc.},$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta,\ \frac{1}{3}\varepsilon,\ \frac{1}{3}\vartheta \text{ etc.},$$

et cette considération détruit déjà la plupart des difficultés qui nous ont embarrassés auparavant.

24. Pour prouver cette pluralité infinie des logarithmes qui répondent à chaque nombre, on n'a qu'à regarder le grand rapport qui se trouve entre les logarithmes et les arcs de cercle; puisqu'on sait que les arcs de cercle se peuvent exprimer par logarithmes imaginaires, et réciproquement, les logarithmes par les arcs imaginaires du cercle. Donc, parceque les sinus ou cosinus répondent aux nombres et les arcs aux logarithmes, comme le même sinus se rapporte à une infinité d'arcs différents, ainsi il s'en suit que le même nombre se doit rapporter à une infinité de logarithmes différents.

Nous connaissons mieux le cercle que la courbe logarithmique et, par cette raison, la considération du cercle nous conduira à une plus parfaite connaissance des logarithmes que la logarithmique même; de plus, dans le cercle nous pouvons déterminer tous les arcs qui répondent au même sinus ou cosinus, et quoique ces arcs dans le passage aux logarithmes deviennent imaginaires, ils ne laisseront pas, en nous convainquant de l'infinité des logarithmes, de nous donner à connaître leurs expressions et les espèces de non-réalité sous lesquelles elles sont comprises; et c'est tout ce qu'on peut souhaiter pour l'intelligence d'une quantité imaginaire.

25. Soit φ un arc quelconque d'un cercle dont je suppose le rayon $=1$. Soit x le sinus de cet arc et y son cosinus, de sorte que $y = \sqrt{(1-x^2)}$; donc, nommant la périphérie de ce cercle $= 2\pi$ ou l'arc de $180^0 = \pi$, il est clair que tous les arcs compris dans cette expression générale $\pm 2n\pi + \varphi$ auront non seulement le même sinus $= x$, mais aussi le même cosinus $= y = \sqrt{(1-x^2)}$, pourvu que n signifie un nombre entier quelconque. Or, puisque

$$d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

qu'on suppose

$$x = z\sqrt{-1},$$

et l'on aura

$$d\varphi = \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}.$$

Mais on sait que

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}} = l\left(\sqrt{(1+z^2)} + z\right) + C.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\varphi = \sqrt{-1} \cdot l\left(\sqrt{(1-x^2)} + \frac{x}{\sqrt{-1}}\right) + C,$$

où il est clair que la constante C est $= 0$, puisqu'en mettant $x = 0$ l'arc φ doit s'évanouir de même. Ayant donc

$$\varphi = \sqrt{-1} \cdot l\left(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1}\right),$$

nous aurons

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1}\right)$$

ou bien

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(y + x\sqrt{-1}).$$

26. Cette équation que nous venons de trouver, exprimant le rapport entre l'arc φ et les sinus et cosinus, aura aussi lieu pour tous les autres arcs qui ont le même sinus x et cosinus y; par conséquent, nous aurons

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(y + x\sqrt{-1})$$

et partant,

$$l\,(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

D'où il est clair qu'au même nombre $y + x\sqrt{-1}$ répond une infinité de logarithmes qui sont tous compris dans cette formule générale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$, où à la place de n on peut mettre tel nombre entier qu'on voudra. Puisque x est le sinus et y le cosinus de l'arc φ, posons $x = \sin\varphi$ et $y = \cos\varphi$, et nous aurons cette égalité

$$l\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

27. De cette équation j'examinerai les cas principaux qui fourniront assez d'éclaircissement sur cette matière. Soit donc premièrement $\varphi = 0$, et il y aura $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$, et l'équation trouvée nous donnera

$$l\,1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, posant pour n successivement tous les nombres entiers, les logarithmes de l'unité seront

$$l\,1 = 0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

d'où nous voyons que, quoique le logarithme de 1 soit $= 0$, comme tout le monde le sait, il y en a une infinité d'expressions imaginaires dont chacune est aussi bien le logarithme de l'unité que 0.

28. Cette seule considération nous met en état de donner tous les logarithmes de chaque nombre affirmatif qu'on puisse proposer. Car, soit a le nombre proposé et α son logarithme hyperbolique qu'on trouve par les méthodes ordinaires; et puisque

$$la = l1 + la = \alpha + l1,$$

tous les logarithmes du nombre a seront

$$la = \alpha, \quad \alpha \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

dont tous, excepté le premier, α, sont imaginaires. Il faut remarquer que je ne parle ici que des logarithmes hyperboliques auxquels on est conduit par l'intégration; mais, puisqu'on sait que les logarithmes de diverses espèces observent toujours un rapport constant entr'eux, tout ce que je viens de dire et tout ce que je dirai des logarithmes hyperboliques s'appliquera aisément aux logarithmes tabulaires où l'on met $l10 = 1$, ou à toute autre espèce de logarithmes.

29. Soit maintenant l'arc proposé φ de 180^0, ou soit $\varphi = \pi$, et nous aurons $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$. Cette supposition faite, l'équation générale trouvée se changera en cette forme

$$l(-1) = (\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1} = (1 \pm 2n)\pi\sqrt{-1},$$

d'où nous tirons toute l'infinité des logarithmes du nombre négatif -1, car nous aurons

$$l(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

et de là nous voyons clairement que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires et tous différents des logarithmes de $+1$. Cela non obstant, les logarithmes de $(-1)^2$, qui seront

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 10\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.},$$

sont visiblement contenus dans les logarithmes de $+1$; ce qui suffit pour sauver les contradictions apparentes dont j'ai fait mention là-haut, quoiqu'il

n'en suive pas réciproquement que les moitiés de tous les logarithmes de $+1$ soient logarithmes de -1, ce que la nature même des quantités ne permet pas, puisque -1 n'est pas la seule racine carrée de $+1$.

30. On s'assurera à présent aisément que tous les logarithmes de tous les nombres négatifs sont imaginaires. Car soit $-a$ un nombre négatif quelconque et soit α le logarithme, trouvé par les méthodes ordinaires, du nombre affirmatif $+a$, de sorte que $l(+a) = \alpha$, et parceque $l(-a) = la + l(-1)$, nous aurons tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ exprimés ainsi

$$l(-a) = \alpha \pm \pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 7\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

qui sont tous imaginaires. Par là donc la question, agitée entre MM. LEIBNITZ et BERNOULLI, de savoir, si les logarithmes des nombres négatifs sont réels ou imaginaires, est décidée en faveur du premier, qui les soutient imaginaires, et toutes les objections que M. BERNOULLI a élevées contre ce sentiment n'ont plus aucune prise sur cette décision.

31. Je vais plus loin, et après avoir déterminé les logarithmes des nombres tant affirmatifs que négatifs, je passerai aux nombres imaginaires. Soit, par cet effet, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et nous aurons $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = 1$, d'où nous tirons

$$l\sqrt{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\pi \pm 2n\pi\right)\sqrt{-1} = \left(\pm 2n + \tfrac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1},$$

et partant tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

$$l(+\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},$$
$$+\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

Mais si l'on met $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, à cause de $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = -1$ nous aurons

$$l(-\sqrt{-1}) = \left(-\tfrac{1}{2}\pi \pm 2n\pi\right)\sqrt{-1}$$

et par conséquent

$$l(-\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

D'où il est évident qu'ajoutant les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ ensemble, pour avoir les logarithmes du produit $= +1$, on obtient les mêmes logarithmes que nous avons trouvés pour $+1$. Et si l'on soustrait les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ des logarithmes de $+\sqrt{-1}$, pour avoir les logarithmes du quotient $\frac{+\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}} = -1$, on aura les logarithmes trouvés pour -1.

32. Soit, outre cela, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, et il y aura $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où nous tirerons

$$l\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{1}{3}\pi \pm 2n\pi\right)\sqrt{-1},$$

de sorte que les logarithmes de $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$l\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

$$+\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

Soit $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$, et l'on aura $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où nous obtiendrons

$$l\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = \left(-\frac{1}{3} \pm 2n\right)\pi\sqrt{-1},$$

et partant

$$l\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

$$-\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad -\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

Soit $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, de sorte que $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et nous aurons

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{2}{3} \pm 2n\right)\pi\sqrt{-1},$$

et

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}\quad \text{etc.}$$

$$+\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}\quad \text{etc.}$$

Enfin, mettant $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$, on aura $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \left(-\frac{2}{3} \pm 2n\right)\pi\sqrt{-1}$$

et

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}\quad \text{etc.}$$

$$-\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}\quad \text{etc.}$$

Puisqu'on sait que

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

sont les racines cubiques de $+1$, qu'on fasse toutes les épreuves à cet égard, et l'on trouvera constamment un merveilleux accord avec la vérité.

33. Pour avoir les logarithmes des puissances, on n'a, suivant la règle commune, qu'à multiplier le logarithme de la racine par l'exposant de la puissance. Mais, puisque la racine a une infinité de logarithmes, on en peut ajouter ensemble autant de valeurs différentes que l'exposant de la puissance renferme d'unités. Ainsi, les logarithmes de (-1) étant trouvés

$$\pm\pi\sqrt{-1},\quad \pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \pm 5\pi\sqrt{-1},\quad \pm 7\pi\sqrt{-1}\quad \text{etc.},$$

non seulement les doubles de ces logarithmes donneront le logarithme du carré

$(-1)^2$, mais aussi les sommes de deux quelconques, et par ce moyen on obtiendra toutes ces formules

$$0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1} \quad \text{etc.}$$

qui sont tous les logarithmes de $+1$. De même, joignant trois à trois les logarithmes de

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{ou de} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on obtiendra également tous les logarithmes de $+1$, puisque tant

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

que

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

est égal à l'unité.

