48

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

VOL. I.

H
11222

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS USU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

HB

IOSEPHO · DE · WILZECK

S. R. I. COMITI

IOSEPHI. II. P. F. AUG.

A. CUBICULO. ET. PENITIORIBUS. CONSILIIS

REI. TABELLARIÆ. ET. CURSORIÆ

IN. ITALIA. PRÆFECTO

PLENA. CUM. POTESTATE

DE. REBUS. IMPERII. PER. ITALIAM. LEGATO

ET. IN. AUSTRIACA. INSUBRIA

ADMINISTRO

CONSTANTI. FORTI. INTEGERRIMO

DE. INSUBRICIS. LITTERIS

DEQUE. ARCHIGYMNASIO. TICINENSI

OPTIME. MERITO

MUSISQUE. OMNIBUS. ET. GRATIIS. CARISSIMO

FERDINANDUS. SPERONIUS

EX. MINOR. CONV. FAMILIA

EULERIANUM. OPUS. A. SE. EDITUM

ET. IUVENTUTIS. BONO. PARATUM

L. M. Q. D. D. D.

EDITOR LECTORI.

Absolutissimum Differentialis Calculi *Opus, quod triginta duobus abhinc annis Geometrarum princeps LEONARDUS EULERUS Berolinensibus typis, & Petropolitanae Academiae sumptibus vulgaverat, distractis iam cunctis ferme exemplaribus, nec nisi ingenti pretio comparandis, novam iampridem editionem postulabat. Sed ingratum hunc molestumque laborem ut ipse susciperem, a me nunquam impetrare potuissem, nisi votis & flagitationibus illorum, qui diutius hoc opere carere non poterant, accessissent doctorum Virorum invitationes, cohortationesque amicorum, qui rem Geometris gratam, Iuventuti utilissimam augurantes, me diu haesitantem & ancipitem stimulis additis pepulerunt.*

Ad rem itaque aggressus Eulerianum Opus a capite ad calcem quam potui diligentissime legi & perlustravi, calculosque omnes analyticos, quodque operosius erat ingentes illos numerorum acervos, qui passim occurrunt, maxima qua potui circumspectione recognovi. Mirum dictu est, quot quantosque offend erim

typo-

typographicos errores corruptos numeros vitiatos calculos ambiguos sensus, ut ferre aequo animo haud possim Berolinensis Typographi simulationem dicam an levitatem? qui bina tantum errata, eaque levissima emendanda proposuit: Μέμνησο ἀπιστεῖν. *Correctis typothetarum mendis reliquum erat, ut de pretio ac praestantia huic editioni prae antecedenti comparanda cogitarem, eamque novis quibusdam additamentis locupletarem. Igitur elegans, & grave Auctoris Elogium ab eximio Geometra & Philosopho Marchione CONDORCETO exaratum, & in publico Academiae Scientiarum Parisiensis conventu recitatum, sed nondum in eius Academiae Actis publici iuris factum, Operi universo praeposui: tum in operis calce indicem adieci absolutissimum omnium EULERI Lucubrationum, cum earum, quae seperatim editae iustis voluminibus continentur, tum earum, quae numero prope incredibili in plurium Academiarum Commentariis leguntur, tum denique caeterarum, quae ineditae ad bis centum usque inter eius manuscripta inventae sunt, quaeque Petropolitanae Academiae traditae in eius Commentariis deinceps in lucem emittentur. Tam amplum atque immensum mathematicae eruditionis thesaurum prae oculis habere illumque pro opportunitate consulere res erit procul dubio iunioribus provectioribusque Geometris utilissima, qui ex infini-*

finita illa rerum tractatarum multitudine quid sibi sumant, quid omittant statim perspicient, & ab iis quaestionibus tractandis abstinebunt, quas cognoverint ab EULERO *inchoatas simul & perfectas, neque tanquam novum proponent quod ipse occupaverit; quod caeteroquin evenire facile posset, quum nullum ferme sit in universo Disciplinarum Mathematicarum ambitu argumentum paullo elegantius, quod Geometra iste Briaraeus vel non delibaverit, vel non absolverit.*

Postremo operae pretium duxi brevibus quibusdam annotationibus locum unum vel alterum Euleriani Operis illustrare, eaque perpauca huc derivare, quae postmodum ab Auctore ipso, vel a Geometris aliis ad Differentialis Calculi amplificationem inventa sunt; perpauca inquam, nam Euleriano scripto multa addere hominis esset vel incredibilem huius Geometrae foecunditatem ignorantis, vel Phidiae simulacrum, aut Apellis tabulam emendare sibi arrogantis

Superesset nunc, ut grata animi significatione declararem quid ipse debeam Viro celeberrimo & polyhistori Praeceptori nuper meo GREGORIO FONTANAE *in Regio Ticinensi Archigymnasio sublimioris Matheseos Professori, quo suasore & auspice rem omnem molitus sum; sed verecundiae hominis modestissimi, quem vel nominare omnino prohibeor, parcendum est.*

ÉLOGE
DE M. EULER

Prononcé à la rentrée de l'Académie royale des sciences le 6 Février 1785

Par

M. LE MARQ. DE CONDORCET

Sécretaire perpétuel de l'Académie des sciences, de l'Institut de Bologne des Académies de Petersbourg, de Turin &c. &c. &c.

LÉONARD EULER, Directeur de la classe de mathématique dans l'Académie de Petersbourg, & auparavant dans celle de Berlin, de la Société royale de Londres, des Académies de Turin, de Lisbonne & de Basle, associé étranger de celle des Sciences, naquit à Basle le 15 Avril 1707, de PAUL EULER & de MARGUERITTE BRUCKER.

Son pere, devenu en 1708 pasteur du village de Riechen près de Basle, fut son premier instituteur, & eut bientôt le plaisir de voir les espérances des talens & de la gloire d'un fils, si douces pour un cœur paternel, naître & se fortifier sous ses yeux & par ses soins.

Il avoit étudié les mathématiques sous JAQUES BERNOULLI. On sait que cet homme illustre joignoit à un grand génie

pour les ſciences une philoſophie profonde, qui n' accompagne pas toujours ce génie, mais qui ſert à lui donner plus d' étendue & à le rendre plus utile. Dans ſes leçons, il faiſoit ſentir à ſes diſciples que la géométrie n' eſt pas une ſcience iſolée, & la leur préſentoit comme la baſe & la clef de toutes les connoiſſances humaines; comme la ſcience où l' on peut le mieux obſerver la marche de l' eſprit; celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés, puiſqu' elle donne à l' entendement de la force & de la juſteſſe à la fois; enfin comme une étude également précieuſe par le nombre ou la variété de ſes applications & par l' avantage de faire contracter l' habitude d' une méthode de raiſonner, qui peut s' employer enſuite à la recherche des vérités de tous les genres, & nous guider dans la conduite de la vie.

PAUL EULER, pénétré des principes de ſon maître, enſeigna les élémens des mathématiques à ſon fils, quoiqu' il le deſtinât à l' étude de la théologie; & lorſque le jeune EULER fut envoyé à l' univerſité de Basle, il ſe trouva digne de recevoir les leçons de JEAN BERNOULLI. Sa facilité, ſon application, ſes diſpoſitions heureuſes, lui mériterent bientôt l' amitié de DANIEL & de NICOLAS BERNOULLI, diſciples & déja rivaux de leur pere. Il eut même le bonheur d' obtenir celle du ſévere JEAN BERNOULLI, qui voulut bien lui donner, une fois par ſemaine, une leçon particuliere, deſtinée à éclaircir les difficultés qui ſe préſentoient à lui

dans

dans le cours de ſes lectures & de ſes travaux. Les autres jours etoient employés par M. EULER, à ſe mettre en état de profiter de cette faveur ſignalée.

Cette méthode excellente empêchoit ſon génie naiſſant de s'épuiſer contre des obſtacles invincibles, de s'égarer dans les routes nouvelles qu'il cherchoit à s'ouvrir; elle guidoit & ſecondoit ſes efforts: mais en même tems elle l'obligeoit de déployer toutes ſes forces, qu'il augmentoit encore par un exercice proportionné à ſon âge & à l'étendue de ſes connoiſſances.

Il ne jouit pas longtems de cet avantage; & à peine eut-il obtenu le titre de maître-ès-arts, que ſon perre, qui le deſtinoit à lui ſuccéder, l'obligea de quitter les mathématiques, pour la théologie. Heureuſement, cette rigueur ne fut que paſſagere. On lui fit aiſément entendere que ſon fils étoit né pour remplacer dans l'Europe JEAN BERNOULLI, & non pour être paſteur de Riechen.

Un ouvrage que M. EULER fit à 19 ans ſur la mâture des vaiſſeaux, ſujet propoſé par l'Académie des Sciences, obtint un acceſſit en 1727; honneur d'autant plus grand, que le jeune habitant des Alpes n'avoit pu être aidé par aucune connoiſſance pratique, & qu'il n'avoit été vaincu que par M. BOUGUER, Géomêtre habile, alors dans la force de ſon talent, & déja depuis dix ans Profeſſeur d'hydrographie dans une ville maritime.

M. EULER concourroit en même tems pour une chaire dans l'Univerſité de Basle ; mais c'eſt le ſort qui prononce entre les ſavans admis à diſputer ces places, & il ne fut pas favorable, nous ne diſons point à M. EULER, mais à ſa patrie, qui le perdit peu de jours aprés & pour toujours. Deux ans auparavant, NICOLAS & DANIEL BERNOULLI avoient été appellés en Ruſſie. M. EULER, qui les vit partir avec regret, obtint d'eux la promeſſe de chercher à lui procurer le même honneur qu'il ambitionnoit de partager, & il ne faut pas en être ſurpris. La ſplendeur de la capitale d'un grand empire, cet éclat qui, ſe repandant ſur les travaux dont elle eſt le théatre & ſur les hommes qui l'habitent, ſemble ajouter à leur gloire, peuvent aiſément ſeduire la jeuneſſe & frapper le citoyen libre, mais obſcur & pauvre, d'une petite république. MM. BERNOULLI furent fideles a leur parole & ſe donnerent, pour avoir auprés d'eux un concourrent ſi redoutable, autant de ſoins que des hommes ordinaires en auroient pu prendre pour écarter leurs rivaux.

Le voyage de M. EULER fut entrepris ſous de triſtes auſpices. Il apprit bientôt que NICOLAS BERNOULLI avoit déja été victime de la rigueur du climat. Et le jour même où il entra ſur les terres de l'empire Ruſſe fut celui de la mort de CATHERINE I., événement qui parût d'abord menacer d'une diſſolution prochaine l'Académie, dont cette Princeſſe, fidele aux vues de ſon Epoux, venoit d'achever

la

la fondation. M. EULER, éloigné de sa patrie, n'ayant point, comme M. DANIEL BERNOULLI, à y rapporter un nom célebre & respecté, prit la résolution d'entrer dans la marine russe. Un des Amiraux de PIERRE I. lui avoit déja promis une place, lorsque, heureusement pour la géométrie, l'orage élevé contre les sciences se dissipa. M. EULER obtint le titre de Professeur, succéda en 1733 à M. DANIEL BERNOULLI, lorsque cet homme illustre se retira dans son pays; & la même année il épousa M.lle GSELL, sa compatriote, fille d'un peintre que PIERRE I. avoit ramené en Russie, au retour de son premier voyage. Dés-lors pour nous servir de l'expression de BACON, M. EULER sentit qu'il avoit donné des otages à la fortune, & que le pays, où il pouvoit espérer de former un établissement pour sa famille, étoit devenu pour lui une patrie nécessaire. Né chez une Nation où tous les gouvernemens conservent au moins l'apparence & le langage des constitutions républicaines, où, malgré des distinctions plus réelles que celles qui séparent les premiers esclaves d'un despote, du dernier de ses sujets, on a soigneusement gardé toutes les formes de l'égalité, où le respect qu'on doit aux loix s'étend jusqu'aux usages les plus indifférens, pourvu que l'antiquité, où l'opinion populaire, les ait consacrés; M. EULER se trouvoit transporté dans un pays où le Prince exerce une autorité sans bornes, où la loi la plus sacrée des gouvernemens absolus, celle qui règle la succession à l'empire, étoit

alors

alors incertaine & mépriſée, où des chefs, eſclaves du ſouverain, regnoient deſpotiquement ſur un peuple eſclave; & c'étoit dans le moment où cet empire, gouverné par un étranger ambitieux, défiant & cruel, gêmiſſoit ſous la tyrannie de BIREN, & offroit un ſpectacle auſſi effrayant qu'inſtructif aux ſavans, qui étoient venus chercher dans ſon ſein la gloire, la fortune & la liberté de goûter en paix les douceurs de l'étude.

On ſent tout ce que dut éprouver l'ame de M. EULER, liè à ce ſéjour par une chaine qu'il ne pouvoit plus rompre. Peut-etre doit on à cette circonſtance de ſa vie, cette opiniâtreté pour le travail, dont il prit alors l'habitude & qui devint ſon unique reſſource dans une capitale où l'on ne trovoit plus que des ennemis, ou des ſatellites du miniſtre, occupés de flatter ſes ſoupçons, ou de s'y dérober. Cet t impreſſion fut ſi forte ſur M. EULER, qu'il la conſervoit encore, lorsqu'en 1741, l'année d'après la chûte de BIREN, dont la tyrannie fit place à un gouvernement plus modéré & plus humain, il quitta Petersbourg pour ſe rendre a Berlin, où le Roi de Pruſſe l'avoit appellé. Il fut préſenté à la Reine-mere. Cette Princeſſe ſe plaiſoit dans la converſation des hommes éclairés, & elle les accueilloit avec cette familiarité noble, qui annonce dans les princes le ſentiment d'une grandeur perſonelle, indépendante de leurs titres, & qui eſt devenue un des caracteres de cette Famille auguſte. Cependant

dant la Reine de Pruſſe ne put obtenir de M. EULER que des monoſyllabes. Elle lui reprocha cette timidité, cet embarras, qu'elle croyoit ne pas mériter d'inſpirer. Pourquoi ne voulez-vous donc pas me parler, lui dit-elle? Madame, répondit-il, parceque je viens d'un pays où, quand on parle, on eſt pendu.

Parvenu au moment de rendre compte des travaux immenſes de M. EULER, j'ai ſenti l'impoſſibilité d'en ſuivre les détails, de faire connoître cette foule de découvertes, de méthodes nouvelles, de vues ingénieuſes répandues dans plus de trente ourages publiés à part, & dans prés de ſept-cens mémoires, dont environ deux-cens dépoſés à l'Académie de Petersbourg avant ſa mort, ſont deſtinés à enrichir ſucceſſivement la collection qu'elle publie.

Mais un caractere particulier m'a ſemblé le diſtinguer des hommes illuſtres, qui, en ſuivant la même carriere, ont obtenu une gloire que la ſienne n'a pas éclipſée : c'eſt d'avoir embraſſé les ſciences mathématiques dans leur univerſalité, d'en avoir ſucceſſivement perfectionné les différentes parties, &, en les enrichiſſant toutes par des découvertes importantes, d'avoir produit une révolution utile dans la maniere de les traiter. J'ai donc cru qu'en formant un tableau méthodique des différentes branches de ces ſciences, en marquant pour chacune les progrès, les changemens heureux, qu'elle doit au génie de M. EULER, j'aurois, du moins autant

tant que mes forces me le permettent, donné une idée plus juſte de cet homme célebre, qui, par la reunion de tant de qualités extraordinaires, a été, pour ainſi dire, un phénomêne, dont l'hiſtoire des ſciences ne nous avoit encore offert aucun exemple.

L'Algébre n'avoit été pendant longtems qu'une ſcience très-bornée. Cette maniere de ne conſidérer l'idée de la grandeur que dans le dernier dégré d'abſtraction, où l'eſprit humain puiſſe atteindre, la rigueur avec la quelle on ſépare de cette idée tout ce qui, en occupant l'imagination, pourroit donner quelqu'appui, ou quelque repos à l'intelligence; enfin l'extrême généralité des ſignes que cette ſcience emploit, la rendent en quelque ſorte étrangere à notre nature, trop éloignée de nos conceptions communes, pour que l'eſprit humain pût aiſément s'y plaire & en acquérir facilement l'habitude. La marche même des méthodes algébriques rebutoit encore les hommes les plus propres à ces meditations. Pour peu que l'objet qu'on pourſuit ſoit compliqué, elles forcent de l'oublier totalement, pour ne ſonger qu'à leurs formules; la route qu'on ſuit eſt aſſurée, mais le but où l'on veut arriver, le point d'où l'on eſt parti, diſparoiſſent également aux regards du Géomêtre; & il a fallu longtems du courage pour oſer perdre la terre de vue & s'expoſer ſur la foi d'une ſcience nouvelle. Auſſi, en jettant les yeux ſur les ouvrages des grands Géomêtres du ſiecle dernier, de ceux

mê-

même, aux quels l'algebre doit les découvertes les plus importantes, on verra combien peu ils étoient accoûtumés à manier ce même inſtrument qu'ils ont tant perfectionné, & l'on ne pourra s'empêcher de regarder comme l'ouvrage de M. EULER, la révolution, qui a rendu l'analyſe algébrique une méthode lumineuſe, univerſelle, applicable à tout & même facile.

Aprés avoir donné ſur la forme des racines des équations algébriques, ſur leur ſolution générale, ſur l'élimination, pluſieurs théories nouvelles & des vues ingénieuſes ou profondes, M. EULER porta ſes recherches ſur le calcul des quantités tranſcendantes. LEIBNITZ & les deux BERNOULLI ſe partagent la gloire d'avoir introduit dans l'analyſe algébrique les fonctions exponentielles & logarithmiques. COTES avait donné le moyen de repréſenter par des ſinus ou des coſinus les racines de certaines équations algébriques.

Un uſage heureux de ces découvertes conduiſit M. EULER à obſerver les rapports ſinguliers des quantités exponentielles & logarithmiques avec les tranſcendantes nées dans le cercle & enſuite à trouver des méthodes au moyen des quelles faiſant diſparoître de la ſolution des problémes les termes imaginaires qui s'y feroient préſentés & qui auroient embaraſſé le calcul, quoiqu'on ſût qu'ils duſſent ſe détruire, réduiſant les formules à une expreſſion plus ſimple & plus commode, il eſt parvenu à donner une forme entierement nouvelle à

la partie de l'analyſe, qui s'applique aux queſtions d'aſtronomie & de phyſique. Cette forme a été adoptée par tous les Géomêtres, elle eſt devenue d'un uſage commun, & elle a produit dans cette partie du calcul à peu prés la même révolution, que la découverte des logarithmes avoit produite dans les calculs ordinaires.

Ainſi, à certaines époques, où, après de grands efforts, les ſciences mathématiques ſemblent avoir épuiſé toutes les reſſources de l'eſprit humain & atteindre le terme marqué à leurs progrès, tout-à-coup une nouvelle méthode de calcul vient s'introduire dans ces ſciences & leur donner une face nouvelle. Bientôt on les voit s'enrichir rapidement par la ſolution d'un grand nombre de problêmes importans dont les Géomêtres n'avoient oſé s'occuper, rebutés par la difficulté, & pour ainſi dire, par l'impoſſibilité phyſique de conduire leurs calculs jusqu'à un reſultat réel. Peut-être la juſtice exigeroit-elle de réſerver à celui qui a ſçu introduire ces méthodes & les rendre uſuelles, une portion de la gloire de tous ceux qui les employent avec ſuccès; mais du moins il a ſur leur reconnoiſſance des droits, qu'ils ne pourroient conteſter ſans ingratitude.

L'analyſe des ſéries a occupé M. EULER dans preſque toutes les époques de ſa vie. C'eſt même une des parties de ſes ouvrages, où l'on voit briller le plus cette fineſſe, cette ſagacité, cette variété de moyens & de reſſources, qui le caractériſent.

Les

Les fractions continues, inventées par le Vicomte de BROUNKER, paroiſſoient preſqu'oubliées des Géomêtres. M. EULER en perfectiona la théorie, en multiplia les applications & en fit ſentir toute l'importance.

Les recherches, preſqu'abſolument neuves, ſur les ſéries de produits indéfinis, offrent des reſſources néceſſaires à la ſolution d'un grand nombre de queſtions utiles ou curieuſes; & c'eſt ſur-tout en imaginant ainſi de nouvelles formes de ſéries & en les employant non ſeulement à des approximations, dont on eſt ſi ſouvent forcé de ſe contenter, mais auſſi à la découverte des vérités abſolues & rigoureuſes, que M. EULER a ſçu aggrandir cette branche de l'analyſe, aujourd'hui ſi vaſte, & bornée avant lui à un petit nombre de méthodes & d'applications.

Le calcul intégral, l'inſtrument le plus ſecond de découvertes que jamais les hommes ayent poſſédé, a changé de face depuis les ouvrages de M. EULER. Il a perfectionné, étendu, ſimplifié toutes les méthodes employées ou propoſées avant lui. On lui doit la ſolution générale des équations linéaires, premier fondement de ces formules d'approximations ſi variées & ſi utiles. Une foulle de méthodes particulieres, fondées ſur differens principes, ſont répandues dans ſes ouvrages & réunies dans ſon traité du calcul integral. Là, on le voit, par un heureux uſage des ſubſtitutions, ou rappeller à une méthode connue des équations qui ſembloient

s'y refuſer, ou réduire aux premieres différentielles des équations d'ordres ſupérieurs; tantôt, en conſiderant la forme des intégrales, il en deduit les conditions des équations différentielles, aux quelles elles peuvent ſatisfaire; & tantôt l'examen de la forme des facteurs, qui rendent une différentielle complette, le conduit à former des claſſes générales d'équations intégrables. Quelquefois une propriété particuliere, qu'il remarque dans une équation, lui offre un moyen de ſéparer les indéterminées, qui ſembloient devoir y reſter confondues. Ailleurs, ſi une équation où elles ſont ſéparées ſe dérobe aux méthodes communes, c'eſt en mêlant ces indéterminées qu'il parvient á connoître l'intégrale.

Au premier coup d'œil, le choix & la réuſſite de ces moyens peuvent ſembler en quelque ſorte appartenir au hazard. Cependant un ſuccés ſi fréquent & ſi ſur, oblige de reconnoître une autre cauſe; & il n'eſt pas toujours impoſſible de ſuivre le fil délié, qui a guidé le génie. Si par exemple, on conſidére la forme des ſubſtitutions employées par M. EULER, on découvrira ſouvent ce qui a pu lui faire prévoir que cette opération produiroit l'effet dont il avoit beſoin; & ſi on examine la forme que dans une de ſes plus belles méthodes il ſuppoſe aux facteurs d'une équation du ſecond ordre, on verra qu'il s'eſt arrêté á une de celles qui appartiennent particulierement à cet ordre d'équation. A la verité cette ſuite d'idées, qui dirige alors un analyſte, eſt

moins

moins une méthode, dont il puiſſe développer la marche, qu'une ſorte d'inſtinct particulier, dont il ſeroit difficile de rendre compte; & ſouvent il aime mieux ne pas faire l'hiſtoire de ſes penſées, que de s'expoſer au ſoupçon d'en avoir donné un roman ingénieux & fait aprés-coup.

M. EULER a obſervé que les équations différentielles ſont ſuſceptibles de ſolutions particulieres qui ne ſont pas compriſes dans la ſolution générale. M. CLAIRAUT a fait la même remarque; mais M. EULER a montré depuis, pourquoi ces intégrales particulieres étoient exclues de la ſolution générale, il eſt le premier qui ſe ſoit occupé de cette théorie, perfectionnée depuis par pluſieurs Géomêtres célebres & dans la quelle le mémoire de M. DE LA GRANGE, ſur la nature de ces intégrales & leur uſage dans la ſolution des problêmes, n'a plus rien laiſſé à deſirer.

Nous citerons encore une partie de ce calcul, qui appartient preſqu'en entier à M. EULER. C'eſt celle où l'on cherche des intégrales particulieres pour une certaine valeur déterminée des inconnues, que renferme l'équation. Cette théorie eſt d'autant plus importante, que ſouvent l'integrale générale ſuit abſolument nos recherches, & que dans les problêmes où une valeur approchée de l'intégrale, ne ſuffit pas aux vues qu'on ſe propoſe, la connoiſſance de ces intégrales particulieres peut ſupléer à ce défaut. En effet, on connoit alors, du moins pour certains points, la valeur rigou-

goureuſe ; & cette connoiſſance, unie à celle d'une valeur générale approchée, doit ſuffire à preſque tous les beſoins de l'analyſe.

Perſonne n'a fait un uſage plus étendu & plus heureux des méthodes qui donnent la valeur de plus en plus approchée d'une quantité déterminée, par des équations differentielles & dont on a déja une premiere valeur ; & il s'eſt également occupé de donner un moyen direct de deduire immédiatement de l'équation même une valeur aſſés voiſine de la vraie, pour que les puiſſances élevées de leur difference puiſſent être négligées ; moyen ſans le quel les methodes d'approximation, en uſage parmi les Géomêtres, ne pourroient s'étendre aux équations pour les quelles les obſervations ou des conſidérations particulieres ne donnent pas cette premiere valeur, dont ces méthodes ſuppoſent la connoiſſance.

Ce que nous avons dit, ſuffit pour montrer jusqu'à quel point M. EULER avoit approfondi la nature des équations différentielles, la ſource des difficultés qui s'oppoſent a l'intégration, & la maniere de les éluder ou de les vaincre. Son grand ouvrage ſur cet objet eſt non ſeulement un recueil précieux de méthodes neuves & étendues ; c'eſt encore une mine féconde de decouvertes, que tout homme né avec quelque talent, ne peut parcourir ſans en rapporter de riches dépouilles ; & l'on peut dire de cette partie des travaux de M. EULER, comme de beaucoup d'autres, que les mé-

méthodes qu'elle renferme ſerviront longtems après lui à réſoudre des queſtions importantes & dificiles & que ſes ouvrages produiront encore & plus d'une découverte & plus d'une réputation.

Le calcul aux différences finies n'étoit preſque connû que par l'ouvrage obſcur, mais plein de ſagacité, de TAYLOR. M. EULER en fit une branche importante du calcul intégral, lui donna une notation ſimple & commode, & ſçut l'appliquer avec ſuccès à la théorie des ſuites, à la recherche de leurs ſommes ou de l'expreſſion de leurs termes généraux, à celle de la racine des équations déterminées, à la maniere d'avoir, par un calcul facile, la valeur approchée des produits, ou des ſommes indéfinies de certains nombres.

C'eſt à M. D'ALEMBERT qu'appartient réellement la découverte du calcul aux différences partielles, puiſque c'eſt à lui qu'eſt due la connoiſſance des fractions arbitraires, qui entrent dans les intégrales. Mais dans les premiers ouvrages de M. D'ALEMBERT, on voyoit plus le réſultat du calcul, que le calcul lui-même. C'eſt à M. EULER que l'on en doit la notation. Il a ſçu ſe le rendre propre en qualque maniere par la profonde théorie qui l'a conduit a reſoudre un grand nombre de ces équations; à diſtinguer les formes des intégrales, pour les différens ordres & pour les différens nombres de variables; à réduire ces équations, lorſqu'elles ont certaines formes, à des intégrations ordinaires; à donner les moyens de rappeller à ces for-

formes, par d'heureuſes ſubſtitutions, celles qui s'en éloignent; en un mot, en découvrant dans la nature des équations aux différences partielles pluſieurs de ces propriétés ſingulieres, qui en rendent la théorie générale ſi difficile & ſi piquante, qualités preſqu'inſéparables en géométrie, où le dégré de la difficulté eſt ſi ſouvent la meſure de l'intérêt qu'on prend á une queſtion, de l'honneur qu'on attache à une découverte. L'influence d'une vérité nouvelle ſur la ſcience même, ou ſur quelqu'application importante, eſt le ſeul avantage qui puiſſe balancer ce mérite de la difficulté vaincue chez des hommes, pour qui le plaiſir d'appercevoir une vérité eſt toujours proportionné aux efforts qu'elle leur a coutés.

M. EULER. n' avoit négligé aucune partie de l'analyſe. Il a démontré quelques uns des Théorèmes de Fermat, ſur l'analyſe indéterminée, & en a trouvé pluſieurs autres non moins curieux, non moins difficiles à découvrir. La marche du Cavalier au jeu d'Echecs, & différens autres problêmes de ſituation, ont auſſi piqué ſa curioſité & exercé ſon génie. Il mêloit aux recherches les plus importantes, ces amuſemens ſouvent plus difficiles, mais preſque inutiles & au progrés même de la ſcience & aux applications tentées juſqu'ici. M. EULER avoit un eſprit trop ſage, pour ne pas ſentir l'inconvénient de ſe livrer longtems à ces recherches purement curieuſes; mais trop étendu en même tems pour ne pas voir que leur inutilité ne devoit être que momentanée, & que le

ſeul

ſeul moyen de la faire ceſſer étoit de chercher à les approfondir & à les généraliſer.

L'Application de l'Algébre à la Géométrie avoit occupé, depuis DESCARTES, preſque tous les Géomêtres du dernier ſiécle. Mais M. EULER à prouvé qu'ils n'avoient pas, à beaucoup près, tout épuiſé. On lui doit de nouvelles recherches ſur le nombre des points qui déterminent une ligne courbe, dont le dégré eſt connu, & ſur celui des interſections des lignes de différens dégrés. On lui doit également l'équation générale des courbes, dont les développées, les ſecondes, les troiſiémes développées, en un mot les développées d'un ordre quelconque, ſont ſemblables à la courbe génératrice; équation remarquable par ſon extrême ſimplicité.

La Théorie générale des ſurfaces courbes étoit peu connue; & M. EULER eſt le premier qui l'ait développée dans un ouvrage élémentaire. Il y ajouta celle des rayons oſculateurs de ces ſurfaces; & il parvint à cette concluſion ſinguliere, que la courbure d'un élément de ſurface eſt déterminée par deux des rayons-oſculateurs des courbes formées par l'interſection de la ſurface & d'un plan qui paſſe par la perpendiculaire au poin donné; que ces rayons ſont le plus grand & le plus petit de tous ceux qui appartiennent à la ſuite des courbes ainſi formées, & qu'enfin ils ſe trouvent toujours dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Il donna de plus une méthode de déterminer les ſurfa-

ces qui peuvent être développées ſur un plan & une théorie des projections géographiques de la ſphere. Ces deux ouvrages renferment une application de calcul des différences partielles à des problêmes géométriques; application qui peut s'étendre à beaucoup de queſtions intéreſſantes, & dont la primiere idée eſt duë à M. EULER.

Ses recherches ſur les courbes, qui, tracées ſur une ſphére, ſont rectifiables algébriquement, & ſur les ſurfaces courbes, dont les parties correſpondantes à des parties d'un plan donné ſont égales entr'elles, l'ont conduit à une nouvelle eſpéce d'analyſe, à la quelle il donne le nom d'analyſe infinitéſimale indeterminée; parceque, comme dans l'analyſe indéterminée ordinaire, les quantités qui reſtent arbitraires ſont aſſujetties à certaines conditions; &, de même que l'analyſe indéterminée a pu ſervir quelque fois á la perfection de l'Algébre, M. EULER regardoit ſa nouvelle analyſe comme une ſcience qui devoit un jour être utile aux progrés du calcul integral.

En effet, ces queſtions iſolées, qui ne tiennent pas au corps méthodique des ſciences mathématiques, qui n'entrent point dans les applications qu'on peut en faire, ne doivent pas être regardées ſeulement comme des moyens d'exercer les forces, ou de faire briller le génie des Géomêtres. Preſque toujours, dans les ſciences, on commence par cultiver ſéparément quelques parties iſolées. A meſure que les découver-

vertes ſucceſſives ſe multiplient, les liaiſons qui uniſſent ces parties ſe laiſſent ſucceſſivement appercevoir; & le plus ſouvent c'eſt aux lumieres qui reſultent de cette réunion que ſont dues les grandes découvertes, qui ſont époque dans l'hiſtoire de l'eſprit humain.

La queſtion de déterminer les courbes ou les ſurfaces, pour les quelles certaines fonctions indéfinies ſont plus grandes ou plus petites que pour toutes les autres, avoit exercé les Géomêtres les plus illuſtres du ſiecle dernier; les ſolutions des problêmes du ſolide de la moindre réſiſtance, de la courbe de plus vîte deſcente, de la plus grande des aires iſopérimetres, avoient été célebres en Europe. La méthode générale de réſoudre le problême, étoit cachée dans ces ſolutions, & ſurtout dans celle que JACQUES BERNOULLI avoit trouvée par la queſtion des iſopérimetres & qui lui avoit donné ſur ſon Frere un avantage, que tant de chefs-d'œuvres, enfantés depuis par JEAN BERNOULLI, n'ont pu faire oublier. Mais il falloit développer cette méthode, il falloit la réduire en formules générales; & c'eſt ce que fit M. EULER dans un ouvrage imprimé en 1744 & l'un des plus beaux monumens de ſon génie. Pour trouver ces formules, il avoit été obligé d'employer la conſideration des lignes courbes. Quinze ans après, un jeune Géométre (M. de la GRANGE), qui, dans ſes premiers eſſais, annonçoit un digne ſucceſſeur D'EULER, reſolut le même problême par une mé-

thode purement analytique. M. EULER admira le premier ce nouvel effort de l'art du calcul, s'occupa lui-même d'expoſer la nouvelle méthode, d'en préſenter les principes, & d'en donner les développemens avec cette clarté; cette élégance qui brillent dans tous ſes ouvrages. Jamais le génie ne reçut & ne rendit un plus bel hommage; & jamais il ne ſe montra plus ſupérieur à ces petites paſſions, que le partage d'un peu de glorie rend ſi actives & ſi violentes dans les hommes ordinaires.

Nous terminerons cet expoſé des travaux de M. EULER ſur l'analyſe pure, en obſervant qu'il ſeroit injuſte de borner ſon influence ſur les progrés des mathématiques, aux decouvertes ſans nombre dont ſes ouvrages ſont remplis. Ces communications qu'il a ouvertes entre toutes les parties d'une ſcience ſi vaſte; ces vuës générales que ſouvent même il n'indique pas, mais qui n'échappent point á un eſprit attentif; ces routes dont il s'eſt contenté d'ouvrir l'entrée & d'aplanir les premiers obſtacles, ſont encore autant de bienfaits dont les ſciences s'enrichiront, & dont la poſtérité jouira, en oubliant peut-être la main dont elle les aura reçu.

Le traité de Mécanique, que M. EULER donna en 1736, eſt le premier grand ouvrage où l'analyſe ait été appliquée á la ſcience du mouvement. Le nombre des choſes neuves, ou préſentées d'une maniere nouvelle, qui entrent dans ce trai-

traité, eût étonné, les Géomêtres, ſi M. EULER n'en eût déja publié ſéparément la plus grande partie.