34. Cette facilité de trouver les logarithmes des puissances est aussi confirmée par la formule générale trouvée au § 26; car il est démontré[1]) que

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^\mu = \cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1},$$

donc il y aura

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^\mu = l(\cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1}).$$

Cette formule étant semblable à la première, on n'a dans le logarithme qu'à mettre $\mu\varphi$ au lieu de φ, et puisqu'il est permis de mettre $\varphi \pm 2m\pi$ pour φ, nous aurons

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^\mu = (\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1},$$

et lorsque l'exposant est une fraction $\frac{\mu}{\nu}$, nous aurons

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2n\nu\pi)\sqrt{-1},$$

1) Voir A. DE MOIVRE (1667—1754), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, p. 1. G. F.

les lettres m et n marquant des nombres entiers quelconques. Par conséquent, dans les cas $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, nous aurons

$$l 1^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu} (\pm 2\mu m \pm 2\nu n) \pi \sqrt{-1}$$

et

$$l (-1)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu} (\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n) \pi \sqrt{-1}.$$

Et ayant égard à ces circonstances, toutes les difficultés qui se pourraient encore rencontrer dans cette matière disparaîtront entièrement, et la doctrine des logarithmes sera mise à l'abri de toutes les attaques.

CONSIDERATIONS SUR QUELQUES FORMULES INTEGRALES DONT LES VALEURS PEUVENT ETRE EXPRIMEES EN CERTAINS CAS PAR LA QUADRATURE DU CERCLE

Commentatio 816 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 1, Petropoli 1862, p. 408—438[1])

1. Toute formule différentielle rationnelle peut être intégrée par le moyen des logarithmes et de la quadrature du cercle. Or ces intégrales sont pour la plupart renfermées dans des formules d'autant plus compliquées que[2]) la variable contient de dimensions; cependant quand on donne à la variable après l'intégration une certaine valeur déterminée, il peut arriver que les intégrales, quelque compliquées qu'elles soient, se réduisent à des formules assez simples qui semblent mériter une attention particulière.[3]) Il y a aussi des formules intégrales qui en général surpassent toutes les quadratures connues et qui cependant, en certains cas, sont réductibles à la quadrature

---

1) Réimprimé d'après un Manuscrit d'EULER qui se trouve dans la Bibliothèque Nationale de Paris par CH. HENRY dans le Bulletin des sciences math. et astron., t. 4_2 I, 1880, p. 207—256.

M. le Dr. MAX GUT a eu l'obligeance de collationner notre mémoire avec le Manuscrit d'EULER se trouvant à Paris. Nous marquons les différences du Manuscrit (*M.*) dans les notes. G. F.

2) *M*: *plus* au lieu de *que.*

3) *M*: *tout particulière.*

du cercle. Je me propose ici de considérer quelques-unes de ces formules et d'examiner les conséquences qu'on en peut tirer pour l'avancement de l'Analyse.

2. Je commencerai par considérer cette formule intégrale

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

en cherchant son intégrale dans le cas où l'on pose après l'intégration $x = \infty$, ayant pris l'intégrale en sorte qu'elle s'évanouisse en posant $x = 0$. Dans ce cas on trouvera que la partie de l'intégrale qui dépend des logarithmes s'évanouit et que l'autre qui dépend de la quadrature du cercle se réduit à une expression fort simple. Car, posant π pour la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est $= 1$, de sorte que π marque en même temps la mesure de deux angles droits, on trouve en posant après l'intégration $x = \infty$

$$\int \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2}, \quad \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int \frac{xdx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}, \quad \int \frac{xxdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}, \quad \int \frac{xdx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int \frac{xxdx}{1+x^6} = \frac{\pi}{6}, \quad \int \frac{x^3dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int \frac{x^4dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

3. Ces cas particuliers semblent déjà suffisants pour pouvoir en tirer par la voie d'induction une conclusion plus générale. Car, dans les cas du dénominateur $1+x^3$, le radical $\sqrt{3}$ fait voir que le sinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$ y entre; et dans ceux des dénominateurs $1+x^4$ le radical $\sqrt{2}$ y est sans doute, parceque[1])

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

ce même soupçon se confirme par les cas où le dénominateur est $1+x^6$. De là nous pouvons[2]) conclure qu'il y aura

1) *M: puisque.*
2) *M: pourrons.*

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

et encore plus généralement

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

pourvu que le nombre m ne surpasse pas n. Car dans les cas où $m > n$, on sait d'ailleurs que ces formules demandent un développement particulier, puisque leur intégrale renferme alors une partie algébrique.

4. Cette conclusion se trouve tout à fait confirmée, quand on se donne la peine de développer l'intégrale des formules

$$\int \frac{dx}{1+x^5}, \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^5}, \quad \int \frac{xx\,dx}{1+x^5} \quad \text{etc.},$$

de sorte qu'il ne saurait rester aucun doute là-dessus. On remarque encore un parfait accord dans les cas où $m = n$; car, puisque alors

$$\sin \frac{m\pi}{n} = \sin \pi = 0,$$

l'intégrale dans le cas $x = \infty$ devient effectivement infinie, ce qui est évident, car

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{n} l(1+x^n),$$

et posant $x = \infty$ la valeur de l'intégrale devient infinie. Le même accord s'observe, lorsque $n = 2m$, et partant

$$\sin \frac{m\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

car il est clair que

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2m}} = \frac{\pi}{2m}$$

en posant $x = \infty$. On n'a qu'à mettre $x^m = y$ pour avoir

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2m}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{1+yy} = \frac{1}{m} \text{ arc. tang } y;$$

maintenant, posant $x = \infty$ et partant aussi $y = \infty$, à cause de

$$\text{arc. tang } \infty = \frac{\pi}{2},$$

l'intégrale sera $= \frac{\pi}{2m}$. Ce sera donc une vérité suffisamment constatée que

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

en posant après l'intégration $x = \infty$, pourvu que m ne soit pas plus grand que n.

5. Cependant cette vérité se peut aussi déduire de l'intégration indéfinie de la formule

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$$

dont l'intégrale se trouve exprimée en sorte

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\, l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\, l\left(1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\, l\left(1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{7m\pi}{n}\, l\left(1-2x\cos\frac{7\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\sin\frac{7m\pi}{n}\text{ arc. tang }\frac{x\sin\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos\frac{7\pi}{n}}$$

etc.

et il faut continuer ces formules jusqu'à ce que l'angle $\frac{i\pi}{n}$, où i marque un nombre impair quelconque, commence à surpasser π. Or quand n est un nombre impair et que dans le dernier membre on a $i = n$ et partant

$$\cos\frac{i\pi}{n} = -1,$$

il ne faut prendre que la moitié du dernier membre ou mettre $l(1+x)$ au lieu de $l(1+2x+xx)$.

6. Tirons de là les intégrales pour les cas particuliers, et d'abord

I. Si $n = 1$ et $m = 1$, nous aurons

$$\int\frac{dx}{1+x} = l(1+x).$$

II. Soit $n = 2$ et nous aurons,

si $m = 1$,

$$\int\frac{dx}{1+xx} = \frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{2}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{2}}{1-x\cos\frac{\pi}{2}};$$

si $m = 2$,

$$\int\frac{x\,dx}{1+xx} = \frac{1}{2}l(1+xx).$$

III. Soit $n = 3$ et nous aurons,

si $m = 1$,

$$\int\frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l(1+x);$$

si $m = 2$,

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{6\pi}{3}\,l(1+x);$$

si $m = 3$,

$$\int \frac{xx\,dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,l\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)+\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{3}\,\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\cos\frac{9\pi}{3}\,l\,(1+x),$$

ou bien à cause de

$$\cos\frac{3\pi}{3} = -1, \quad \cos\frac{9\pi}{3} = -1 \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{3} = 0 \quad \text{et} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$
$$\int \frac{xx\,dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\,l\,(1-x+xx)+\frac{1}{3}\,l\,(1+x) = \frac{1}{3}\,l\,(1+x^3).$$

7. Dans tous ces cas particuliers, il est aisé de voir que posant $x = \infty$ les intégrales deviennent parfaitement d'accord avec la formule générale donnée ci-dessus; mais pour démontrer son accord en général, il faut faire voir que toutes les parties logarithmiques se détruisent nécessairement et que les autres, qui renferment des arcs de cercle, se réduisent à

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Pour cet effet, il faut ici distinguer deux cas, selon que n est un nombre pair ou impair.

Soit donc premièrement $n = 2k$, et posant $x = \infty$, puisque tous les logarithmes deviennent égaux, il faut montrer que la somme de cette progression est égale à zéro:

$$\cos\frac{m\pi}{2k}+\cos\frac{3m\pi}{2k}+\cos\frac{5m\pi}{2k}+\cdots+\cos\frac{(2k-5)\,m\pi}{2k}$$
$$+\cos\frac{(2k-3)\,m\pi}{2k}+\cos\frac{(2k-1)\,m\pi}{2k}$$

m étant un nombre entier. Posons pour abréger

$$\frac{m\pi}{2k} = \varphi,$$

et il s'agit de démontrer que

$$\cos.\,\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cdots+\cos(2k-1)\,\varphi = 0.$$

8. Posons, pour chercher la somme de cette progression,

$$S = \cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cdots + \cos(2k-1)\varphi$$

et multipliant par $\sin\varphi$, à cause de

$$\sin\varphi\cos\alpha\varphi = -\frac{1}{2}\sin(\alpha-1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(\alpha+1)\varphi,$$

nous aurons

$$S\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi + \frac{1}{2}\sin 6\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi + \frac{1}{2}\sin 2k\varphi$$
$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 6\varphi - \cdots - \frac{1}{2}\sin(2k-2)\varphi,$$

et puisque tous les termes à l'exception du dernier se détruisent,

$$S\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2k\varphi,$$

donc

$$S = \frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Or, ayant

$$\varphi = \frac{m\pi}{2k}$$

nous aurons[1]) $2k\varphi = m\pi$, et puisque m est un nombre entier,

$$\sin 2k\varphi = \sin m\pi = 0,$$

de sorte que la somme de la progression proposée est effectivement $= 0$.

Si le nombre n est impair $= 2k+1$, posant

$$\frac{m\pi}{2k+1} = \varphi,$$

il faut démontrer que

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos(2k-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos m\pi = 0.$$

---

1) *M: il devient.*

Or par la sommation précédente cette somme est

$$\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi} + \frac{1}{2}\cos m\pi = \frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi} + \frac{1}{2}\cos(2k+1)\varphi,$$

et à cause de

$$\sin 2k\varphi = \sin(2k+1)\varphi\cos\varphi - \cos(2k+1)\varphi\sin\varphi,$$

cette somme sera

$$= \frac{\sin(2k+1)\varphi\cos\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Mais puisque $(2k+1)\varphi = m\pi$, il est évident que cette somme est égale à zéro.

9. Ayant donc démontré que posant $x = \infty$ les parties logarithmiques de notre intégrale

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

se détruisent, il faut chercher la valeur totale des parties qui renferment les arcs de cercle. Or, chacun de ces arcs étant compris dans cette forme

$$\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi},$$

on voit que posant $x = 0$ ces arcs s'évanouissent, comme la condition de l'intégration l'exige; ensuite en augmentant x jusqu'à la valeur[1])

$$x = \frac{1}{\cos\varphi}$$

cet angle devient droit, et si l'on augmente x au delà, il faut qu'il devienne obtus. Donc posant $x = \infty$ on aura

$$\text{arc. tang}\,\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi} = \text{arc. tang}\,\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \pi - \varphi;$$

1) *M*: *à devenir.*

et partant toutes les parties qui renferment des arcs de cercle, prises ensemble, seront

$$\frac{2}{n}\pi\left(\sin\frac{m\pi}{n}+\sin\frac{3m\pi}{n}+\sin\frac{5m\pi}{n}+\sin\frac{7m\pi}{n}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}\left(\sin\frac{m\pi}{n}+3\sin\frac{3m\pi}{n}+5\sin\frac{5m\pi}{n}+7\sin\frac{7m\pi}{n}+\text{etc.}\right).$$

Il s'agit donc de trouver la somme de ces deux progressions.

10. Soit premièrement n un nombre pair ou $n=2k$, et posant

$$\frac{m\pi}{2k}=\varphi$$

la première progression sera

$$\sin\varphi+\sin 3\varphi+\sin 5\varphi+\cdots+\sin(2k-1)\varphi=s,$$

laquelle[1]), étant multipliée par sin. φ, donne

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\cos 4\varphi-\frac{1}{2}\cos 6\varphi-\cdots-\frac{1}{2}\cos 2k\varphi\\&+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi+\frac{1}{2}\cos 6\varphi+\cdots\end{aligned}\right\}=s\sin\varphi,$$

d'où l'on tire

$$s=\frac{1-\cos 2k\varphi}{2\sin\varphi}=\frac{1-\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2k}}.$$

Or, ayant trouvé ci-dessus

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cdots+\cos(2k-1)\varphi=\frac{\sin 2k\varphi}{2\sin\varphi},$$

la différentiation donne

$$\sin\varphi+3\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi\cdots+(2k-1)\sin(2k-1)\varphi$$
$$=\frac{-2k\cos 2k\varphi}{2\sin\varphi}+\frac{\sin 2k\varphi\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}\,^{2}).$$

---

1) *M: qui.*

2) Le facteur cos φ, ainsi que le facteur correspondant cos $\frac{m\pi}{n}$ figurant dans les deux formules suivantes, manquent dans l'édition originale et dans le manuscrit parisien. Corr. p. A. L.

Posons maintenant $\varphi = \frac{m\pi}{n}$ et, à cause de $2k = n$, nos deux progressions seront

$$\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} - \frac{2\pi}{nn} \left(\frac{-n \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} + \frac{\sin m\pi \cos \frac{m\pi}{n}}{2 \sin^2 \frac{m\pi}{n}} \right)$$

dont la réduction donne

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \left(1 - \frac{\sin m\pi \cos \frac{m\pi}{n}}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

à cause de $\sin m\pi = 0$. La même valeur se trouve, quand n est un nombre impair.

11. Voilà donc incontestablement démontré que l'intégrale de notre formule différentielle

$$\frac{x^{m-1} dx}{1 + x^n}$$

en posant $x = \infty$ est

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

ainsi que nous l'avons[1]) déjà conclu par induction. La même valeur aura donc aussi lieu de quelque manière qu'on transforme la formule différentielle; posons donc

$$x = \frac{z}{\sqrt[n]{(1 - z^n)}},$$

où l'on remarque que posant $z = 0$ on a aussi $x = 0$; mais x croît à l'infini en posant $z = 1$, et nous aurons

$$dx = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1 - z^n)^{n+1}}}, \quad 1 + x^n = \frac{1}{1 - z^n};$$

donc

$$\frac{dx}{1 + x^n} = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1 - z^n)}} \quad \text{et} \quad \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^n} = \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt[n]{(1 - z^n)^m}}.$$

---

1) *M: tout comme nous avons.*

Par conséquent, posant après l'intégration $z = 1$, après avoir[1]) pris l'intégrale en sorte qu'elle s'évanouisse au cas $z = 0$, on aura, pourvu que m ne surpasse pas n,

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

12. De là nous tirons, pour des cas particuliers, les suivantes valeurs intégrales, posant toujours[2]) après l'intégration $z = 1$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{2\pi}{3}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}}, \quad \int \frac{zz\,dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{3\pi}{4}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^2}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{zz\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^3}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{3\pi}{5}}, \quad \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{4\pi}{5}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}}, \quad \int \frac{z^4\,dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)^5}} = \frac{\pi}{6 \sin \frac{5\pi}{6}}.$$

Ces intégrales sont d'autant plus remarquables qu'il nous manque encore des méthodes pour les trouver assez promptement; car la sommation des progressions dont je me suis servi paraît un peu trop étrangère à ce sujet.

13. Puisque donc

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

1) *M: ayant.*

2) *M: quand on met.*

est égal à cette intégrale

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}$$

posant $z = 1$, cherchons la valeur de cette intégrale par une série qui, à cause de

$$(1-z^n)^{\frac{-m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}z^n + \frac{m(m+n)}{n\cdot 2n}z^{2n} + \text{etc.},$$

fournira pour

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

cette série

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{m}{n(m+n)} + \frac{m(m+n)}{n\cdot 2n(m+2n)} + \frac{m(m+n)(m+2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n(m+3n)} + \text{etc.}$$

Ensuite la même formule intégrale pouvant être exprimée par le produit d'une infinité de facteurs [§ 17], nous aurons aussi

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)}\cdot \text{etc.},$$

l'une et l'autre expression étant continuée à l'infini. De là, prenant

$$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 2,$$

à cause de

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

nous tirons d'abord l'expression de Wallis[1]) pour la quadrature du cercle

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot \text{etc.}$$

Or, mettant $m = 1$ et $n = 6$, à cause de

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

1) J. Wallis, *Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos problemata,* Oxoniae 1665; *Opera mathematica,* t. 1, Oxoniae 1695, p. 469; confer notam 1, p. 239 voluminis praecedentis. A. K.

on aura

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{1 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 12}{7 \cdot 17} \cdot \frac{18 \cdot 18}{13 \cdot 23} \cdot \frac{24 \cdot 24}{19 \cdot 29} \cdot \text{etc.}$$

ou bien

$$\pi = \frac{18}{5} \cdot \frac{6 \cdot 12}{7 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 18}{13 \cdot 17} \cdot \frac{18 \cdot 24}{19 \cdot 23} \cdot \frac{24 \cdot 30}{25 \cdot 29} \cdot \text{etc.}$$

14. Ces produits étant les mêmes que ceux que j'ai trouvés dans mon *Introduction*[1]), nous voyons déjà une autre route qui nous pouvait conduire à la découverte de ces intégrales. Or j'avais trouvé

$$\sin \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) \cdot \text{etc.}$$

et

$$\cos \frac{m\pi}{n} = \left(1 - \frac{4mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{25nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{49nn}\right) \cdot \text{etc.},$$

formules dont la première donne

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{nn}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)} \cdot \frac{9nn}{(3n-m)(3n+m)} \cdot \text{etc.},$$

ou, si nous mettons $n = m$ au lieu de m, puisque

$$\sin \frac{(n-m)\pi}{n} = \sin \frac{m\pi}{n},$$

nous aurons

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{nn}{m(2n-m)} \cdot \frac{4nn}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)} \cdot \text{etc.},$$

qui est la même que celle que nous venons de trouver. Nous serions donc parvenus aux mêmes intégrations, si nous avions d'abord cherché une formule intégrale dont la valeur, dans un certain cas, serait égale à ce produit infini

1) *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. 1 cap. XI, § 184; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I 8, p. 196. A. K.

de facteurs. Or, j'avais autrefois[1]) donné une méthode pour exprimer la valeur de quelques formules intégrales, en certains cas, par de tels produits, et il ne s'agit à cette heure que de renverser cette méthode et de passer de tels produits à des formules intégrales.