Dans ſes nombreux travaux ſur la même ſcience, il fut toujours fidele á l'analyſe & l'uſage heureux qu'il en a fait, a mérité à cette méthode la préférence qu'elle a enfin obtenue ſur toutes les autres.

La ſolution du problême où l'on cherche le mouvement d'un corps lancé dans l'eſpace & attiré vers deux points fixés, eſt devenue célebre par l'art avec le quel des ſubſtitutions dont M. EULER ſavoit ſi bien prévoir la forme, l'ont conduit à réduire aux quadratures des équations, que leur complication & leur forme pouvoient faire regarder comme inſolubles.

Il appliqua l'analyſe au mouvement d'un corps ſolide, d'une figure donnée; & elle le conduiſit à ce beau Théorême, deja donné par SEGNER, qu'un corps d'une figure quelconque peut tourner librement d'un mouvement uniforme autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, á la connoiſſance de pluſieurs propriétés ſingulieres de ces trois axes principaux, & enfin aux équations générales du mouvement d'un corps, quelque ſoit ſa figure & la loi des forces accélératrices, qui agiſſent ſur ſes élémens, ou ſur quelques unes de ſes parties.

Le problême des cordes vibrantes, & tous ceux qui appartiennent à la Théorie du ſon, ou des loix des oſcillations

de

de l'air, ont été soumis à l'analyse par les nouvelles méthodes dont il enrichit le calcul des différences partielles, une théorie du mouvement des fluides, appuyée sus ce même calcul, étonna par la clarté qu'il a repandue sur des questions si épineuses & la facilité qu'il a su donner à des méthodes fondées sur l'analyse si profonde.

Tous les problêmes de l'astronomie physique, qui ont été traités dans ce siecle, ont été résolus par des méthodes analytiques particulieres à M. EULER. Sa Théorie de la lune est un modele de la simplicité, de la précision aux quelles on peut porter ces méthodes; &, en lisant cet ouvrage, on n'est pas moins étonné de voir jusqu'où un homme d'un grand génie, animé du désir de ne rien laisser à faire sur une question importante, peut pousser la patience & l'opiniâtreté du travail.

L'astronomie n'employoit que des methodes géométriques, M. EULER sentit tout ce qu'elle pouvoit espérer des secours de l'analyse; & il le prouva par des exemples, qui, imités depuis par plusieurs savans célebres, pourront un jour faire prendre à cette science une forme nouvelle.

Il embrassa la science navale dans un grand ouvrage, au quel une savante analyse sert de base, & où les questions les plus difficiles sont soumises à ces methodes générales & fecondes qu'il savoit si bien créer & employer. Longtems aprés, il publia sur la même matiere, un abrégé élémentaire

de

de ce même traité, où il renferme ſous la forme la plus ſimple ce qui peut être utile á la pratique & ce que doivent ſavoir ceux qui ſe conſacrent au ſervice de mer. Cet ouvrage, quoique deſtiné par l'auteur aux ſeules écoles de l'empire de Ruſſie, lui merita une gratification du Roi, qui jugea que des travaux utiles à tous les hommes, avoient des droits à la reconnoiſſance de tous les ſouverains, & voulût montrer que même aux extrémités de l'Europe, des talens ſi rares ne pouvoient échapper ni à ſes regards, ni à ſes bienfaits M. EULER fut ſenſible à cette marque de l'eſtime d'un Roi puiſſant & elle reçut un nouveau prix à ſes yeux, de la main qui la lui transmit; c'étoit celle de M. TURGOT, Miniſtre reſpecté dans l'Europe par ſes lumieres, comme par ſes vertus, fait pour commander à l'opinion, plutôt que pour lui obéir, & dont le ſuffrage, toujours dicté par la vérité & jamais par le déſir d'attirer ſur lui même l'approbation publique, pouvoit flatter un ſage trop accoutumé à la gloire, pour être encore ſenſible au bruit de ſa renommée.

Dans les hommes d'un génie ſuperieur, l'extrême ſimplicité de caractere peut s'allier avec les qualités de l'eſprit, qui ſemblent le plus annoncer de l'habileté, ou de la fineſſe.

Auſſi M. EULER, malgré cette ſimplicité qui ne ſe dementit jamais, ſavoit cependant diſtinguer, avec une ſagacité toujours indulgente, il eſt vrai, les hommages d'une admiration

tion éclairée & ceux que la vanité prodigue aux grands hommes, pour s'assurer du moins le mérite de l'enthousiasme.

Les travaux sur la Dioptrique, sont fondés sur une analyse moins profonde; & on est tenté de lui en savoir gré, comme d'une espece de sacrifice. Les différens rayons, dont un rayon solaire est formé, subissent dans le méme milieu des refractions différentes; séparés ainsi des rayons voisins, ils paroissent seuls, ou moins mélangés, & donnent la sensation de couleur qui leur est propre. Cette refrangibilité varie dans les différens milieux pour chaque rayon & suivant une loi, qui n'est pas la même que celle de la refraction moyenne dans ces milieux. Cette observation donnoit lieu de croire que deux prismes inégaux & de différentes matieres, combinés ensemble, pourroient détourner un rayon de sa route sans le décomposer, ou plutôt en replaçant par une triple refraction les rayons élémentaires dans une direction parallele.

De la vérité de cette conjecture pouvoit dépendre, dans les lunettes, la destruction des iris qui colorent les objets vus à travers les verres lenticulaires. M. EULER étoit convaincu de la possibilité du succés, d'aprés cette idée méthaphisique, que si l'oeil a été composé de diverses humeurs, c'est uniquement dans l'intention d'y détruire les effets de l'aberration de refrangibilité. Il ne s'agissoit donc que de chercher à imiter l'opération de la nature; & il en proposa

les

les moyens, d'après une théorie qu'il s'étoit formée. Ses premiers essais exciterent les Physiciens à s'occuper d'un objet qu'ils paroissoient avoir negligé. Leurs expériences ne confirmerent point la théorie de M. EULER : mais elles confirmerent les vues qu'il avoit eues sur la perfection des lunettes. Instruit alors par eux des loix de la dispersion dans les différens milieux, il abandonna ses premieres idées, soumit au calcul les résultats de leurs expériences & enrichit la Dioptrique de formules analytiques simples, commodes, générales, applicables à tous les instrumens qu'on peut construire.

On a encore de M. EULER quelques essais sur la théorie générale de la lumiere, dont il cherchoit à concilier les phénomenes avec les lois des oscillations d'une fluide, parceque l'hypothése de l'émission des rayons en ligne droite, lui paroissoit présenter des difficultés insurmontables. La Théorie de l'aiman, celle de la cohésion des corps, celles des frottemens, furent aussi pour lui l'occasion de savans calculs, appuyés malheureusement sur des hypothéses, plutôt que sur des expériences.

Le calcul des probabilités, l'arithmétique politique, furent encore l'objet de ses infatigables travaux. Nous ne citerons ici que ses recherches sur les tables de mortalité & sur les moyens de les déduire des phénomenes avec plus d'exactitude. Sa méthode de prendre un milieu entre des observations, ses calculs sur l'établissement d'une caisse d'em-

prunt, dont le but eſt d'aſſurer aux veuves, aux enfans, ou une ſomme fixe, ou une rente, payables aprés la mort d'un mari, ou d'un pere: moyen ingénieux, imaginé par des Géométres-Philoſophes, pour contrebalancer le mal moral, qui réſulte de l'établiſſement des rentes viageres, & pour rendre utiles aux familles les plus petites épargnes que leur chef peut faire ſur ſon gain journalier, ou ſur les appointemens ſoit d'une commiſſion, ſoit d'une place.

On a vu dans l'éloge de M. DANIEL BERNOULLI, qu'il avoit partagé avec M. EULER ſeul la gloire d'avoir remporté dix prix à l'académie des ſciences. Souvent ils travaillerent pour les mêmes ſujets, & l'honneur de l'emporter ſur ſon concurrent fut encore partagé entr'eux, ſans que jamais cette rivalité ait ſuſpendu les temoignages reciproques de leur eſtime, ou refroidi le ſentiment de leur amitié. En examinant les ſujets ſur les quels l'un ou l'autre ont obtenu la victoire, on voit que le ſuccés a dépendu ſurtout du caractere de leur talent; lorsque la queſtion exigeoit de l'adreſſe dans la maniere de l'enviſager, un uſage heureux de l'expérience, ou des vues de phyſique ingénieuſes & neuves l'avantage étoit pour M. DANIEL BERNOULLI; n'offroit elle a vaincre que de grandes difficultés de calcul, falloit-il créer de nouvelles méthodes d'analyſe, c'étoit M. EULER qui l'emportoit; & ſi l'on pouvoit avoir la témérité de vouloir juger entr'eux, ce ne ſeroit pas entre deux hommes qu'on

qu'on auroit à prononcer, ce ſeroit entre deux genres d'eſprit, entre deux manieres d'employer le génie.

Nous n'aurions donné qu'une idée trés-imparfaite de la fécondité de M. EULER, ſi nous n'ajoutions à cette foible eſquiſſe de ſes travaux, qu'il eſt peu de ſujets importans pour les quels il ne ſoit revenu ſur ſes traces, en refaiſant même pluſieurs fois ſon premier ouvrage. Tantôt il ſubſtituoit une méthode directe & analytique à une méthode indirecte. Tantôt il étendoit ſa premiere ſolution à des cas qui lui avoient d'abord échappé; ajoutant preſque toujours de nouveaux exemples, qu'il ſavoit choiſir avec un art ſingulier, parmi ceux qui offroient ou quelque application utile, ou quelque remarque curieuſe. La ſeule intention de donner à ſon travail une forme plus méthodique, d'y repandre plus de clarté, d'y ajouter un nouveau degré de ſimplicité, ſuffiſoit pour le déterminer à des travaux immenſes. Jamais Géométre n'a tant écrit; & jamais aucun n'a donné à ſes ouvrages un tel degré de perfection. Lorſqu'il publioit un mémoire ſur un objet nouveau, il expoſoit avec ſimplicité la route qu'il avoit parcourue, il en faiſoit obſerver les difficultés, ou les détours; & aprés avoir fait ſuivre ſcrupuleuſement à ſes lecteurs la marche de ſon eſprit dans ſes premiers eſſais, il leur montroit enſuite comment il étoit parvenu à trouver une route plus ſimple. On voit qu'il préféroit l'inſtruction de ſes diſciples, a la petite ſatisfaction de

les étonner, & qu'il croyoit n'en pas faire assés pour la science, s'il n'ajoutoit aux vérités nouvelles, dont il l'enrichissoit, l'exposition naïve des idées qui l'y avoient conduit.

Cette méthode d'embrasser ainsi toutes les branches des mathématiques, d'avoir pour ainsi dire toujours présentes à l'esprit toutes les questions & toutes les théories, étoit pour M. EULER une source de découvertes fermée pour presque tous les autres, ouverte pour lui seul. Ainsi, dans la suite de ses travaux, tantôt s'offroit à lui une méthode singuliere d'integrer des équations en les différentiant, tantôt une remarque sur une question d'analyse, ou de mécanique, le conduisoit à la solution d'une équation différentielle très-compliquée, qui échappoit aux méthodes directes. C'est quelquefois un problême en apparence très difficile, qu'il résout en un instant par une méthode très simple, ou un problême qui paroit élementaire & dont la solution a des difficultés qu'il ne peut vaincre que par de grands efforts; d'autres fois, des combinaisons de nombres singuliers, des séries d'une forme nouvelle, lui présentent des questions piquantes, par leur nouveauté, ou le menent à des vérités inattendues; M. EULER avertissoit alors avec soin que c'étoit au hazard qu'il devoit les découvertes de ce genre. Ce n'étoit pas en diminuer le mérite; car on voyoit aisément que ce hazard ne pourroit arriver qu'à un homme qui joindroit à une vaste

ſte étendue de connoiſſances, la ſagacité la plus rare. D'ailleurs, peut-être ne faudroit-il pas le louer de cette candeur, quand même elle lui auroit couté un peu de ſa gloire. Les hommes d'un grand génie ont rarement ces petites ruſes de l'amour propre, qui ne ſervent qu'à rapetiſſer aux yeux des juges éclairés ceux qu'elles agrandiſſent dans l'opinion de la multitude, ſoit que l'homme de génie ſente qu'il ne ſera jamais plus grand qu'en ſe montrant tel qu'il eſt, ſoit que l'opinion n'ait pas ſur lui cet empire qu'elle exerce avec tant de tyrannie ſur les hommes médiocres.

Lorſque l'on lit la vie d'un grand homme, ſoit conviction de l'imperfection attachée à la foibleſſe humaine, ſoit que la juſtice dont nous ſommes capables ne puiſſe atteindre juſqu'à reconnoître dans nos ſemblables une ſupériorité dont rien ne nous conſole, ſoit enfin que l'idée de la perfection dans un autre, nous bleſſe, ou nous humilie encore plus que celle de la grandeur; il ſemble qu'on a beſoin de trouver un endroit foible; on cherche quelque défaut qui puiſſe nous relever à nos propres yeux, & l'on eſt involontairement porté à ſe défier de la ſincérité de l'Ecrivain, s'il ne nous montre pas cet endroit foible, s'il ne ſouleve point le voile important dont ces défauts ſont couverts.

M. EULER paroiſſoit quelquefois ne s'occuper que du plaiſir de calculer & regarder le point de mécanique ou de phyſique, qu'il examinoit ſeulement comme une occaſion

d'exercer son génie & de se livrer à sa passion dominante. Aussi les savans lui ont-ils reproché d'avoir quelquefois prodigué son calcul à des hypotheses physiques, ou même à des principes métaphysiques, dont il n'avoit pas assés examiné ou la vraisemblance, ou la solidité. Ils lui reprochoient aussi de s'être trop reposé sur les ressources du calcul & d'avoir negligé celles que pouvoit lui donner l'examen des questions même qu'il se proposoit de résoudre. Nous conviendrons que le premier reproche n'étoit pas sans fondement. Nous avouerons que dans M. EULER, le Metaphysicien, ou même le Physicien, n'a pas été si grand, que le Géomètre; & l'on doit regreter sans doute que plusieurs parties de ses ouvrages, par exemple de ceux qu'il a faits sur la science navale, sur l'artillerie, n'ayent presque été utiles qu'aux progrés de la science du calcul. Mais nous croyons que le second reproche est beaucoup moins mérité. Partout, dans les ouvrages de M. EULER, on le voit occupé d'ajouter aux richesses de l'analyse, d'en étendre & d'en multiplier les applications. En même tems qu'elle paroit son instrument unique, on voit qu'il a voulu en faire un instrument universel. Le progrés naturel des sciences mathématiques devoit amener cette révolution; mais il l'a vu, pour ainsi dire, s'accomplir sous ses yeux; c'est à son génie que nous la devons; elle a été le prix de ses efforts & de ses découvertes. Ainsi, lors même qu'il paroissoit abuser de l'analyse, & en épuiser

tous

tous les ſecrets pour réſoudre une queſtion dont quelques reflexions, étrangeres au calcul, lui euſſent donné une ſolution ſimple & facile, ſouvent il ne cherchoit qu'à montrer les forces & les reſſources de ſon art; & on doit lui pardonner ſi quelquefois, en paroiſſant s'occuper d'une autre ſcience, c'étoit encore au progrés & à la propagation de l'analyſe que ſes travaux étoient conſacrés, puiſque la révolution qui en a été le fruit eſt un de ſes premiers droits à la reconnoiſſance des hommes & un de ſes plus beaux titres à la gloire.

Je n'ai pas cru devoir interrompre le détail des travaux de M. EULER, par le recit des événemens tres-ſimples & trés peu multipliés de ſa vie.

Il s'établit à Berlin en 1741 & y reſta juſqu'en 1766.

Madame la Princeſſe D'ANHALT-DESSAU, Niece du Roi de Pruſſe, voulut recevoir de lui quelques leçons de phyſique. Ces leçons ont été publiées ſous le nom de lettres à une Princeſſe d'Allemagne: ouvrage précieux par la clarté ſinguliere avec laquelle il y a expoſé les vérités les plus importantes de la mécanique, de l'aſtronomie phyſique, de l'optique & de la théorie des ſons; & par des vues ingénieuſes moins philoſophiques, mais plus ſavantes que celles qui ont fait ſurvivre le livre de la pluralité du monde, au ſyſtéme des tourbillons. Le nom d'EULER, ſi grand dans les ſciences, l'idée impoſante que l'on ſe forme de ſes ouvra-

ges

ges deſtinés à approfondir ce que l'analyſe a de plus épineux & de plus abſtrait, donne à ces lettres ſi ſimples, ſi faciles, un charme ſingulier. Ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'EULER, lui ſavent gré de s'être mis à leur portée; & ces détails élémentaires des ſciences, acquierent une ſorte de grandeur, par le raprochement qu'on en fait avec la gloire & le génie de l'homme illuſtre, qui les a tracées.

Le Roi de Pruſſe employa M. EULER à des calculs ſur les monnoies, à la conduite des eaux de Sans-ſouci, à l'examen de pluſieurs canaux de navigation. Ce Prince n'étoit pas né pour croire que de grands talens & des connoiſſances profondes, fuſſent jamais des qualités ſuperflues & dangereuſes; & le bonheur de pouvoir être utile, un avantage reſervé par la nature à l'ignorance & à la mediocrité.

En 1750, M. EULER fit le voyage de Francfort pour y recevoir ſa mere, veuve alors, & la ramener à Berlin. Il eut le bonheur de l'y conſerver juſqu'en 1761. Pendant onze ans, elle jouit de la gloire de ſon fils, comme le cœur d'une mere ſait en jouir, & fut plus heureuſe encore peut-être par ſes ſoins tendres & aſſidus dont cette gloire augmentoit le prix.

Ce fut pendant ſon ſéjour à Berlin, que M. EULER, lié par la reconnoiſſance à M. MAUPERTUIS, ſe crut obligé de defendre ce principe de la moindre action, ſur lequel

le

le Préſident de l'académie de Pruſſe avoit fondé l'eſpérance d'une ſi grande renommée. Le moyen que choiſit M. EULER ne pouvoit guere être employé que par lui. C'étoit de réſoudre par ce principe quelques uns des problémes les plus difficiles de la mécanique. Ainſi, dans les tems fabuleux, les Dieux daignoient fabriquer pour les guerriers, qu'ils favoriſoient, des armes impénétrables aux coups de leurs adverſaires. Nous deſirerions que la reconnoiſſance de M. EULER ſe fut bornée à une protection ſi noble & ſi digne de lui; mais on ne peut ſe diſſimuler qu'il n'ait montré trop de dureté dans ſes réponſes à KOENIG: & c'eſt avec douleur que nous ſommes obligés de compter un grand homme parmi les ennemis d'un ſavant malheureux & perſécuté. Heureuſement, toute la vie de M. EULER le met à l'abri d'un ſoupçon plus grave. Sans cette indifférence pour la renommée, qu'il a montrée conſtamment, on auroit pu croire que les plaiſanteries d'un illuſtre partiſan de M. EULER (plaiſanteries que M. DE VOLTAIRE lui-même a depuis condamnées a un juſte oubli) avoient altéré le caractere de M. EULER. Mais s'il fit alors une faute, c'eſt à l'excès ſeul de la reconnoiſſance qu'il faut l'attribuer; & c'eſt par un ſentiment reſpectable, qu'il a été injuſte une ſeule fois dans ſa vie.

Les Ruſſes ayant pénétré dans la Marche en 1760, pillerent une métairie que M. EULER avoit auprés de Charlottembourg; mais le Général TOTTLEBEN n'étoit pas venu

faire la guerre aux sciences. Instruit de la perte que M. EULER avoit essuyée, il s'empressa de la reparer, en faisant payer le dommage à un prix fort au dessus de la valeur réelle; & il rendit compte de ce manque d'égards involontaire à l'Impératrice ELISABETH, qui ajouta un don de quatre mille florins, à une indemnité déja beaucoup plus que suffisante. Ce trait n'a point été connu en Europe; & nous citons avec enthousiasme quelques actions semblables, que les anciens nous ons transmises. Cette différence dans nos jugemens, n'est-elle pas une preuve de ces progrés heureux de l'espece humaine, que quelques Ecrivains s'obstinent à nier encore apparemment pour éviter qu'on ne les accuse d'en avoir été les complices?

Le Gouvernement de Russie n'avoit jamais traité M. EULER comme un étranger; une partie de ses appointemens lui fut toujours payée malgré son absence; & l'Impératrice l'ayant appellé en 1766, il consentit à retourner à Petersbourg.

En 1735, les efforts que lui avoit couté un calcul astronomique, pour le quel les autres Académiciens demandoient plusieurs mois, & qu'il acheva en peu de jours, lui avoient causé une maladie, suivie de la perte d'un œil. Il avoit lieu de craindre une cécité complette, s'il s'exposoit de nouveau dans un climat dont l'influence lui étoit contraire. L'intérét de ses enfans l'emporta sur cette crainte; &, si on songe que l'étude étoit pour M. EULER une passion ex-

excluſive, on jugera ſans doute que peu d'exemples d'amour paternel ont mieux prouvé qu'il eſt la plus douce de nos affections.

Il aſſuya, peu d'années après, le malheur qu'il avoit prévû ; mais il conſerva, heureuſement pour lui & pour les ſciences, la faculté de diſtinguer encore de grands caracteres tracés ſur une ardoiſe avec de la craie. Ses fils, ſes éleves, copioient ſes calculs, écrivoient ſous ſa dictée le reſte de ſes mémoires ; & ſi on en juge par leur nombre & ſouvent par le génie qu'on y retrouve, on pourroit croire que l'abſence encore plus abſolue de toute diſtraction, & la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donoit à toutes ſes facultés, lui ont fait plus gagner que l'affoibliſſement de ſa vue n'a pu lui faire perdre de facilité & de moyens pour le travail.

D'ailleurs, M. EULER, par la nature de ſon génie, par l'habitude de ſa vie, s'etoit même involontairement préparé des reſſources extraordinaires, en examinant ces grandes formules analytiques, ſi rares avant lui, ſi frequentes dans ſes ouvrages, dont la combinaiſon & le développement réuniſſent tant de ſimplicité & d'élégance, dont la forme même plait aux yeux come à l'eſprit, on voit qu'elles ne ſont pas le fruit d'un calcul tracé ſur le papier, & que produites toutes entieres dans ſa tête, elles y ont été créées par une imagination également puiſſante & active. Il exiſte dans l'analyſe (& M. EULER en a beaucoup multiplié le nombre)

des formules d'une application commune, & preſque journaliere. Il les avoit toujours préſentes à l'eſprit, les ſavoit par cœur, les recitoit même de mémoire; & M. D'ALEMBERT, lorſqu'il vit M. EULER à Berlin, fut étonné de ce phénomene, nouveau même pour lui. Enfin ſa facilité à calculer de tête étoit portée à un degré qu'on croiroit à peine, ſi l'hiſtoire de ſes travaux n'avoit accoutumé aux prodiges. On l'a vû, dans l'intention d'exercer ſon petit fils aux extractions de racines, ſe former la table des ſix premieres puiſſances de tous les nombres, depuis un juſqu'à cent & la conſerver exactemens dans ſa mémoire. Deux de ſes diſciples avoient calculé, juſqu'au dixſeptieme terme, une ſérie convergente aſſés compliquée. Leurs réſultats, quoique formés d'aprés un calcul écrit, différoient d'une unité au cinquantiéme chiffre. Ils firent part de cette diſpute à leur maitre. M. EULER refit le calcul entier dans ſa tête, & ſa déciſion ſe trouva conforme à la vérité.

Depuis la perte de ſa vue, il n'avoit d'autre amuſement que de faire des aimans artificiels, & de donner des leçons de mathématiques a un de ſes petits-fils, qui lui paroiſſoit annoncer d'heureuſes diſpoſitions.

Il alloit encore quelque fois à l'Académie, principalement dans les circoſtances difficiles, où il croyoit que ſa préſence pouvoit être utile pour y maintenir la liberté. On ſent combien un Préſident perpétuel nommé par la Cour

peut

peut troubler le repos d'une Académie, & tout ce qu'elle en doit craindre, lorſque, n'étant pas choiſi dans la claſſe des ſavans, il ne ſe ſent pas même arrêté par le beſoin qu'a ſa réputation du ſuffrage de ſes confreres. Et comment des hommes, uniquement occupés de leurs paiſibles travaux & ne ſachant parler que le langage des ſciences, pourroient-ils alors ſe défendre, ſurtout ſi étrangers, iſolés, éloignés de leur patrie, ils tiennent tout du Gouvernement, au quel ils ont à demander juſtice contre le chef que ce Gouvernement même leur a donné?

Mais il eſt un degré de gloire où l'on ſe trouve au deſſus de la crainte: c'eſt lorsque l'Europe entiere s'éleveroit contre une injure perſonnelle faite à un grand-homme, qu'il peut ſans riſque déployer contre l'injuſtice l'autorité de ſa renommée & élever en faveur des ſciences une voix qu'on ne peut empêcher de ſe faire entendre. M. EULER, tout ſimple, tout modeſte qu'il étoit, ſentoit ſes forces, & les a plus d'une fois heureuſement employées.

En 1771, la ville de Petersbourg éprouva un incendie terrible. Les flammes gagnerent la maiſon de M. EULER. Un Baſlois, M. PIERRE GRIMON, (dont le nom mérite ſans doute d'être conſervé) apprend le danger de ſon illuſtre compatriote, aveugle & ſouffrant, il ſe précipite au travers des flammes, pénêtre juſqu'à lui, le charge ſur ſes épaules & le ſauve au péril de ſa vie. Sa Bibliothéque, ſes meubles

fu-

furent consumés. Mais les soins empressés du Comte ORLOFF sauverent ses manuscrits; & cette attention, au milieu du trouble & des horreurs de ce grand désastre, est un des hommages les plus vrais & les plus flatteurs, que jamais l'autorité publique ait rendu au génie des sciences. La maison de M. EULER étoit un des bienfaits de l'Impératrice, & un nouveau bienfait en répara promptement la perte. Il a eu de sa premiere femme treize enfans, dont huit morts en bas-age. Ses trois fils lui ont survécu; & il eût le malheur de perdre ses deux filles dans la derniere année de sa vie. De trente huit petits enfans, vingt-six vivoient encore à l'époque de sa mort. En 1776, il épousa en secondes noces, Mlle. GSELL, sœur de pere de sa premiere femme. Il avoit gardé toute la simplicité de mœurs dont la maison paternelle lui avoit donné l'exemple. Tant qu'il a conservé la vie, il rassembloit tous les soirs, pour la priere commune, ses enfans, ses petits enfans, ses domestiques & ceux de ses éleves qui logeoient chez lui. Il leur lisoit un chapitre de la Bible, & quelque fois accompagnoit cette lecture d'une exhortation.

Il étoit trés religieux; on a de lui une preuve nouvelle de l'existence de Dieu, & de la spiritualité de l'ame. Cette derniere même a été adoptée dans plusieurs écoles de Théologie. Il avoit conservé scrupuleusement la religion de son pays, qui est le Calvinisme rigide; & il ne paroit pas qu'à l'exem-

l'exemple de la plupart des Savans proteſtans, il ſe ſoit permis d'adopter des opinions particulieres & de ſe former un ſyſtême de religion.

Son érudition étoit très étendue, ſurtout dans l'hiſtoire des mathématiques. On a prétendu qu'il avoit porté ſa curioſité juſqu'à s'inſtruire des procédés & des regles de l'aſtrologie & que même il en avoit fait quelques applications. Cependant, lorſqu'en 1740 on lui donna ordre de faire l'horoſcope du Prince YVAN, il repréſenta que cette fonction appartenoit à M. KRAAF, qui, en qualité d'aſtronome de la cour, fut obligé de la remplir. Cette crédulité, qu'on eſt étonné de trouver à cette époque dans la cour de Ruſſie, étoit générale, un ſiecle auparavant, dans toutes les Cours de l'Europe. Celles de l'Aſie n'en ont pas encore briſé le joug; & il faut avouer que, ſi on en excepte les maximes communes de la morale, il n'y a juſqu'ici aucune vérité qui puiſſe ſe glorifier d'avoir été adoptée auſſi généralement & auſſi longtems que beaucoup d'erreurs, ou ridicules ou funeſtes.

M. EULER avoit étudié preſque toutes les branches de la phyſique, l'anatomie, la chymie, la botanique; mais ſa ſupériorité dans les mathématiques ne lui permettoit pas d'attacher la plus petite importance à ſes connoiſſances dans les autres genres, quoiqu'aſſez étendues, pour qu'un homme, plus ſuſceptible des petiteſſes de l'amour-propre, eût pû aſpirer à une ſorte d'univerſalité.

L'é-

L'étude de la littérature ancienne & des langues savantes avoit fait partie de son éducation. Il en conserva le goût toute sa vie; & n'oublia rien de ce qu'il avoit appris; mais il n'eût jamais ni le tems, ni le désir d'ajouter à ses premieres études. Il n'avoit pas lû les poëtes modernes & savoit par cœur l'Eneïde.

Mais M. EULER ne perdoit pas de vue les mathématiques, même lorsqu'il récitoit les vers de Virgile. Tout étoit propre á lui rappeller cet objet presque unique de ses pensées, & on trouve dans ses ouvrages un savant mémoire sur une question de mécanique, dont il racontoit qu'un vers de l'Eneïde lui avoit donné la premiere idée.

On a dit que, pour les hommes d'un grand talent, le plaisir du travail en étoit une récompense plus douce encore que la gloire. Si cette vérité avoit besoin d'être prouvée par des exemples, celui de M. EULER. ne permetroit plus d'en douter.

Jamais dans ses savantes discussions avec de célebres Géomêtres, il n'a laissé échapper un seul trait qui puisse faire soupçonner qu'il se soit occupé des intérêts de son amour-propre. Jamais il n'a reclamé aucune de ses découvertes; &, si on revendiquoit quelque chose dans ses ouvrages, il s'empressoit de réparer une injustice involontaire, sans même trop examiner si l'équité rigoureuse exigeoit de lui un abandon absolu. Y avoit-on relevé quelqu'erreur, si le reproche étoit

mal

mal fondé, il l'oublioit; s'il étoit juste, il se corrigeoit, & ne songeoit même pas à observer que souvent le mérite de ceux qui se vantoient d'avoir aperçu ses fautes, consistoit seulement dans une application facile des Méthodes, que lui même leur avoit enseignées, à des Théories dont il avoit applani d'avance les plus grandes difficultés.

Presque toujours les hommes médiocres cherchent à se faire valoir par une sévérité proportionnée à la haute idée qu'ils veulent donner de leur jugement, ou de leur génie. Inexorables pour tout ce qui s'élève au dessus d'eux, ils ne pardonnent même pas à l'infériorité. On diroit qu'un sentiment secret les avertit du besoin qu'ils ont de rabaisser les autres. Au contraire, le premier mouvement de M. EULER le portoit à célébrer les talens dès l'instant où quelques essais heureux frappoient ses regards, & sans attendre qu'une juste admiration eût sollicité son suffrage. On le voit employer son tems à refaire, à éclaircir ses ouvrages & même à résoudre des problêmes déja résolus, qui ne lui laissoient plus que le mérite de plus d'élégance & de méthode, avec la même ardeur, la même constance, qu'il eût mises à poursuivre une vérité nouvelle, dont la découverte auroit ajouté à sa renommée. D'ailleurs, si le désir ardent de la gloire eût existé au fond de son cœur, la franchise de son caractere ne lui eût pas permis d'en cacher les mouvemens. Mais cette gloire, dont il s'occupoit si peu, vint le chercher. La sé-

condité singuliére de son génie frappoit même ceux qui n'étoient pas en état d'entendre ses ouvrages. Quoiqu'uniquement livré à la Géométrie, sa réputation s'étendit parmi les hommes les plus étrangers à cette science ; & il fût pour l'Europe entiere, non seulement grand Géomêtre, mais un grand-homme.

Il est d'usage en Russie d'accorder des titres militaires à des hommes très étrangers au service. C'est rendre hommage au préjugé qui faisoit regarder cet Etat comme la seule profession noble, & avouer en même tems qu'on en reconnoit toute la fausseté. Quelques savans ont obtenu jusqu'au grade de Général-Major. M. EULER n'en eût & n'en vouloit point avoir aucun. Mais quel titre pouvoit honorer le nom d'EULER ? Et alors le respect pour la conservation des droits naturels de l'homme, impose en quelque sorte le devoir de donner l'exemple d'une sage indifférence pour ces hochets de la vanité humaine, si puérile, mais si dangereux.

La plupart des Princes du Nord, dont il étoit personnellement connu, lui ont donné des marques de leur estime, ou plutôt de la vénération, qu'on ne pouvoit refuser à la réunion d'une vertu si simple & d'un génie si vaste & si élevé. Dans le voyage que le Prince Royal de Prusse fit à Petersbourg, il prévint la visite de M. EULER & passa quelques heures à coté du lit de cet illustre vieillard, ayant ses mains dans les siennes & tenant sur ses genoux un petit fils

d'EU-

d'EULER, que ſes diſpoſitions précoces pour la Géométrie avoient rendu l'objet particulier de ſa tendreſſe paternelle.

Tous les mathématiciens célebres qui exiſtent aujourd'hui ſont ſes éleves. Il n'en eſt aucun qui ne ſe ſoit formé par la lecture de ſes ouvrages, qui n'ait reçu de lui les formules, la métode qu'il emploie, qui, dans ſes découvertes ne ſoit guidé & ſoutenu par le génie d'EULER. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les ſciences mathématiques, en les ſoumettant toutes à l'analyſe; à ſa force pour le travail, qui lui a permis d'ambraſſer toute l'étendue de ces ſciences; à l'ordre méthodique qu'il a ſçu mettre dans ſes grands ouvrages; à la ſimplicité, à l'élégance de ſes formules; à la clarté de ſes méthodes & de ſes démonſtrations, qu'augmente encore la multiplicité & le choix de ſes exemples. Ni NEWTON, ni DESCARTES même, dont l'influence a été ſi puiſſante, n'ont obtenu cette gloire; & juſqu'ici, ſeul entre tous les Géomêtres, M. EULER l'a poſſédée toute entiere & ſans partage.