15. Or, j'avais démontré que posant après l'intégration $x = 1$ il y aura[2])

$$\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mu\,(\alpha+\nu)}{\alpha\,(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\,\mu\,(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)\,(2\,\mu+\nu)}\cdot\frac{3\,\mu\,(\alpha+\nu+2\,\mu)}{(\alpha+2\,\mu)\,(3\,\mu+\nu)}\cdot\text{etc.},$$

ensuite, j'avais aussi exprimé le rapport de deux formules intégrales par un tel produit, et posant après l'intégration $x = 1$, on aura

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}} = \frac{\beta\,(\alpha+\nu)}{\alpha\,(\beta+\nu)}\cdot\frac{(\beta+\mu)\,(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)\,(\beta+\nu+\mu)}\cdot\frac{(\beta+2\,\mu)\,(\alpha+\nu+2\,\mu)}{(\alpha+2\,\mu)\,(\beta+\nu+2\,\mu)}\cdot\text{etc.}$$

et encore plus généralement

$$\frac{\int x^{\alpha-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}\,dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}}$$

$$= \frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{\beta\,(\alpha+\nu)\,(\lambda+\mu)}{\alpha\,(\beta+\lambda)\,(\nu+\mu)}\cdot\frac{(\beta+\mu)\,(\alpha+\nu+\mu)\,(\lambda+2\,\mu)}{(\alpha+\mu)\,(\beta+\lambda+\mu)\,(\nu+2\,\mu)}\cdot\frac{(\beta+2\,\mu)\,(\alpha+\nu+2\,\mu)\,(\lambda+3\,\mu)}{(\alpha+2\,\mu)\,(\beta+\lambda+2\,\mu)\,(\nu+3\,\mu)}\cdot\text{etc.}$$

Donc un tel produit étant proposé, on pourra réciproquement trouver une formule intégrale, ou le rapport de deux, dont la valeur au cas $x = 1$ lui soit égale.

16. Soit donc proposé ce produit infini

$$\frac{nn}{m\,(2n-m)}\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(m+n)\,(3n-m)}\cdot\frac{3n\cdot 3n}{(m+2n)\,(4n-m)}\cdot\text{etc.},$$

---

1) Voir le mémoire 254 (suivant l'Index d'Eneström), *Leonhardi Euleri Opera omnia* I17, p. 233; voir aussi le mémoire 122 du vol. I14, p. 260. A. L.

2) Voir le mémoire 254 du vol. I17, surtout p. 244. A. L.

dont nous savons la valeur

$$= \frac{(n-m)\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

et que nous composerons avec celui-ci

$$\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)} \cdot \frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)} \cdot \frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)} \cdot \text{etc.},$$

dont la valeur est

$$= \nu \int x^{\alpha-1} dx (1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}$$

au cas $x = 1$; et puisque l'accroissement des facteurs est là $= n$ et ici $= \mu$, nous aurons d'abord $\mu = n$, donc $\alpha + \nu = n$; et pour le dénominateur, ou $\alpha = m$ et $\mu + \nu = 2n - m$, ou $\mu + \nu = m$ et $\alpha = 2n - m$. Dans le premier cas, nous avons $\alpha = m$, $\mu = n$, $\nu = n - m$ et dans l'autre $\alpha = 2n - m$, $\mu = n$, $\nu = m - n$, de sorte que nous ayons ou

$$\frac{(n-m)\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = (n-m) \int \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}},$$

ou

$$\frac{(n-m)\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = (m-n) \int \frac{x^{2n-m-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{2n-m}{n}}},$$

formules dont la dernière[1]) ne saurait avoir lieu, tant que

$$\frac{2n-m}{n} > 1 \quad \text{ou} \quad n > m,$$

puisqu'alors l'intégrale renferme encore une partie infinie.

17. Voilà donc une autre route pour montrer que la valeur de cette intégrale

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}},$$

1) *M*: *celle-cy*.

au cas $x = 1$, est

$$= \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

D'abord, par la réduction des intégrales à des produits infinis, on aura à cause de $\alpha = m$, $\mu = n$, $\nu - \mu = -m$ ou $\nu = n - m$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n \cdot n}{m(2n-m)} \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{3n \cdot 3n}{(m+2n)(4n-m)} \cdot \text{etc.},$$

ensuite, par la résolution générale en facteurs que j'ai enseignée dans l'*Introduction à l'analyse*, on voit que ce même produit exprime la valeur de $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$. Si nous mettons $n - m$ au lieu de m, nous aurons

$$\int \frac{x^{n-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \cdot \text{etc.},$$

et par conséquent, à cause de $\sin \frac{(n-m)\pi}{n} = \sin \frac{m\pi}{n}$,

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{x^{n-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Posons

$$\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = z$$

ou

$$x^n = \frac{z^n}{1+z^n},$$

de sorte que $x = 1$, si $z = \infty$, et nous aurons en posant après l'intégration $z = \infty$

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{n-m-1}dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

18. Mais voyons aussi comment ce même produit infini

$$\frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \cdot \text{etc.} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

peut[1]) être exprimé par le rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu = n$ et $\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} = \frac{nn}{nn-mm}$, donc $\beta = n$, $\alpha + \nu = n$, $\alpha = n - m$ et $\beta + \nu = n + m$, d'où l'on tire $\alpha = n - m$, $\beta = n$, $\nu = m$ et $\mu = n$ et partant

$$\frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{\int x^{n-m-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}};$$

mais le dénominateur étant ici intégrable, son intégrale donne $\frac{1}{m}$ pour le cas $x = 1$, de sorte que cette intégration se réduit à la précédente. La formule plus générale ne mène pas à d'autres intégrations; cependant il y a d'autres moyens de rendre ces intégration plus générales.

19. Multiplions deux formules intégrales en général, et dans le cas $x = 1$ la valeur de ce produit

$$\nu\mathfrak{n} \int x^{\alpha-1} dx (1-x^n)^{\frac{\nu-n}{n}} \cdot \int x^{\mathfrak{a}-1} dx (1-x^n)^{\frac{\mathfrak{n}-n}{n}}$$

sera

$$\frac{nn(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{a}(\nu+n)(\mathfrak{n}+n)} \cdot \frac{4nn(\alpha+\nu+n)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+n)}{(\alpha+n)(\mathfrak{a}+n)(\nu+2n)(\mathfrak{n}+2n)} \cdot \text{etc.},$$

lequel soit posé égal à celui-ci

$$\frac{nn}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)} \cdot \text{etc.} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Soit pour cet effet $\alpha = n - m$, $\mathfrak{a} = n + m$, et posons outre cela

$$\alpha + \nu = \nu + n - m = \mathfrak{n} + n, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + n + m = \nu + n,$$

d'où nous tirons $\nu - \mathfrak{n} = m$. Soit donc

$$\nu = k + \frac{1}{2}m \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = k - \frac{1}{2}m,$$

1) *M: puisse.*

et nous aurons en prenant pour k un nombre quelconque

$$\left(kk - \frac{1}{4}mm\right)\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}} \cdot \int x^{n+m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

20. Voilà donc un produit de deux formules intégrales qui, dans le cas, où l'on met $x = 1$ après l'intégration, devient

$$= \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}};$$

et partant on pourra prendre k en sorte que l'une de ces deux formules devienne intégrable, et alors l'intégration de l'autre se réduira à l'expression

$$\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ainsi, posant $2k = m + 2n$, à cause de

$$\int x^{n+m-1}dx = \frac{1}{n+m}$$

et $kk - \frac{1}{4}mm = n(n+m)$, on aura

$$n\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Or si l'on prend $2k = m + 4n$, puisque

$$\int x^{n+m-1}dx\,(1-x^n) = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n+m} = \frac{n}{(n+m)(2n+m)}$$

et $kk - \frac{1}{4}mm = 2n(m+2n)$, on aura

$$\frac{2nn}{n+m}\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Donc, posant aussi $n - m$ à la place de m, on aura

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{n}{m}\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m}\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}$$

et

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{2nn}{m(n+m)}\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{2nn}{(n-m)(2n-m)}\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2n-m}{n}}.$$

21. Or, puisque

$$\int x^{n+m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{2m}{2k+m}\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}},$$

si nous substituons cette valeur, nous aurons

$$\left(k-\frac{1}{2}m\right)\int x^{n-m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}}\cdot\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

et cette valeur demeure la même, quoiqu'on écrive $n-m$ au lieu de m. Soit $m=1$ et $n=2$, et l'on aura

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-3}{4}}\cdot\int dx\,(1-x^2)^{\frac{2k-5}{4}} = \frac{\pi}{2},$$

où il est remarquable que cette égalité a lieu, quelque nombre qu'on mette pour k. Soit par exemple $k=1$ ou $k=2$ et l'on aura

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{3}{2}\int dx\sqrt[4]{(1-x^2)}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2},$$

et posant $k=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

$$\int dx\,(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot\int dx\,(1-x^2)^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cette égalité est remarquable, à cause des exposants irrationnels.

22. On peut encore transformer de plusieurs manières les formules que nous venons de trouver; car, posons $1 - x^n = y^{2n}$, de sorte que

$$x = \sqrt[n]{(1 - y^{2n})} \quad \text{et} \quad dx = -2y^{2n-1}dy\,(1 - y^{2n})^{\frac{1-n}{n}},$$

les termes de l'intégrale qui étaient auparavant $x = 0$ et $x = 1$ sont à présent renversés, savoir $y = 1$ et $y = 0$, ce qui revient au même. De là nous concluons

$$(4k - 2m)\int y^{2k+m-1}dy\,(1 - y^{2n})^{\frac{-m}{n}} \cdot \int y^{2k-m-1}dy\,(1 - y^{2n})^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

quand on aura mis $y = 1$ après l'intégration, ou bien

$$(4kk - mm)\int y^{2k+m-1}dy\,(1 - y^{2n})^{\frac{-m}{n}} \cdot \int y^{2k-m-1}dy\,(1 - y^{2n})^{\frac{m}{n}} = -\frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

par la réduction de ces intégrales. Donc si $m = 1$ et $n = 2$, nous aurons

$$(4k - 2)\int \frac{y^{2k}dy}{\sqrt{(1 - y^4)}} \cdot \int \frac{y^{2k-2}dy}{\sqrt{(1 - y^4)}} = \frac{\pi}{2}$$

et partant, si $k = 1$,

$$\int \frac{yydy}{\sqrt{(1 - y^4)}} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

23. Or, puisque l'angle $\frac{m\pi}{n}$ dépend du seul rapport des nombres m et n, nous aurons $\sin \frac{m\pi}{n} = 1$, si $m = \frac{1}{2}n$, sans qu'on ait besoin de déterminer n. Soit donc $m = \frac{1}{2}n$ et, pour éviter les fractions, $2k = m + \lambda$; d'où nous tirons ce Théorème

$$\int \frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1 - y^{2n})}} \cdot \int \frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1 - y^{2n})}} = \frac{\pi}{2\lambda n},^{1)}$$

$$\int \frac{y^{\lambda+n-1}dy}{\sqrt{(1 - y^{2n})}} \cdot \int y^{\lambda-1}dy\,\sqrt{(1 - y^{2n})} = \frac{\pi}{2\lambda(\lambda + n)}.$$

1) *M*: *ou.*

De même, posant plus généralement $2k = \lambda + m$, on aura

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{2\lambda n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ou

$$\int y^{\lambda+2m-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{\lambda n(\lambda+2m)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

où le nombre λ est arbitraire, de sorte qu'on puisse même lui donner une valeur irrationelle. Soit $m = \mu k$ et $n = \nu k$ et l'on aura

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = \frac{\pi}{2\lambda\nu k\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}$$

ou

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\mu\pi}{\lambda\nu(\lambda+2\mu k)\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}.$$

24. Posons de plus $2k = \alpha$ pour avoir cette égalité

$$\int y^{\lambda+\mu\alpha-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{-\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy\,(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = \frac{\pi}{\lambda\nu\alpha\sin\frac{\mu\pi}{\nu}},$$

dont on aura ces cas principaux

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}} = \frac{\pi}{2\lambda\alpha},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}} = \frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+2\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}} = \frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}} = \frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+3\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}} = \frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}}.$$

25. Comme l'expression infinie du sinus nous à conduit à ces intégrations, traitons de la même manière l'expression trouvée pour le cosinus qui se réduit à cette forme

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \frac{(n-2m)(n+2m)}{n\cdot n}\cdot\frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n\cdot 3n}\cdot\frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n\cdot 5n}\cdot \text{etc.},$$

où, puisque ni les numérateurs ni les dénominateurs ne contiennent des facteurs selon la progression 1, 2, 3, 4, 5 etc., nous n'en saurions exprimer la valeur par une seule formule intégrale. Cherchons donc deux formules dont le rapport exprime cette valeur, et l'on voit d'abord qu'il faut mettre $\mu = 2n$. Soit donc

$$\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} = \frac{(n-2m)(n+2m)}{n\cdot n}$$

et nous aurons $\alpha = n$, $\beta = n-\nu$ et $\nu = 2m$, de sorte que $\beta = n-2m$. Par conséquent, en posant après l'intégration $x = 1$, nous aurons

$$\frac{\int x^{n-1}dx(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-2m-1}dx(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}} = \cos\frac{m\pi}{n} = \sin\frac{(n-2m)\pi}{2n}.$$

Donc posant $m = \lambda\mu$ et $n = \lambda\nu$ nvus aurons

$$\frac{\int x^{\lambda\nu-1}dx(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}{\int x^{\lambda\nu-2\lambda\mu-1}dx(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}} = \cos\frac{\mu\pi}{\nu} = \sin\frac{(\nu-2\mu)\pi}{2\nu}.$$

26. Considérons en les cas les plus simples:

I. Si $m = 1$, $n = 2$, $\dfrac{\int x dx(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int\frac{dx}{x}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$ [1])

II. Si $m = 1$, $n = 3$, $\dfrac{\int xx dx(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}{\int dx(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}.$

1) L'intégrale du dénominateur n'a pas une valeur finie. A. K.

III. Si $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\dfrac{\int x\,dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}{\int dx\,(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

IV. Si $m = \frac{1}{2}$, $n = 3$, $\dfrac{\int x^2\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}}{\int x\,dx\,(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De la seconde nous tirons cette égalité

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}},$$

la troisième se réduit à

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \sqrt{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

et la quatrième à

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}.$$

27. Ces formules peuvent être changées, de sorte que la condition de l'intégration demeure la même. Ainsi l'on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

en posant x^3 au lieu de $1-xx$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}$$

en posant x^3 au lieu de $1-x^6$, et partant nous aurons ces égalités [1])

1) Le manuscrit parisien contient encore les formules suivantes:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^3}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \sqrt{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^2)^5}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

28. Par la même transformation nous trouvons en général

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{2}}} = \cos\frac{m\pi}{n}\int \frac{x^{n-2m-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{n}\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n+2m}{2n}}};$$

et partant

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x)^2}} = \cos\frac{m\pi}{n}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}}.$$

Donc puisque la formule

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

est la plus simple, comme ne renfermant que le signe radical carré, nous aurons ces réductions pour le cas $x = 1$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

$$\int \frac{x^{n-2m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2\cos\frac{m\pi}{n}}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}} = \frac{1}{\cos\frac{m\pi}{n}}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}},$$

dont la première est évidente d'elle même, mais les deux autres renferment la nature des cosinus.

29. J'ai aussi trouvé dans mon *Introduction*[1]) ce produit infini

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)} \cdot \frac{(2n+m)(4n-m)}{(2n+k)(4n-k)} \cdot \frac{(4n+m)(6n-m)}{(4n+k)(6n-k)} \cdot \text{etc.}$$

qu'on peut réduire à un rapport de deux formules intégrales. Pour cet effet, il faut poser $\mu = 2n$ et

$$\frac{\beta(\alpha+\nu)}{\alpha(\beta+\nu)} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)},$$

ce qui se peut faire de quatre manières

I. $\alpha = k, \quad \beta = m, \quad \nu = 2n-m-k, \quad \frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{-m-k}{2n};$

II. $\alpha = k, \quad \beta = 2n-m, \quad \nu = m-k, \quad \frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{m-k-2n}{2n};$

III. $\alpha = 2n-k, \quad \beta = m, \quad \nu = k-m, \quad \frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{k-m-2n}{2n};$

IV. $\alpha = 2n-k, \quad \beta = 2n-m, \quad \nu = m+k-2n, \quad \frac{\nu-\mu}{\mu} = \frac{m+k-4n}{2n};$

d'où nous aurons

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}} = \frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}},$$

et par la transformation

$$\frac{\int x^{\nu-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\alpha-\mu}{\mu}}}{\int x^{\nu-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\beta-\mu}{\mu}}} = \frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}.$$

---

1) Voir la note 1 p. 451. A. K.

30. Cette dernière formule fournit les réductions suivantes:

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{k}}}=\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}.$$

Or, je ne m'arrête pas à donner des exemples; il est aisé de voir qu'on en peut tirer des réductions assez remarquables; comme si $k=n-m$, on aura

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n+m}}}=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}.$$

31. Considérons encore un produit infini que j'avais trouvé pour la tangente d'un angle[1])

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2(n-m)}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdot\text{etc.}$$

et que nous représentons en sorte

$$\frac{m\pi}{2(n-m)\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}}=\frac{2n\cdot 2n(n+m)(3n-m)}{n\cdot 3n(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{4n\cdot 4n(3n+m)(5n-m)}{3n\cdot 5n(4n-m)(4n+m)}\cdot\text{etc.},$$

qu'on peut réduire à un produit de deux formules intégrales, qui étant en général

$$\nu\mathfrak{n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}\cdot\int x^{\mathfrak{a}-1}dx(1-x^{\mathfrak{m}})^{\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}}$$
$$=\frac{\mu\mathfrak{m}(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{a}(\mu+\nu)(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}\cdot\frac{2\mu\cdot 2\mathfrak{m}(\alpha+\nu+\mu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+\mathfrak{m})}{(\alpha+\mu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{m})(2\mu+\nu)(2\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}\cdot\text{etc.},$$

1) *Introductio*, cap. XI, § 186; *Leonhardi Euleri Opera omnia* I$_8$, p. 198. A. K.

où l'on voit d'abord qu'il faut prendre $\mu = \mathfrak{m} = 2n$, et ensuite il reste à rendre

$$\frac{(n+m)(3n-m)}{n\cdot 3n(2n-m)(2n+m)} = \frac{(\alpha+\nu)(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})}{\alpha\mathfrak{a}(\mu+\nu)(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})}.$$

Qu'on prenne donc $\alpha+\nu = n+m$ et $\mathfrak{a}+\mathfrak{n} = 3n-m$; on trouvera les quatre solutions suivantes[1]):

I. $\nu = m$, $\mathfrak{n} = -m$, $\alpha = n$, $\mathfrak{a} = 3n$, $\mu = 2n$, $\mathfrak{m} = 2n$;

II. $\nu = m$, $\mathfrak{n} = n$, $\alpha = n$, $\mathfrak{a} = 2n-m$, $\mu = 2n$, $\mathfrak{m} = 2n$;

III. $\nu = -n$ $\mathfrak{n} = -m$, $\alpha = 2n+m$, $\mathfrak{a} = 3n$, $\mu = 2n$, $\mathfrak{m} = 2n$;

IV. $\nu = -n$, $\mathfrak{n} = n$, $\alpha = 2n+m$, $\mathfrak{a} = 2n-m$, $\mu = 2n$, $\mathfrak{m} = 2n$.

32. Voilà donc les quatre réductions qui s'en suivent,

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{\pi}{2m(m-n)} \cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} \cdot \int \frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)} \cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}} = \frac{m\pi}{2nn(m-n)} \cot\frac{m\pi}{2n},$$

1) Pour que les intégrales aient un sens (μ et $\mathfrak{m}$ étant positifs), il faut que les quatre nombres α, $\mathfrak{a}$, ν, $\mathfrak{n}$ soient positifs. Par suite, des quatre cas considérés par EULER, le second seul est possible, et les égalités du paragraphe suivant, qui se rapportent aux trois autres cas, doivent être rejetées. A. L.

où il faut remarquer que[1])

$$\int \frac{x^{3n-s}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{-n}{m}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}$$

et

$$\int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} = \frac{-m}{n}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

33. Ces substitutions nous fournissent les formules suivantes[2])

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

qui se réduisent à ces formules plus simples

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{n\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}}\cdot\int \frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int \frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

---

1) Égalités évidemment impossibles. A. L.