Mais comme Profeſſeur, il a formé des éleves qui lui appartiennent plus particulierement, & parmi les quels nous citerons ſon fils ainé, que l'Académie des ſciences a choiſi pour le remplacer, ſans craindre que cette ſucceſſion honorable accordée au nom d'EULER, connue à celui de BERNOULLI, pût devenir un exemple dangereux; un ſecond fils livré aujourd'hui à l'étude de la Médicine, mais qui dans ſa jeuneſſe

a remporté dans cette Académie un prix sur les altérations du moyen mouvement des planètes : M. LEXELL, qu'une mort prématurée vient d'enlever aux sciences, enfin M. FUSS, le plus jeune de ses disciples, le compagnon de ses derniers travaux, qui, envoyé de BASLE à M. EULER, par M. DANIEL BERNOULLI, s'est montré digne par ses ouvrages du choix de BERNOULLI & des leçons d'EULER & qui, après avoir rendu dans l'Académie de Petersbourg un hommage public à son illustre Maitre, vient de s'unir à sa petite-fille.

De seize Professeurs attachés à l'Académie de Petersbourg, huit avoient été formés par lui & tous connus par leurs ouvrages & décorés de titres académiques, se glorifioient de pouvoir y ajouter celui de disciples d'EULER.

Il avoit conservé toute sa facilité, & en apparence toutes ses forces. Aucun changement n'annonçoit que les sciences fussent menacées de le perdre. Le sept Septembre 1783, après s'être amusé à calculer sur une ardoise les loix du mouvement ascensionel des machines Aëro statiques, dont la découverte récente occupoit alors toute l'Europe, il dina avec M. LEXELL & sa famille, parla de la planette d'Herschell, & des calculs qui en déterminent l'orbite ; peu de tems après, il fit venir son petit-fils, avec le quel il badinoit en prenant quelques tasses de Thé, lorsque tout à coup la pipe, qu'il tenoit à la main, lui échappa, & il cessa de calculer & de vivre.

Tel-

Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands & les plus extraordinaires que la nature ait jamais produits, dont le génie fut également capable des plus grands efforts & du travail le plus continu, qui multiplia ſes productions au delà de ce qu'on eut oſé attendre des forces humaines & qui cependant fut original dans chacune, dont la tête fut toujours occupée & l'âme toujours calme, & qui, par une deſtinée malheureuſement trop rare, réunit & mérita de réunir un bonheur presque ſans nuage à une gloire qui ne fut jamais conteſtée.

Sa mort a été regardée comme une perte publique, même dans le pays qu'il habitoit. L'Académie de Petersbourg a porté ſolemnellement ſon deuil & lui a décerné à ſes frais un buſte de marbre, qui doit être placé dans ſes ſalles d'aſſemblée. Elle lui avoit deja rendu pendant ſa vie un honneur plus ſingulier peut-être. Dans un tableau allégorique, la figure de la Géométrie s'apuie ſur une planche chargée de calculs; & ce ſont les formules de ſa nouvelle Théorie de la lune, que l'Académie a ordonné d'y inſcrire. Ainſi un Pays qu'au commencement de ce ſiecle, nous regardions encore comme barbare, apprend aux nations les plus éclairées de l'Europe à honnorer la vie des grands hommes & leur mémoire récente. Il donne à ces nations un exemple que pluſieurs d'entre elles auroient à rougir peut-être, de n'avoir ſçu ni prévenir, ni même imiter.

PRAEFATIO.

Quid sit Calculus Differentialis, atque in genere Analysis infinitorum, iis qui nulla adhuc eius cognitione sunt imbuti, vix explicari potest: neque hic, uti in aliis disciplinis fieri solet, exordium tractationis a definitione commode sumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; sed quoniam ad eam intelligendam eiusmodi opus est notionibus, non solum in vita communi, verum etiam in ipsa Analysi finitorum minus usitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione evolvi atque explicari solent: quo fit, ut eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam satis dilucide fuerint perspecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles versatur: etsi enim omnis quantitas sua natura in infinitum augeri & diminui potest; tamen dum calculus ad certum quoddam institutum dirigitur, aliae quantitates constanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctionis ac diminutionis variari: ad quam distinctionem notandam illae quantitates constantes, hae vero variabiles vocari solent; ita ut hoc discrimen non tam in rei natura, quam in quaestionis, ad quam calculus refertur, indole sit positum. Quoniam haec differentia inter quantitates constantes & variabiles exemplo maxime illustrabitur, consideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii explosi; siquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in ista investigatione est habenda: primo scilicet quantitas pulveris pyrii; tum elevatio tormenti supra horizontem; tertio longitudo iactus super plano horizontali; quarto tempus, quo globus explosus in aere versatur: ac nisi experimenta eodem tormento instituantur, insuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a va-

varietate tormenti & globi animum removeamus, ne in quaestiones nimium implicatas incidamus. Quodsi ergo servata perpetuo eadem pulveris pyrii quantitate, elevatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulveris seu vis impulsus erit quantitas constans, elevatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; si quidem pro omnibus elevationis gradibus has res definire velimus, ut inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus elevationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si servata eadem tormenti elevatione, quantitas pulveris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim elevatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulveris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, ut mutata una reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulveris pyrii eadem manebat, mutata tormenti elevatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; suntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab elevatione tormenti, hacque mutata simul certas quasdam mutationes patientes: posteriori vero casu pendent a quantitate pulveris pyrii, cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denoter quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuius-

mo-

modi sunt quadratum eius xx, *aliaeve potentiae quaecunque nec non quantitates ex his utcunque compositae; quin etiam transcendentes, & in genere quaecunque ita ab* x *pendent, ut aucta vel diminuta* x *ipsae mutationes recipiant. Hinc, iam nascitur quaestio, qua quaeritur, si quantitas* x *data quantitate sive augeatur sive diminuatur, quantum inde quaevis eius functiones immutentur, seu quantum incrementum decrementumve accipiant. Casibus quidem simplicioribus haec quaestio facile resolvitur: si enim quantitas* x *augeatur quantitate* ω, *eius quadratum* xx *hinc incrementum capiet* $2x\omega+\omega\omega$; *sicque incrementum ipsius* x *se habebit ad incrementum ipsius* xx, *ut* ω *ad* $2x\omega+\omega\omega$, *hoc est, ut* 1 *ad* $2x+\omega$; *similique modo in aliis casibus ratio incrementi ipsius* x *ad incrementum, vel decrementum, quod quaevis eius functio inde adipiscitur, considerari solet. Est vero investigatio rationis huiusmodi incrementorum ipsa non solum maximi momenti, sed ei etiam universa Analysis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, sumamus exemplum superius quadrati* xx, *cuius incrementum* $2x\omega+\omega\omega$, *quod capit, dum ipsa quantitas* x *incremento* ω *augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, ut* $2x+\omega$ *ad* 1; *unde perspicuum est, quo minus sumatur incrementum* ω, *eo propius istam rationem accedere ad rationem* 2x *ad* 1; *neque tamen ante prorsus in hanc rationem abit, quam incrementum illud* ω *plane evanescat. Hinc intelligimus, si quantitatis variabilis* x *incrementum* ω *in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius* xx *incrementum inde oriundum quidem evanescere, verumtamen ad id rationem tenere ut* 2x *ad* 1; *& quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius* x *est intelligendum; quippe quarum incrementa evanescentia, quae capiunt, dum ipsa quantitas* x *incrementum evanescens sumit ad hoc ipsum certam & assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem* calculi Differentialis, *qui est* methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt,

dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur: *hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata, qui convenientissime ita definitur, ut dicatur esse* methodus ex cognita ratione incrementorum evanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inveniendi. *Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parva quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati* x *incrementum tribuatur* ω, *ut abeat in* $x+\omega$, *eius quadratum* xx *abibit in* $xx+2x\omega+\omega\omega$, *ideoque incrementum capit* $2x\omega+\omega\omega$; *quare incrementum ipsius* x, *quod est* ω, *se habebit ad incrementum quadrati, quod est* $2x\omega+\omega\omega$, *uti* 1 *ad* $2x+\omega$; *quae ratio abit in* 1 *ad* $2x$, *tum demum, cum* ω *evanescit. Fiat igitur* $\omega=0$, *& ratio istorum incrementorum evanescentium, quae sola in calculo differentiali spectatur, utique est ut* 1 *ad* $2x$; *neque vicissim haec ratio veritati esset consentanea, nisi revera illud incrementum* ω *evanesceret, penitusque nihilo fieret aequale. Quodsi ergo hoc nihilum per* ω *indicatum referat incrementum quantitatis* x, *quia haec se*

habet ad incrementum quadrati xx ut 1 ad 2x, erit quadrati xx incrementum $= 2x\omega$, ideoque etiam nihilo aequale; unde simul constat annihilationem horum incrementorum non obstare, quominus eorum ratio, quae est ut 1 ad 2x sit determinata. Quod nihilum iam hic littera ω exhibetur, id in calculo differentiali, quia ut incrementum quantitatis x spectatur, signo dx repraesentari, eiusque differentiale vocari solet; positoque dx loco ω, ipsius xx differentiale erit 2xdx. Simili modo ostenditur fore cubi x^3 differentiale $= 3xxdx$, & in genere cuiusque dignitatis x^n differentiale fore $= nx^{n-1}dx$. Quaecunque autem aliae functiones ipsius x proponantur, in calculo differentiali regulae traduntur eorum differentialia inveniendi: verum perpetuo tenendum est, cum haec differentialia absolute sint nihila, ex iis nihil aliud concludi, nisi eorum rationes mutuas, quae utique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes; quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parva negligerentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinitae parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul reiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per calculum differentialem eaedem conclusiones ac per Geometriam elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam si ea infinite parva, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde neces-

sario error, isque eo maior, quo magis ea coacervantur, resultare debet; hocque si minus eveniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compensantur, esset tribuendum, quam ipse calculus ab erroris suspicione liberaretur. Quodsi autem nullo novo errore huiusmodi compensatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipsum, quod volo, evincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & absolute pro nihilo esse habenda; neque infinite parva, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parva ita describuntur, ut instar pulviſculorum respectu vasti montis vel etiam totius globi terrestris spectari debeant: etsi enim qui magnitudinem totius globi terrestris calculo determinare susceperit, ei error non unius sed plurium millium pulviſculorum facile condonari soleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque gravis esset haec obiectio, si ullam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu est, quid lucri inde sperent, qui infinite parva a nihilo distingui volunt: metuunt autem, ne, si plane evanescunt, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perduci sentiunt, tollatur: quomodo enim absolute nihila inter se comparari queant, nullo modo concipi posse profitentur. Necesse ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem instituant: hanc tamen magnitudinem tam parvam admittere coguntur, ut quasi esset nulla, spectari ac sine errore in calculo negligi possit. Neque tamen certam ac definitam ipsi magnitudinem, licet incomprehensibiliter parvam, assignare audent; semper enim si eam bis terve minorem assumerent, eodem modo comparationes se essent habiturae. Ex quo perspicuum est, nihil plane ipsam magnitudinem ad comparationem instituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamsi illa magnitudo penitus evanescat. Ex dictis autem supra manifestum est, eam comparationem, quae in calculo differentiali spectatur, ne locum quidem habere, nisi illa incrementa prorsus evanescant: incrementum enim quan-

tita-

titatis x, *quod in genere indicavimus per* ω, *ad incrementum quadrati* xx, *quod eſt* 2xω + ωω, *rationem habet ut* 1 *ad* 2x + ω; *quae ſemper differt a ratione* 1 *ad* 2x, *niſi ſit* ω = 0; *at ſi ſtatuamus eſſe* ω = 0, *tum demum vere affirmare poſſumus; hanc rationem fieri exacte ut* 1 *ad* 2x. *Interim tamen perſpicitur, quo minus illud incrementum* ω *accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non ſolum licet, ſed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita conſiderare, atque etiam in figuris, ſi quibus opus eſt ad rem illuſtrandam, finite repraeſentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, ſicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quaſi rationem ultimam incrementorum illorum conſtituit, verum eſt obiectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is iecisſe exiſtimandus eſt, cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum evaneſcunt, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem ſpeculationis veſtigia deprehendimus apud antiquiſſimos Auctores, quibus idcirco idea quaedam leviſque cognitio Analyſis infinitorum abiudicari nequit. Paullatim deinde haec ſcientia maiora accepit incrementa, neque ſubito ad id faſtigium, in quo nunc cernitur, eſt evecta; etiamſi quidem in ea multo plura adhuc ſint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, utcunque ſint compoſitae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa evaneſcentia inter ſe comparandi; ſed ſenſim haec inventio ad functiones continuo magis complicatas proceſſit. Quod ſcilicet ad functiones rationales attinet, ratio ultima, quam earum incrementa evaneſcentia inter ſe tenent, multo ante* NEUTONI *ac* LEIBNIZII *tempora aſſignari potuit; ita ut Calculus differentialis, quatenus ad ſolas functiones rationales applicatur, diu ante haec tempora*

pora inventus sit censendus. Tum vero nullum est dubium, quin NEUTONO eam calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales versatur, acceptam referre debeamus; ad quam insigni suo Theoremate de evolutione generali potestatum binomii feliciter est deductus, quo eximio inventio limites calculi differentialis iam mirifice erant amplificati. LEIBNIZIO autem non minus sumus obstricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut singulare artificium spectatum, in formam disciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in systema collegerit, ac dilucide explicaverit. Hinc enim maxima subsidia suggerebantur, ad hunc calculum ulterius excolendum, & ea, quae adhuc desiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur studio cum ipsius LEIBNIZII, tum BERNOUILLIORUM ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, sunt promoti, tum vero etiam solidissima fundamenta Calculi integralis constituta; quibus insistentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt. NEUTONUS vero etiam amplissima dederat specimina Calculi integralis, cuius prima inventio, cum a prima origine calculi differentialis vix separari queat, non ita absolute constitui potest; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda restat, hic calculus ne nunc quidem pro absolute invento haberi potest; sed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre contigerit, id grata mente agnoscere debemus. Atque haec de gloria inventionis huius calculi tenenda esse iudico, de qua quidem antehac tantopere est disceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae isti calculo a diversarum nationum Mathematicis imponi solent, attinet, ea omnia huc redeunt, ut cum data hic definitione egregie consentiant: sive enim incrementa illa evanescentia, quorum ratio consideratur, differentialia vocentur, sive fluxiones, ea semper nihilo aequalia sunt intelligenda; in quo vera notio infinite parvorum constitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus

secun-

secundi & altiorum ordinum curiose magis quam utiliter sunt disputata, reddentur planissima, cum omnia per se aeque evanescant neque ea unquam per se, sed potius eorum relatio mutua spectari soleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa evanescentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, si & huius functionis incrementum evanescens cum aliis conferatur, res ad differentialia secunda referri est censenda; sicque porro progressio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita ut semper quantitates finitae revera animo obversentur, signaque differentialium tantum ad eas commode repraesentandas adhibeantur. Primo quidem intuitu ista Analysis infinitorum descriptio plerisque levis ac nimis sterilis videtur, etsi species illa arcana infinite parvorum re haud plus polliceatur: verum si rationes, quae inter incrementa evanescentia functionum quarumvis intercedunt, probe cognoscamus, haec cognitio saepenumero per se maximi est momenti; tum vero in plerisque iisque maxime arduis investigationibus ita est necessaria, ut sine eius adminiculo nihil plane intelligi possit. Veluti si quaestio sit de motu globi ex tormento explosi, simulque ratio resistentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per spatium finitum sit futurus, nullo modo statim definire licet, dum tam directio semitae, in qua globus incedit, quam ipsius celeritas, a qua resistentia pendet, quovis momento immutatur. Quo minus autem spatium, per quod motus fiat, consideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodsi autem illud spatium plane evanescens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum resistentiae per regulas motus accurate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse

esse

esse arbitror usum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel levissimam investigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingrediatur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, ut rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes usus huius Analyseos sublimioris usque adeo diffunditur, ut omnia, quae sine eius interventu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro universum Calculum differentialem ex veris principiis derivare, atque ita copiose pertractare, ut nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inventa. In duas opus divisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inveniendi; sive functiones unicam variabilem sive duas pluresve involvant. In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. De usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent evoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI

EXPLICATIONEM

CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.



I.

Ex iis, quae in Libro superiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus sunt exposita, perspicuum est, prout quantitas variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati. Sic, si quantitas variabilis x capiat incrementum ω, ita ut pro x scribatur $x + \omega$, omnes functiones ipsius x, cuiusmodi sunt xx; x^3; $\frac{a + x}{xx + aa}$, alios induent valores: scilicet xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$; x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a + x}{aa + xx}$ transmutabitur in $\frac{a + x + \omega}{aa + xx + 2x\omega + \omega\omega}$.

Huiusmodi ergo alteratio semper orietur, nisi functio speciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, revera autem sit quantitas constans, veluti x^0: quo casu talis functio invariata manet, utcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum sint satis expositа, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus universa analysis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x: pro qua successive valores in arithmetica progressione procedentes substituantur, scilicet: $x; x+\omega; x+2\omega; x+3\omega; x+4\omega$; &c. ac denotet y^I valorem quem functio y induit, si in ea loco x substituatur $x+\omega$; simili modo sit y^{II} is ipsius y valor, si loco x scribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent $y^{III}; y^{IV}; y^V$; &c. valores ipsius y, qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega; x+4\omega; x+5\omega$; &c. ita ut isti diversi valores ipsarum x & y sequenti modo sibi respondeant:

$$\begin{array}{llllll} x; & x+\omega; & x+2\omega; & x+3\omega; & x+4\omega; & x+5\omega; \text{ &c.} \\ y; & y^I; & y^{II}; & y^{III}; & y^{IV}; & y^V; \text{ &c.} \end{array}$$

3. Quemadmodum series arithmetica $x; x+\omega; x+2\omega$; &c. in infinitum continuari potest; ita series ex functione y orta $y; y^I; y^{II}$; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendebit ab indole functionis y. Sic, si fuerit $y=x$; vel $y=ax+b$; series $y; y^I; y^{II}$; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y=\frac{a}{bx+c}$, series prodibit harmonica: si autem sit $y=a^x$, habebitur series geometrica. Neque ulla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius x oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x, ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare cum omnis series certa lege formata habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, uti in doctrina de seriebus fusius explicari solet.

4.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. inter se discrepant, attendimus; quas ut ad differentialium naturam accomodemus, sequentibus signis indicemus, ut sit

$y^{I} - y = \Delta y$; $y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I}$; $y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}$; &c.

Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega = 1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali uti, qui pro arbitrio augeri diminuive queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^{I} primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negativo agnoscitur.

5. Quoniam y^{II} oritur ex y, si loco x scribatur $x + 2\omega$; manifestum est eandem quantitatem esse orituram si primum pro x ponatur $x + \omega$, tumque denuo $x + \omega$ loco x statuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I}, si in hoc loco x scribatur $x + \omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipsius y^{I} quod capit posito $x + \omega$ loco x; sicque Δy^{I} vocatur simili modo *Differentia* ipsius y^{I}. Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipsius y^{II}, seu eius incrementum, quod accipit, si loco x ponatur $x + \omega$; atque Δy^{III} erit differentia, seu incrementum ipsius y^{III}, & ita porro. Hoc pacto ex serie valorum ipsius y, qui sunt y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. obtinebitur series differentiarum Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; &c. quae inveniuntur, si quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahatur.

6. Inventa serie differentiarum, si ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a sequente subtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae secundae*; hocque modo per characteres convenientissime repraesentantur, ut significet:

$\Delta\Delta y$

$$\Delta\Delta y = \Delta y^{I} - \Delta y$$
$$\Delta\Delta y^{I} = \Delta y^{II} - \Delta y^{I}$$
$$\Delta\Delta y^{II} = \Delta y^{III} - \Delta y^{II}$$
$$\Delta\Delta y^{III} = \Delta y^{IV} - \Delta y^{III}$$
&c.

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia secunda ipsius y; $\Delta\Delta y^{I}$ differentia secunda ipsius y^{I}, & ita porro. Simili autem modo ex differentiis secundis, si denuo earum differentiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo scribendae $\Delta^{3}y$; $\Delta^{3}y^{I}$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^{4}y$; $\Delta^{4}y^{I}$; &c. sicque ultra quousque libuerit.

7. Repraesentemus singulas has differentiarum series ita in schemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; Δy^{III}; Δy^{IV}; &c.

DIFF. II. $\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^{I}$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; &c.

DIFF. III. $\Delta^{3}y$; $\Delta^{3}y^{I}$; $\Delta^{3}y^{II}$; &c.

DIFF. IV. $\Delta^{4}y$; $\Delta^{4}y^{I}$; &c.

DIFF. V. $\Delta^{5}y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quosque terminos a sequentibus subtrahendo. Quacunque ergo functione ipsius x loco y substituta, quoniam valores y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. per no-

notas compositiones facile formantur, ex iis sine labore singulae differentiarum series invenientur.

8. Ponamus esse $y = x$; eritque $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$: & ita porro. Unde differentiis sumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipsius x erunt constantes, ac proinde differentiae secundae omnes evanescent; pariterque differentiae tertiae, & sequentium ordinum omnes. Cum igitur sit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iste character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x, cuius valores successivi x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. arithmeticam progressionem constituere assumuntur, differentiae Δx, Δx^{I}, Δx^{II}, &c. erunt constantes atque inter se aequales; ac propterea erit $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^{3} x = 0$, $\Delta^{4} x = 0$, sicque porro

9. Pro valoribus ipsius x, qui ipsi successive tribuuntur, progressionem arithmeticam hic assumsimus, ita ut horum valorum differentiae primae sint constantes, secundae ac reliquae omnes evanescant. Quod etsi ab arbitrio nostro pendet, cum aliam quamcunque progressionem, aeque adhibere potuissemus; tamen progressio arithmetica prae reliquis omnibus commodissime usurpari solet, cum quod sit simplicissima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere potest, pateat. Tribuendo enim ipsi ω valores tam negativos quam affirmativos, in hac serie valorum ipsius x omnes omnino continentur quantitates reales, quae in locum ipsius x substitui possunt: contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negativos nullus aditus patuisset. Hanc ob causam variabilitas functionum y ex valoribus ipsius x progressionem arithmeticam constituentibus aptissime diiudicatur.

10. Uti est $\Delta y = y^{I} - y$, ita differentiae ulteriores quoque ex terminis primae seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. definiri possunt.

Cum

Cum enim sit $\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$

erit

$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

&

$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$

ideoque

$$\Delta^{I} y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$

simili modo erit

$$\Delta^{II} y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

&

$$\Delta^{I} y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$

quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in potestatibus Binomii observatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis seriei y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. determinatur, ita differentia secunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiusque ordinis ipsius y, simili modo differentiae omnium ordinum ipsius y^{I}; y^{II}; &c. definientur.

11. Proposita ergo quacunque Functione y singulae eius differentiae, tam prima, quam sequentes, quae quidem differentiae ω, qua valores ipsius x progrediuntur, respondent, poterunt inveniri. Neque vero ad hoc opus est, ut series valorum ipsius y ulterius continuetur; quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur, si in y loco x scribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^{I} ipsa functio y subtrahatur; ita differentia secunda $\Delta\Delta y$ obtinebitur si in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, ut oriatur Δy^{I}, atque Δy a Δy^{I} subtrahatur. Simili modo si differentiae secundae $\Delta\Delta y$ capiatur differentia, eam subtrahendo a valore, quem induit, si loco x ponatur $x + \omega$, proveniet differentia tertia $\Delta^{I} y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^{II} y$, &c. Dummodo ergo quis noverit differentiam primam cuiusque functionis investigare, simul poterit differentiam secundam, tertiam,

tiam, omnesque sequentes invenire, propterea quod differentia secunda ipsius y nil aliud est, nisi differentia prima ipsius Δy; & differentia tertia ipsius y nil aliud, nisi differentia prima ipsius $\Delta\Delta y$; sicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusve partibus composita, ut sit $y = p + q + r +$ &c.; tum quia est $y' = p' + q' + r' +$ &c., erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ &c., similique modo porro $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ &c., unde inventio differentiarum, si functio proposita ex partibus fuerit composita, non parum facilior redditur. Quod si vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q, nempe $y = pq$, quia erit $y' = p'q'$, & $p' = p + \Delta p$, atque $q' = q + \Delta q$, fiet $p'q' = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$, hincque $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$. Unde, si fit p quantitas constans $= a$, ob $\Delta a = 0$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a\Delta q$, similique modo differentia secunda $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, tertia $\Delta^3 q = a\Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra est aggregatum ex aliquot potestatibus ipsius x; omnes differentias functionum rationalium integrarum invenire poterimus, si differentias potestatum tantum exhibere noverimus. Hancobrem singularum potestatum quantitatis variabilis x differentias investigemus in sequentibus exemplis.

Cum autem sit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiamsi x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus esse $\Delta x = \omega$; & $\Delta\Delta x = 0$, simulque differentiae sequentium ordinum evanescunt. Quae cum sint manifesta a Potestate secunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^2.

Cum hic sit $y = x^2$, erit $y' = (x + \omega)^2$, ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae est differentia prima. Iam ob ω

quantitatem constantem, erit $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^3.

Ponatur $y = x^3$; &, cum sit $y^1 = (x+\omega)^3$, erit

$$\Delta y = 3\omega x x + 3\omega^2 x + \omega^3$$

quae est differentia prima. Deinde ob

$$\Delta . x x = 2\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta . 3\omega x x = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

&

$$\Delta . 3\omega^2 x = 3\omega^3 ; \text{ \& } \Delta . \omega^3 = 0 :$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3 : \text{ atque } \Delta^3 y = 6\omega^3 :$$

Differentiae vero sequentes evanescent.

EXEMPLUM III.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^4.

Posito $y = x^4$; ob $y^1 = (x+\omega)^4$ erit

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 ;$$

quae est differentia prima. Tum ex praecedentibus est:

$$\Delta . 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$
$$\Delta . 6\omega^2 x^2 = \ldots\ldots 12\omega^3 x + 6\omega^4$$
$$\Delta . 4\omega^3 x = \ldots\ldots\ldots + 4\omega^4$$
$$\Delta . \omega^4 = \ldots\ldots\ldots 0$$

His colligendis erit differentia secunda:

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4 :$$

Quia deinde porro est:

$$\Delta . 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$
$$\Delta . 24\omega^3 x = \ldots\ldots 24\omega^4$$
$$\Delta . 14\omega^4 = \ldots\ldots 0$$

pro-

prodibit differentia tertia:
$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$
atque tandem differentia quarta:
$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$
quae cum sit constans, differentiae sequentium ordinum evanescent.

EXEMPLUM IV.

Invenire differentias cuiusvis ordinis potestatis x^n.

Ponatur $y = x^n$; &, cum sit $y' = (x+\omega)^n$; $y'' = (x+2\omega)^n$; $y''' = (x+3\omega)^n$; &c. Potestates evolutae dabunt:

$$y = x^n$$
$$y' = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$
$$y'' = x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$
$$y''' = x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$
$$y'' = x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

Hinc, differentiis sumendis, prodibit:

$$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$
$$\Delta y' = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}7\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y'' = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}19\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y''' = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}37\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

sumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}14\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y' = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}50\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y'' = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}110\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex his per subtractionem ulterius eruitur

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}36\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y' = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}60\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

atque porro

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

14. Quo lex, secundum quam istae differentiae potestatis x^n

n^n progrediuntur, facilius perſpiciatur, ponamus primo brevitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

&c.

Deinde ſequens formetur Tabula, quae pro ſingulis differentiis inſerviet.

y	1	0	0	0	0	0	0	0	&c.
Δy	0	1	1	1	1	1	1	1	&c.
$\Delta^2 y$	0	0	2	6	14	30	62	126	&c.
$\Delta^3 y$	0	0	0	6	36	150	540	1806	&c.
$\Delta^4 y$	0	0	0	0	24	240	1560	8400	&c.
$\Delta^5 y$	0	0	0	0	0	120	1800	16800	&c.
$\Delta^6 y$	0	0	0	0	0	0	720	15120	&c.
$\Delta^7 y$	0	0	0	0	0	0	0	5040	&c.

y	1	0	0	0	0	0	0	&c.
Δy	1	1	1	1	1	1	1	&c.
$\Delta^2 y$	62	126	254	510	1022	2046	4094	&c.
$\Delta^3 y$	540	1806	5756	16730	46620	126666	337974	&c.
$\Delta^4 y$	1560	8400	40824	186480	818520	3498000	14676024	&c.
$\Delta^5 y$	1800	16800	126000	834120	5103000	29607600	164038800	&c.
$\Delta^6 y$	720	15120	191520	1905120	16435440	129230640	953029200	&c.
$\Delta^7 y$	0	5040	141120	2328480	29635200	317950320	3022235760	&c.

in qua Tabula numerus cuiuſvis ſeriei invenitur, ſi eiuſdem ſeriei praecedens ad numerum ſupra poſitum addatur, atque ſumma per indicem characteri Δ infixum multiplicetur. Sic, in ſerie differentiae $\Delta^5 y$ reſpondente, terminus 16800 invenitur, ſi praecedens 1800 ad ſupra ſcriptum 1560 addatur, atque ſumma 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac conſtituta, ſingulae differentiae Poteſtatis $n^n = y$ ſequenti modo ſe habebunt:

$$= \Delta y$$

$$\Delta y = A\,\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \text{&c.}$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \text{&c.}$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \text{&c.}$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \text{&c.}$$

Generatim autem poteſtatis x^n differentia ordinis m, ſeu $\Delta^m y$, ſequenti modo exprimetur.

Sit

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1} I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2} K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3} L;$$

&c.

Deinde vero ſit:

$$a = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^m + \text{&c.}$$

$$b = m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{m+1} + \text{&c.}$$

$$\gamma = m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{m+2} + \text{&c.}$$

quibus valoribus inventis erit

$$\Delta^m y = a\,I\omega^m x^{n-m} + b\,K\omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma\,L\omega^{m+2} x^{n-m-2} \text{ &c.}$$

cu-

cuius expressionis ratio ex modo, quo singulae differentiae ex valoribus y, y', y'', y''', &c. eliciuntur, sponte sequitur.

16. Ex his perspicuum est, si exponens n fuerit numerus integer affirmativus, tandem ad differentias perveniri constantes, hisque ulteriores omnes esse $= 0$. Sic erit

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta^2.\ x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3.\ x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4.\ x^4 = 24\omega^4$$

& tandem

$$\Delta^n.\ x^n = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n.\ \omega^n$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias constantes deducetur. Scilicet, functio ipsius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet constantem $= a\omega$. Functio secundi gradus $axx + bx + c$ differentiam secundam habebit constantem $= 2a\omega\omega$; functionis autem tertii gradus differentia tertia erit constans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo invenimus differentias potestatis x^n, quoque latius patet, atque ad eas potestates, quarum exponens n est numerus negativus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiusmodi potestatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum secundarum ac sequentium non tam facile cernitur: erit ergo,

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta.\ x^2 = 2\omega x + \omega^2$$
$$\Delta.\ x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta.\ x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \text{ &c.}$$

Simili modo vero erit

Δ.

$$\Delta.x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta.x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

$$\Delta.x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \ldots\ldots \text{ &c.}$$

18. Apparet itaque has differentias, si exponens ipsius x non fuerit numerus integer affirmativus, in infinitum progredi, seu ex terminorum numero infinito constare. Interim tamen eaedem differentiae quoque per expressionem finitam exhiberi possunt. Cum enim, posito

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, fit $y' = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta.x^{-1} = \Delta.\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$;

un-

unde, si fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in seriem convertatur, prodit expressio superior. Simili modo erit

$$\Delta.x^{-2} = \Delta.\frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta.\sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \text{ \& } \Delta.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae si more solito in series explicentur, superiores expressiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, sive fractarum sive irrationalium, inveniri possunt: sic si quaeratur differentia prima fractionis $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia est $y' = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit

$$\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx},$$

quae expressio quoque in seriem infinitam converti potest.

Ponatur $aa+xx = P$, & $2\omega x+\omega\omega = Q$;

erit

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{\&c.}$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{\&c.}$$

Restitutis ergo loco P & Q valoribus erit:

$$\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x+\omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx+4\omega^3 x+\omega^4}{(aa+xx)^3} - \frac{8\omega^3 x^3+12\omega^4 x^2+6\omega^5 x+\omega^6}{(aa+xx)^4} + \text{\&c.}$$

qui termini si secundum potestates ipsius ω ordinentur erit:

$$\Delta.\frac{1}{aa+xx}=-\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2}+\frac{\omega^2(3xx-aa)}{(aa+xx)^3}-\frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4}+$$

&c.

20. Similibus seriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi possunt.

Sit proposita ista functio $y=\sqrt{(aa+xx)}$;

&, cum sit $y'=\sqrt{(aa+xx+2\omega x+\omega\omega)}$,

ponatur $aa+xx=P$, & $2\omega x+\omega\omega=Q$

erit $\Delta y=\sqrt{(P+Q)}-\sqrt{P}=\frac{Q}{2\sqrt{P}}-\frac{QQ}{8P\sqrt{P}}+\frac{Q^3}{16PP\sqrt{P}}-$

&c.

unde fiet

$$\Delta y=\Delta.\sqrt{(aa+xx)}=\frac{2\omega x+\omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}}-\frac{4\omega^2x^2+4\omega^3x+\omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}+$$

vel &c.

$$=\frac{\omega x}{\sqrt{(aa+xx)}}+\frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}-\frac{aa\omega^3x}{2(aa+xx)^2\sqrt{(aa+xx)}}$$

&c.

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipsius x, quae sit y, differentiam hac forma exprimi posse, ut sit

$$\Delta y=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+\text{ &c.}$$

existentibus P, Q, R, S, &c. certis ipsius x functionibus, quae quovis casu ex functione y definiri possunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum transcendentium excluduntur, id quod ex sequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipsius x.

Ponatur $y=lx$; & cum sit $y'=l(x+\omega)$, erit

erit

$$\Delta y = y' - y = l(x+\omega) - lx = l\left(1+\frac{\omega}{x}\right).$$

Huiusmodi autem logarithmum supra docuimus per seriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta . lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{ &c.}$$

EXEMPLUM II.

Invenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x.

Posito $y = a^x$ erit $y' = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$:

at supra ostendimus esse

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{ &c.}$$

quo valore introducto erit

$$\Delta . a^x = y' - y = \Delta y = \frac{a^x \omega la}{1.} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{ &c.}$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius $= 1$, *invenire differentiam sinus arcus* x.

Sit $\sin x = y$, erit $y' = \sin(x+\omega)$,

unde $\Delta y = y' - y = \sin(x+\omega) - \sin x$.