2) Ces formules et les suivantes sont exactes. A. L.

34. Or, par des substitutions ultérieures on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} = n\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = n\int \frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

de sorte que toutes nos formules se réduisent à la dernière qui est la plus simple, puisqu'elle ne renferme que le signe radical carré, laquelle, si nous posons $m = n - k$, se change en cette forme assez remarquable

$$\int \frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk} \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

d'où, si $k = 0$, à cause de $\operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n} = \frac{k\pi}{2n}$, on obtient

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi\pi}{4nn}.$$

35. Considérons quelques cas particuliers:

I. Si $n = 1$, $k = 0$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi\pi}{4}$;

II. si $n = \frac{3}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;

III. si $n = 2$, $k = 1$, $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

IV. si $n = \frac{5}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{5} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10}$;

V. si $n = \frac{5}{2}$, $k = \frac{3}{2}$, $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{15} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{10}$;

VI. si $n = 3$, $k = 1$, $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6}$;

VII. si $n = 3$, $k = 2$, $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{3}$;

VIII. si $n = \frac{7}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{7} \operatorname{tang} \frac{\pi}{14}$;

IX. si $n = \frac{7}{2}$, $k = \frac{3}{2}$, $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{21} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{14}$;

X. si $n = \frac{7}{2}$, $k = \frac{5}{2}$, $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{35} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{14}$;

XI. si $n = 4$, $k = 1$, $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8}$;

XII. si $n = 4$, $k = 3$, $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8}$;

XIII. si $n = \frac{9}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{9} \operatorname{tang} \frac{\pi}{18}$;

XIV. si $n = \frac{9}{2}$, $k = \frac{5}{2}$, $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{45} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{18}$;

XV. si $n = \frac{9}{2}$, $k = \frac{7}{2}$, $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{63} \operatorname{tang} \frac{7\pi}{18}$;

XVI. si $n = 5$, $k = 2$, $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5}$;

XVII. si $n = 5$, $k = 4$, $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tang} \frac{2\pi}{5}$;

XVIII. si $n = 6$, $k = 1$, $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} \cdot \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{12}$;

XIX. si $n = 6$, $k = 5$, $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = \frac{\pi}{60} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{12}$.

36. La formule

$$\int \frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}} \cdot \int \frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}} = \frac{\pi}{2\lambda\alpha}$$

que nous avons trouvée ci-dessus (§ 24) a avec celles-ci un grand rapport, pour le développement duquel écrivons x à la place de y, et posons $\alpha = n$ pour avoir

$$\int \frac{x^{\lambda+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2\lambda n}.$$

Or, la formule que nous venons de trouver étant

$$\int \frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk} \cdot \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

si nous posons $\lambda = k$, nous aurons

$$\int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

et si nous posons $\lambda = n - k$,

$$\int \frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{2n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{n-k}{k} \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n}.$$

37. Or, pour rendre ces équations plus générales, posons $y = x^{\frac{n}{\alpha}}$ pour avoir suivant le § 24

$$\int \frac{x^{\frac{\lambda n}{\alpha}+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{\frac{\lambda n}{\alpha}-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\alpha\pi}{2\lambda nn}.$$

Soit $\frac{\lambda n}{\alpha} = k$, et nous trouverons la même formule que ci-dessus, et la position $\frac{\lambda n}{\alpha} = n - k$ ne produit rien de nouveau non plus. Voyons donc quelques cas particuliers:

1. Soit $n=1$ et $k=0$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}:\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi}{2}$;

2. si $n=\frac{3}{2}$, $k=\frac{1}{2}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

et l'autre

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}}:\int\frac{xdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^3)}}=2\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}};$$

3. si $n=2$, $k=1$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1$;

$$\left[k=\frac{1}{2},\right]\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{8};$$

et l'autre

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1;$$

$$\int\frac{xdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}:\int\frac{xxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}}=3\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}.$$

Et voilà encore quelques autres:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^5)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{10};$$

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}=4\operatorname{tang}\frac{\pi}{10};$$

$$\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{5};$$

$$\int\frac{xxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{5};$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6};$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\operatorname{tang}\frac{\pi}{6};$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \text{tang}\,\frac{\pi}{8};$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 3\,\text{tang}\,\frac{\pi}{8};$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \text{tang}\,\frac{\pi}{10};$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = 4\,\text{tang}\,\frac{\pi}{10};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \text{tang}\,\frac{\pi}{5};$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{3}{2}\,\text{tang}\,\frac{\pi}{5};$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = \text{tang}\,\frac{\pi}{12};$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} : \int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = 5\,\text{tang}\,\frac{\pi}{12}.$$

38. Ces formules sont semblables, par rapport à la forme, à celles qui ont été trouvées ci-dessus § 35, toutes ces formules étant comprises dans cette expression générale

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Mais ci-dessus, c'était le produit de deux telles formules dont j'avais assigné la valeur, tandis qu'ici nous avons[1]) des quotients qui résultent de la division de l'une par l'autre. Mais dans l'un et l'autre cas, il est évident que l'intégration de l'une se réduit à celle de l'autre. Puisque la plupart de ces réductions sont tout à fait nouvelles, il vaudra bien la peine de les considérer plus soigneusement. Pour cet effet je les distribuerai en classes selon l'exposant de la variable x derrière le signe radical, m et n étant des nombres entiers.

1) *M*: *pendant que nous avons ici.*

I. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

II. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$:

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{5} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{15} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{15}.$$

IV. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{3},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = 2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{6}.$$

V. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^7)}}$:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{7} \operatorname{tang} \frac{\pi}{14},$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{21} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{14},$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{35} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{14}.$$

VI. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4},$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{8}.$$

VII. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^9)}}$:

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{9} \operatorname{tang} \frac{\pi}{18},$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{27} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{45} \operatorname{tang} \frac{5\pi}{18},$$

$$\int \frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{63} \operatorname{tang} \frac{7\pi}{18}.$$

VIII. Réduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tang} \frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{xx dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = 4 \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{3}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5}.$$

39. En combinant les quotients avec les produits de chaque classe, on en peut former de nouveaux produits, ce que je ferai voir en général; car ayant ce produit

$$\int \frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk} \operatorname{tang} \frac{k\pi}{2n},$$

et outre cela, ces deux quotients

$$\text{I.}\quad \int\frac{x^{n-\alpha-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\operatorname{tang}\frac{\alpha\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{x^{n+\beta-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{2n-\beta-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{n-\beta}{\beta}\operatorname{tang}\frac{\beta\pi}{2n},$$

combinons le produit avec le premier quotient, en posant $\alpha = n - k$, et nous aurons en les multipliant

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}.$$

Ensuite, pour le second quotient, posons $\beta = n - k$, et en multipliant nous aurons

$$\int\frac{x^{2n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2n(n-k)}$$

qui ne diffère pas du précédent. Ainsi, pour chaque classe nous aurons deux produits généraux

$$\text{I.}\quad \int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk},$$

dont le dernier convient avec ceux que j'avais déjà démontrés autrefois.[1])

40. Développons ces produits pour quelques cas, où n et k sont des nombres entiers, et nous aurons les réductions suivantes pour le cas $x = 1$:

I. Produits de la forme $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x)^4}}$:

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

1) Voir le mémoire 122 (suivant l'Index d'Eneström); *Leonhardi Euleri Opera omnia* I14, surtout p. 267. G. F.

II. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tang} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}.$$

III. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24}.$$

IV. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10} \operatorname{tang} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tang} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30} \operatorname{tang} \frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tang} \frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30},$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40}.$$

41. Après ces intégrations des formules qui sont toutes comprises dans cette formule générale

$$\int x^{m-1} dx \, (1-x^n)^k$$

et qu'on peut nommer algébriques, puisque dx y est multiplié par une fonction algébrique de x, je passe, comme je me suis proposé, à considérer encore quelques formules intégrales, où le différentiel dx est multiplié par une fonction transcendante de x, et dont l'intégrale, dans un certain cas, se peut exprimer algébriquement ou par la quadrature du cercle. Ces cas sont d'autant plus remarquables qu'il nous manque encore des méthodes pour les traiter, et partant les observations suivantes serviront peut être à découvrir de telles méthodes.

42. Je ne m'arrêterai pas ici à cette formule intégrale assez connue

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^n$$

dont on sait que la valeur, au cas qu'on met après l'intégration $x = 1$, devient $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$; de sorte que cette valeur peut être assignée toutes les fois que l'exposant n est un nombre entier. Mais quand n est une fraction, la valeur est beaucoup plus difficile à assigner. Ainsi, si $n = \frac{1}{2}$, j'ai démontré[1]) que la valeur de l'intégrale $\int dx \sqrt{l \frac{1}{x}}$ au cas $x = 1$ est $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. De là, on tire aisément ces intégrations qui en dépendent:

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi},$$

puisqu'il y a en général

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^m = x \left(l \frac{1}{x}\right)^m + m \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{m-1};$$

donc posant après l'intégration $x = 1$, à cause de $l \frac{1}{x} = 0$, on aura

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^m = m \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{m-1}.$$

43. Cette intégration du cas $n = \frac{1}{2}$ se peut exprimer de cette manière

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

1) Voir les mémoires 19, 122, 352, 421 (suivant l'Index d'Eneström); *Leonhardi Euleri Opera omnia* I_{14}, p. 11 et 264, I_{15}, p. 84, I_{17}, p. 325. A. K.

posant $x = 1$, et pour les autres fractions mises pour n j'ai trouvé les réductions suivantes[1])

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{5}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} \cdot \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{2}{5}} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{6}{5}} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x^{15}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

44. Puisque parmi ces formules il s'en trouve[2]) où l'exposant de x est plus grand dans le numérateur que dans le dénominateur, si nous déprimons ces exposants par le secours de cette réduction

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^k = \frac{m-n}{m+nk} \int x^{m-n-1}\,dx\,(1-x^n)^k,$$

---

1) Voir les mémoires 19, 122, 421 (suivant l'Index d'Eneström); *Leonhardi Euleri Opera omnia* I14, p. 20 et 262, I17, p. 348. A. K.

2) *M*: *Puisque il se trouve parmi ces formules.*

nous trouverons les formules suivantes:

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{4^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}\cdot\int\frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\frac{2}{4^3}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{5^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{2}{5^3}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{6}{5^4}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

45. Voilà donc les valeurs de la formule intégrale transcendente

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n,$$

lorsque n est une fraction, réduites à des valeurs des formules intégrales, où dx est multiplié par une fonction algébrique de x. Or, parmi ces dernières formules il y en a toujours une qui renferme la quadrature du cercle, puisque

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Ensuite, pour pouvoir mieux composer les autres ensemble, posons, dans les formules du § 21, $2k = 2n + m - 2\lambda$ pour avoir

$$\int \frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda-m}}} \cdot \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda}}} = \frac{\pi}{n(n-\lambda)\sin \frac{m\pi}{n}};$$

de là nous aurons,[1])

I. si $n = 3$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}};$$

II. si $n = 4$:

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{8 \sin \frac{\pi}{4}},$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{2}};$$

1) *M*: *avons.*

III. si $n = 5$:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{\pi}{15 \sin \frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{10 \sin \frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{10 \sin \frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{x dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \sin \frac{3\pi}{5}}.$$

46. De là nous voyons que, multipliant toutes les formules du même ordre ensemble, le produit se réduit à la quadrature du cercle; ainsi nous aurons

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \pi = \frac{2}{3^2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{3}},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{6\pi \sqrt{\pi}}{4^3 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{6}{4^3} \sqrt{\frac{8\pi^3}{4}},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{24\pi^2}{5^4 \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{24}{5^4} \sqrt{\frac{16\pi^4}{5}},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{6}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{6}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{6}} \int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{6}} = \frac{120\pi^2 \sqrt{\pi}}{6^5 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{6}} = \frac{120}{6^5} \sqrt{\frac{32\pi^5}{6}}.$$

De là nous concluons qu'il y aura en général

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}} \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}} \cdots \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{n^{n-1}} \sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}},$$

lequel Théorème est tout à fait digne d'attention.

47. La comparaison de ces formules peut être poussée plus loin en considérant ce Théorème général

$$\int \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} = \int \frac{x^{n-\beta-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-\alpha}}},$$

d'où le Théorème précédent tiré du § 21 se change aussi en d'autres formes. Ensuite, les formules du § 29 fournissent les comparaisons suivantes:

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} : \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} : \int \frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} : \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}} : \int \frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}} = \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

dont les dernières se déduisent de la première, puisqu'au lieu de m et k on peut mettre $n-m$ et $n-k$.

48. Maintenant, puisque

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \frac{n-k}{m} \int \frac{x^{m+n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}},$$

on aura encore cette comparaison

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} : \int \frac{x^{m+n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \frac{n-k}{m} \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n}$$

et prenant pour m un nombre négatif

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}} : \int \frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}} = \frac{n-k}{m} \sin\frac{m\pi}{n} : \sin\frac{k\pi}{n},$$

d'où nous tirons les comparaisons particulières suivantes:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} : \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \sin\frac{\pi}{4} : \sin\frac{\pi}{2} = 1 : \sqrt{2},$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} : \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \sin\frac{\pi}{5} : \sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} : \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \sin\frac{\pi}{5} : \sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} : \int \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = 2\sin\frac{\pi}{5} : \sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} : \int \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = 3\sin\frac{\pi}{5} : \sin\frac{2\pi}{5}.$$

49. Pour faire voir l'usage de ces réductions, considérons les formules particulières qui entrent dans les expressions des formules

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}, \quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}}, \quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}},$$

et d'abord, le nombre de toutes les dites formules étant 16, il y a 4 qui dépendent de la quadrature du cercle:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}}, \quad \int \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Pour les autres 12 la réduction générale fournit

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

Ensuite, nous venons de trouver

$$\int \frac{x\,x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int \frac{x\,x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{2\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = \frac{3\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}$$

auxquelles on peut ajouter les produits de deux telles formules rapportés au § 45 pour le cas $n = 5$.

50. Si nous examinons toutes ces égalités, nous trouvons que ces 12 formules se réduisent à deux; posons pour abréger

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}, \quad \alpha = \sin\frac{\pi}{5}, \quad \beta = \sin\frac{2\pi}{5}$$

et toutes nos formules peuvent être réduites à la quadrature du cercle et à ces deux $\int yydx$ et $\int y^3dx$, de cette manière

$$\int y^4dx = \frac{\beta}{\alpha}\int yydx,\quad \int xy^4dx = \int y^3dx,\quad \int x^2y^4dx = \int yydx,\quad \int x^3y^4dx = \frac{\pi}{5\alpha},$$

$$\int xy^3dx = \frac{\alpha}{\beta}\int y^3dx,\quad \int x^2y^3dx = \frac{\pi}{5\beta},\quad \int x^3y^3dx = \frac{\pi}{5\beta\int yydx},$$

$$\int xy^2dx = \frac{\pi}{5\beta},\quad \int x^2y^2dx = \frac{\pi}{5\beta\int y^3dx},\quad \int x^3y^2dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3dx},$$

$$\int ydx = \frac{\pi}{5\alpha},\quad \int xydx = \frac{\pi}{5\beta\int yydx},\quad \int x^2ydx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3dx},$$

$$\int x^3ydx = \frac{\pi}{15\alpha\int yydx};$$

soit donc $\int yydx = A$ et $\int y^3dx = B$, et les valeurs de nos formules transcendantes seront

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{\beta\pi AAB}{5^2\alpha\alpha}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{\alpha\pi^2BB}{5^4\beta^3A}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{\pi^3A}{5^6\alpha\beta^2BB}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{\pi^4}{5^8\alpha^3\beta AAB}}.$$

51. De là nous voyons que non seulement le produit de toutes ces quatre formules dépend uniquement de la quadrature du cercle, mais aussi le produit de deux dont les exposants sont ensemble l'unité, savoir

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{4\pi}{5^2\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{6\pi}{5^2\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

Outre cela, nous en pourrons déduire ces égalités

$$\left(\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 : \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\beta A}{2\alpha},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{4\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}.$$

52. Si nous joignons ces déterminations aux précédentes, nous en pourrons tirer les conclusions générales suivantes:

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2^2 \sin\frac{\pi}{2}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{3^2 \sin\frac{\pi}{3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{3\pi}{4^2 \sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = \frac{4\pi}{5^2 \sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{6\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}}$$

et en général

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}} = \frac{m(n-m)\pi}{nn \sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Donc, puisque

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n-m}{n}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}},$$

nous aurons

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}} = \frac{m\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}} = m\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}.$$

53. Cette dernière égalité se peut aisément démontrer immédiatement en développant le cas le plus simple, où l'exposant est un nombre entier:

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\lambda} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda.$$

Or, cette expression finie[1]) se peut exprimer par un produit infini, comme

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\lambda} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\lambda} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\lambda} \cdot \frac{2}{2+\lambda} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\lambda} \cdot \frac{3}{3+\lambda} \cdot \text{etc.}$$

Posons maintenant $\lambda = \frac{m}{n}$, pour avoir

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{n}{n+m} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{2n}{2n+m} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{3n}{3n+m} \cdot \text{etc.}$$

et faisons aussi m négatif

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{-m}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{-m}{n}} \cdot \frac{n}{n-m} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{-m}{n}} \cdot \frac{2n}{2n-m} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{-m}{n}} \cdot \frac{3n}{3n-m} \cdot \text{etc.}$$

Le produit de ces deux formules donne évidemment[2])

$$\frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \cdot \text{etc.} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

54. Nous pourrons[3]) pousser plus loin ces recherches, car puisque

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p}{n}} \cdot \frac{n}{n+p} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{n}} \cdot \frac{2n}{2n+p} \cdot \text{etc.},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{q}{n}} \cdot \frac{n}{n+q} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{q}{n}} \cdot \frac{2n}{2n+q} \cdot \text{etc.},$$

$$\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p+q}{n}} \cdot \frac{n}{n+p+q} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p+q}{n}} \cdot \frac{2n}{2n+p+q} \cdot \text{etc.},$$

---

1) *M*: *terminée.*
2) *M*: *ouvertement.*
3) *M*: *pouvons.*

le produit des deux premières divisé par la dernière donne

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}}}=\frac{n(n+p+q)}{(n+p)(n+q)}\cdot\frac{2n(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+q)}\cdot\text{etc.},$$

dont la valeur est

$$q\int\frac{x^{n+p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ou bien aussi

$$=q\int x^{q-1}dx\sqrt[n]{(1-x^n)^p}=p\int x^{p-1}dx\sqrt[n]{(1-x^n)^q},$$

formule qui conduit à la précédente[1]), quand on pose $p=m$ et $q=-m$. De même on trouvera la valeur de

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{r}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q+r}{n}}}=\frac{pqr}{p+q+r}\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}.$$

55. Enfin, pour finir cette matière, la sommation des séries réciproques des puissances nous fournit encore la valeur[2]) des formules transcendantes suivantes, quand on met après l'intégration $x=1$,

$$\int\frac{dx}{x}l\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^2}{6},\quad\int\frac{dx}{x}l(1+x)=\frac{\pi^2}{12}$$

et

$$\int\frac{dx}{x}l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^2}{8}$$

---

1) *M*: *d'où il s'ensuit la précédente.*

2) *M*: *les valeurs.*

et ces autres, plus composées[1])

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^4}{90},\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l(1+x)=\frac{7\pi^4}{720},$$

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,\text{arc. tang}\,x\;=\frac{\pi^3}{32},\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Or, il ne paraît aucune route directe qui nous pourrait mener à ces déterminations, ce qui mérite, par cela même, d'autant plus d'attention.