At est $\sin(x+\omega) = \cos\omega . \sin x + \sin\omega . \cos x$,

atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ &c.}$$

&

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ &c.}$$

quibus seriebus substitutis erit:

$$\Delta.\sin x = \omega.\cos x - \frac{\omega^2}{2}\sin x - \frac{\omega^3}{6}\cos x + \frac{\omega^4}{24}\sin x + \frac{\omega^5}{120}\cos x -$$

&c.

EXEMPLUM IV.

In circulo cuius radius = 1 invenire differentiam cosinus arcus x.

Posito $y = \cos x$, ob $y' = \cos(x+\omega)$

erit $y' = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x$

& $\Delta y = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x - \cos x$

Seriebus ergo ante expositis adhibendis prodibit:

$$\Delta.\cos x = -\omega\sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x -$$

&c.

22. Cum igitur proposita quacunque functione ipsius x, sive algebraica sive transcendente, quae sit y, eius differentia prima eiusmodi habeat formam ut sit:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ &c.}$$

si huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam secundam ipsius y huiusmodi formam esse habituram:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{ &c.}$$

similique modo differentia tertia ipsius y, erit huiusmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{ &c.}$$

sicque porro.

Ubi notandum est litteras P, Q, R, &c. hic non pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera in diversis differentiis eandem functionem ipsius x denotari: ideo enim tantum iisdem litteris utor, ne sufficiens diversarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum *istae differentiarum formae* probe sunt *notandae*, cum in Analysi infinitorum maximum usum offerant.

23.

23. Cum igitur modum expoſuerim, quo cuiuſvis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae ſequentium ordinum inveniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y ſucceſſivis y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. reperiuntur: viciſſim ex differentiis ipſius y cuiuſque ordinis datis, iſti ipſi variati valores ipſius y elici poterunt. Erit enim

$$y^{I} = y + \Delta y$$
$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^{3} y$$
$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^{3} y + \Delta^{4} y$$
$$\text{&c.}$$

ubi coefficientes numerici iterum ex evolutione binomii naſcuntur. Quemadmodum ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. ſunt valores ipſius y, qui oriuntur ſi loco x ſucceſſive ponantur hi valores $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, &c. ſtatim valorem ipſius $y^{(n)}$ aſſignare poterimus, qui prodit ſi loco x ſcribatur $x + n\omega$, erit ſcilicet iſte valor:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^{2} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^{3} y + \text{&c.}$$

Hincque adeo etiam valores ipſius y praeberi poſſunt ſi n fuerit numerus negativus. Sic, ſi loco x ponatur $x - \omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^{2} y - \Delta^{3} y + \Delta^{4} y - \text{&c.}$$

ſin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y tranſibit in:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^{2} y - 4\Delta^{3} y + 5\Delta^{4} y - \text{&c.}$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inverſa, qua, ſi detur differentia, ex ea ipſa illa functio, cuius eſt differentia, inveſtigari debeat. Cum autem hoc ſit difficillimum atque ſaepe numero ipſam analyſin infinitorum requirat, caſus

sus tantum quosdam faciliores evolvamus. Primum igitur, regrediendo, si functionis cuiuspiam differentiam invenerimus, vicissim hac differentia proposita, ipsa illa functio, unde est nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax+b$ differentia sit $a\omega$, si quaeratur cuiusnam functionis differentia sit $a\omega$; responsio erit in promtu, eam functionem esse $ax+b$. In hac igitur reperitur quantitas constans b, quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio nostro pendet. Perpetuo autem si functionis cuiusvis P differentia fuerit Q, quoque functionis $P+A$, (denotante A quantitatem quamcunque constantem,) differentia erit Q. Hinc, si ista differentia Q proponatur, functio, ex qua ea est orta, erit $P+A$, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum constans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaesitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod summa differentiae opponi solet, tum etiam, quod functio quaesita revera sit summa omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum enim est $y' = y + \Delta y$, & $y'' = y + \Delta y + \Delta y'$, si valores ipsius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x - \omega$ respondet, scribatur y_I, huncque praecedens y_{II}, & qui ultra praecedunt y_{III}, y_{IV}, y_V, &c. hincque series formetur retrograda, cum suis differentiis:

$$y_V ; y_{IV} ; y_{III} ; y_{II} ; y_I ; y$$
&
$$\Delta y_V ; \Delta y_{IV} ; \Delta y_{III} ; \Delta y_{II} ; \Delta y_I$$
erit
$$y = \Delta y_I + y_I$$
&
ob $y_I = \Delta y_{II} + y_{II}$, porroque $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$
erit utique
$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V$$
&c.

sic-

ficque erit functio y, cuius differentia est Δy, summa omnium valorum antecedentium differentiae Δy, qui oriuntur, si loco x scribantur valores antecedentes $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam usi sumus signo Δ, ita summam indicabimus signo Σ: scilicet, si functionis y differentia fuerit z, erit $z = \Delta y$; unde, si y detur, differentiam z invenire ante docuimus. Quod si autem data sit differentia z, eiusque summa y reperiri debeat, fiet $y = \Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z = \Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y = \Sigma z$; ubi constans quantitas quaecunque adiici poterit ob rationes supra datas; ex quo, aequatio $z = \Delta y$, si invertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia sit $a\Delta y = az$, erit $\Sigma az = ay$, si quidem a sit quantitas constans. Quia ergo est $\Delta x = \omega$; erit $\Sigma\omega = x + C$ & $\Sigma a\omega = ax + C$; atque ob ω quantitatem constantem, erit $\Sigma\omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma\omega^3 = \omega^2 x + C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias potestatum ipsius x supra inventas invertamus, erit

$$\Sigma\omega = x; \quad \text{hincque} \quad \Sigma 1 = \frac{x}{\omega};$$

Deinde habemus

$$\Sigma\,(2\omega x + \omega^2) = x^2;$$

unde fit

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Porro est

$$\Sigma\,(3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

seu $$3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1 = x^3$$

ergo $$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega\Sigma x - \frac{\omega^3}{3}\Sigma 1$$

seu $$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$$

simi-

simili modo erit

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\Sigma x^2 - \omega^2 \Sigma x - \frac{\omega^3}{4}\Sigma 1$$

ubi, si loco Σx^2, Σx & $\Sigma 1$ valores ante inventi substituantur, reperietur:

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Deinde, cum sit

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1$$

erit, adhibendis substitutionibus:

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^2 x$$

simili modo ulterius progrediendo reperietur

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^2 x^2$$

&

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^2 x^3 + \frac{1}{42}\omega^6 x$$

quas expressiones infra facilius invenire docebimus.

28. Si ergo differentia proposita fuerit functio rationalis integra ipsius x, eius summa, (seu ea functio, cuius ea est differentia) ex his formulis facile invenitur. Quia enim differentia ex aliquot potestatibus ipsius x constabit, quaeratur uniuscuiusque termini summa, omnesque istae summae colligantur.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inventarum, erit

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

$$\& \qquad \Sigma bx = \ldots \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

$$\text{atque} \qquad \Sigma c = \ldots\ldots \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has summas erit

$$\Sigma(axx+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega-b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2-3b\omega+6c)}{6\omega}x + C$$

quae est functio quaesita, cuius differentia est $axx+bx+c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia est $x^4 - 2\omega^2 xx + \omega^4$.

Operationem simili modo instituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

$$\&$$

$$-\Sigma 2\omega^2 x^2 = \ldots -\frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

$$\text{atque}$$

$$+\Sigma\omega^4 = \ldots\ldots\ldots + \omega^3 x$$

unde functio quaesita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C$$

Si enim hic loco x ponatur $x+\omega$, atque a quantitate resultante subtrahatur ista inventa, remanebit proposita differentia $x^4 - 2\omega^2 x^3 + \omega^4$.

29. Si summas, quas pro potestatibus ipsius x invenimus, attentius inspiciamus, in terminis primis, secundis, ac tertiis mox quidem legem observabimus, qua illi secundum singulas potestates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita est perspicua, ut summam potestatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in sequentibus docebitur esse:

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2\cdot 3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-3}$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^{n-5}$$
$$-\frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)\omega^7}{2\cdot 3\ldots\ldots 8\cdot 9}x^{n-7}$$
$$+\frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-8)\omega^9}{2\cdot 3\ldots\ldots 10\cdot 11}x^{n-9}$$
$$-\frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-10)\omega^{11}}{2\cdot 3\ldots\ldots 12\cdot 13}x^{n-11}$$
$$+\frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-12)\omega^{13}}{2\cdot 3\ldots\ldots 14\cdot 15}x^{n-13}$$
$$-\frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)\omega^{15}}{2\cdot 3\ldots\ldots 16\cdot 17}x^{n-15}$$
$$+\frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-16)\omega^{17}}{2\cdot 3\ldots\ldots 18\cdot 19}x^{n-17}$$
$$-\frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-18)\omega^{19}}{2\cdot 3\ldots\ldots 20\cdot 21}x^{n-19} +$$

$$+\frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-20)\omega^{21}}{2\cdot 3\ldots\ldots 22\cdot 23}x^{n-22}$$

$$-\frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-22)\omega^{23}}{2\cdot 3\ldots\ldots 24\cdot 25}x^{n-23}$$

$$+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)\omega^{25}}{2\cdot 3\ldots\ldots 26\cdot 27}x^{n-25}$$

$$-\frac{2374946029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-26)\omega^{27}}{2\cdot 3\ldots\ldots 28\cdot 29}x^{n-27}$$

$$+\frac{861584127600 5}{462}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-28)\omega^{29}}{2\cdot 3\ldots 30\cdot 31}x^{n-29}$$

&c. + C

cuius progressionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis est situm, qui quemadmodum formentur, hic locus nondum est, ubi exponi queat.

30. Apparet autem nisi n sit numerus integer affirmativus, hanc summae expressionem in infinitum progredi, neque hoc modo summam in forma finita exhiberi posse. Ceterum hic notandum est, non omnes potestates ipsius x proposita x^n inferiores occurrere; desunt enim termini x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, &c. quippe quorum coefficientes sunt $=0$, etiamsi termini secundi x^n coefficiens hanc legem non sequatur, sed sit $=-\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius expressionis ope summae potestatum, quarum exponentes sunt vel negativi vel fracti in forma infinita exhiberi solo excepto casu quo $n=-1$, quia tum fit terminus $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, posito $n=-2$; erit

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{30}\cdot\frac{\omega^3}{5x^5}$$
$$- \frac{1}{42}\cdot\frac{\omega^5}{7x^7} + \frac{1}{30}\cdot\frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{1}{66}\cdot\frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210}\cdot\frac{\omega^{11}}{13x^{13}}$$
$$- \frac{35}{6}\cdot\frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30}\cdot\frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c.$$

31. Si ergo differentia propoſita fuerit poteſtas ipſius x quaecumque, eius ſumma hinc perpetuo aſſignari, ſeu functio, cuius ea ſit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia propoſita aliam habeat formam, ut in poteſtates ipſius x, tanquam partes, diſtribui nequeat, tum ſumma difficillime ac ſaepenumero prorſus non inveniri poteſt: niſi forte pateat, eam ex quapiam functione eſſe ortam. Hanc ob cauſam conveniet plurium functionum differentias inveſtigare eaſque probe notare, ut ſi quando huiuſmodi differentia proponatur, eius ſumma, ſeu functio unde eſt orta, ſtatim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas ſuppeditabit, quarum ope inventio ſummarum mirifice ſublevabitur.

32. Facilius autem ſaepe ex differentia propoſita reperitur ſumma quaeſita, ſi haec ex factoribus ſimplicibus conſtet, qui progreſſionem arithmeticam conſtituant, cuius differentia ſit ipſa quantitas ω. Sic, ſi propoſita fuerit functio $(x+\omega)(x+2\omega)$, eius differentia quaeratur: quia, poſito $x+\omega$ loco x, haec functio abit in $(x+2\omega)(x+3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x+2\omega)$. Quare viciſſim, ſi proponatur differentia $2\omega(x+2\omega)$, eius ſumma erit $(x+\omega)(x+2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Si-

Simili modo, si proponatur functio $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit eius differentia $2\omega(x+(n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma(x+(n+1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma(x+n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus constet, ut sit $y = (x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit

$$y' = (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y = 3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur esse:

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega) = \frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega).$$

unde lex inveniendi summas, si differentia ex pluribus huiusmodi factoribus constet, sponte patet. Quamvis autem hae differentiae sint functiones rationales integrae, tamen earum summae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractarum summas inveniendas. Sit enim proposita fractio

$$y = \frac{1}{x+n\omega}; \text{ quia erit } y' = \frac{1}{x+(n+1)\omega}$$

erit

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x+n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ob $y^1 = \frac{1}{(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}$$
$$= \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

Simili modo erit porro

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)}$$
$$= \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

35. Modus iſte ſummandi probe eſt tenendus, quia huiuſmodi differentiarum ſummae per praecedentem methodum inveniri non poſſunt. Quodſi autem differentia inſuper ha-

habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progressione procedant, tum tutissimus modus investigandi summas est, ut differentia proposita in suas fractiones simplices resolvatur, quarum singulae etsi summari nequeunt, tamen binis coniungendis toties summa inveniri potest, quoties id quidem fieri licet, tantum enim erit dispiciendum, utrum summa ope huius formulae inveniri queat:

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etsi enim neutra harum summarum per se exhiberi potest, tamen earum differentia cognoscitur.

36. His igitur casibus negotium redit ad resolutionem cuiusque fractionis in fractiones suas simplices, quae in superiori libro fusius est ostensa. Quemadmodum ergo eius beneficio summae inveniri queant, aliquot exemplis docebimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}$$

Resolvatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega}$$

erit $$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}=$$

$$\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x}$$

at est

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega};$$

unde summa quaesita erit

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur summa, cuius differentia est $\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}$.

Posita hac differentia $=z$, erit $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3\omega}$

ideoque

$$\Sigma z=\Sigma\frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}=\Sigma\frac{1}{x+\omega}-$$

$$\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x+2\omega}.$$

quae est summa quaesita. Quoties ergo hoc modo signa summatoria Σ sese tandem tollunt, toties differentiae propositae summa exhiberi poterit; sin autem haec destructio non succedat, signum hoc est, summam inveniri non posse.

CA-

CAPUT II.

DE USU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam serierum per differentias maxime illustrari, ex primis rudimentis satis est notum. Progressionis enim arithmeticae, quae primum considerari solet, praecipua proprietas in hoc versatur, ut eius differentiae primae sint inter se aequales; hinc differentiae secundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde series, quarum differentiae secundae demum sunt aequales, quae hanc ob rem *secundi ordinis* commode appellantur, dum progressiones arithmeticae series *primi ordinis* vocantur. Porro igitur series *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae sunt constantes, atque ad *quartum ordinem* & sequentes eae referentur series, quarum differentiae quartae, & ulteriores demum sunt constantes.

38. In hac divisione infinita serierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes series ad haec genera revocare licet. Occurrunt enim innumerabiles series, quae, differentiis sumendis, nunquam ad terminos constantes deducunt: cuiusmodi, praeter innumeras alias sunt progressiones geometricae, quae nunquam praebent differentias constantes, uti ex hoc exemplo videre licet.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

Cum enim series differentiarum cuiusque ordinis aequalis sit ipsi seriei propositae, aequalitas differentiarum prorsus excluditur. Quocirca plures serierum classes constitui debebunt,

quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias constantes revocantur, subdividitur; quam classem in hoc capite potissimum considerabimus.

39. Duae autem res ad naturam serierum cognoscendam imprimis requiri solent, Terminus generalis atque Summa seu Terminus summatorius. Terminus generalis est expressio indefinita, quae unumquemque seriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea est functio quantitatis variabilis x, quae, posito $x = 1$, terminum seriei primum exhibet; secundum vero posito $x = 2$; tertium posito $x = 3$; quartum posito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscumque seriei terminus invenietur, etiamsi lex, qua singuli termini cohaerent, non respiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, statim terminus millesimus cognoscetur. Ita huius seriei

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, &c.

Terminus generalis est $2xx - x$; posito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; posito $x = 2$, oritur terminus secundus 6; si ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. unde patet huius seriei terminum centesimum, posito $x = 100$ fore $= 2.10000 - 100 = 19900$.

40. Indices seu exponentes in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus sit in ordine: sic, termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices singulis cuiusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

TERMINI.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

unde statim patet G esse seriei propositae terminum septimum, cum eius index sit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, nisi terminus seriei, cuius index vel exponens est nu-

numerus indefinitus x. Quemadmodum ergo in quolibet ferierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel secundae, vel aliae sequentes sunt constantes, terminum generalem inveniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad investigationem summae summus progressuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progressiones arithmeticas, quarum differentiae primae sunt constantes; sitque a terminus seriei primus, & b terminus primus seriei differentiarum, cui sequentes omnes sunt aequales: unde series ita erit comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, &c.

DIFFERENTIAE.

b, b, b, b, b, &c.

Ex qua statim patet, terminum, cuius index sit $=x$, fore $a+(x-1)b$, eritque ergo terminus generalis $=bx+a-b$, qui ex terminis primis cum ipsius seriei, tum seriei differentiarum componitur. Quodsi autem terminus secundus seriei $a+b$ vocetur a', ob $b=a'-a$, erit terminus generalis $=(a'-a)x+2a-a'=a'(x-1)-a(x-2)$ unde ex cognitis terminis primo & secundo progressionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in serie secundi ordinis termini primi, ipsius seriei $=a$; differentiarum primarum $=b$; differentiarum secundarum $=c$; eritque ipsa series cum suis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a+b; a+2b+c; a+3b+3c; a+4b+6c; a+5b+10c; a+6b+15c;$ &c.

DIFFER. I.

$b; b+c; b+2c; b+3c; b+4c; b+5c;$ &c.

DIFFER. II.

$c, c, c, c, c,$ &c.

ex cuius inspectione liquet terminum, cuius index $= x$ fore $= a+(x-1)b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2.}c$; qui ergo est terminus generalis seriei propositae. Ponatur autem ipsius seriei terminus secundus $= a^{1}$, terminus tertius $= a^{11}$, cum sit $b = a^{1}-a$; & $c = a^{11}-2a^{1}+a$; uti ex natura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a+(x-1)(a^{1}-a)+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}(a^{11}-2a^{1}+a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^{11}(x-1)(x-2)}{1.\ 2}-\frac{2a^{1}(x-1)(x-3)}{1.\ 2.}+\frac{a(x-2)(x-3)}{1.\ 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^{11}}{2}(x-1)(x-2)-\frac{2a^{1}}{2}(x-1)(x-3)+\frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{11}}{x-3}-\frac{2a^{1}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right);$$

ideoque ex tribus terminis ipsius seriei definitur.

43. Sit series tertii ordinis $a, a^{1}, a^{11}, a^{111}, a^{1v}$, &c. eius differentiae primae $b, b^{1}, b^{11}, b^{111}$, &c. & differentiae

tiae secundae c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c. & tertiae d, d, d, &c. quippe quae sunt constantes.

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.		b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.
Differ. II.			c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.
Differ. III.				d,	d,	d,	&c.

Quia est $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$, $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; &c. erit terminus generalis, seu is cuius index est x,

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.}d$$

Sicque terminus generalis ex differentiis formabitur.

Cum autem porro sit

$b = a^{I} - a$; $c = a^{II} - 2a^{I} + a$; $d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^{III}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3} - 3a^{II}\frac{(x-1)(x-2(x-4)}{1.\ 2.\ 3.}$$
$$+ 3a^{I}\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3} - a\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.}$$

qui etiam hoc modo exprimetur, ut sit

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.}\left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1}\right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.		b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.
Differ. II.			c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.

Dif-

Differ. III. d, d^{I}, d^{II}, &c.

Differ. IV. e, e^{I}, &c.

Differ. V. f, &c.

ex ipsius seriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis b, c, d, e, f, &c. terminus generalis ita exprimetur ut sit:

$$a+\frac{(x-1)}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c+\frac{(x-1)(x-2)x-3)}{1.\ 2.\ 3}d+$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e+\text{&c.}$$

donec ad differentias constantes perveniatur. Ex quo patet, si nunquam prodeant differentiae constantes, terminum generalem per expressionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipsis terminis seriei formantur, si earum valores substituantur, prodibit terminus generalis in eiusmodi forma expressus, cuiusmodi pro seriebus primi, secundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro seriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\times$$
$$\left(\frac{a^{IV}}{x-5}-\frac{4a^{III}}{x-4}+\frac{6a^{II}}{x-3}-\frac{4a^{I}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right)$$

unde lex, qua sequentium ordinum termini generales componuntur, facile perspicitur. Ex his autem patet pro quovis ordine terminum generalem fore functionem ipsius x rationalem integram, in qua maxima ipsius x dimensio congruat cum ordine, ad quem series refertur. Ita serierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, secundi ordinis secundi gradus, & ita porro.

46.

46. Differentiae autem, uti supra vidimus, ex ipsis terminis seriei ita resultant, ut sit

$$\begin{aligned} b &= a^{I} - a \\ b^{I} &= a^{II} - a^{I} \\ b^{II} &= a^{III} - a^{II} \\ &\text{&c.} \\ c &= a^{II} - 2a^{I} + a \\ c^{I} &= a^{III} - 2a^{II} + a^{I} \\ c^{II} &= a^{IV} - 2a^{III} + a^{II} \\ &\text{&c.} \\ d &= a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a \\ d^{I} &= a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I} \\ d^{II} &= a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II} \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

Quare cum in seriebus primi ordinis sint omnes valores ipsius $c = 0$; erit

$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; &c.

unde patet has series simul esse recurrentes, & scalam relationis esse $2, -1$. Deinde, cum in seriebus secundi ordinis sint omnes valores ipsius $d = 0$, erit

$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$; $a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$; &c.

ideoque & hae erunt recurrentes scala relationis existente

$$3, -3, +1.$$

Simili modo apparebit omnes huius classis series, cuiuscunque sint ordinis, simul ad classem serierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, ut scala relationis constet ex coefficientibus potestatis binomii, uno gradu superioris, quam est ordo, ad quem series refertur.

47. Quia vero pro seriebus primi ordinis quoque omnes valores ipsius d & e, & sequentium differentiarum omnium sunt $= 0$, erit quoque in his

$$\begin{aligned} a^{III} &= 3a^{II} - 3a^{I} + a \\ a^{IV} &= 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I} \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

aut

aut $$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
&c.

Pertinebunt ergo & hinc ad series recurrentes idque infinitis modis, cum scalae relationis esse queant:
3, −3, +1; 4, −6, +4, −1; 5, −10, +10, −5, +1;
&c.

Similique modo intelligitur unamquamque seriem huius, quam tractamus, classis simul esse seriem recurrentem innumeris modis: scala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

dummodo n sit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec series quoque ex evolutione fractionis, cuius denominator est $(1-y)^n$, prouti in superiori libro de seriebus recurrentibus fusius est ostensum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius classis serierum, cuiuscunque sint ordinis, terminos generales esse functiones ipsius x rationales integras, ita vicissim apparebit omnes series, quarum termini generales sint huiusmodi functiones ipsius x, ad hanc classem pertinere, atque tandem ad differentias constantes perduci. Et quidem, si terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax+b$, dum series inde orta erit primi ordinis seu arithmetica, differentias primas habebit constantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio secundi gradus in hac forma $axx+bx+c$ contenta, tum series ex eo oriunda, dum loco x successive numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. substituuntur, erit ordinis secundi, atque differentias secundas habebit constantes: simili modo, terminus generalis tertii gradus ax^3+bx^2+cx+d dabit seriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non solum omnes seriei termini inveniuntur, sed etiam series differentiarum tam pri-

ma-

marum quam sequentium deduci possunt. Cum enim, si seriei terminus primus subtrahatur a secundo, prodeat seriei differentiarum terminus primus: secundus autem, si ipsius seriei terminus secundus a tertio auferatur, ita seriei differentiarum obtinebitur terminus, cuius index est x, si ipsius seriei terminus, cuius index est x, subtrahatur a sequente cuius index est $x+1$. Quare si in termino seriei generali loco x ponatur $x+1$, ab hocque valore terminus generalis subtrahatur, remanebit terminus generalis seriei differentiarum: si igitur X fuerit seriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX, (quae modo in praecedente capite ostenso invenietur, si statuatur ibi $\omega = 1$) terminus generalis seriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis seriei differentiarum secundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, sicque deinceps.

50. Quodsi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens potestatis ipsius x sit n, ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem uno gradu inferiorem, nempe gradus $n-1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n-2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n-3$, & ita porro. Quare, si X fuerit functio primi gradus, uti $ax+b$, tum eius differentia ΔX erit constans $= a$; quae cum sit terminus generalis seriei primarum differentiarum, perspicitur seriem, cuius terminus generalis X sit functio primi gradus, fore arithmeticam seu primi ordinis. Simili modo si terminus generalis X fuerit functio secundi gradus ob $\Delta\Delta X$ constantem, series inde orta differentias secundas habebit constantes, eritque propterea ordinis secundi; sicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem constituens, eiusdem ordinis erit series ex eo nata.

51. Hanc ob rem series potestatum numerorum naturalium ad differentias constantes perveniunt, uti ex sequenti schemate fit manifestum.

POTEST. I.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.
Differ. I. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

POTEST. II.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c.
Differ. I. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.
Differ. II. 2, 2, 2, 2, 2, 2, &c.

POTEST. III.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, &c.
Differ. I. 7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.
Differ. II. 12, 18, 24, 30, 36, &c.
Differ. III. 6, 6, 6, 6, &c.

POTEST. IV.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c.
Differ. I. 15, 65, 175, 369, 671, 1105, &c.
Differ. II. 50, 110, 194, 302, 434, &c.
Differ. III. 60, 84, 108, 132, &c.
Differ. IV. 24, 24, 24, &c.

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inveniendis sunt praecepta, ea hic inservient ad terminos generales differentiarum quarumvis, quae ex seriebus nascuntur, inveniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam seriei fuerit cognitus, eius ope non solum omnes eius termini in infinitum inveniri, sed etiam series retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes sint numeri negativi, exhiberi poterunt, loco x numeros negativos substituendo: sic, si terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$ ponendo loco x tam negativos quam affirmativos indices, series utrinque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

SERIES.

&c. +5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, &c.

Differ. I. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Differ. II. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque series ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, ut, si differentiae tandem fiant constantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expressionem infinitam assignari queant: Quin etiam ex termino generali, ii termini, quorum indices sunt fracti, definientur, in quo serierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino serierum generali monitis, progrediamur ad summam, seu terminum summatorium serierum cuiusque ordinis investigandum. Proposita autem quacumque serie, TERMINUS *summatorius* est functio ipsius x, quae aequalis est summae tot terminorum seriei, quot unitates continet numerus x. Ita ergo terminus summatorius erit comparatus, ut si ponatur $x = 1$, prodeat terminus primus seriei; sin autem ponatur $x = 2$, ut prodeat summa primi & secundi, facto autem $x = 3$, summa primi, secundi ac tertii; sicque deinceps. Hinc, si ex serie proposita nova series formetur, cuius primus terminus aequalis sit primo illius, secundus aequalis summae duorum, tertius aequalis summae trium, atque ita porro, haec nova series vocatur illius *summatrix*, huiusque seriei summatricis terminus generalis erit terminus summatorius seriei propositae: ex quo inventio termini summatorii ad inventionem termini generalis revocatur.

54. Sit ergo series proposita haec

$$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, \text{ &c.}$$

huiusque seriei summatrix sit

$$A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, \text{ &c.}$$

erit ex eius natura modo expositа:

$$A = a$$
$$A^{I} = a + a^{I}$$
$$A^{II} = a + a^{I} + a^{II}$$
$$A^{III} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III}$$
$$A^{IV} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$
$$\text{&c.}$$

Hinc seriei summatricis differentiae erunt:

$A^{I} - A = a^{I}$; $A^{II} - A^{I} = a^{II}$; $A^{III} - A^{II} = a^{III}$; &c.

unde series proposita termino primo minuta erit series differentiarum primarum seriei summatricis. Quod si igitur seriei summatrici praefigatur terminus $= 0$, ut habeatur:

$$0, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, \text{ &c.}$$

huius series primarum differentiarum erit ipsa series proposita:

$$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, \text{ &c.}$$

55. Hanc ob rem seriei propositae differentiae primae, erunt differentiae secundae summatricis, atque differentiae secundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, si series proposita tandem habeat differentias constantes, tunc etiam eius summatrix ad differentias constantes deducetur, eritque igitur series eiusdem naturae, at uno ordine superior. Huiusmodi ergo serierum perpetuo terminus summatorius exhiberi poterit per expressionem finitam. Namque terminus generalis seriei:

$$0, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, \text{ &c.}$$

seu is, qui indici x convenit exhibebit summam $x - 1$ terminorum seriei huius $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, &c. atque si tum loco x scribatur $x + 1$, orietur summa x terminorum, ipseque terminus summatorius.

56. Sit igitur seriei propositae

a,

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, &c.

Series differentiarum primarum

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}, &c.

Series differentiarum secundarum

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}, &c.

Series differentiarum tertiarum

d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}, &c.

ſicque porro donec ad differentias conſtantes perveniatur. Deinde formetur ſeries ſummatrix, quae cum praefixa o in locum termini primi, cum ſuis differentiis continuis ſe habebit ſequenti modo:

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

SUMMATRIX.

o, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, &c.

SERIES PROPOSITA.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, &c.

Differ. I. b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}, &c.

Differ. II. c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}, &c.

Differ. III. d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}, &c.

erit ſeriei ſummatricis terminus generalis, ſeu qui indici x reſpondet

$$o+(x-1)a+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}b+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}c+\text{&c.}$$

qui ſimul exhibet ſummam $x-1$ terminorum ſeriei propoſitae, a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c.

57. Quod ſi ergo in hac ſumma loco $x-1$ ſcribatur x, prodibit ſeriei propoſitae terminus ſummatorius ſummam x terminorum complectens

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1.2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}d + \&c.$$

Hinc, si litterae b, c, d, e, valores ipsis assignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4}e + \&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}d + \&c.$$

Invento ergo seriei cuiusvis ordinis hoc, quem ostendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus summatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic modus terminum summatorium per differentias seriei inveniendi imprimis ad eiusmodi series, quae tandem ad differentias constantes deducunt, est accomodatus; in aliis enim casibus expressio finita non reperitur. Quodsi autem ea, quae ante de indole termini summatorii sunt exposita, attentius perpendamus, alius modus se offert terminum summatorium immediate ex termino generali inveniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis casibus ad expressiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim proposita series quaecunque.

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ \&c.$$

cuius terminus generalis, seu indici x respondens sit $= X$; terminus autem summatorius sit $= S$, qui cum summam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet unitates, erit summa $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo

adeo X differentia expressionis S — X, cum relinquatur, si haec a sequente S subtrahatur.

59. Cum igitur sit $X = \Delta(S - X)$ differentia eo modo sumta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum discrimine, ut quantitas illa constans ω hic nobis sit $= 1$. Quare, si ad summas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus summatorius quaesitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet summa functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipse terminus generalis X, eritque aggregatum terminus summatorius. Quoniam autem in summis sumendis involvitur quantitas constans, sive addenda sive subtrahenda; ea ad praesentem casum accomodari debebit. Manifestum autem est, si ponatur $x = 0$, quo casu numerus terminorum summandorum est nullus, summam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa constans C ita determinari debebit, ut posito $x = 0$, fiat quoque $S = 0$. Positis ergo in illa aequatione $S = \Sigma X + X + C$ tam $S = 0$, quam $x = 0$, valor ipsius C invenietur.

60. Quoniam ergo hic totum negotium ad summationem functionum supra monstratam reducitur, ponendo $\omega = 1$, exinde depromamus summationes traditas; ac primo quidem pro potestatibus ipsius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$
$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$
$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$
$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$

quibus accenseatur summatio generalis potestatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi ubique loco ω unitas scribatur. Harum ergo formularum ope omnium serierum, quarum termi-

ni generales sunt functiones rationales integrae ipsius x, termini summatorii expedite inveniri poterunt.

61. Denotet S.X terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, ut vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, ut terminus summatorius S.X evanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

erit

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{12}\cdot\frac{n}{2.3}x^{n-1} - \frac{1}{720}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4.5}x^{n-3}$$
$$+ \frac{1}{1440}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6.7}x^{n-5} - \frac{3}{3650}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{2.3\ldots8.9}x^{n-7}$$
$$+ \frac{5}{6048}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{2.3.4\ldots10.11}x^{n-9} - \frac{691}{420}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{2.3\ldots12.13}x^{n-11}$$
$$+ \frac{35}{288}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{2.3\ldots14.15}x^{n-13} - \frac{3617}{240}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2.3\ldots16.17}x^{n-15}$$
$$+ \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-16)}{2.3\ldots18.19}x^{n-17}$$
$$- \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-18)}{2.3\ldots20.21}x^{n-19}$$
$$+ \frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-20)}{2.3\ldots22.23}x^{n-21}$$
$$- \frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)}{2.3\ldots24.25}x^{n-23}$$
$$+ \frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-24)}{2.3\ldots26.27}x^{n-25}$$

&c. 62.

62. Hinc ergo summae pro variis ipsius n valoribus ita se habebunt.

$S.n^0 = n$

$S.n^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

$S.n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$

$S.n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

$S.n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

$S.n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$

$S.n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$

$S.n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$

$S.n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$

$S.n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{20}n^2$

$S.n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{1}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{66}n$

$S.n^{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{24}n^{10} - \frac{11}{9}n^8 + \frac{11}{8}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{1}{12}n^2$

$S.n^{12} = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{33}{4}n^9 + \frac{33}{7}n^7 - \frac{11}{10}n^5 + \frac{3}{4}n^3 - \frac{691}{2730}n$

$S.n^{13} = \frac{1}{14}n^{14} + \frac{1}{2}n^{13} + \frac{11}{12}n^{12} - \frac{143}{60}n^{10} + \frac{143}{14}n^8 - \frac{143}{24}n^6 + \frac{65}{12}n^4 - \frac{691}{210}n^2$

$S.n^{14} = \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{10}n^{11} + \frac{143}{6}n^9 - \frac{143}{6}n^7 + \frac{91}{6}n^5 - \frac{691}{30}n^3 + \frac{7}{6}n$

$S.n^{15} = \frac{1}{16}n^{16} + \frac{1}{2}n^{15} + \frac{5}{4}n^{14} - \frac{91}{24}n^{12} + \frac{143}{16}n^{10} - \frac{429}{16}n^8 + \frac{143}{12}n^6 - \frac{691}{24}n^4 + \frac{35}{8}n^2$

$S.n^{16} = \frac{1}{17}n^{17} + \frac{1}{2}n^{16} + \frac{8}{3}n^{15} - \frac{35}{2}n^{13} + \frac{52}{3}n^{11} - \frac{143}{3}n^9 + \frac{286}{3}n^7 - \frac{1001}{15}n^5 + \frac{140}{3}n^3 - \frac{1667}{510}n$

&c.

quae summae ex forma generali usque ad potestatem vigesi-

mam nonam continuari possunt. Atque adhuc ulterius progredi liceret, si coefficientes illi numerici ulterius essent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam observatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inveniri potest, excepto tantum termino ultimo, si in eo potestas ipsius x prima contineatur: tum enim in summa sequente unus terminus insuper accedit. Hoc autem omisso, si fuerit

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \text{&c.}$$

erit sequens summa:

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-1} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-3} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-5} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-7} - \text{&c.}$$

unde si n fuerit numerus par, sequens summa vera prodit: at si n fuerit numerus impar, tum in sequente summa praeterea desiderabitur terminus ultimus, cuius forma erit $\pm \varphi x$. Interim tamen hic sine aliis subsidiis ita inveniri poterit. Cum enim si ponatur $x = 1$, summa unici tantum termini, (hoc est terminus primus, qui erit $= 1$) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inventis $x = 1$, ipsaque summa statuatur $= 1$, quo facto valor ipsius φ elicietur, eoque invento ulterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes istae summae inveniri potuissent. Sic, cum sit

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

erit $S.x^6 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3 + \varphi x$

seu $S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \varphi x.$

Ponatur nunc $x = 1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi$ ideoque $\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, uti ex forma generali invenimus.

64. Ope harum formularum summatoriarum nunc facile omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones ipsius x rationales integrae, termini summatorii inveniri po-

poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium huius seriei

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, &c.

cuius terminus generalis est $\frac{3xx+x}{2}$.

Cum terminus generalis constet duobus membris, quaeratur pro utroque terminus summatorius ex formulis superioribus

$$\text{S.}\tfrac{1}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

$$\&\quad \text{S.}\tfrac{1}{2}x = \ldots \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

eritque $\text{S.}\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{4}x^3 + xx + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x(x+1)^2$

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{1}{4}.6^2 = 90$, summa quinque terminorum

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

EXEMPLUM II.

Invenire terminum summatorium seriei

1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c.

quae continet cubos numerorum imparium.

Terminus generalis huius seriei est

$$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

unde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+ 8.\ \text{S.}\,x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

$$\&\quad - 12.\ \text{S.}\,x^2 = . - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$\text{atque}\quad + 6.\ \text{S.}\,x = \ldots + 3x^2 + 3x$$

$$\text{denique}\quad - 1.\ \text{S.}\,x^0 = \ldots\ldots - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$.
Uti, si ponatur $x = 6$ erit $36.71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex

factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, sit

$$\Sigma (x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$
$$\& \quad \Sigma (x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$
$$\& \quad \Sigma (x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$
&c.

si ad has summas ipsos terminos generales addamus, simulque constantem adiiciamus, quae posito $x = 0$, reddat terminum summatorium evanescentem, sequentes obtinebimus terminos summatorios

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$\& \quad S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$\& \quad S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

sicque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas constans in his summis evanescit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis est $= x$, terminus summatorius erit $= \frac{1}{2}x(x+1)$ serieisque summatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$, & series summatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum summatorium habebit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, qui erit terminus generalis seriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

Hae autem series prae reliquis probe sunt notandae, quoniam earum ubique amplissimus est usus. Ex his enim desumuntur coefficientes binomii ad dignitates elevati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum versato abunde constat.

67. Ex his etiam illi termini summatorii, quos ante ex differentiis elicuimus, facile inveniuntur. Cum enim ibi terminum generalem sequenti forma invenerimus expressum

$$a+\frac{(x-1)}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2.}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d+\text{ &c.}$$

si cuiusque membri terminum summatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum summatorium huic termino generali convenientem. Sic cum sit

$$\text{S } 1 = x$$
$$\text{\& S } (x-1) = \tfrac{1}{2}x(x-1)$$
$$\text{atque S } (x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$
$$\text{\& S } (x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$\text{\&c.}$$

erit terminus summatorius quaesitus:

$$xa+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d+\text{\&c}$$

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inventio ad fractiones accomodari potest: quia enim supra §. 34. invenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1.\frac{1}{x+n}$$

erit $$\text{S.}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1.\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inventas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$\text{S.}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}$$
$$+\frac{1}{2}.\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

& $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

quae formae facile pro lubitu ulterius continuantur.

69. Quia erit $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$

erit quoque $S.\frac{1}{x+n} - S.\frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$.

etsi ergo neuter horum duorum terminorum summatoriorum seorsim exhiberi potest, tamen eorum differentia cognoscitur; hincque in pluribus casibus summae serierum satis expedite assignantur: id quod usu venit, si terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores simplices resolvi potest. Tum enim tota fractio in fractiones partiales resolvatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, utrum terminus summatorius exhiberi queat nec ne.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium seriei huius:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} +$ &c.

cuius terminus generalis est $= \frac{2}{xx+x}$.

Terminus iste generalis per resolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Hinc terminus summatorius erit $= 2S.\frac{1}{x} - 2S.\frac{1}{x+1}$, qui ergo per praecedens lemma erit $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$. Sic, si sit $x = 4$, erit $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius seriei huius: $\frac{1}{3}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$, &c.

cuius terminus generalis est $= \frac{1}{4xx+4x-3}$.

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resolvetur in has partes:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

At est $S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

& $S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

ergo $S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

cuius pars octava dabit terminum summatorium quaesitum nempe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates evecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas serierum exhibeamus, quarum numeratores sint $=1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

Terminus generalis est	Terminus summatorius erit
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{1}{1}-\frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{1}{2}-\frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.2.3.4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{1}{3}-\frac{1.2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.2.3.4.5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{1}{4}-\frac{1.2.3.5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

un-

unde lex, qua istae expressiones progrediuntur, sponte appareret. Neque vero hinc terminus summatorius, qui conveniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi potest, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus summatorius praebet summam tot terminorum, quot unitates continentur in indice x; manifestum est harum serierum in infinitum continuatarum summas obtineri, si ponatur index x infinitus: quo casu expressionum modo inventarum termini posteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, evanescent.
Hinc istae series infinitae finitas habebunt summas, quae erunt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \text{&c.} = \frac{2}{1}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \text{&c.} = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \text{&c.} = \frac{4}{3}$$
$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \text{&c.} = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \text{&c.} = \frac{6}{5}$$
$$\text{&c.}$$

Omnium ergo serierum, quarum termini summatorii habentur, in infinitum continuatarum summae exhiberi poterunt posito $x = \infty$, dummodo hoc casu summae fiant finitae: quod quidem evenit, si in termino summatorio x tot habeat dimensiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CA-

CAPUT III.

DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARVIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumvis sit magna, ulterius augeri possit, neque quicquam obstet, quominus ad datam quantitatem quamcumque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas sine fine augeri poterit: neque enim unquam tam magna fiet, ut ipsi nihil amplius adiici possit. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit positum, *omnem quantitatem in infinitum augeri posse*. Qui enim hoc negaverit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, superare nequeat, atque ideo statuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiici possit; quod cum sit absurdum atque quantitatis notioni adversetur, necessario concedendum est, omnem quantitatem sine fine continuo magis, hoc est, in infinitum augeri posse.

73. In singulis quantitatum speciebus hoc etiam clarius perspicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui statuerit seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita usquam esse determinatam, ut ulterius continuari non possit. Nullus enim datur numerus, ad quem non insuper unitas addi, sicque numerus sequens maior exhiberi queat; hinc series numerorum naturalium sine fine progreditur, neque unquam pervenitur ad numerum maximum, quo maior prorsus non detur. Simili modo linea recta nunquam eousque produci potest, ut insuper ulterius prolongari non possit. Quibus evincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci posse. Quae cum sint species quantitatum,

simul intelligitur, omni quantitate, quantumvis sit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, sicque augendo continuo ulterius sine fine, hoc est in infinitum, procedi posse.

74. Quanquam autem haec sunt adeo perspicua, ut qui ea negare vellet, sibi ipse contradicere deberet; tamen ista infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare sunt conati, tantopere est offuscata, tantisque difficultatibus atque etiam contradictionibus obvoluta, ut, qua se extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri possit, quidam concluserunt, dari revera quantitatem infinitam, eamque ita descripserunt, ut nullum amplius augmentum suscipere possit. Hoc autem ipso ideam quantitatis evertunt, dum eiusmodi quantitatem statuunt, quae ulterius augeri nequeat. Praeterea vero secum ipsi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas sit capax, finem faciunt, simul negant quantitatem sine fine augeri posse, negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri posse, quoniam utraque locutio congruit: sicque, dum quantitatem infinitam statuunt, eam simul tollunt. Si enim quantitas sine fine, hoc est in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita existere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipso, quod omnis quantitas in infinitum augeri possit, sequi videtur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non evadet, nisi iam sine fine increverit: quod autem sine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi potest. Interim tamen non solum huiusmodi quantitatem, ad quam incrementis sine fine congestis pervenitur, certo charactere indicare, sicque debito modo in calculum inducere licet, uti mox fusius ostendemus; sed etiam in mundo eiusmodi casus existere, vel saltem concipi possunt, quibus numerus infinitus actu existere videatur. Sic si materia in infinitum sit divisibilis, uti plures Philosophi statuerunt, numerus par-

partium, quibus datum quodque materiae fruſtum conſtat, revera erit infinitus; ſi enim ſtatueretur finitus, materia certe non in infinitum foret diviſibilis. Simili modo ſi univerſus mundus eſſet infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe eſſe non poſſet, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamſi inter ſe pugnare videantur, tamen ſi attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim ſtatuit materiam in infinitum eſſe diviſibilem, is negat in diviſione materiae continua unquam ad partes tam parvas perveniri, quae ulterius dividi nequeant: nullas ergo materia habebit partes, ulterius individuas; cum ſingulae particulae, ad quas per continuam diviſionem iam ſit perventum, ulterius ſe ſubdividi patiantur. Qui igitur dicit hoc caſu numerum partium fore infinitum, is partes ultimas, quae ulterius ſint individuae, intelligit; ad quas cum nunquam perveniatur, & quae propterea nullae ſunt, is has ipſas partes, quae nullae ſunt, numerare conatur. Si enim materia ſine fine continuo ulterius ſubdividi poteſt, partibus individuis ſeu ſimplicibus prorſus caret: neque adeo quicquam ſupereſt, quod numerari queat. Hanc ob rem qui materiam in infinitum diviſibilem ſtatuit, is ſimul negat, materiam ex partibus ſimplicibus eſſe compoſitam.

77. Quod ſi autem, dum de partibus alicuius corporis ſeu materiae loquimur, non ultimas ſeu ſimplices, quippe quae nullae ſunt, intelligamus, ſed eas, quas diviſio revera produxit; tum admiſſa hac hypotheſi de diviſibilitate materiae in infinitum, unumquodque vel minimum materiae fruſtum non ſolum in plurimas partes diſſecari, ſed etiam nullus numerus tam magnus aſſignari poterit, quo non maior partium ex illo fruſto ſectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem ultimarum, ſed quae ipſae adhuc ſint ulterius diviſibiles, quae unumquodque corpus componunt, omni numero aſſignabili erit maior. Simili mo-

do, si universus mundus sit infinitus, numerus corporum mundum constituentium pariter omni assignabili erit maior; qui cum finitus esse nequeat, sequitur numerum infinitum & numerum omni assignabili maiorem esse nomina synonyma.

78. Qui ergo hoc modo divisibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, se implicat, nihilque affirmare cogitur, quod sanae rationi adversetur. Qui autem contra materiam in infinitum divisibilem esse negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus se nullo prorsus modo extrahere possunt. Statuere enim coguntur unumquodque corpus nonnisi in certum partium numerum dissecari posse, ad quas si fuerit perventum, nulla divisio ulterior locum inveniat; quas ultimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia simplicia* vocant. Cur autem istae ultimae particulae nullam amplius divisionem admittant, duplex esse potest causa: altera, quod omni extensione careant; altera quod quidem sint extensae, sed tamen tam durae atque ita comparatae, ut nulla vis ad eas dissecandas sufficiat. Utrumvis patroni huius opinionis dicant, sese aeque difficultatibus implicant.

79. Sint enim ultimae particulae omnis extensionis expertes, ita ut partibus prorsus careant; qua explicatione quidem ideam entium simplicium optime tuentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero constare queat, concipi nullo modo potest. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus simplicibus esse compositum, huncque actu in mille partes secari; quae si sint aequales, erunt digiti cubici: sin autem sint inaequales, aliae erunt maiores aliae minores. Unus igitur digitus cubicus foret ens simplex, sicque maxima resultaret contradictio; nisi forte in digito cubico inesse tantum unum ens simplex, reliquumque spatium vacuum esse dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod isti Philosophi vacuum plane ex mundo profligant.

Quodsi

Quodsi obiiciant numerum entium simplicium, quae pedem cubicum materiae constituunt, millenario longe esse maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario sequitur, ex quovis alio numero quantumvis magno aeque manat. Hanc difficultatem Acutissimus LEIBNIZIUS, primus monadum inventor, probe perspexit, dum materiam absolute in infinitum divisibilem esse statuit. Neque ergo ante ad monades pervenire licet, quam corpus actu in infinitum sit divisum. Hoc ipso autem existentiam entium simplicium, ex quibus corpora constent, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus simplicibus esse composita, & ille qui statuit corpora in infinitum esse divisibilia, in eadem prorsus sunt sententia.

80. Neque magis autem sibi constant, si dicunt ultimas corporum particulas extensas quidem esse, sed ob summam duritiem in partes divelli non posse. Cum primum enim in ultimis particulis extensionem admittunt, eas ex partibus compositas esse statuunt, quae, utrum revera a se invicem separari queant nec ne, parum refert; etiamsi nullam causam assignare possint, unde tanta durities sit orta. Nunc autem plerique, qui divisibilitatem materiae in infinitum negant; hoc posterius incommodum satis sensisse videntur, quia priori ideae partium ultimarum potissimum inhaerent; hasque difficultates aliter diluere non possunt, nisi aliquot leviusculis metaphysicis distinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, ut ne consequentiis, quae secundum mathematica principia formantur, fidamus; neque dimensiones in partibus simplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonstrare debuissent, istas suas partes ultimas, quarum determinatus numerus corpus constituat, extensas prorsus non esse.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum invenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad distinctiones confugiunt, respondentes has obiectiones a sen-

sensibus atque imaginatione suppeditari, in hoc autem negotio solum intellectum purum adhiberi oportere; sensus autem ac ratiocinia inde pendentia saepissime fallere. Intellectus scilicet purus agnoscet fieri posse, ut pars millesima pedis cubici materiae omni extensione careat, quod imaginationi absurdum videtur. Tum vero, quod sensus saepenumero fallant, res vera quidem est, at nemini minus quam mathematicis opponi potest. Mathesis enim nos imprimis a fallacia sensuum defendit, atque docet obiecta, quae sensibus percipiuntur, aliter revera esse comparata, aliter vero apparere: haecque scientia tutissima tradit praecepta, quae qui sequuntur, ab illusione sensuum immunes sunt. Huiusmodi ergo responsionibus, tantum abest, ut Metaphysici suam doctrinam tueantur, ut eam potius magis suspectam efficiant.

82. Verum ut ad propositum revertamur, etiamsi quis neget in mundo numerum infinitum revera existere; tamen in speculationibus mathematicis saepissime occurrunt quaestiones, ad quas, nisi numerus infinitus admittatur, responderi non posset. Sic, si quaeratur summa omnium numerorum, qui hanc seriem $1+2+3+4+5+$ &c. constituunt; quia isti numeri sine fine progrediuntur, atque crescunt, eorum omnium summa certe finita esse non poterit: quo ipso efficitur, eam esse infinitam. Hinc, quae quantitas tanta est, ut omni quantitate finita sit maior, ea non infinita esse nequit. Ad huiusmodi quantitatem designandam Mathematici utuntur hoc signo ∞, quo denotatur quantitas omni quantitate finita, seu assignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, ut dicatur esse Ellipsis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae esse Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem infiniti doctrina magis illustrabitur, si quid sit infinite parvum Mathematicorum exposuerimus. Nullum autem est dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus evanescat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas eva-

evanescent, ideoque revera erit $=0$. Consentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora: si enim quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset $=0$, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in Mathesi, respondemus eam esse revera $=0$: neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, ubi hunc calculum sumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur ostenderimus, quantitatem infinite parvam revera esse cyphram, primum occurrendum est obiectioni, cur quantitates infinite parvas non perpetuo eodem charactere 0 designemus, sed peculiares notas ad eas designandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila sunt inter se aequalia, superfluum videtur variis signis ea denotare. Verum quamquam duae quaevis cyphrae ita inter se sunt aequales, ut earum differentia sit nihil: tamen, cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perspicietur ex hac proportione geometrica $2:1=0:0$, in qua terminus quartus est $=0$, uti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior quam secundus, necesse est, ut & tertius duplo maior sit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica sunt planissima: cuilibet enim notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, esseque $n.0=0$, sicque fore $n:1=0:0$. Unde patet fieri posse, ut duae cyphrae quamcumque inter se rationem geometricam teneant, etiamsi,

etiamsi, rem arithmetice spectando, earum ratio semper sit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecumque intercedere possit, ad hanc diversitatem indicandam consulto varii characteres usurpantur; praesertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter se tenent, est investiganda. In calculo autem infinite parvorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter varia infinite parva indagetur, quod negotium propterea, nisi diversis signis ad ea indicanda uteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque ullo modo expediri posset.

86. Si ergo, prouti in Analysi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite parvam, erit utique tam $dx = 0$, quam $a\,dx = 0$, denotante a quantitatem quamcumque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $a\,dx : dx$ finita, nempe ut $a : 1$; & hanc ob rem haec duo infinite parva dx & $a\,dx$, etiamsi utrumque sit $= 0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio investigetur. Simili modo, si diversa occurrunt infinite parva dx & dy, etiamsi utrumque sit $= 0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in investigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parva omnis vis calculi differentialis versatur. Usus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum igitur infinite parvum sit revera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, si ad eam infinite parvum vel addamus vel ab ea subtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parva, erit tam $a + dx$, quam $a - dx$, & generaliter $a \pm n\,dx = a$. Sive enim relationem inter $a \pm n\,dx$ & a arithmetice intueamur sive geometrice, utroque casu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifesta est; cum enim sit $n\,dx = 0$, erit $a \pm n\,dx - a = 0$: geometrica ve-

vero ratio aequalitatis inde patet, quod sit $\frac{a \pm n\,dx}{a} = 1$.

Hinc sequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parva prae finitis evanescant, atque adeo horum respectu reiici queant*. Quare illa obiectio, qua Analysis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, sponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, nisi quod revera sit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac sublimiori scientia rigorem geometricum summum, qui in Veterum libris deprehenditur, aeque diligenter observari.

88. Quoniam quantitas infinite parva dx revera est $= 0$, eius quoque quadratum dx^2, cubus dx^3, & quaevis alia potestas affirmativum habens exponentem erit $= 0$, ideoque aeque prae quantitatibus finitis evanescent. At vero etiam quantitas infinite parva dx^2 prae ipsa dx evanescit; erit enim $dx \pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, sive comparatio arithmetice sive geometrice instituatur. De priori quidem dubium est nullum, at geometrice comparando erit

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Pari modo erit $dx \pm dx^2 = dx$, & generaliter $dx \pm dx^{n+1} = dx$, dummodo sit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur uti in potestatibus fit, vocetur dx infinite parvum primi ordinis, dx^2 secundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifestum est prae infinite parvis primi ordinis, evanescere infinite parva altiorum ordinum.

89. Simili modo ostendetur infinite parva tertii ac superiorum ordinum evanescere prae infinite parvis ordinis secundi; atque in genere infinite parva cuiusque ordinis superioris evanescere prae infinite parvis ordinis inferioris. Ita si m fuerit numerus minor quam n, erit $a\,dx^m + b\,dx^n = a\,dx^m$,

quia dx^n evanescit prae dx^m, uti ostendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx evanescet prae $\sqrt{dx}$ seu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx} + b\,dx = a\sqrt{dx}$. Quodsi autem exponens ipsius dx sit $=0$, erit $dx^0 = 1$, quamvis sit $dx = 0$; hinc potestas dx^n, cum fiat $= 1$, si sit $n = 0$, ex finita statim fit quantitas infinite parva, atque exponens n nihilo fit maior. Hinc ergo infiniti ordines infinite parvorum existunt, quae etsi omnia sint $= 0$, tamen inter se probe distingui debent, si ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

90. Stabilita notione infinite parvorum facilius indolem infinitorum seu infinite magnorum exponere poterimus. Notum est valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem evadere, quo magis diminuatur denominator z; quare si z fiat quantitas omni assignabili quantitate minor, seu infinite parva, necesse est ut valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni assignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem si unitas seu quaevis alia quantitas finita dividatur per infinite parvum seu 0, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc signum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, ista habebitur aequatio $\frac{a}{dx} = \infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod sit invertendo $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. Namque quo maior statuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z, eo minor fit fractionis valor, atque si z fiat quantitas infinite magna seu $z = \infty$, necesse est, ut fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite parvus

91. Qui utrumvis horum ratiociniorum negaverit eum

in

in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta evertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum uti b, utrinque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0.b$, atque ideo quantitas finita b per nihil o multiplicata praeberet quantitatem finitam a, quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $= 0$: nam o per o multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty} = 0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty} =$ quantitati finitae b: quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty} = b$ legitime sequatur haec $\infty = \frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite parvus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analysi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex divisione quantitatis finitae per infinite parvam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parva quotus, qui oritur ex divisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, ut sit quantitas infinite parva ad finitam, ita finita ad infinite magnam; uti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities

maior erit quam infinite parva. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non sunt improbandae, cum certissimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ sequitur fieri posse, ut nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri posset, nisi planissime per legitimam consequentiam esset deductum.

93. Quoniam inter infinite parva, si secundum rationem geometricam inter se comparantur, maximum deprehenditur discrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non solum geometrice sed etiam arithmetice comparatae discrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex divisione quantitatis finitae a per infinitae parvam dx oritur, $= A$, ita ut sit $\frac{a}{dx} = A$: erit utique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA sit quantitas infinita, sequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere posse. Hincque, si quantitas infinita per numerum finitum sive multiplicetur, sive dividatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitatibus infinitis negari potest, eas ulterius augeri posse. Facile autem perspicitur, si ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter se tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmeticam aequalitatis esse posse, cum potius earum differentia semper sit infinite magna.

94. Quantumvis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi utimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos trivialibus carere possumus. In Arithmetica enim, ubi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negativus & infinite magnus

gnus ſtatuitur, neque quiſquam eſt tam mente captus, ut hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim unquam negabit tangentem ſecantemve anguli recti non eſſe infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem ſit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti ſit $=0$; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito eſſe poſſe finitum.

95. Cum ſit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: eſt enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc eſt ut numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiuſmodi relationes, ut aliae aliis infinities maiores eſſe queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; poſito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quiſque infinities maior eſt quam praecedentes: atque adeo ſi numerus m vel tantillum maior ſit quam n erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96. Quemadmodum in quantitatibus infinite parvis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes sint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae sint quantumvis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx}+b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum divisione ortus $=1+\frac{bdx}{a}=1$ ob $dx=0$: interim tamen, si arithmetice comparentur, ob differentiam $=b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis est $=1+dx=1$; verum tamen differentia est $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc si ad rationem geometricam spectemus, infinite magna inferiorum graduum prae infinite magnis superiorum graduum evanescunt.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri posse, ut productum ex quantitate infinite magna in infinite parvam non solum quantitatem finitam producat, quod supra eveniſſe vidimus; sed etiam huiusmodi productum esse poterit sive infinite magnum sive infinite parvum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, si per infinite parvam dx multiplicetur, dat productum finitum $=a$; sin autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite parvum dx^2, vel dx^3, vel aliud superioris ordinis, productum erit vel adx, vel adx^2, vel adx^3 &c. ideoque infinite parvum. Eodem modo intelligetur, si quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite par-

vam dx, productum fore infinite magnum : atque generatim si $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m, productum $abdx^{m-n}$ erit infinite parvum si m superat n ; finitum si m aequat n; & infinite magnum si m superatur ab n.

98. Quantitates tam infinite parvae, quam infinite magnae in seriebus numerorum saepissime occurrunt, in quibus cum sint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum secundum leges continuitatis a quantitatibus finitis ad infinite magnas atque infinite parvas transitio fiat. Consideremus primum seriem numerorum naturalium, quae simul retro continuata erit

&c. $-4-3-2-1+0+1+2+3+4+$ &c.

Numeri ergo continuo decrescendo praebent tandem o seu infinite parvum, unde ulterius continuati negativi evadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmativis decrescentibus transiri per o ad negativos crescentes. Sin autem eorum numerorum quadrata spectentur, quia omnia sunt affirmativa

&c. $+16+9+4+1+0+1+4+9+16+$ &c.

erit o quoque transitus numerorum affirmativorum decrescentium ad affirmativos crescentes; atque si signa mutentur, erit quoque o transitus numerorum negativorum decrescentium ad negativos crescentes.

99. Si series consideretur, cuius terminus generalis est $\sqrt{x}$, quae etiam retro continuata erit huiusmodi

&c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+$ &c.

ex qua patet o, quoque tanquam limitem considerari posse, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria transeatur. Si isti termini tanquam applicatae curvarum considerentur, perspicitur, si eae fuerint affirmativae atque eousque decreverint ut tandem evanescant, tum eas ulterius continuatas vel fieri negativas, vel iterum affirmativas vel adeo imaginarias.

Idem

Idem eveniet, si applicatae primum fuerint negativae; tum enim aeque post quam evanuerint, si ulterius continuentur, vel affirmativae fient, vel negativae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curvis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in seriebus occurrunt saepe termini infiniti: sic in serie harmonica, cuius terminus generalis est $\frac{1}{x}$, indici $x=0$ respondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque series ita se habebit:

$$\&c. -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad sinistram progrediendo termini crescunt, ita ut $\frac{1}{0}$ iam sit infinite magnus, quem cum transierint, fient negativi decrescentes. Hinc quantitas infinite magna spectari potest tanquam limes, per quem numeri affirmativi progressi fiunt negativi, & vicissim: unde pluribus visum est, numeros negativos considerari posse, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac serie termini continuo crescentes, postquam infinitum attigerint, abeant in negativos. At vero si ad seriem, cuius terminus generalis est $\frac{1}{xx}$, attendamus, post transitum per infinitum rursus prodeunt termini affirmativi.

$$\&c. \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \&c.$$

quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in seriebus terminus infinitus constituit limitem, terminos reales ab imaginariis segregantem, uti fit in serie hac, cuius terminus generalis est $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\&c. + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \&c.$$

ne-

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

&c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+$ &c.

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit 0 neque ∞, uti fit si terminus generalis fuerit $1+\sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores fiunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmativi, abeunt in negativos, transitus semper fit per limitem vel infinite parvum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curvis deprehendimus, clarius elucent.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inserviunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, ut

$$1+1+1+1+1+1+\text{ &c.}$$

eaque sine fine, hoc est in infinitum continuetur, nullum certe est dubium, quin omnium horum terminorum summa maior sit omni numero assignabili; eaque propterea infinita fit necesse est. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\text{ &c.}$$

ponendo $x=1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+\text{ &c.}$$

ideoque summa $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamvis autem hic nullum dubium nasci queat, cum idem numerus finitus infinities sumtus in infinitum abire debeat; tamen ipsa origo ex serie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{&c.}$$

gravissima incommoda afferre videtur: si enim pro x successive ponantur numeri 1, 2, 3, &c. sequentes series cum suis summis prodibunt.

A . . . $1+1+1+1+1+$ &c. $= \frac{1}{1-1} =$ infinito

B . . . $1+2+4+8+16+$ &c. $= \frac{1}{1-2} = -1$

C . . . $1+3+9+27+81+$ &c. $= \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D . . . $1+4+16+64+256+$ &c. $= \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

&c.

Cum igitur series B singulos terminos praeter primum habeat maiores, quam series A, summa seriei B necessario multo maior esse deberet, quam summa seriei A: interim tamen iste calculus ostendit seriei A summam infinitam, seriei B vero summam negativam, hoc est nihilo minorem, quod concipi non potest. Multo minus cum solitis ideis conciliari potest, quemadmodum huius & sequentium serierum C, D, &c. summae fiant negativae, cum tamen omnes termini sint affirmativi.

104. Ob hanc rationem opinio supra allata multis probabilis videri solet, quantitates scilicet negativas quandoque considerari posse tanquam infinito maiores seu plus quam infinitas; & cum etiam numeros ultra nihil diminuendo perveniatur ad negativos, discrimen statuunt inter numeros negativos huiusmodi -1, -2, -3, &c. & huiusmodi

+

$\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}$, &c. illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam suggerit haec series

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

unde oriuntur sequentes series:

$$A \ldots 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{infinito}$$

$$B \ldots 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

ubi cum singuli termini seriei B sint maiores, quam singuli termini seriei A, primis solis exceptis, quemadmodum summa seriei A sit infinita, seriei B vero summa aequalis 1, hoc est soli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem si vellemus negare esse $-1 = \frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmissima Analyseos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorsus admitti non-potest. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales suppeditaverant, summas esse veras. Cum enim hae series ex continua divisione oriantur, dum residuum continuo ulterius dividitur: residuum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime residuum ultimum, hoc est quod in divisione infinitesima remanet, omitti potest, quippe quod fit infinite magnum. Quia autem hoc in superioribus seriebus non observatur, dum nullius residui ratio habetur, mirum non est, eas summationes ad absurdum deducere. Haecque responsio, uti est ex ipsa serierum genesi petita, ita quoque est verissima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur evolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, uti in terminis primum finitis tantum absolvitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius seriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ summam esse $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$: & qui summam huius seriei

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{1000}$

statuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error si x sit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perspicuum est eum, qui eiusdem seriei in infinitum continuatae seu huius:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^{\infty}$$

summam statuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate esse aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty}+1}{1-x}$; quae si sit $x > 1$ utique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur seriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ &c.}$$

summa revera sit $= \frac{1}{1-x}$, si fuerit x fractio unitate minor, tum enim error $\frac{x^{\infty}+1}{1-x}$ fit infinite parvus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto potest negligi. Sic posito $x = \frac{1}{2}$, erit revera

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{&c.} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

similiterque reliquarum serierum, si x sit fractio unitate minor, summa vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem responsio valet de summis serierum divergentium, in quibus signa + & — alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi solent, ponendo pro x numeros negativos. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{&c.}$$

nisi ultimi residui ratio habeatur, foret:

A . . . $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{&c.} = \frac{1}{2}$
B . . . $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{&c.} = \frac{1}{3}$
C . . . $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{&c.} = \frac{1}{4}$
&c.

Patet autem seriei secundae B summam ideo non posse esse $= \frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu summentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiusque seriei summa debet esse limes, ad quem eo propius perveniatur, quo plures termini actu addantur.

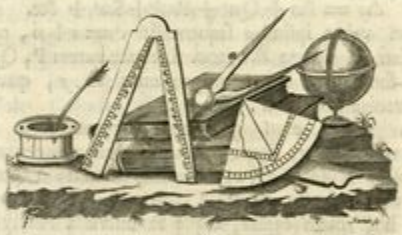
109. Ex his quidam concluserunt huiusmodi series, quae vocantur divergentes, prorsus nullas habere summas fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio, qui pro summa seriei in infinitum continuatae haberi posset: quae sententia, cum istae summae iam ob neglecta ultima residua erroneae sint ostensae,

sae, veritati maxime est consentanea. Interim tamen contra eam summo iure obiici potest, has memoratas summas, quantumvis a veritate abhorrere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admissis plurima praeclara esse eruta, quibus si istas summationes prorsus reiicere vellemus, carendum esset. Neque vero hae summae, si essent falsae, perpetuo ad veritatem nos ducere possent; quin potius, cum non parum sed infinite a veritate discrepent, nos quoque in infinitum a vero seducere deberent. Quod tamen cum non eveniat, difficillimus nobis restat nodus solvendus.

110. Dico igitur in voce *summae* latere totam difficultatem; si enim *summa* seriei, ut vulgo usus fert, sumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium est nullum, quin earum tantum serierum in infinitum excurrentium summae exhiberi queant, quae sint convergentes, atque continuo propius ad certum statumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem divergentes, quarum termini non decrescunt, sive signa + & — alternentur sive secus, prorsus nullas habebunt summas fixas; si quidem vox summae hoc sensu pro aggregato omnium terminorum accipiatur. At vero in iis casibus, quorum meminimus, quibus ex istiusmodi summis erroneis veritas tamen elicitur; id non fit, quatenus expressio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, est summa seriei $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. sed quatenus ea expressio evoluta hanc seriem praebet; sicque in hoc negotio nomen summae prorsus omitti posset.

111. Haec igitur incommoda, hasque apparentes contradictiones penitus evitabimus, si voci *summae* aliam notionem, atque vulgo fieri solet, tribuamus. Dicamus ergo seriei cuiusque infinitae *summam* esse expressionem finitam, ex cuius evolutione illa series nascatur. Hocque sensu seriei in-

infinitae $1+x+x^2+x^3+$ &c. summa revera erit $=\frac{1}{1-x}$, quia illa series ex huius fractionis evolutione oritur: quicunque numerus loco x substituatur. Hoc pacto, si series fuerit convergens, ista nova vocis summae definitio, cum consueta congruet; & quia divergentes nullas habent summas proprie sic dictas, hinc nullum incommodum ex nova hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis utilitatem serierum divergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.



CAPUT IV.

DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA

112.