---

1) ***M***: *et ces plus composées.*

CONTINUATIO FRAGMENTORUM EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DEPROMPTORUM

Ex Commentatione 819 indicis Enestroemiani
Opera postuma 1, Petropoli 1862, p. 514

109

(J. A. Euler)

Si ponatur

$$y = \frac{bp + aq}{ap + bq},$$

erit

$$1 - yy = \frac{(aa - bb)(pp - qq)}{(ap + bq)^2}$$

ideoque

$$\frac{\sqrt{(aa - bb)(pp - qq)}}{ap + bq} = \sqrt{(1 - yy)} \quad \text{et} \quad dy = \frac{(aa - bb)(pdq - qdp)}{(ap + bq)^2}.$$

Hinc fit

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{(pdq - qdp)\sqrt{(aa - bb)}}{(ap + bq)\sqrt{(pp - qq)}},$$

ergo

$$\int \frac{(pdq - qdp)\sqrt{(aa - bb)}}{(ap + bq)\sqrt{(pp - qq)}} = \text{Arc. sin.} \frac{bp + aq}{ap + bq}.$$

I. Sit $p = 1$ et $q = x$, erit

$$\int \frac{dx\sqrt{(aa - bb)}}{(a + bx)\sqrt{(1 - xx)}} = \text{Arc. sin.} \frac{b + ax}{a + bx}.$$

II. Sit $p = 1 + xx$ et $q = x\sqrt{2}$, erit

$$pdq - qdp = (1 - xx)\,dx\sqrt{2}$$

et

$$pp - qq = 1 + x^4,$$

unde fiet

$$\int \frac{dx\,(1 - xx)\sqrt{2\,(aa - bb)}}{(a\,(1 + xx) + bx\sqrt{2})\sqrt{(1 + x^4)}} = \text{Arc. sin.}\,\frac{b\,(1 + xx) + ax\sqrt{2}}{a\,(1 + xx) + bx\sqrt{2}}.$$

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS 17, 18, 19 CONTINENTUR

ANDERSON, A., 17 40
BERNOULLI, D., 17 447, 457
BERNOULLI, Jac., 17 313
BERNOULLI, Joh., 17 34, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 204, 205, 208, 209, 212, 216, 227, 313
18 50
19 79, 132, 417, 418, 419, 421, 426, 427, 434
BERNOULLI, N., 18 316, 317
BROUNCKER, W., 18 227, 228, 229, 230, 238
CONDORCET, A. M. Marquis DE, 18 69
COTES, R., 17 140, 175
DIOPHANTOS, 19 269
ENESTRÖM, G., 17 40
ENESTROEMIANUS, passim (Index ENESTROEMIANUS Commentationum EULERI)
EULER, J. A., 19 491
EULER, L., 17 4 (Commentatio 61 indicis ENESTROEMIANI), 12 (Comment. 130), 14 (Comment. 61), 21 et 27 (Comment. 122), 34 (Epistola ad JOH. BERNOULLI data, Comment. 122), 51 (Comment. 162), 56 (Comment. 19), 59 et 63 (Comment. 162), 139, 149 (Comment. 162), 234 (Comment. 122), 258 (*Introductio*), 314 (*Inst. calc. int.*), 316 et 319 et 322 (Comment. 19), 330 et 338 (Comment. 321), 342 (Comment. 19 et 128), 348 et 354 (Comment. 321), 358, 360 (*Introd.*, *Inst. calc int.*, Comment. 59, 463, 464), 384 et 387 (Comment. 59), 388 (*Introd.*), 392 et 398 (Comment. 41), 416 (*Introd.*, Comment. 59 et 122), 424 (*Inst. calc. int.*), 425 et 427 et 430 et 440 (Comment. 463), 448 et 449 (Comment. 41), 451 (*Introd.*)
18 1, 2, 3 (Comment. 464), 13 (Comment. 59 et 122), 22 (Comment. 794, *Inst. calc. int.*, Epistolae ad CHR. GOLDBACH datae), 31 (Comment. 122), 33 (*Inst. calc. int.*), 50 (Comment. 59 et 122, Epistolae ad JOH. BERNOULLI et CHR. GOLDBACH datae), 51 (Comment. 464), 53 (Comment. 463 et 464, *Inst. calc. int.*), 57 (Comment. 59, *Inst. calc. int.*), 68 (Comment. 463), 69, 72 (Comment. 463), 77 (Comment. 19 et 421), 122 (Comment. 60, 162, 462, *Inst. calc. int.*), 155 (Comment. 464), 156 (Comment. 464, Epistolae ad J. L. LAGRANGE datae), 159 et 162 (Comment. 464), 165 (Comment. 59, *Inst. calc. int.*), 170 (Comment. 572, *Introd.*), 178 (Comment. 60, 162, 462, *Inst. calc. int.*), 186 (Comment. 463 et 587), 188 (Comment. 254), 201 (Comment. 588), 208 (*Introd.*), 214, 218 (Comment. 19 et 421), 228 (*Introd.*), 230 (Comment. 123), 243 (Comment. 71 et 595), 263 (*Introd.*), 265, 267, 283 (Comment. 60), 286 (Comment. 589), 291, 292, 293 (Comment. 572), 316 (Comment. 41 et 61), 317

(*Introd.*), 318 (Comment. 43, *Inst. calc. diff.*), 319 (Comment. 43, *Inst. calc. int.*), 322 (Comment. 464 et 587), 326 (Comment. 583), 335 et 336 et 359 (Comment. 464), 365 (Comment. 462), 370 (Comment. 463 et 464), 374 (Comment. 464 et 620), 375 (Comment. 620), 388 (Comment. 462), 392 (Comment. 321, *Inst. calc. int.*), 393, 394 (Comment. 321, *Inst. calc. int.*), 399 (Comment. 60, *Inst. calc. int.*), 424 (Comment. 640), 435 (Comment. 650), 436 (Comment. 639), 443 (Comment. 645), 456 (Comment. 639), 458, 459 (Comment. 464), 460 (Comment. 60 et 254), 461 (Comment. 463 et 464), 462 (Comment. 59, 60, 462, 463), 464 (Comment. 59, 60, 462, 463, 464), 466 (Comment. 500)
19 1, 3 (Comment. 575, 600, 694), 19 (*Inst. calc. diff.*), 22 (*Inst. calc. int.*), 45, 49 (Comment. 656), 63 (Comment. 47, 421, 652, 661), 64 (Comment. 575, 663), 66 (Comment. 19 et 421), 68 (Comment. 575), 69 (Comment. 254 et 321), 79 (Comment. 59 et 122, Epistola ad JOH. BERNOULLI data), 84 (Comment. 539, 669, 688), 85 (Comment. 254), 98 et 129 (Comment. 539 et 688), 132 (Comment. 168 et 170), 141 (Comment. 673 et 674), 143 et 157 (Comment. 674), 168 (Comment. 672 et 674), 186 (Comment. 575 et 600), 197 (Comment 672 et 673), 201 (Comment. 710), 203 (*Introd.*), 210 (Comment. 575), 217 (Comment. 60, 254, 588, 589), 220 (Comment. 19 et 122), 228, 229, 231 (Comment. 668 et 689), 238 (Comment. 539), 247 (Comment. 669), 251, 258 (Comment. 168 et 170), 262, 268 (Comment. 656 et 657), 269 (Comment. 683), 271 (Comment. 254, 656, 657), 280 (Comment. 246 et 562), 287 (*Inst. calc. int.*, Comment. 539, 688, 689, 699), 297 et 298 (Comment. 695), 346 (Comment. 689), 358 (Comment. 695), 370 (Comment. 656 et 657), 383 et 388 (Comment. 694), 390 (Comment. 499), 394 (Comment. 41 et 463), 395 (Comment. 254 et 694), 396 (Comment. 60), 403 (Comment. 162), 417 (Comment. 168), 439, 451 (*Introd.*), 452 (Comment. 254), 463 (*Introd.*), 465, 475 (Comment. 122), 478 (Comment. 19, 122, 352, 421), 479 (Comment. 19, 122, 421)

FUSS, P. H. VON, **18** 22, 50, 317, 326

GOLDBACH, CHR., **18** 22, 50

GRANDI, G., **17** 313

GUT, M., **19** 439

HENRY, CH., **19** 439

HERMANN, J., **17** 313

HOSPITAL, G. F. DE L', **19** 19

LAGRANGE, J. L., **18** 156, 159, 161, 164, 168, 173

LEIBNIZ, G., **17** 195, 196, 197, 199, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 216, 227, 313, 453
19 132, 417, 418, 419, 427

LEXELL, A. J., **19** 22

MASCHERONI, L., **18** 319

MOIVRE, A. DE, **17** 113, 115, 149, 180
19 437

NEWTON, J., **17** 453

OFFENBURG, E., **17** 313

OLDENBURG, H., **17** 453

RICCATI, J., **18** 243

SCHOOTEN, F. À, **17** 40

STÄCKEL, P., **17** 392

VIETA, F., **17** 40

VIVIANI, V., **17** 306

WALLIS, J., **17** 21, 313
18 217, 227, 230, 232, 239
19 63, 128, 450