In capite primo vidimus, si quantitas variabilis x accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusvis functionis ipsius x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ sive haec expressio sit finita sive in infinitum excurrat. Functio ergo y, si in ea loco x scribatur $x + \omega$, valorem sequentem induet:

$$y' = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

a quo, si valor prior y subtrahatur, remanebit differentia functionis y, quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

atque cum valor ipsius x sequens sit $x' = x + \omega$, erit differentia ipsius x, nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem P, Q, R, &c. denotant functiones ipsius x pendentes ab y, quas capite primo invenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento ω augeatur quantitas variabilis x, simul definiri poterit augmentum, quod cuique ipsius x functioni y accedit; dummodo pro quovis ipsius y valore functiones P, Q, R, S, &c. definire valeamus. In hoc autem capite, atque in universa Analysi infinitorum augmentum illud ω, quo quantitatem variabilem x crescere sumsimus, statuemus infinite parvum, atque adeo evanescens, seu $= 0$. Unde manifestum est, incrementum seu differentiam functionis y quoque fore infinite parvam. Cum autem in hac hypothesi singuli termini expressionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus evanescant, (88. & seqq.), solus primus

$P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc casu, quo ω est infinite parvum, differentia ipsius y nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare coepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum in capite primo expositae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumtae, statuantur infinite parvae. Quo igitur iste casus, quo universa Analysis infinitorum continetur, a methodo differentiarum distinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam signis ad differentias istas infinite parvas denotandas uti conveniet. Differentias igitur infinite parvas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diversos ordines constituissemus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, secunda, tertia, &c. cuiusque functionis significent. Loco characteris autem Δ, quo ante differentias indicaveramus, nunc utemur characlere d; ita ut dy significet differentiale primum ipsius y; ddy differentiale secundum; d^3y tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite parvas, quas hic tractamus *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia investigantur, atque ad usum accomodantur, appellari solet *Calculus differentialis*. Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aeque ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc novam Analyseos partem excollere coepit, aliis tam nominibus quam signis utuntur. Differentias enim infinite parvas, quas nos differentialia vocamus potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa*: quae voces uti latino sermoni magis conveniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEWTONO ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite parvum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamvis autem circa vocum usum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremus; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita ut $\dot{y}$ iis significet fluxionem primam ipsius y; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, uti ab arbitrio pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit parvus, ut numerando facile percipi queat, tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima $\overset{\text{x}}{y}$ perquam incommode hoc modo $\overset{\text{x}}{y}$ repraesentatur, cum nostro signandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus fit ineptus.

117. Nostris igitur tam nominibus quam signis utemur, quippe quorum illa in nostris regionibus iam sunt usu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & signationes hic commemorare, ut qui eorum libros evolvunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhaerent, ut quae nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipsorum opera maxima cum aviditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; saepenumero vero etiam animadvertimus, ipsos nostratium scripta non sine utilitate legisse. Quamobrem etsi idem ubique atque aequabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, ut utrique assuescamus, quantum quidem

dem

dem intelligentia librorum alieno more ſcriptorum poſtulat.

118. Cum igitur littera ω nobis hactenus denotaverit differentiam ſeu incrementum, quo quantitas variabilis x creſcere concipitur, nunc autem ω ſtatuatur infinite parvum, erit ω differentiale ipſius x; & hancobrem recepto ſignandi modo erit $\omega = dx$; atque dx proinde erit differentia infinite parva, qua ipſa x creſcere concipitur. Simili modo differentiale ipſius y ita exprimetur dy; atque ſi y fuerit functio quaecumque ipſius x, differentiale dy denotabit incrementum, quod functio y capit, dum x abit in $x+dx$. Quare ſi in functione y ubique loco x ſubſtituatur $x+dx$, & quantitas reſultans ponatur $=y'$, erit $dy=y'-y$, hocque modo differentiale cuiuſque functionis reperietur: quod quidem intelligendum eſt de differentiali primo ſeu primi ordinis; de reliquis enim poſtea videbimus.

119. Probe ergo tenendum eſt litteram d hic non quantitatem denotare, ſed tantum loco ſigni adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera l pro ſigno logarithmi, & in Algebra characterе $\surd$ pro ſigno radicis uti conſuevimus. Hinc dy non ſignificat, uti vulgo in Analyſi uſu eſt receptum, productum ex quantitate d in quantitatem y, ſed ita enunciari debet, ut dicatur differentiale ipſius y. Simili modo ſi ſcribatur d^2y, neque binarius exponentem, neque d^2 poteſtatem ipſius d ſignificat, ſed adhibetur tantum ad nomen *differentialis ſecundi* breviter & apte exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, ſed ſignum tantum exhibeat, ad confuſionem vitandam in calculis, ubi plures quantitates conſtantes occurrunt, littera d ad earum deſignationem uſurpari nequit; perinde atque evitare ſolemus litteram l tanquam quantitatem in calculum inducere, ubi ſimul logarithmi occurrunt. Optandum autem eſſet, ut litterae iſtae d & l per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates de-

signari solent, confundantur: simili scilicet modo, quo loco litterae r, qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iste distortus $\checkmark$ in usum est receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipsius y, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, habiturum esse huiusmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = P dx$. Qualiscunque scilicet fuerit y functio ipsius x, eius differentiale dy exprimetur certa quadam functione ipsius x, pro qua hic ponimus P, per differentiale ipsius x, nempe per dx multiplicata. Etiamsi ergo differentialia ipsarum x & y revera sint infinite parva, ideoque nihilo aequalia; tamen inter se finitam habebunt rationem: erit scilicet $dy : dx = P : 1$. Inventa ergo functione ista P, innotescit ratio inter differentiale dx & differentiale dy. Cum igitur calculus differentialis in inventione differentialium consistat, in eo non tam ipsa differentialia, quae sunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore invenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica investigatur.

121. Differentialia igitur multo facilius inveniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam Δy, qua functio y crescit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non sufficit functionem P nosse, sed indagari insuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam posuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipsius y autem inveniendum satis est, si noverimus solam functionem P. Quamobrem ex cognita differentia finita cuiusque functionis ipsius x, facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui potest eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum simul cognitis differentia quaevis finita cuiusque functionis propositae inveniri queat. Ceterum ex his ma-

manifestum est differentiale primum $dy = Pdx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum ω, quod quantitas variabilis x accipere concipitur, fuerit vehementer parvum, ita ut in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parvi, ut in computo, quo summus rigor non observatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali Pdx, ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: unde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parva considerari posse, eaque nihilo revera aequalia esse negant, atque tantum indefinite parva statuunt. Haecque idea aliis occasionem praebuit Analysin infinitorum accusandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, sed tantum vero proximas; quae obiectio semper aliquam vim retineret, nisi infinite parva prorsus nihilo aequalia statueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parva plane in nihilum abire, ii ut vim obiectionis destruere videantur, differentialia comparant minimis pulviculis ratione totius terrae, cuius quantitatem nemo non veram tradidisse censeretur, qui unico pulvisculo a veritate aberraverit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite parvam esse volunt, qualis est inter totam terram minimumque pulvisculum: atque si cui hoc discrimen adhuc non satis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, ut parvitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoscere coguntur, summum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per Analysin infinitorum solutiones inveniri possunt, ex earumque congruentia bonitatem posterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum saepenume-

ro per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius evincit, eas quantitates, quae in calculo sint neglectae, non solum non incomprehensibiliter parvas, sed plane nullas esse, uti nos assumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium secundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis secundis in capite primo expositis, ponendo quantitatem ω infinite parvam $= dx$. Cum igitur si ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crescere, ita ut si valor secundus x' fuerit $= x + dx$, sequentes futuri sint $x'' = x + 2dx$; $x''' = x + 3dx$ &c. ob differentias primas constantes $= dx$, differentiae secundae evanescent: erit ergo quoque differentiale secundum ipsius x nempe $ddx = 0$, atque ab hanc rationem quoque differentialia ulteriora erunt $= 0$, scilicet $d^3x = 0$, $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem potest, haec differentialia, cum sint infinite parva, per se esse $= 0$, neque hoc proprium esse eius quantitatis variabilis x, cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc evanescentiam ita interpretari oportet, ut differentialia ddx, d^3x &c. non solum in se spectata sint nulla, sed etiam ratione potestatum ipsius dx, cum quibus alias comparari possent, evanescere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum est differentiam secundam cuiusque functionis ipsius x, quae sit y, huiusmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 +$ &c. Quodsi ergo ω sit infinite parvum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ evanescent, unde posito $\omega = dx$, differentiale secundum ipsius y erit $= P\,dx^2$, denotante dx^2 quadratum differentialis dx. Quare etsi differentiale secundum ipsius y, nempe ddy per se sit $= 0$, tamen cum sit $ddy = P\,dx^2$, ad dx^2 habebit rationem finitam uti P ad 1: sin autem sit $y = x$, tum sit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc casu differentiale secundum ipsius x etiam respectu dx^2 altiorumque ipsius dx potestatum evanescit. Hocque modo intelligenda sunt

ea,

ea, quae ante diximus, esse scilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia secunda nil aliud sit, nisi differentia differentiae primae; differentiale quoque secundum seu uti saepe vocari solet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas constans nulla neque augmenta neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae solis quantitatibus variabilibus sunt propriae, dicimus eodem sensu quantitatum constantium differentialia omnia cuiusque ordinis esse $= 0$, hoc est prae omnibus adeo potestatibus ipsius dx evanescere. Cum igitur differentiale ipsius dx hoc est ddx sit $= 0$; differentiale dx tanquam quantitas constans considerari potest, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur constans, toties ea quantitas intelligenda est continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate, cuius differentiale sit constans, hicque singularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia sunt obnoxia, aestimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipsius y esse $= pdx$; atque ad eius differentiale secundum inveniendum, ipsius pdx denuo differentiale quaeri debet. Cum autem dx sit constans, neque varietur etiamsi loco x scribatur $x+dx$, tantum opus est, ut quantitatis finitae p differentiale quaeratur: sit igitur $dp = qdx$, quoniam vidimus omnium functionum ipsius x differentialia ad huiusmodi formam revocari: & cum sit, uti de differentiis finitis ostendimus, differentiale ipsius $np = nqdx$, si n sit quantitas constans, ponatur dx loco n, eritque differentiale ipsius $pdx = qdx^2$. Hancobrem si sit $dy = pdx$ & $dp = qdx$, erit differentiale secundum $ddy = qdx^2$, sicque constat, quod iam ante innuimus, differentiale secundum ipsius y ad dx^2 habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notavimus differentias secundas atque sequentes constitui non posse, nisi valores successivi ipsius x certa quadam lege progredi assumantur, quae

lex

lex cum sit arbitraria, his valoribus progressionem arithmeticam tanquam facillimam simulque aptissimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus secundis nihil certi statui poterit, nisi differentialia prima, quibus quantitas variabilis x continuo crescere concipitur, secundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipsius x, nempe dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. omnia inter se aequalia, unde fiunt differentialia secunda

$ddx = dx^{I} - dx = 0$; $ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0$, &c.

Quoniam ergo differentialia secunda & ulteriora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis x inter se tenent, pendent, hicque ordo sit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens discrimen inter differentialia prima ac sequentia ratione inventionis intercedit.

129. Quodsi autem successivi ipsius x valores x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, &c. non secundum arithmeticam progressionem statuantur, sed alia quacumque lege progredi ponantur, tum eorum quoque differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. non erunt inter se aequalia, neque propterea erit $ddx = 0$. Hancobrem differentialia secunda quarumvis functionum ipsius x aliam formam induent; si enim huiusmodi functionis y differentiale primum fuerit $= pdx$ ad eius differentiale secundum inveniendum non sufficit differentiale ipsius p per dx multiplicasse, sed insuper ratio differentialis ipsius dx, quod est ddx haberi debet. Quoniam enim differentiale secundum oritur, si pdx a valore eius sequente, qui oritur dum $x + dx$ loco x & $dx + ddx$ loco dx ponitur, subtrahatur ponamus valorem ipsius p sequentem esse $= p + qdx$, eritque ipsius pdx valor sequens

$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^{2} + qdxddx$;

a quo subtrahatur pdx, eritque differentiale secundum

$ddy = pddx + qdx^{2} + qdxddx = pddx + qdx^{2}$,

quia $qdxddx$ prae $pddx$ evanescit.

130.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis est simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius x incrementis tribuatur, tamen frequenter evenire solet, ut non eius quantitatis variabilis x, cuius y est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cuiuspiam quantitatis, cuius ipsa x sit functio quaedam. Quin etiam saepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima statuuntur aequalia, cuius nequidem relatio ad x constet. Priori casu pendebunt differentialia secunda & sequentia ipsius x a ratione, quam x tenet ad illam quantitatem, quae aequabiliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia secunda ipsius y ex differentialibus ipsius x definire docuimus. Posteriori autem casu differentialia secunda & sequentia ipsius x tanquam incognita spectari, eorumque loco signa ddx, d^3x, d^4x, &c. usurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his casibus differentiationes singulas absolvi oporteat, infra fusius simus ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tanquam uniformiter crescentem assumere, ita ut eius differentialia prima dx, dx^2, dx^{11}, &c. inter se omnia aequalia, ac propterea differentialia secunda ac sequentia nihilo aequalia statuantur, quae conditio ita enunciari solet ut differentiale ipsius x nempe dx constans assumi dicatur. Sit deinde y functio quaecumque ipsius x, quae cum per x & constantes definiatur, singula quoque eius differentialia prima, secunda, tertia, quarta, &c. quae his signis indicantur dy, ddy, d^3y, d^4y, &c. per x & dx exprimi poterunt. Scilicet si in y loco x scribatur $x+dx$, ab hocque valore prior subtrahatur, remanebit differentiale primum dy: in quo si porro loco x ponatur $x+dx$, prodibit dy', eritque $ddy=dy'-dy$, simili modo ponendo $x+dx$ loco x, ex ddy nascetur ddy', atque $ddy'-ddy$ dabit d^3y & ita porro: in quibus operationibus differentiale dx perpetuo tanquam quantitas constans spectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio y per x determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo ex-

peditius ex iis, quae postea sumus tradituri, definietur valor functionis p, quae per dx multiplicata praebeat differentiale primum dy. Posito ergo $dy = pdx$, differentiale ipsius pdx dabit differentiale secundum ddy; unde si fuerit $dp = qdx$, ob dx constans, orietur $ddy = qdx^2$, uti iam ante ostendimus. Ulterius igitur progrediendo, cum differentialis secundi differentiale praebeat differentiale tertium, ponamus esse $dq = rdx$, eritque $d^3y = rdx^3$: simili modo si huius functionis r differentiale quaeratur, fueritque $dr = sdx$, habebitur differentiale quartum $d^4y = sdx^4$; sicque porro, dummodo noverimus differentiale primum cuiusque functionis invenire, differentiale cuiusque ordinis assignare poterimus.

133. Quo igitur formae singulorum horum differentialium, simulque ratio ea inveniendi clarius menti repraesentetur, ea sequenti tabella complecti visum est.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x,

atque posito	erit
$dp = qdx$	$dy = pdx$
$dq = rdx$	$ddy = qdx^2$
$dr = sdx$	$d^3y = rdx^3$
$ds = tdx$	$d^4y = sdx^4$
&c.	$d^5y = tdx^5$

Cum igitur functio p ex functione y per differentiationem cognoscatur, similique modo ex p inveniatur q, hincque porro r, & ex eo ulterius s, &c. differentialia cuiusvis ordinis ipsius y facile reperientur, dummodo differentiale dx assumatur constans.

134. Cum p, q, r, s, t, &c. sint quantitates finitae, functiones nimirum ipsius x, differentiale primum ipsius y, rationem finitam habebit ad differentiale primum ipsius x, scilicet ut p ad 1; hancque ob causam differentialia dx & dy vocantur homogenea. Deinde cum ddy ad dx^2 habeat rationem finitam ut q ad 1, erunt ddy & dx^2 homogenea; simili modo homogenea erunt d^3y & dx^3, itemque d^4y & dx^4, & ita porro. Unde uti differentialia prima sunt inter se homo-

mogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius y ordinis n, quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneum erit cum dx^n, hoc est cum potestate differentialis dx, cuius exponens est n.

135. Cum igitur prae dx evanescant omnes eius potestates, quarum exponentes sunt unitate maiores, prae dy quoque evanescent dx^2, dx^3, dx^4, &c. & quae ad has potestates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum ddy, d^3y, d^4y, &c. Simili modo prae ddy quia est homogeneum cum dx^2, omnes ipsius dx potestates quadrato superiores dx^3, dx^4, &c. evanescent, evanescent ergo quoque d^3y, d^4y, &c. Atque prae d^3y, evanescent dx^4, d^4y; dx^5, d^5y, &c. Hinc que facile, si propositae fuerint quaecunque expressiones huiusmodi differentialia involventes, dignosci poterunt, utrum sint homogeneae nec ne. Respici enim debebunt tantum differentialia, omissis quantitatibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus secundi altiorumque ordinum scribantur potestates ipsius dx ipsis homogeneae, quae si praebeant ubique eundem dimensionum numerum, expressiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ esse inter se homogeneas. Nam ddy^2 denotat quadratum ipsius ddy, & quia ddy homogeneum est cum dx^2, erit ddy^2 homogeneum cum dx^4. Deinde quia dy cum dx & d^3y cum dx^3 homogeneum est, erit productum dyd^3y cum dx^4 homogeneum: ex quo sequitur expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ inter se esse homogeneas, ideoque rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ & $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro dy, ddy, d^3y & d^5y his ipsius dx potestatibus ipsis homogeneis dx, dx^2, dx^3, & dx^4, orientur hae expressiones Pdx^3 & Qdx^3, quae utique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius dx potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinities sive maior sive minor altera, hincque una respectu alterius evanescet. Sic $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ ad $\frac{Qddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad Pdx & altera ad Qdx^3, unde haec prae illa evanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$ & $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ob } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Hocque pacto expressiones differentiales quandoque mirifice contrahi possunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusvis quantitatis propositae differentiale primum inveniri potest: & quoniam differentialia secunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex secundis & ita porro sequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentialia inveniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina derivantur, quae usu sunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod significat *differentiale invenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur, *Differentiatio* autem de-

notat operationem, qua differentialia inveniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentialia inveniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale investigatur, ita vicissim calculi species constituitur quoque in inventione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propositum fuerit differentiale quodcunque, eius respectu ea quantitas, cuius est differentiale, vocari solet integrale. Cuius denominationis ratio est, quod, cum differentiale considerari possit, tanquam pars infinite parva, qua quantitas quaepiam crescit, ipsa illa quantitas respectu huius partis tanquam totum seu integrum spectari potest, hancque ob causam eius vocatur integrale. Sic cum dy sit differentiale ipsius y, vicissim y erit integrale ipsius dy, & cum ddy sit differentiale ipsius dy, erit dy integrale ipsius ddy, similique modo erit ddy integrale ipsius d^3y, & d^3y ipsius d^4y & ita porro: unde quaelibet differentiatio, si inverse spectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clarissime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo exposita explicari potest. Postquam enim esset ostensum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inveniri oporteat, retrogrediendo quoque monstravimus, quomodo, si proposita fuerit differentia, ea quantitas inveniri queat, cuius illa sit differentia; quam quantitatem respectu suae differentiae vocavimus eius summam. Uti igitur ad infinite parva procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita summae quae ibi erant vocatae, integralium nomen sortiuntur: & hanc ob causam integralia quoque non raro summae appellari solent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem invenire, idem est, quod nostro more dati differentialis integrale invenire dicimus.

141. Uti differentialia charactere d designamus, ita ad in-

integralia indicanda hac littera $\int$ utimur, quae ergo quantitatibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa sunt differentialia. Sic si differentiale ipsius y fuerit pdx, seu $dy = pdx$, erit y integrale ipsius pdx, quod hoc modo scribitur $y = \int pdx$, cum sit $y = \int dy$. Integrale ergo ipsius pdx, quod per $\int pdx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale est pdx. Simili modo cum sit $ddy = qdx^2$ existente $dp = qdx$; erit integrale ipsius ddy hoc est $dy = pdx$, atque ob $p = \int qdx$, erit $dy = dx\int qdx$, ac propterea $y = \int dx \int qdx$. Si ulterius sit $dq = rdx$, erit $q = \int rdx$ & $dp = dx\int rdx$; unde si character $\int$ denuo praefigatur, fiet $p = \int dx \int rdx$, porroque $dy = dx\int dx \int rdx$, atque $y = \int dx \int dx \int rdx$.

142. Quia differentiale dy est quantitas infinite parva, eius integrale autem y quantitas finita, parique modo differentiale secundum ddy infinities minus est, quam eius integrale dy, manifestum est differentialia prae suis integralibus evanescere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parva in ordines dividi solent, diciturque infinite parvum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima dx, dy. Infinite parvum secundi ordinis complectitur differentialia secundi ordinis, quae homogenea sunt cum dx^2; similique modo infinite parva, quae cum dx^3 sunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; sicque porro. Unde uti infinite parva primi ordinis prae quantitatibus finitis evanescunt, sic infinite parva secundi ordinis prae infinite parvis primi ordinis, atque generatim infinite parva cuiusque ordinis altioris prae infinite parvis ordinis inferioris evanescent.

143. His igitur infinite parvorum ordinibus constitutis, uti differentiale quantitatis finitae est infinite parvum primi ordinis, atque differentiale infinite parvi primi ordinis est infinite parvum secundi ordinis, & ita porro; ita vicissim manifestum est integrale infinite parvi primi ordinis esse quantitatem finitam, integrale autem infinite parvi secundi ordinis esse infinite parvum primi ordinis sicque deinceps.

Qua-

Quare si differentiale propositum fuerit infinite parvum ordinis n, eius integrale erit infinite parvum ordinis $n-1$; hincque uti differentiando ordo infinite parvorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipsas quantitates finitas perveniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum secundum hanc legem perveniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione instituta ad quantitates adhuc infinities maiores, sicque progrediendo obtinebimus similes infinitorum ordines, quorum quilque praecedentem infinities superat.

144. Superest ut in hoc Capite quaedam de usu signorum recepto moneamus, ne ambiguitati ullus locus relinquatur. Ac primo quidem signum differentiationis d tantum afficit litteram immediate sequentem solam: sic dxy non denotat differentiale producti xy, sed differentiale ipsius x per ipsam quantitatem y multiplicatum. Solet autem, quominus confusio nascatur, quantitas y ante signum d hoc modo scribi ydx, quo productum ex y in dx indicatur. Attamen si y sit quantitas vel signum radicale $\surd$ vel logarithmicum habens praefixum, tum post differentiale poni solet: nimirum $dx\surd(aa-xx)$ significat productum ex quantitate finita $\surd(aa-xx)$ in differentiale dx, similique modo $dxl(1+x)$ est productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per dx multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\surd x$ exprimit productum differentialis secundi ddy & quantitatis finitae $\surd x$.

145. Neque vero signum d litteram immediate sequentem solam afficit, sed etiam nequidem exponentem, si quem habet, spectat. Ita dx^2 non exprimit differentiale ipsius x^2, sed quadratum differentialis ipsius x, ita ut exponens 2 non ad x, sed ad dx referri debeat. Posset etiam scribi $dxdx$, quemadmodum productum duorum differentialium dx & dy hoc modo $dxdy$ exponitur, verum prior modus dx^2, uti est brevior, ita usitatior. Praesertim si altiores potestates ipsius dx essent indicandae, nimis prolixum foret dx toties repeti: sic dx^3 denotat cubum ipsius dx, & in differentialibus altio-

rum

rum ordinum similis ratio observatur. Scilicet ddy^4 denotat potestatem quartam differentialis secundi ordinis ddy; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ significat quadratum differentialis tertii ordinis ipsius y multiplicatum esse per $\sqrt{x}$; sin autem per quantitatem rationalem x multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo xd^3y^2.

146. Sin autem velimus, ut signum d plus quam solam litteram subsequentem afficiat, id peculiari modo indicari debet. Utimur hoc casu praecipue uncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Uti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum si velimus differentiale potestatis huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix evitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita ut $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum d ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius xdy; & $d.^3\, xdy\sqrt{(aa+xx)}$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdy\sqrt{(aa+xx)}$, quae est productum ex quantitatibus finitis x & $\sqrt{(aa+xx)}$ atque ex differentiali dy.

147. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dxlx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $xdx\int dxlx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx\int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx\int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita ut $\int ydx\,.\,\int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148. Analysis infinitorum igitur cum in differentialibus

bus tum in integralibus inveniendis versatur, & hancobrem in duas praecipuas partes dividitur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur, quantitatum quarumvis differentialia inveniendi; in posteriori vero via monstratur differentialium propositorum integralia investigandi: in utroque autem simul summus usus, quem isti calculi tam ad ipsam Analysin quam ad Geometriam sublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob causam ista Analyseos pars iam tanta accepit incrementa, ut modico volumine prorsus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in solvendis varii generis problematibus, deteguntur, ut ob haec nova inventa, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte describi atque explicari possit. Dabo autem operam, ut quae adhuc sunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel saltem methodos explicem, unde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures Analyseos infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inveniuntur passim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi solet methodus differentialia secundi atque altiorum ordinum inveniendi: quoniam autem modum cuiusque ordinis differentialia inveniendi in ipso calculo differentiali sum expositurus, hac subdivisione, quae potius ex merito inventionis, quam ex re ipsa facta esse videtur, supersedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyseos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales transtulit, quia utrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam transcendentes accommodare constitui, hinc partem peculiarem facere superfluum atque instituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare ſtatui, modumque ſum expoſiturus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non ſolum prima, ſed etiam ſecunda & altiorum ordinum expedite inveniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, ſive ſint functiones unius variabilis, ſive plurium, ſive demum explicite dentur, ſive per aequationes. Deinde inventionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem ſine calculi integralis ſubſidio pervenire licet: cuiuſmodi ſunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, viciſſimque arcuum circularium ſinus, & tangentes. Denique etiam quantitates utcunque ex his compoſitas & permixtas differentiare docebo; ſicque calculi differentialis pars prior, methodus ſcilicet differentiandi abſolvetur.

151. Altera pars uſui, quem methodus differentiandi tam ad Analyſin quam Geometriam ſublimiorem affert, explicando eſt deſtinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inveniendas, partim ad ſeries tractandas atque ſummandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expreſſionum, quae certis caſibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae ſunt alia. Geometria autem ſublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curvarum, earumque curvatura ipſa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curvis vel reflexos vel refractos reſolvi poſſunt. Quibus etſi ampliſſimus tractatus impleri poſſet, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breviter ac perſpicue explicare.

CAPUT V.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM UNICAM VARIABILEM INVOLVENTIUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale est $= dx$ erit x in proximum promovendo $x^1 = x + dx$. Quare si fuerit y quaecunque functio ipsius x, si in ea loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^1, atque differentia $y^1 - y$ dabit differentiale ipsius y. Si igitur ponamus $y = x^n$ fiet

$$y^1 = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{ &c.}$$

eritque ergo

$$dy = y^1 - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{ &c.}$$

At in hac expressione terminus secundus cum reliquis sequentibus prae primo evanescit, eritque idcirco $nx^{n-1}dx$ differentiale ipsius x^n, seu $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Unde si a sit numerus seu quantitas constans, erit quoque $d.ax^n = nax^{n-1}dx$. Cuiuscunque ergo ipsius x potestatis differentiale inuenitur, multiplicando eam per exponentem, dividendo per x, & reliquum per dx multiplicando, quae regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipsius x^n, ex eo facile differentiale secundum reperitur, dummodo, ut hic constanter assumemus, differentiale dx constans statuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}dx$ factor ndx fit constans, alterius factoris x^{n-1} differentiale sumi debet, quod proinde erit $(n-1)x^{n-2}dx$. Hoc ergo per ndx multiplicatum dabit diffe-

rentiale secundum : $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo si differentiale ipsius x^{n-1} quod est $= (n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

unde simul forma sequentium differentialium facillime colligitur.

154. Quoties ergo n est numerus integer affirmativus, toties ad differentialia tandem pervenitur evanescentia ; quae scilicet ita sunt $=0$, ut prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescant. Horum autem notandi sunt casus simpliciores.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3x = 0$; &c.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3x^2 = 0$; $d.^4x^2 = 0$ &c.

$d.x^3 = 3x^2dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3x^3 = 6dx^3$; $d.^4x^3 = 0$

$d.x^4 = 4x^3dx$; $dd.x^4 = 12x^2dx^2$; $d.^3x^4 = 24xdx^3$; $d.^4x^4 = 24dx^4$

$d.x^5 = 5x^4dx$; $dd.x^5 = 20x^3dx^2$; $d.^3x^5 = 60x^2dx^3$; $d.^4x^5 = 120xdx^4$; $d.^5x^5 = 120dx^5$; $d.^6x^5 = 0$.

Patet ergo si n fuerit numerus integer affirmativus, potestatis x^n differentiale ordinis n esse constans, nempe $= 1.2.3.\ldots ndx^n$, adeoque differentialia superiorum ordinum omnium esse $=0$.

155. Si n sit numerus integer negativus, huiusmodi ipsius x potestatum negativarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, &c. differentialia sumi poterunt, cum sit $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur

$n = -m$, erit ipsius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m dx}{x^{m+1}}$; differentiale secundum $= \frac{m(m+1)dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2)dx^3}{x^{m+3}}$ &c. unde sequentes casus simpliciores imprimis notari merentur.

$$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2};\ dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3};\ d^3.\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4}$$

$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3};\ dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4};\ d^3.\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5}$$

$$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4};\ dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5};\ d^3.\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6}$$

$$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5};\ dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6};\ d^3.\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7}$$

$$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6};\ dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7};\ d^3.\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8}$$

&c.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ differentiale primum

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$ secundum

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}$$ &c.

Hinc

Hinc erit:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\ ;\ dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}\ ;\ d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}\ ;\ dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}\ ;\ d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquiretur huiusmodi differentialia, etiam sine praevia reductione ad formam potestatis, inveniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius sive affirmativus sive negativus integer, differentialia aeque facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriventur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

$$d.x\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}dx\sqrt{x};\ d.x^2\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}xdx\sqrt{x};\ d.x^3\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}x^2dx\sqrt{x};$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}};\quad d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}};\quad d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\quad d.x\sqrt[3]{x} = \tfrac{4}{3}dx\sqrt[3]{x};\quad d.x\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2};$$

$$d.xx\sqrt[3]{x} = \tfrac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x};\quad d.xx\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2};\quad \&c.$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}};\quad d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}};\quad d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}};$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}};\quad d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^2\sqrt[3]{x}};\quad \&c.$$

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integrarum differentialia poterunt inveniri, propterea quod earum singuli termini sunt potestates ipsius x, quas

quas differentiare novimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p+q+r+s+$ &c. posito $x+dx$ loco x abeat in $p+dp+q+dq+r+dr+s+ds+$ &c. erit eius differentiale $=dp+dq+dr+ds+$ &c. Quare si singularum quantitatum p, q, r, s, differentialia assignare queamus, simul quoque aggregati earum differentiale innotescet. Atque cum multipli ipsius p differentiale sit aeque multiplum ipsius dp, hoc est $d.ap=adp$; erit quantitatis $ap+bq+cr$ differentiale $=adp+bdq+cdr$. Cum denique quantitatum constantium differentialia sint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap+bq+cr+f$ differentiale $=adp+bdq+cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum singuli termini sint vel constantes vel potestates ipsius x, differentiatio secundum praecepta data facile absolvetur. Sic erit:

$d(a+x)=dx$; $d(a+bx)=bdx$;

$d(a+xx)=2xdx$; $d(aa-xx)=-2xdx$;

$d(a+bx+cxx)=bdx+2cxdx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3)=bdx+2cxdx+3ex^2dx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)=bdx+2cxdx+3ex^2dx+4fx^3dx$.

Atque si exponentes fuerint indefiniti erit:

$d(1-x^n)=-nx^{n-1}dx$; $d(1+x^m)=mx^{m-1}dx$;

$d(a+bx^m+cx^n)=mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx$.

160. Cum igitur functiones rationales integrae secundum maximam ipsius x dignitatem in gradus distinguantur, manifestum est, si huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri constantia, posteaque in nihilum abire, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx est constans, secundum cum sequentibus nullum. Sit functio secundi gradus

$a+bx+cxx=y$; erit $dy=bdx+2cxdx$;

$ddy=2cdx^2$; $d^3y=0$.

Si-

Simili modo si ponatur functio tertii gradus $a+bx+cxx+ex^3=y$; erit $dy=bdx+2cxdx+3exxdx$; $ddy=2cdx^2+6exdx^2$ & $d^3y=6edx^3$ atque $d^4y=0$. Quare generaliter si huiusmodi functio sit gradus n, eius differentiale ordinis n erit constans, & sequentia omnia nulla.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, si inter potestates ipsius x, quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes sint numeri negativi seu fracti. Ita

I. Si sit $y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$

erit $dy=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}+\frac{cdx}{xx}$.

II. Si sit $y=\frac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-ex$

erit $dy=\frac{-adx}{2x\sqrt{x}}+\frac{cdx}{2\sqrt{x}}-edx$,

& $ddy=\frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}}-\frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$.

III. Si sit $y=a+\frac{b}{\sqrt[3]{xx}}-\frac{c}{x\sqrt{x}}+\frac{f}{xx}$

erit $dy=\frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}}+\frac{4cdx}{3xx\sqrt{x}}-\frac{2fdx}{x^3}$

& $ddy=\frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}}-\frac{28cdx^2}{9x^2\sqrt{x}}+\frac{6fdx^2}{x^4}$.

cuiusmodi exempla secundum praecepta data facillime absolvuntur.

162. Si quantitas differentianda propoſita fuerit poteſtas eiuſmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta ſufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipſius x, cuius differentiale dp in poteſtate eſt, erit ipſius poteſtatis p^n differentiale primum $= np^{n-1}dp$. Hinc ſequentia exempla ſolvuntur:

I. Si ſit $y = (a+x)^n$; erit $dy = n(a+x)^{n-1}dx$

II. Si ſit $y = (aa-xx)^{\frac{1}{2}}$; erit $dy = -xdx(aa-xx)$

III. Si ſit $y = \frac{1}{aa+xx}$ ſeu $y = (aa+xx)^{-1}$

erit $dy = \frac{-2xdx}{(aa+xx)^2}$.

IV. Si ſit $y = \sqrt{(a+bx+cxx)}$; erit $dy = \frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{(a+bx+cxx)}}$.

V. Si ſit $y = \sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}$ ſeu $y = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3}x^3dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)}}$.

VI. Si ſit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ ſeu $y = (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = xdx(1-xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1-xx)\sqrt{(1-xx)}}$.

VII. Si ſit $y = \sqrt[3]{(a+\sqrt{bx+x})}$

erit $dy = \frac{dx\sqrt{b}:2\sqrt{x}+dx}{3\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx+x})^2}} = \frac{dx\sqrt{b}+2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx+x})^2}}$.

VIII. Si ſit $y = \frac{1}{x+\sqrt{(aa-xx)}}$,

ob $d.\sqrt{(aa-xx)} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = \frac{-dx+xdx:\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2} = \frac{xdx-dx\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2\sqrt{(aa-xx)}}$$

seu $dy = \frac{dx(x-\sqrt{(aa-xx)})^3}{(2xx-aa)^2\sqrt{(aa-xx)}}$.

IX. Si sit $y = \sqrt[4]{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1-xx)^3} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$, erit $dy = \frac{-3dp+3dq}{4\sqrt[4]{(1-p+q)}}$.

Iam per antecedentia est $dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$ & $dq = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}}$,

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{\frac{3dx}{2x\sqrt{x}} - \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(1-xx)}}}{4\sqrt[4]{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusve functionibus ipsius x, quarum differentialia constant, eius differentiale sequente modo commodissime invenietur. Sint p & q functiones ipsius x, quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x+dx$ loco x; p abit in $p+dp$ & q in $q+dq$: productum pq transmutabitur in $(p+dp)(q+dq) = pq+pdq+qdp+dpdq$. Unde pro-

producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$; ubi cum pdq & qdp sint infinite parva primi ordinis, at $dpdq$ secundi ordinis, ultimus terminus evanescet, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$. Differentiale ergo producti pq constat ex duobus membris, quae obtinentur, si uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus constantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + rdq$, quibus valoribus loco z & dz substitutis erit $d.pqr = pqdr + prdq + qrdp$.
Simili modo si quantitas differentianda quatuor habeat factores erit: $d.pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp$:
unde quilibet differentiationem plurium factorum facile perspiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a+x)(b-x)$, erit
$dy = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx$
quod idem differentiale quoque invenitur, si quantitas proposita evolvatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per superiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa-xx)}$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $\sqrt{(aa-xx)} = q$, quia est $dp = \frac{-dx}{xx}$

& $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa-xx)};$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt
$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa-xx)}}$. Hinc erit differentiale quaesitum, $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa-xx)}}$.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4+x^4)}}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = q$; quia invenimus $dp = 2xdx$ & $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$pdq + qdp = \frac{-2x^3dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4+x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4xdx}{(a^4+x^4)\sqrt{(a^4+x^4)}}.$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x+\sqrt{(1+xx)}} = q$, ob $dp = dx$

& $dq = \frac{-dx-xdx:\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})^2} = \frac{-dx(x+\sqrt{(1+xx)})}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$

$= \frac{-dx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$, erit $pdq + qdp =$

$= \frac{-xdx}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{x+\sqrt{(1+xx)}} =$

$= \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$. Fiet ergo differentiale quaesitum $dy = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-x)}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $\sqrt{(1+xx)}-x$, fiet $dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}} =$

dx

$$\frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}}-2xdx.$$

Idem differentiale alio modo commodius inveniri potest; cum enim sit $y=\frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$, multiplicetur numerator ac denominator per $\sqrt{(1+xx)}-x$, fietque

$$y=x\sqrt{(1+xx)}-xx=\sqrt{(x^2+x^4)}-xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam est

$$dy=\frac{xdx+2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}}-2xdx=\frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}}-2xdx.$$

V. Si fuerit $y=(a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy=(a+x)(b-x)dx-(a+x)(x-c)dx+(b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y=x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy=dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}+2xxdx\sqrt{(aa-xx)}-\frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{dx(a^4+aaxx-4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendi possunt, tamen commodius utemur regula fractionibus differentiandi inserviente. Sit ergo proposita haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inveniri oporteat. Quoniam posito $x+dx$ loco x fractio illa abit in

$$\frac{p+dp}{q+dq}=(p+dp)\left(\frac{1}{q}-\frac{dq}{qq}\right)=\frac{p}{q}-\frac{pdq}{qq}+\frac{dp}{q}-\frac{dpdq}{qq},$$

unde si fractio ipsa $\frac{p}{q}$ subtrahatur, remanet eius differentiale

$$d.\frac{p}{q}=\frac{dp}{q}-\frac{pdq}{qq},$$ ob evanescentem terminum $\frac{dpdq}{qq}$.

Hinc

Hinc ergo erit $d.\frac{p}{q}=\frac{qdp-pdq}{qq}$, unde haec regula pro differentiatione cuiusque fractionis enascitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato subtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, residuum dividatur per quadratum denominatoris, quotusque erit differentiale fractionis quaesitum.* Cuius regulae usus per sequentia exempla illustrabitur.

I. Si fuerit $y=\frac{x}{aa+xx}$, erit per hanc regulam

$$dy=\frac{(aa+xx)dx-2xxdx}{(aa+xx)^2}=\frac{(aa-xx)dx}{(aa+xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y=\frac{\sqrt{(aa+xx)}}{aa-xx}$; reperitur

$$dy=\frac{(aa-xx)xdx:\sqrt{(aa+xx)}+2xdx\sqrt{(aa+xx)}}{(aa-xx)^2},$$

& facta reductione $dy=\frac{(3aa+xx)xdx}{(aa-xx)^2\sqrt{(aa+xx)}}$.

Saepenumero expedit ea regula uti, quae sequitur ex formula priori $d.\frac{p}{q}=\frac{dp}{q}-\frac{pdq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per denominatorem diviso, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at per quadratum denominatoris diviso. Ita

III. Si fuerit $y=\frac{aa-xx}{a^4+aaxx+x^4}$, erit

$$dy=\frac{-2xdx}{a^4+aaxx+x^4}-\frac{(aa-xx)(2aaxdx+4x^3dx)}{(a^4+aaxx+x^4)^2}$$

quae ad eundem denominatorem revocata praebet.

$$dy=\frac{-2xdx(2a^4+2aaxx-x^4)}{(a^4+aaxx+x^4)^2}$$

165.

165. Haec iam sufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipsius x propositae differentiale investigandum; si enim fuerit integra modus differentiandi iam supra est expositus. Sit igitur functio proposita fracta, quae semper ad huiusmodi formam reducetur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{&c.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{&c.}}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, ut fiat

$$y = \frac{p}{q}; \text{ eritque } dy = \frac{qdp - pdq}{qq}. \text{ At cum sit:}$$

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{&c.}$$

$$\& \quad q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{&c.}$$

erit $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{&c.}$

$$\& \quad dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \text{&c.}$$

unde per multiplicationem obtinebitur:

$$\begin{array}{rlllll} qdp = & \alpha Bdx + & 2\alpha Cxdx + & 3\alpha Dx^2dx + & 4\alpha Ex^3dx + & \text{&c.} \\ & \beta B & + 2\beta C & + 3\beta D & + \text{&c.} \\ & & \gamma B & + 2\gamma C & + \text{&c.} \\ & & & \delta B & + \text{&c.} \\ pdq = & \beta Adx + & \beta Bxdx + & \beta Cx^2dx + & \beta Dx^3dx + & \text{&c.} \\ & 2\gamma A & + 2\gamma B & + 2\gamma C & + \text{&c.} \\ & & 3\delta A & + 3\delta B & + \text{&c.} \\ & & & 4\varepsilon A & + \text{&c.} \end{array}$$

Ex his itaque obtinebitur differentiale quaesitum:

$$dy = \frac{\begin{array}{llll} + \alpha B & + 2\alpha C & + 3\alpha D & + 4\alpha E \\ - \beta A & - 2\gamma A & + \beta C & + 2\beta D \\ & & - \gamma B & - 2\delta B \\ & & - 3\delta A & - 4\varepsilon A \end{array} \begin{array}{l} dx \\ xdx \\ x^2dx \end{array} \begin{array}{l} + 5\alpha F \\ + 3\beta E \\ + \gamma D \\ + \delta C \\ - 3\varepsilon B \\ - 5\zeta A \end{array} x^4dx \text{&c.}}{(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{&c.})^2}$$

Quae

Quae expressio ad cuiusvis functionis rationalis differentiale expedite inveniendum maxime est accommodata. Quemadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propositae combinatur, ex inspectione mox intelligitur, denominator vero differentialis est quadratum denominatoris functionis propositae.

166. Si fractionis propositae vel numerator vel denominator vel uterque ex factoribus constet, multiplicatione actu instituta orietur quidem forma, qualem modo differentiavimus; attamen facilius pro his casibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur proposita huiusmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, ut sit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$ substitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$; eius diff. $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Si sit $y = \frac{p}{qs}$, posito denominatore $qs = Q$,

erit $dQ = qds + sdq$, & $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$. Quare

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$, erit $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$, ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, ut habeatur $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem sit

$$dP = pdr + rdp \quad \& \quad dQ = qds + sdq,$$

prodibit sequens differentiatio:

III.

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

erit $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$,

seu $dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}$.

Simili modo, si numerator ac denominator fractionis propositae plures habeant factores, differentialia eadem ratione investigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla huc pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem casus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi potest, quam per regulas generaliores hic expositas. Evenit hoc si factores, qui vel functionem ipsam, vel functionis numeratorem aut denominatorem constituunt, fuerint potestates.

Ponamus functionem differentiandam esse $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inveniendum sit $p^m = P$ & $q^n = Q$, ut fiat $y = PQ$ & $dy = PdQ + QdP$. Cum autem sit $dP = mp^{m-1}dp$ & $dQ = nq^{n-1}dq$, fiet his valoribus substitutis: $dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$; unde sequens oritur regula:

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$.

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale invenietur, ac reperietur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqrdp + nprdq + kpqdr)$.

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum propo-

ſita huiuſmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inſervientem $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$, quod differentiale commodius ſic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$, erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$.

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem ſuperiorem regulam $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$, cuius expreſſionis ſi numerator ac denominator per q^{n-1} dividatur, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$.

Quod ſi vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; invenietur $dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1}dq}{q^{2n}}$, quae reducitur ad $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}$. Quocirca

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$ erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$.

Denique ſi propoſita fuerit huiuſmodi fractio $y = \frac{r}{p^m q^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem $dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1}q^n rdp - np^m q^{n-1}rdq}{p^{2m}q^{2n}}$, cuius expreſſionis cum numerator & denominator ſit diviſibilis per $p^{m-1}q^{n-1}$:

IV.

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^m q^n}$;

erit $dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}$.

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae speciales, quas verbis exprimere superfluum foret, facili negotio pro quovis casu erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas hactenus exposuimus tam late patent, ut nulla excogitari possit functio ipsius x algebraica, quae non earum ope differentiari queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi functiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absolvimus. Simul vero etiam compendia, si factores involvantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusvis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, sive ei per additionem, sive per subtractionem sive multiplicationem sive divisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos revocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriumve variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad unam maxime universalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel divisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro qualibet parte functio propos-*

ta seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis, reliquae vero partes omnes constantes. Quo facto singula ista differentialia, quae ex singulis partibus modo descripto eliciuntur, in unam summam colligantur, sicque obtinebitur differentiale functionis propositae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, uti infra ostendetur.

171. Ad regulam hanc illustrandam ponamus functionem y duabus constare partibus, sive per additionem sive subtractionem connexis, ita ut sit $y = p \pm q$. Ponatur primo sola pars p variabilis, altera q constans erit differentiale $= dp$; deinde ponatur altera pars $\pm q$ sola variabilis, altera vero p constans, eritque differentiale $= \pm dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaesitum ita componetur, ut sit $dy = dp \pm dq$, omnino uti idem iam supra invenimus. Hinc vero simul liquet, si functio pluribus constet partibus, sive invicem additis sive subtractis, nempe $y = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inventum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane uti & superior regula docebat.

172. Si partes sint in se invicem multiplicatae, ita ut sit $y = pq$, manifestum est posita sola parte p variabili, fore differentiale $= qdp$; at si altera pars q sola variabilis statuatur, erit differentiale $= pdq$. Addantur ergo haec duo differentialia invicem, atque prodibit differentiale quaesitum $dy = qdp + pdq$, quemadmodum ex iam allatis constat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, scilicet $y = pqrs$, si successive unaquaeque sola variabilis statuatur, orientur ista differentialia $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$, quorum summa dabit differentiale quaesitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorsus uti iam ante invenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, sive partes functionem constituentes sint invicem additae subtractaeve, sive in se invicem multiplicatae

173.

173. Si partes functionem formantes per divisionem sint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$ ponatur secundum regulam primum sola pars p variabilis, eritque ob q constans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur sola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$, erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propositae

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq},$$

sicut iam supra invenimus. Simili modo si functio proposita sit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo successive singulas partes solas p, q, r & s variabiles, prodibunt sequentia differentialia:

$$\frac{qdp}{rs}; \frac{pdq}{rs}; \frac{-pqdr}{rrs}; \text{ \& } \frac{-pqds}{rss}, \text{ unde fit}$$

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}$$

174. Dummodo ergo singulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae; ut earum differentialia exhiberi queant, simul quoque totius functionis differentiale inveniri poterit. Quodsi igitur partes fuerint functiones rationales, tum earum differentialia non solum ope praeceptorum ante iam datorum inveniuntur, sed ea quoque ex hac ipsa regula generali erui poterunt: sin autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad potestates, quarum exponentes sunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem potestatum, qua est $d.x^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque, ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias insuper expressiones surdas in-

vo-

volvunt. Unde patet si cum regula generali hic data, infra vero demonstranda, coniungatur regula differentiandi potestates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi posse.

175. Ex his omnibus iam dilucide sequitur, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, differentiale eius dy huiusmodi habiturum esse formam $dy = p\,dx$, in qua valor ipsius p per praecepta hic exposita semper assignari queat. Erit autem p functio ipsius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, nisi consuetae, quibus functiones algebraicae constitui solent. Hancobrem si y fuerit functio algebraica ipsius x, erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipsius x. Atque si z fuerit etiam functio algebraica ipsius x, ita ut sit $dz = q\,dx$, ob q functionem algebraicam ipsius x, erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipsius x, quippe quae est $= \frac{q}{p}$. Quare si huiusmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expressionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impedient, quominus ea expressio sit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia secunda & superiorum ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipsius x, fuerit $dy = p\,dx$, atque $dp = q\,dx$; erit sumto differentiali dx constante, $ddy = q\,dx^2$ uti supra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas sit quoque q functio algebraica ipsius x, erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non solum quantitas finita, sed etiam functio algebraica ipsius x, dummodo y fuerit eiusmodi functio. Simili modo perspicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones al-

gebraicas ipsius x, modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x, omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusvis ordinis ipsarum y, z, & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dzddy}$; $\frac{dxd^2y}{dy^3ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x.

177. Cum igitur nunc methodus sit tradita cuiusque functionis ipsius x algebraicae differentiale primum inveniendi, eadem methodo poterimus quoque differentialia secunda altiorumque ordinum investigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipsius x, ex eius differentiatione $dy = pdx$ innotescet valor ipsius p. Qui si denuo differentietur atque reperiatur $dp = qdx$, erit $ddy = qdx^2$, posito dx constante, sicque definietur differentiale secundum. Differentiando porro q, ut sit $dq = rdx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = rdx^3$; sicque ulterius differentialia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r, &c. omnes sunt functiones ipsius x algebraicae, ad quas differentiandas praecepta data sufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omissis enim dx, in differentiatione ipsius y, prodibit valor ipsius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatus ac divisus per dx, quod fit dum ubique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipsius $q = \frac{ddy}{dx^2}$ Simili modo porro invenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa + xx}$ cuius differentialia tam prima quam sequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando simulque per dx dividendo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa+xx)^2}$, hinc porro

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa+xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile ulterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem fupremarum ipfius x poteftatum femper eft productum numerorum naturalium ab 1 ufque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim fi has formas ulterius continuemus atque perpendamus, deprehendemus fore generaliter, fi $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3.\ldots.n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2.}x^{n-2} + \right.$$

$$\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2\ldots.6}x^{n-6}$$

$$\left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{n(n-1).\ldots.(n-7)}{1.2.\ldots.8}x^{n-8} + \text{&c.}\right)$$

Huiufmodi ergo exempla non folum inferviunt ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, fed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum obfervantur, per fe funt notatu digniffimae, atque ad alias inventiones deducere poffunt.

CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium seu non algebraicarum genera, quae calculus integralis suppeditabit, in Introductione ad analysin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis usitatarum nobis pervenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus suggesserat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide exposuimus, ut fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite investigabimus, quo earum indoles ac proprietates clarius perspiciantur; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium est fons proprius, patefiat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicae, seu eiusmodi functiones ipsius x, quae praeter expressiones algebraicas quoque logarithmum ipsius x, seu cuiusvis ipsius functionis involvunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius facessant, omnis difficultas in inveniendo differentiali logarithmi cuiusque ipsius x functionis erit posita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diversa, quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumtus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio

huius

huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob causam lp perpetuo hic designabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p.

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x, ponaturque $y = lx$, ita ut differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x, sicque transibit y in $y' = y + dy$; quare habebitur

$$y + dy = l(x + dx) \text{ \& } dy = l(x + dx) - lx = l\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

At iam supra logarithmum hyperbolicum huiusmodi expressionis $1 + z$ ita per seriem infinitam expressimus, ut esset

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{ \&c.}$$

Posito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z, obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{\&c.}$$

Cum igitur huius seriei omnes termini prae primo evanescant, erit $d.\, lx = dy = \frac{dx}{x}$. Unde alius cuiuscunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio est ut $n : 1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181. Si igitur cuiusque ipsius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale esse $= \frac{dp}{p}$, unde ad logarithmorum differentialia invenienda haec habetur regula. *Quantitatis* p, *cuius logarithmus proponitur, sumatur differentiale, hocque per ipsam quantitatem* p *divisum dabit differentiale logarithmi quaesitum.* Se-

quitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^\omega - 1^\omega}{0}$, ad quam superiori libro logarithmum ipsius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum sit

$lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$: erit $d.lp = d.\frac{1}{\omega} p^\omega = p^{\omega-1} dp = \frac{dp}{p}$ ob $\omega = 0$.

Notandum autem est $\frac{dp}{p}$ esse differentiale logarithmi hyperbolici ipsius p; ita ut, si logarithmus vulgaris ipsius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inveniri poterit, quemadmodum ex sequentibus exemplis perspicietur:

I. Si sit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si sit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$, ut sit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At est $dp = nx^{n-1} dx$, unde fit $dy = \frac{ndx}{x}$.

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim sit $lx^n = nlx$, erit $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Si sit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2xdx}{1+xx}$.

IV. Si sit $y = l\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; quia erit $y = -l\sqrt{(1-xx)}$ $= -\frac{1}{2} l(1-xx)$, invenitur $dy = \frac{xdx}{1-xx}$.

V.

V. Si sit $y = l\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$;
fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si sit $y = l(x+\sqrt{(1+xx)})$, fiet
$dy = \frac{dx+xdx:\sqrt{(1+xx)}}{x+\sqrt{(1+xx)}} = \frac{xdx+dx\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$
cuius fractionis cum numerator ac denominator per
$x+\sqrt{(1+xx)}$ sit divisibilis fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

VII. Si sit $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$, ponatur
$x\sqrt{-1} = z$. Atque ob $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l(z+\sqrt{(1+zz)})$,
erit per praecedens $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, dz:\sqrt{(1+zz)}$.
Quare, ob $dz = dx\sqrt{-1}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Quamvis ergo logarithmus propositus imaginaria involvat, tamen eius differentiale fit reale.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resolvetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit
$y = lp+lq+lr+ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$.
Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim
$y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp+lq-lr-ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$.
Neque etiam potestates difficultatem movebunt, si enim fue-

fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$, erit $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum $dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2} l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2} l(1+x) - \frac{1}{2} l(1-x)$, hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si fit $y = \frac{1}{2} l\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, ob $y = \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x) - \frac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$. Hoc idem facilius invenitur, si in fractione $\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per $\sqrt{(1+xx)}+x$, prodibit enim

$$y = \tfrac{1}{2} l(\sqrt{(1+xx)}+x)^2 = l(\sqrt{(1+xx)}+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

IV. Si fit $y = l\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}$. Ponatur huius fractionis numerator $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)} = p$ & denominator $\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} = q$, erit $y = l\frac{p}{q} = lp - lq$,

& $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$. Est vero $dp = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}(\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}) = \frac{-q\,dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$; & $dq = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} + \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{p\,dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$. Hinc fiet $\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-q\,dx}{2p\sqrt{(1-xx)}} - \frac{p\,dx}{2q\sqrt{(1-xx)}} = \frac{-(pp+qq)\,dx}{2pq\sqrt{(1-xx)}}$. At est $pp + qq = 4$ & $pq = 2x$, unde erit $dy = -\frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$. Hoc autem differentiale facilius invenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y = l\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{x} = l\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)}\right).$$

Posito enim $\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = p$, erit

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\sqrt{\left(\frac{1}{xx}-1\right)}} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\sqrt{(1-xx)}}$$

$$= \frac{-dx(1+\sqrt{(1-xx)})}{xx\sqrt{(1-xx)}}, \text{ ideoque, ob } p = \frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{x},$$

erit $dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$ ut ante.

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx dividantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inveniuntur, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$y =$

$$y = lx \text{ , erit}$$

$$dy = \frac{dx}{x} \text{ , \& } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2} \text{ , \& } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3} \text{ , \& } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4} \text{ , \& } \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4}$$

Atque si p fuerit quantitas algebraica, sitque $y = lp$, etiamsi y non sit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipsius x.

185. Exposita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis solis componuntur; uti ex sequentibus exemplis fiet perspicuum.

I. Si sit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x} lx$.

II. Simili modo si sit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, unde, si sit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque si p fuerit functio quaecunque ipsius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia assignari possit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum.

IV. Si sit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quae-

cun-

eunque ipsius x, per regulam factorum supra datam erit

$$dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp.$$

V. Si sit $y = xlx$; erit per eandem regulam

$$dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx.$$

VI. Si sit $y = x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione secundum partes instituta, reperietur $d.x^m lx = mx^{m-1} dxlx + x^{m-1} dx$, & $d.\frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, unde erit $dy = mx^{m-1} dxlx$.

VII. Si sit $y = x^m (lx)^n$, fiet $dy = mx^{m-1} dx (lx)^n + nx^{m-1} dx (lx)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, uti si fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$; unde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Atque si fuerit $y = lllx$, si statuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{plp}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus substitutis habebitur $dy = \frac{dx}{xlx.llx}$.

186. Exposita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, seu eiusmodi potestates, quarum exponentes sint variabiles. Huiusmodi autem ipsius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inveniri possunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipsius a^x, ad quod investigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis sumendis $ly = xla$. Sumantur iam differentialia, atque obti-

nebitur $\frac{dy}{y} = dx la$; unde fit $dy = ydx la$, cum autem sit $y = a^x$, erit $dy = a^x dx la$, quod est differentiale ipsius a^x. Simili modo, si sit p functio quaecunque ipsius x, huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dp la$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione exposita deduci potest. Sit enim proposita a^p, denotante p functionem quamcunque ipsius x, quae, posito $x + dx$ loco x, abeat in $p + dp$. Unde si ponatur $y = a^p$, si x abeat in $x + dx$, erit $y + dy = a^p + dp$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p (a^{dp} - 1)$. Ostendimus autem supra, quamvis quantitatem exponentialem a^z, per huiusmodi seriem exprimi $1 + zla + \frac{z^2 (la)^2}{2} + \frac{z^3 (la)^3}{6} +$ &c.

unde erit $a^{dp} = 1 + dp la + \frac{dp^2 (la)^2}{2} +$ &c., & $a^{dp} - 1 = dp la$,

quia sequentes termini prae $dp la$ omnes evanescunt. Consequenter erit $dy = d.a^p = a^p dp la$. *Quare quantitatis exponentialis* a^p *differentiale erit productum ex ipsa quantitate exponentiali*, *exponentis differentiali* dp, *& logarithmo quantitatis constantis* a, *quae ad exponentem variabilem est evecta.*

188. Si igitur e sit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, ut sit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque si dx sumatur constans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod est differentiale secundum ipsius e^x. Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare si sit

$$y = e^{nx}, \text{ erit } \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$$

$$\text{porroque } \frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}; \quad \&c.$$

Unde patet ipsius e^{nx} differentialia primum, secundum & reli-

reliqua sequentia constituere progressionem geometricam: eritque ergo differentiale ordinis m ipsius $e^{nx} = y$, nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y dx^m}$ quantitas constans n^m.

189. Si ipsa quantitas, quae elevatur, fuerit variabilis, eius differentiale simili modo investigabitur. Sint p & q functiones quaecunque ipsius x, ac proponatur quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit $ly = qlp$, quibus differentiatis erit $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, unde fit

$dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$, ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale constat duobus membris, quorum prius $p^q dqlp$ oritur, si quantitas proposita p^q ita differentietur, quasi p esset quantitas constans, solusque exponens q variabilis: alterum vero membrum $qp^{q-1}dp$ oritur, si in quantitate proposita p^q exponens q tanquam constans spectetur, solaque quantitas p, quasi esset variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per regulam generalem differentiandi supra traditam inveniri potuisset.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, utique $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resolvatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)p^{q+dq-1}dp + \frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1.\ 2}p^{q+dq-2}dp^2 + \text{&c.}$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1}dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates involvunt, prae $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ evanescunt. At est

$p^{q+dq}-p^q=p^q(p^{dq}-1)=p^q\left(1+dqlp+\frac{dq^2(lp)^2}{2}+\text{&c.}-1\right)$
$=p^q dqlp$. In altero vero termino $(q+dq)p^{q+dq-1}dp$ si loco $q+dq$ scribamus q, orietur $qp^{q-1}dp$, ideoque differentiale erit ut ante $dy=p^q dqlp+qp^{q-1}dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium investigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $=1$, sit $p^q=e^{qlp}$, utriusque enim logarithmus est idem qlp; erit $y=e^{qlp}$. Quare, cum nunc quantitas elevata e sit constans, erit $dy=e^{qlp}\left(dqlp+\frac{qdp}{p}\right)$, uti ante ostendimus in regula §. 187. data. Restituatur igitur p^q loco e^{qlp}, fietque
$dy=p^q dqlp+p^q qdp:p=p^q dqlp+qp^{q-1}dp$.
Si igitur fuerit $y=x^x$, erit $dy=x^x dxlx+x^x dx$; atque hinc quoque eius ulteriora differentialia definientur: reperietur enim:

$$\frac{ddy}{dx^2}=x^x\left(\frac{1}{x}+(1+lx)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=x^x\left((1+lx)^3+\frac{3(1+lx)}{x}-\frac{1}{xx}\right)$$

&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatione formulae $e^x p$ originem habent; est autem

$$d.e^x p=e^x dp+e^x pdx=e^x(dp+pdx).$$

I. Si sit $y=e^x x^n$; erit $dy=e^x nx^{n-1}dx+e^x x^n dx$
seu $dy=e^x dx(nx^{n-1}+x^n)$

II. Si sit $y=e^x(x-1)$
Erit $dy=e^x x dx$.

III.

III. Si sit $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$
Erit $dy = e^x x x dx$.

IV. Si sit $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$
Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta instituetur. Sic si haec quantitas e^{e^x} differentiari debeat, statuatur $e^x = p$, ut sit $y = e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at est $dp = e^x dx$, unde si fuerit

$$y = e^{e^x}; \text{ erit } dy = e^{e^x} e^x dx,$$

atque si sit $y = e^{e^{e^x}}$; erit $dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$.

Quod si vero fuerit $y = p^{q^r}$, statuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dz lp + zp^{z-1} dp$, at $dz = q^r dr lq + rq^{r-1} dq$, unde $dy = p^z q^r dr lp lq + p^z rq^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$.

Quare si sit:

$$y = p^{q^r}, \text{ erit } dy = p^{q^r} q^r \left(dr lp lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inveniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem consideratio arcuum circularium nos supra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium constanter ponimus unitati aequalem, propositus arcus, cuius sinus sit

=

$= x$, quem arcum hoc modo exprimamus A sin x, huiusque arcus differentiale inveſtigemus, ſeu incrementum quod accipit, ſi ſinus x differentiali ſuo dx augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praeſtari poterit, quia in introductione oſtendimus hanc expreſſionem A sin x reduci poſſe ad hanc logarithmicam:

$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$. Poſito ergo $y = A \sin x$, erit quoque $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}}$$

unde fit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

195. Iſtud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius ſine logarithmorum ſubſidio inveniri poteſt. Si enim ſit $y = A \sin x$, erit x ſinus arcus y, ſeu $x = \sin y$. Cum igitur, poſito $x + dx$ loco x, abeat y in $y + dy$, fiet $x + dx = \sin(y + dy)$. At quia eſt

$\sin(a + b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$, erit

$\sin(y + dy) = \sin y . \cos dy + \cos y . \sin dy$:

arcus autem evaneſcentis dy ſinus ipſi illi arcui dy, eiuſque coſinus ſinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$\sin(y + dy) = \sin y + dy \cos y$, ideoque $x + dx = \sin y + dy \cos y$.

Quia vero eſt

$\sin y = x$, erit coſinus ipſius y ſeu $\cos y = \sqrt{(1 - xx)}$, quibus valoribus ſubſtitutis, erit $dx = dy\sqrt{(1 - xx)}$, ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$.

Ar-

Arcus ergo, cuius sinus proponitur, differentiale aequatur differentiali sinus per cosinum diviso.

196. Cum igitur, si p fuerit functio quaecunque ipsius x, atque y denotet arcum, cuius sinus est $= p$, seu $y = \text{A sin } p$, fit huius arcus differentiale $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, ubi $\sqrt{(1-pp)}$ exprimit cosinum eiusdem arcus, inveniri quoque poterit differentiale arcus, cuius cosinus proponitur. Sit enim $y = \text{A cos } x$, erit eiusdem arcus sinus $= \sqrt{(1-xx)}$, ideoque $y = \text{A sin } \sqrt{(1-xx)}$. Facto ergo $p = \sqrt{(1-xx)}$, erit $dp = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, & $\sqrt{(1-pp)} = x$; unde fiet $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. *Arcus ergo, cuius cosinus proponitur, differentiale aequatur differentiali cosinus negative sumto, atque per sinum eiusdem arcus diviso.* Quod etiam hoc modo ostendi potest: si sit $y = \text{A cos } x$, ponatur $z = \text{A sin } x$, erit $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ at arcus $y + z$ simul sumti dant arcum constantem 90°, eritque $y + z =$ constans ideoque $dy + dz = 0$, seu $dy = -dz$; unde fit $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ut ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita ut sit $y = \text{A tang } x$. Arcus autem cuius tangens est x, sinus erit $= \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, & cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$. Posito ergo $\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} = p$, ut sit $\sqrt{(1-pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$, fiet $y = \text{A sin } p$: unde per regulam modo datam erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At, ob $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, erit $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$;

qui-

quibus valoribus substitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. *Arcus ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur differentiali tangentis per quadratum secantis diviso.* Est enim $\sqrt{(1+xx)}$ secans, si x sit tangens.

198. Simili modo si proponatur arcus, cuius cotangens datur, ita ut sit $y = A \cot x$; quia eiusdem arcus tangens est $= \frac{1}{x}$, posito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = A \tang p$, ac propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc sit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta substitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod est differentiale cotangentis negative sumtum, atque per quadratum cosecantis divisum. Porro si proponatur $y = A \sec x$, quia est $y = A \cos \frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Atque, si sit $y = A \operatorname{cosec} x$, erit $y = A \sin \frac{1}{x}$, ideoque $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Saepe etiam sinus versus occurrit, ita si proponatur $y = A \operatorname{sv} x$, quia est $y = A \cos(1-x)$, huiusque arcus sinus est $= \sqrt{(2x-xx)}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

199. Quamquam ergo arcus, cuius sinus, vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel denique sinus versus datur, est quantitas transcendens, tamen eius differentiale, si per dx dividatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia secunda, tertia, quarta &c. si per potestates ipsius dx convenienter dividantur.

tur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus sequentia exempla.

I. Si sit $y = A \sin 2x\sqrt{(1-xx)}$, ponatur $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$, ut sit $y = A \sin p$, eritque $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At est $dp = 2\,dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xx\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2\,dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}}$, & $\sqrt{(1-pp)} = 1-2xx$, quibus valoribus substitutis, erit $dy = \frac{2\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\sqrt{(1-xx)}$ sit sinus arcus dupli, dum x est sinus simpli, erit ergo $y = 2A \sin x$, ideoque $dy = \frac{2\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Si sit $y = A \sin \frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4x\,dx}{(1+xx)^2}$ & $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, erit $dy = \frac{-2\,dx}{1+xx}$.

III. Si sit $y = A \sin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$, ponatur $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$, erit $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, & $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)}}$, unde fit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Si sit $y = A \tan \frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$, erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2\,dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare

cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197), erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si sit $y = A\,\text{tang}\,\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, posito $p = \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, & $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$.

Atqui $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$.

Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod etiam inde intelligitur, quod sit $A\,\text{tang}\,\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = \frac{1}{2}A\,\text{tang}\,x$.

VI. Si sit $y = e^{A\,\text{fin}\,x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{A\,\text{fin}\,x}\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hoc ergo modo omnes functiones ipsius x, in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx divisa sunt quantitates algebraicae, eorum differentialia secunda & sequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione exposuimus, invenientur. Sit $y = A\,\text{fin}\,x$, quia est $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, cuius differentiale dabit valorem pro ddy

$\frac{ddy}{dx^2}$, si quidem dx sumatur constans: unde differentialia ipsius y cuiusvis ordinis ita se habebunt.

Si sit $y = A \sin x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}; \text{ & sumto } dx \text{ constante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

unde concludimus ut supra §. 177. fore generaliter:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}x^{n-6} + \text{&c.}\right)$$

201. Supersunt quantitates, quae ex harum inversione nascuntur, scilicet sinus, tangentesve arcuum datorum, quas quomodo differentiare oporteat, ostendamus. Sit igitur x arcus circuli,

& $\sin x$ denotet eius sinum, cuius differentiale investigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x + dx$ loco x, quia y abit in $y + dy$, erit $y + dy = \sin(x + dx)$, & $dy = \sin(x + dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x + dx) = \sin x . \cos dx + \cos x . \sin dx$. atque cum sit, uti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{ &c.}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{ &c.}$$

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d . \sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x, cuius differentiale investigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x + dx$ loco x, fiet $y + dy = \cos(x + dx)$. Est vero $\cos(x + dx) = \cos x . \cos dx - \sin x . \sin dx$, & quia ut modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y + dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = -dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negative sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x, erit $d . \cos p = -dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = \sqrt{(1 - yy)}$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, ut ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $\sqrt{(1 - yy)} = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{-dy}{\sin p}$, unde fit ut ante $dy = -dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \text{tang}\, x$, erit $dy = \text{tang}\,(x+dx) - \text{tang}\, x$; at est $\text{tang}\,(x+dx) = \frac{\text{tang}\, x + \text{tang}\, dx}{1 - \text{tang}\, x . \text{tang}\, dx}$, a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit $dy = \frac{\text{tang}\, dx\,(1 + \text{tang}\, x . \text{tang}\, x)}{1 - \text{tang}\, x . \text{tang}\, dx}$. Verum arcus evanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque $\text{tang}\, dx = dx$, & denominator $1 - dx \,\text{tang}\, x$, abit in unitatem: quocirca fiet $dy = dx\,(1 + \text{tang}\, x^2)$. Est vero $1 + \text{tang}\, x^2 = \text{sec}\, x^2 = \frac{1}{\text{cos}\, x^2}$, denotante $\text{cos}\, x^2$ quadratum cosinus ipsius x: consequenter si fuerit $y = \text{tang}\, x$, erit $dy = dx\, \text{sec}\, x^2 = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2}$. Quod differentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inveniri potest; cum enim sit $\text{tang}\, x = \frac{\text{sin}\, x}{\text{cos}\, x}$, erit

$$dy = \frac{dx\, \text{cos}\, x . \text{cos}\, x + dx\, \text{sin}\, x . \text{sin}\, x}{\text{cos}\, x^2} = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2},$$

ob $\text{sin}\, x^2 + \text{cos}\, x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale invenitur. Cum sit $y = \text{tang}\, x$, erit $x = \text{A tang}\, y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1+yy}$. At cum sit $y = \text{tang}\, x^1$, erit $\sqrt{(1+yy)} = \text{sec}\, x = \frac{1}{\text{cos}\, x}$, ideoque $dx = dy\, \text{cos}\, x^2$, & $dy = \frac{dx}{\text{cos}\, x^2}$, ut ante. *Tangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diviso per quadratum cosinus eiusdem arcus.* Simili modo si proponatur $y = \text{cot}\, x$, fiet $x = \text{A cot}\, y$, & $dx = \frac{-dy}{1+yy}$. At vero erit

$\sqrt{(1+yy)} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, unde habebitur $dx = -dy \sin x^2$, & $dy = \frac{-dx}{\sin x^2}$. *Cotangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus negative sumto ac per quadratum sinus eiusdem arcus diviso.* Vel quia est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx \sin x^2 - dx \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2},$$

uti modo invenimus.

205. Si proponatur secans arcus, ut sit $y = \sec x$, quia erit $y = \frac{1}{\cos x}$, erit $dy = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \tan x . \sec x$. Simili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec} x$, ob $y = \frac{1}{\sin x}$, erit $dy = \frac{-dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec} x$, pro quibus casibus peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur $y = \text{sv}.x$, quia est $y = 1 - \cos x$, erit $dy = dx \sin x$. Omnes ergo casus, quibus linea quaepiam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per sinum cosinumve exprimi potest, sine difficultate differentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia prima, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas invenientur. Ponamus esse $y = \sin x$ & $z = \cos x$, atque dx esse constans: erit ut sequitur:

$y = \sin x$	$z = \cos x$
$dy = dx \cos x$	$dz = -dx \sin x$
$ddy = -dx^2 \sin x$	$ddz = -dx^2 \cos x$
$d^3y = -dx^3 \cos x$	$d^3z = dx^3 \sin x$
$d^4y = dx^4 \sin x$	$d^4z = dx^4 \cos x$
&c.	&c.

206.

206. Simili modo inveniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x. Sit enim $y = \text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, & ponatur dx constans, erit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin x}{\cos x^5} - \frac{8 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos x^6} - \frac{120}{\cos x^4} + \frac{16}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \sin x}{\cos x^7} - \frac{480 \sin x}{\cos x^5} + \frac{32 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\cos x^8} - \frac{6720}{\cos x^6} + \frac{2016}{\cos x^4} - \frac{64}{\cos x^2}$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas sinus vel cosinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, uti ex sequentibus exemplis videre licet.

I. Si sit $y = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$

Erit $dy = 2\, dx \cos x^2 - 2\, dx \sin x^2 = 2\, dx \cos 2x$.

II. Si sit $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, vel $y = \sin \frac{1}{2} x$

Erit

Erit $dy = \frac{dx \sin x}{2\sqrt{2(1-\cos x)}}$. Cum autem sit $\sqrt{2(1-\cos x)} = 2\sin\frac{1}{2}x$, & $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x$; fiet $dy = \frac{1}{2}dx.\cos\frac{1}{2}x$, uti ex forma $y = \sin\frac{1}{2}x$ immediate sequitur.

III. Si sit $y = \cos l\frac{1}{x}$; erit, posito $l\frac{1}{x} = p$, $y = \cos p$, & $dy = -dp\sin p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x}\sin l\frac{1}{x}$.

IV. Si sit $y = e^{\sin x}$; erit $dy = e^{\sin x}\,dx\cos x$.

V. Si sit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}}\,ndx\sin x}{\cos x^2}$.

VI. Si sit $y = l\left(1-\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)$; ponatur $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1-\sqrt{(1-p)})$, erit $dy = \frac{dp}{2(1-\sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}$. At est $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}}\,ndx\cos x}{\sin x^2}$.

Quo valore substituto prodibit

$$dy = \frac{n\,e^{\frac{-n}{\sin x}}\,dx\cos x}{2\sin x^2\left(1-\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}}$$

CA-

CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESVE VARIABILES INVOLVENTIUM.

208.

Si duae pluresve quantitates variabiles x, y, z a se invicem prorsus non pendeant, fieri potest, ut etiamsi omnes sint variabiles, tamen dum una crescit decrescitve, reliquae maneant invariatae: quia enim nullum nexum inter se habere ponuntur, immutatio unius reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendebunt a differentiali ipsius x; ideoque dum x differentiali suo dx augetur, quantitates y & z, vel eaedem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari possunt. Quodsi igitur differentiale quantitatis x statuatur dx, reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio nostro vel prorsus nihil, vel infinite parva ad dx quamvis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipsius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non spectatur, significare solent, hocque casu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Sive autem y & z pendeant ab x sive secus, ratio differentiationis, quam hic spectamus, eodem redit. Quaerimus enim functionis, quae ex pluribus variabilibus x, y, & z utcunque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variabiles x, y, & z suis differentialibus dx, dy, & dz crescunt. Ad hoc ergo inveniendum in functione proposita ubique loco variabilium quantitatum x, y, z scribatur respective $x+dx; y+dy; z+dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur,

quemadmodum ex natura differentialium luculenter conſtat.

210. Sit X functio ipſius x, eiuſque differentiale, ſeu augmentum, dum x differentiali ſuo dx creſcit, ſit $= P dx$. Deinde ſit Y functio ipſius y, eiuſque differentiale $= Q dy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y + dy$: atque Z ſit functio ipſius z, eiuſque differentiale ſit $= R dz$, quae differentialia $P dx$, $Q dy$, $R dz$ ex natura functionum X, Y, & Z ope praeceptorum ſupra datorum inveniri poterunt. Quod ſi ergo propoſita fuerit haec quantitas $X + Y + Z$, quae utique erit functio trium variabilium x, y, & z, eius differentiale erit $= P dx + Q dy + R dz$. Utrum autem haec tria differentialia ſint inter ſe homogenea nec ne perinde eſt. Termini enim qui continent poteſtates ipſius dx prae $P dx$ aeque evaneſcunt, ac ſi reliqua membra $Q dy$ & $R dz$ abeſſent; ſimiliſque eſt ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z ſunt neglecti.

211. Retineant X, Y & Z eaſdem ſignificationes, ſitque propoſita iſta functio XYZ ipſarum x, y & z, cuius differentiale inveſtigari oporteat. Quoniam, ſi $x + dx$ loco x, $y + dy$ loco y, & $z + dz$ loco z ſcribatur, abit X in $X + P dx$; Y in $Y + Q dy$; & Z in $Z + R dz$, ipſa functio propoſita XYZ abibit in

$$(X + P dx)(Y + Q dy)(Z + R dz)$$
$$= XYZ + YZP\,dx + XZQ\,dy + XYR\,dz$$
$$+ ZPQ\,dx dy + YPR\,dx dz + XQR\,dy dz + PQR\,dx dy dz.$$

At quia dx, dy, & dz ſunt infinite parva, ſive inter ſe ſint homogenea ſive non; ultimus terminus prae unoquoque praecedentium evaneſcit. Deinde terminus $ZPQ\,dx dy$ tam prae $YZP\,dx$ quam prae $XZQ\,dy$ evaneſcit; atque ob eandem rationem termini $YPR\,dx dz$ & $XQZ\,dy dz$ evaneſcent. Ablata ergo ipſa functione propoſita XYZ, erit eius differentiale

$$= YZP\,dx + XZQ\,dy + XYR\,dz.$$

212. Exempla haec functionum trium variabilium x, y, & z, quibus pro lubitu quiſque plura adiicere poteſt, ſufficiunt

ciunt ad ostendendum, si functio quaecunque trium variabilium x, y, & z proponatur, utcunque etiam hae variabiles inter se fuerint permixtae, eius differentiale semper huiusmodi formam esse habiturum $pdx + qdy + rdz$: ubi p, q, & r futurae sint singulae functiones, vel omnium trium variabilium x, y, & z, vel binarum, vel unius tantum, prout ratio compositionis, qua functio proposita ex variabilibus x, y, & z atque constantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, si proponatur functio quatuor pluriumve variabilium x, y, z, & v, eius differentiale semper huius modi formam habebit

$$pdx + qdy + rdz + sdv.$$

213. Consideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y, quae sit $= V$, cuius ergo differentiale ita se habebit, ut sit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y assumeretur constans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale esset pdx: sin autem x statueretur constans, ut esset $dx = 0$, solaque y maneret variabilis, tum ipsius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur utraque quantitate x & y variabili posita sit $dV = pdx + qdy$, ista regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y involvente resultabit: *Ponatur primum sola* x *variabilis, altera vero* y *tanquam constans tractetur, & quaeratur ipsius* V *differentiale, quod sit* $= pdx$. *Deinde ponatur sola quantitas* y *variabilis, altera* x *pro constanti habita, & quaeratur ipsius* V *differentiale, quod sit* $= qdy$. *Quibus factis, posita utraque quantitate* x *&* y *variabili, fiet* $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y, & z, quae sit $= V$, differentiale huiusmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifestum est, si sola quantitas x fuisset variabilis posita, reliquae vero y & z constantes mansissent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiisset ipsius V differentiale $= pdx$. Pari modo inveniretur differentiale ipsius $V = qdy$, si x & z essent constantes solaque y poneretur variabilis; atque si x & y tanquam constantes tractarentur sola-

que z statueretur variabilis, prodiret differentiale ipsius $V = rdz$. Quare ad functionem trium pluriumve variabilium differentiandam, consideretur seorsim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quasi reliquae omnes essent constantes; tum singula haec differentialia, quae ex singulis quantitatibus variabilibus sunt inventa, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaesitum functionis propositae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium invenimus, continetur demonstratio regulae supra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque unicam variabilem complectens differentiari potest. Si enim pro singulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diversae collocentur, functio speciem induet functionis totidem diversarum variabilium, atque adeo modo hic praescripto differentiabitur, successive unamquamque partem, quasi sola esset variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex singulis partibus oriuntur, in unam summam coniiciendo: quae summa erit differentiale quaesitum, postquam pro singulis litteris valores fuerint restituti. Haec ergo regula latissime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Unde eius usus per universum calculum differentialem est amplissimus.

216. Inventa ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiari possunt, eius usum in nonnullis exemplis ostendisse iuvabit.

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = xdy + ydx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; erit

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV.

IV. Si fuerit $V=(\alpha x+\beta y+\gamma)^m(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^n$; erit

$$dV = m(\alpha x+\beta y+\gamma)^{m-1}(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^n(\alpha dx+\beta dy) + n(\alpha x+\beta y+\gamma)^m(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^{n-1}(\delta dx+\varepsilon dy),$$

sive $dV=(\alpha x+\beta y+\gamma)^{m-1}(\delta x+\varepsilon y+\zeta)^{n-1}$ in

$$\begin{pmatrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{pmatrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx + \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \Big).$$

V. Si fuerit $V=y/x$; erit $dV=dy/x+\frac{ydx}{x}$.

VI. Si fuerit $V=x^y$; erit $dV=yx^{y-1}dx+x^y dy/x$.

VII. Si fuerit $V=A\,\text{tang}\frac{y}{x}$; erit $dV=\frac{xdy-ydx}{xx+yy}$.

VIII. Si fuerit $V=\sin x.\cos y$; erit $dV=dx\cos x.\cos y-dy\sin x.\sin y$.

IX. Si fuerit $V=\frac{e^z y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; erit

$$dV=\frac{e^z y dz}{\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{e^z(xxdy-yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)}}.$$

X. Si fuerit $V=e^z A\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}}$,

reperietur $dV=e^z dz A\sin\frac{x-\sqrt{(xx-yy)}}{x+\sqrt{(xx-yy)}}$

$$+e^z.\frac{xydy-yydx}{(x+\sqrt{(xx-yy)})\,(xx-yy)^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}$$

217. Quoniam vidimus, si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x & y, eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV=Pdx+Qdy$, in qua sint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: sequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo

do etiam a se invicem pendere, propterea quod utraque ab eadem functione V pendet. Quicunque igitur sit iste nexus inter quantitates finitas P & Q, quem deinceps investigabimus, perspicuum est, non omnes formulas differentiales huiusmodi $Pdx+Qdy$, in quibus P & Q pro lubitu sint ex x & y formatae, posse esse differentialia cuiuspiam functionis finitae V ipsarum x & y. Nisi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiusmodi differentiale $Pdx+Qdy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque vicissim integrale non habebit.

218. In integratione igitur plurimum interest nosse hanc relationem inter quantitates P & Q, ut differentialia, quae revera ex differentiatione functionis cuiuspiam finitae sunt orta, dignosci queant ab iis, quae ad libitum sunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quanquam autem hic nondum integrationis negotium suscipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitius inspiciendam conveniet hanc relationem investigari; quippe cuius cognitio non solum ad calculum integralem, ad quem hic viam paramus, est maxime necessaria, sed etiam in ipso calculo differentiali insignem lucem accendit. Primum igitur patet, si V sit functio duarum variabilium x & y, in eius differentiali $Pdx+Qdy$ utriusque differentiale dx & dy inesse oportere. Neque ergo potest esse $P=0$ neque $Q=0$. Hinc si P fuerit functio ipsarum x & y, formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit esse differentiale, seu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale sit Pdx.

219. Sic nulla datur quantitas finita V sive algebraica sive transcendens, cuius differentiale sit $yxdx$, si quidem sit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiusmodi quantitatem finitam V, quia y in eius differentiale ingreditur, necesse est, ut y quoque in ipsa quantitate V insit; verum si V contineret y, ob variabilitatem ipsius y ne-

necessario quoque in differentiali ipsius V differentiale dy inesse deberet. Quod tamen cum non adsit, fieri nequit, ut differentiale $yxdx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione sit ortum. Cum igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit 0, & P contineat y, differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ investigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y: a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione V quantitas x prorsus evanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t. Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdy$ ubique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$, quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est ut sit $P + Qt = 0$; ideoque $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, seu erit $Px + Qy = 0$, unde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t, hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y. Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y.

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y, quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$, semper ita erit comparatum, ut sit $Px + Qy = 0$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y, resultabit quantitas $= 0$: uti in his exemplis usu venire patet:

I.

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy, erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{\sqrt{(xx-yy)}}$, erit $dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx-yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde fit $\frac{-yyx + yyx}{(xx-yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + \sqrt{(xx+yy)}}{-y + \sqrt{(xx+yy)}}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y; erit

$dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(\sqrt{(xx+yy)} - y)^2 \sqrt{(xx+yy)}}$, quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = l\frac{x+y}{x-y}$; erit $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A\sin\frac{\sqrt{(x-y)}}{\sqrt{(x+y)}}$, erit $dV = \frac{ydx - xdy}{(x+y)\sqrt{2y(x-y)}}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y. Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n, existente T functione ipsius t, sitque

$dT = \Theta dt$, erit $dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1}dx$.

Quodsi ergo statuamus:

$dV = Pdx + Qdy$, ob $dy = tdx + xdt$,

fiet $dV = Pdx + Qtdx + Qxdt$:

quae

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \text{ ob } V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, ut si altera sit cognita, altera facile inveniatur. Quia porro est $Qx = x^n \Theta$, erit Qx, ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y.

223. Si ergo in differentiali cuiusvis functionis homogeneae ipsarum x & y, loco dx & dy, ponatur x & y, quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si sit $V = \sqrt{(xx+yy)}$; erit $n = 1$, & ob $dV = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(xx+yy)}}$, fiet $\frac{xx+yy}{\sqrt{(xx+yy)}} = V = \sqrt{(xx+yy)}$.

II. Si sit $V = \frac{y^3+x^3}{y-x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2},$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Si sit $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$, erit $n = -4$, atque $dV = -\frac{4ydy + 4xdx}{(yy+xx)^3}$. Quae formula positis x & y loco dx & dy abit in $-\frac{4yy+4xx}{(yy+xx)^3} = -4V$.

IV. Si sit $V = xxl\frac{y+x}{y-x}$; erit $n = 2$, atque

$dV = 2xdxl\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}$, facta autem memorata substitutione oritur $2xxl\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

224. Similis proprietas observabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium, sit ergo V functio quantitatum x, y, z, quae coniunctim ubique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $Pdx + Qdy + Rdz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, ut sit $dy = tdx + xdt$, & $dz = sdx + xds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n, existente U functione binarum variabilium t & s; hinc ergo si statuatur $dU = pdt + qds$, fiet

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

unde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quotcunque plures variabiles extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quotcunque variabilium x, y, z, v, &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, ut si loco differentialium dx, dy, dz, dv, &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v, &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea unicae tantum variabilis x: Hoc enim casu erit V potestas ipsius x, puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia da-

datur functio ipsius x, in qua x ubique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n. Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx, atque prodibit nax^n, hoc est nV. Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur, cum in calculo integrali maximam afferat utilitatem.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q, quae differentiale $Pdx+Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituunt, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y; atque ponamus V abire in R, si loco x ponatur $x+dx$; posito autem $y+dy$ loco y abeat V in S: quodsi autem simul $x+dx$ loco x, & $y+dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^1. Cum itaque R oriatur ex V, posito $x+dx$ loco x, manifestum est si ulterius in R ponatur $y+dy$ loco y, tum prodire V^1; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x+dx$ loco x, & $y+dy$ loco y. Simili modo si in S ponatur $x+dx$ loco x, quia S iam orta est ex V posito $y+dy$ loco y, denuo prodibit V^1; uti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x+dx$
V	S	y	$y+dy$
V	V^1	x	$x+dx$
		y	$y+dy$
R	V^1	y	$y+dy$
S	V^1	x	$x+dx$

227. Si igitur V ita differentietur, ut tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia posito

sito $x+dx$ loco x, functio V abit in R, eius differentiale erit $=R-V$; at ex forma $dV=Pdx+Qdy$, sequitur idem differentiale fore $=Pdx$, unde erit $R-V=Pdx$. Quod si iam loco y ponatur $y+dy$, x vero tanquam constans tractetur, quia R abit in V^I & V in S, quantitas $R-V$ abibit in V^I-S; ideoque ipsius $R-V=Pdx$ differentiale, quod oritur si sola y variabilis assumatur, erit $V^I-R-S+V$. simili modo, cum posito $y+dy$ loco y, abeat V in S, erit $S-V$ differentiale ipsius V posita sola y variabili, eritque propterea $S-V=Qdy$; nunc quia loco x posito $x+dx$, transit S in V^I & V in R, quantitas $S-V$ abibit in V^I-R; atque ipsius $S-V=Qdy$ differentiale, quod oritur si sola x variabilis statuatur, erit $=V^I-R-S+V$, quod prorsus congruit cum differentiali ante invento.

228. Ex hac convenientia deducitur sequens conclusio: Si functionis V cuiuscunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV=Pdx+Qdy$, tum differentiale ipsius Pdx quod oritur si sola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam constans tractetur, aequale erit differentiali ipsius Qdy, quod oritur si sola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur. Si scilicet posita sola y variabili fuerit $dP=Zdy$ erit differentiale ipsius Pdx praescripto modo sumtum $=Zdxdy$; atque posita sola x variabili erit quoque $dQ=Zdx$; sic enim differentiale ipsius Qdy praescripto modo sumtum fiet quoque $=Zdxdy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc consistit, ut differentiale ipsius Pdx posito x constante aequale sit differentiali ipsius Qdy posito y constante.

229. Ista insignis proprietas clarius perspicietur, si eam nonnullis exemplis illustremus.

I. Sit igitur $V=yx$; erit $dV=ydx+xdy$, ideoque $P=y$ & $Q=x$; unde posito x constante erit $d.Pdx=dxdy$, & posito y constante erit $d.Qdy=dxdy$, sicque haec duo differentialia inter se aequantur.

II. Sit $V = \sqrt{(xx+2xy)}$; erit $dV = \frac{xdx+ydx+xdy}{\sqrt{(xx+2xy)}}$, ideoque $P = \frac{x+y}{\sqrt{(xx+2xy)}}$, & $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx+2xy)}}$, unde posito x constante erit $d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx+2xy)^{\frac{1}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Qdy = \frac{xydxdy}{(xx+2xy)^{\frac{1}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin A\,y + y \sin A\,x$; eritque $dV = dx \sin Ay + xdy \cos y + dy \sin A\,x + ydx \cos x$.

Quare erit

$$Pdx = dx \sin Ay + ydx \cos x,$$

& $$Qdy = dy \sin Ax + xdy \cos y.$$

Posito ergo x constante erit

$$d.Pdx = dxdy \cos y + dxdy \cos x,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = dxdy \cos y + dxdy \cos x.$$

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dylx + yx^{y-1}dx$, atque $Pdx = yx^{y-1}dx$, & $Qdy = x^y dylx$.

Quamobrem posito x constante habebitur

$$d.Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdylx,$$

& posito y constante erit

$$d.Qdy = yx^{y-1}dxdylx + x^{y-1}dxdy.$$

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, unde eximia omnium functionum, quae duas variabiles involvunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post du-

duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inverso functio V primum posita sola y variabili differentiaretur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentiaretur: utroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Zdxdy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy, horum differentialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstravimus. Ceterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§. 227) allato.

231. Relatio inter P & Q, si $Pdx+Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y, differentientur ambae posita utraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$

fit $dP = pdx + rdy$

& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit

$dP = rdy$, & $d.Pdx = rdxdy$.

Deinde posito y constante erit

$dQ = qdx$, & $d.Qdy = qdxdy$.

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter se aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita invicem connectuntur, ut si ambae differentientur, uti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Brevitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, ut r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, qua scriptura designatur P ita differentiari, ut sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy dividatur: sic enim prodibit quantitas finita r. Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ quan-

quantitatem finitam q, quia hac ratione indicatur functionem Q sola x posita variabili differentiari, tumque differentiale per dx dividi debere.

232. Utamur ergo hoc scribendi modo, etiamsi aliae ambiguitatem afferre possit, quae tamen hic per clausulas evitatur, ut ambages in describendis differentiandi conditionibus evitemus, sicque breviter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, ut dicamus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi scilicet fractionibus denominator praeter propriam significationem, qua numerator per eum dividi debet, indicat numeratoris differentiale ita esse capiendum, ut ea sola quantitas cuius differentiale denominatorem constituit, tanquam variabilis spectetur. Hoc enim modo per divisionem differentialia prorsus ex calculo egredientur, istaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praesenti casu erunt inter se aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, ut sit $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, si quidem ut monitum est, differentiatio numeratoris per denominatorem restringatur.

233. Consentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis inesse ostendimus. Sit enim V functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y, ponaturque $dV = Pdx + Qdy$, atque demonstravimus fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}. \text{ Sit } dP = pdx + rdy;$$

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, cui aequale esse $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita ostendetur. Differentietur Q posita sola x variabili, & quia in

hac

hac hypotheſi eſt $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$, fiet $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$, debebitque eſſe $\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r$ ſeu $(n-1)P = px + ry$. Quae aequalitas inde fit perſpicua, quod P ſit functio homogenea $n-1$ dimenſionum ipſarum x & y, unde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet eſſe comparatum, ut ſit $(n-1)P = px + ry$.

234. Iſta proprietas, quod ſit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem eſſe oſtendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumve variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod ſi igitur in hac differentiatione z tanquam conſtans tractaretur, foret utique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem caſu per antecedentia debet eſſe $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde ſi quantitas y conſtans aſſumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique poſito x conſtante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P, Q, & R ita a ſe invicem pendent, ut ſit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$; & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$.

235. Sequitur hinc iſta functionum, quae tres pluresve va-

variabiles involvunt, proprietas analoga ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, eaque continuo ter differentietur, ita ut primum una quantitatum, puta x, sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y, atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Ldxdydz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x, y, & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Ldxdydz$ pervenietur, quoniam ordo quantitatum x, y, & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, utcunque ordo quantitatum x, y, & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P, Q, & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx, quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdxdy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dxdydz$ fuerit divisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variabiles hoc ordine y, x, z, atque prima differentiatio dabit Qdy, secunda $sdxdy$, & tertia (facta divisione per $dxdydz$) dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ ut ante. Disponantur variabiles hoc ordine z, y, x, ac prima differentia-

tiatio dabit Rdz secunda $udydz$, tertia vero post divisionem per $dxdydz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$. At cum posito y constante sit $dQ = sdx + udz$; erit $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, uti pariter est demonstratum.

237. Ponamus esse $V = \frac{xxy}{aa - zz}$; hancque functionem toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari potest:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
posito variabili	solo x	solo y	solo z
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo x	solo z	solo y
	$\frac{2xydx}{aa - zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo x	solo z
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo z	solo x
	$\frac{xxdy}{aa - zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo x	solo y
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo y	solo x
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variabiles fuerint

rint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4\alpha\alpha dx dy dz}{(aa-zz)^2}$.

238. Uti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est perventum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus, quae secunda differentiatio suppeditavit. In iis scilicet expressio quaevis bis occurrit; unde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales, atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dxdydz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quotcunque variabilium x, y, z, v, u, &c. eaque successive aliquoties differentietur, ut semper unica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perveniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Zdxdy$, dum in altera sola x, in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est utra prius, posteriusve sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Zdxdydz$; atque viginti quatuor variis modis pervenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Zdxdydzdv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita levi attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, ut non solum has proprietates ipsi diligenter meditentur, earumque veritatem scrutentur, sed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto sibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos postmodum facilius percipere

queant. Neque vero solum tyrones, sed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam sunt imbuti, ad hoc sunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyseos partem hoc argumentum penitus praetermitti solet. Plerumque enim Auctores solas differentiationis regulas praescripsisse, earumque usum in Geometria sublimiori ostendisse fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquisiverunt; unde tamen maxima subsidia in calculum integralem redundant. Quam ob causam hoc argumentum fere novum in isto Capite fusius persequi visum est, quo simul via ad integrationes alias difficiliores pararetur, atque negotium postea suscipiendum sublevaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresve variabiles involventium gaudent, facile poterimus dignoscere, utrum formula differentialis proposita, in qua occurrunt duae pluresve variabiles, sit orta ex differentiatione cuiusplam functionis finitae an secus. Si enim in formula $Pdx+Qdy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam existere functionem ipsarum x & y, cuius differentiale sit $=Pdx+Qdy$: neque ergo infra in calculo integrali huiusmodi formulae integrale indagari potest. Sic cum in $ydx+xdy$ requisita conditio non adsit, nulla datur functio, cuius differentiale est $=ydx+xdy$. Utrum autem semper, quoties est $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ formula ex differentiatione cuiusplam functionis sit orta, quaestio est, quae demum ex integrationis principiis solide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali proposita tres pluresve insint variabiles, uti $Pdx+Qdy+Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxisse omnino nequit, nisi tres istae conditiones in ea locum habeant, ut sit

dP

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$; & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$;

Quarum conditionum, si una tantum desit, certo affirmare debemus, nullam extare functionem ipsarum x, y, & z, cuius differentiale sit $Pdx + Qdy + Rdz$; huius modi ergo formularum differentialium nequidem requiri possunt integralia, hincque integrationem prorsus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignosci oportere, utrum integrationis sint capaces, quam investigatio integralis actu suscipiatur.



CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM ULTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si unica variabilis adsit, eiusque differentiale primum constans assumatur, supra iam methodus est tradita differentialia cuiusque gradus inveniendi. Scilicet si functionis cuiusvis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale secundum, hocque iterum differentiatum dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, sive functio plures involvat variabiles sive unicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur constans. Sit igitur V functio quaecunque ipsius x, neque vero dx sit constans, sed utcunque variabile, ita ut ipsius dx differentiale sit $= ddx$, huiusque differentiale $= d^3x$, & ita porro, atque investigemus differentialia secundum & sequentia functionis V.

243. Ponamus differentiale primum functionis V esse $= P dx$, ubi erit P functio quaepiam ipsius x pendens ab V. Si iam functionis V differentiale secundum invenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum sit productum ex duabus quantitatibus variabilibus P & dx, quarum illius differentiale sit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale ddx, per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo ulteriora differentialia invenientur.

244. Applicemus haec ad poteſtates ipſius x, quarum ſingula differentialia inveſtigemus, ſi dx non ponatur conſtans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;
$d^3V = d^3x$; $d^4V = d^4x$;
&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &
$ddV = 2xddx + 2dx^2$
$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$
$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$
$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$
&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit
$dV = nx^{n-1}dx$
$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$
$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx$
$+ n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$
$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x$
$+ 3n(n-1)x^{n-2}dd x^2$
$+ 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx$
$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$
&c.

Si igitur fuerit dx conſtans, ac propterea
$ddx = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$, &c.
orientur eadem differentialia, quae iam ſupra pro hac hypotheſi ſunt inventa.

245. Quoniam igitur differentialia cuiuſque ordinis ipſius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expreſſiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, ſecundum praecepta ſupra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illuſtrabimus.

I.

I. Si fuerit $V = \frac{x\,ddx}{dx^2}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{x\,d^3x}{dx^3} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x\,ddx^2}{dx^3}.$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$; erit $dV = 1 - \frac{x\,ddx}{dx^2}$,

ubi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam posuimus.

III. Si fuerit $V = xxl\frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

V in $xxlddx - 2xxldx$;

erit secundum regulas consuetas differentiando:

$$dV = 2xdxlddx + \frac{xxd^3x}{ddx} - 4xdxldx - \frac{2xxddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipsius V reperientur.

246. Si expressio proposita duas variabiles involvat, nempe x & y, vel unius differentiale ponitur constans vel neutrius; arbitrarium enim est alterutrius differentiale constans assumi, quia ab arbitrio nostro pendet, quemadmodum unius valores successivos crescere statuere velimus. Neque vero utriusque variabilis differentialia simul statui possunt constantia, hoc ipso enim relatio inter variabiles x & y assumeretur, quae tamen vel nulla est, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter crescere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere statueretur, tum eo ipso indicaretur fore $y = ax + b$; sicque y ab x penderet, quod tamen assumere non licet. Hancobrem vel unius tantum variabilis differentiale constans assumi potest vel nullum. Quodsi autem differentiationes absolvere noverimus nullo differentiali assumto constante, simul quoque differentialia constabunt, si alterutrum differentiale ponatur constans: tantum enim opus est, ut si

dx

dx constans statuatur, ubique termini continentes ddx, d^3x, d^4x, &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipsarum x & y, sitque $dV = Pdx + Qdy$. Ad differentiale ipsius V secundum inveniendum assumamus utrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q sint functiones ipsarum x & y statuamus:

$$dP = pdx + rdy$$
$$dQ = rdx + qdy$$

supra enim vidimus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$.

His positis differentietur $dV = Pdx + Qdy$, & reperietur:

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2.$$

Si igitur differentiale dx statuatur constans, erit

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2,$$

sin autem differentiale dy statueretur constans, foret

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipsarum x & y bis differentietur, nullo differentiali posito constante, eius differentiale secundum semper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy$$

pendebunt autem quantitates P, Q, R, S, & T ita a se invicem, ut sit signandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad R = \left(\frac{dP}{dx}\right); \quad S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

$$\& \quad T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum si vel unica desit, certo affirmare poterimus, formulam propositam nullius functionis esse differentiale secundum. Statim ergo dignosci poterit, utrum huiusmodi formula sit cuiuspiam quantitatis differentiale secundum an minus.

249. Simili modo differentialia tertia ac sequentia inveniuntur, quod in exemplo particulari ostendisse expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

Erit $dV = ydx + xdy$

$ddV = yddx + 2dxdy + xddy$

$d^3V = yd^3x + 3dyddx + 3dxddy + xd^3y$

$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$

&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem potestatum binomii sequuntur, indeque quousque libuerit continuari possunt.

At si fuerit $V = \frac{y}{x}$;

Erit $dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx}$

$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$

$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2}$

$+ \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}$

in quo exemplo progressio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adstringitur, sed etiam eodem negotio cuiusvis expressionis, quae iam differentialia in se continet, differentiale inveniri potest, sive unum quoddam differentiale assumitur constans sive minus. Cum enim singula differentialia aeque & eadem lege differentientur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque observari debent. Denotet igitur V eam expressionem, quam

quam differentiari oportet, sive sit finita, sive infinite magna sive infinite parva; atque ratio differentiationis ex his exemplis perspicietur:

I. Sit $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

Erit $dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

II. Sit $V = \frac{ydx}{dy}$;

Erit $dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

III. Sit $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$;

Erit $dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx} - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}$.

quae differentialia cum sint generalissime sumta, nullo differentiali pro constante habito, hinc facile ea differentialia derivari poterunt, quae oriuntur, si vel dx vel dy statuatur constans.

251. Quia nullo differentiali constante assumto, nulla etiam lex, secundum quam successivi variabilium valores progrediantur, praescribitur, differentialia secunda & sequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi significabunt. Hinc formula, in qua differentialia secunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, nisi quodpiam differentiale constans sit assumtum; sed eius significatio erit vaga, atque variabitur, prout aliud atque aliud differentiale fuerit constans positum. Interim tamen dantur quo-

que eiusmodi expressiones differentialia secunda continentes, quae, etiamsi nullum differentiale positum sit constans, tamen significatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale constans statuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius scrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoscendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas unicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit eius variabilis x differentiale secundum ddx, nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valorem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2xdx$ seu xdx constans ponatur, cum ipsius xdx differentiale $xddx + dx^2$ sit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1}dx$ seu $x^{n-1}dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diversissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel 0 vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xxddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parva homogenea, finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in 0, si fit $d.x^1$ constans, ea abit in $-x$; si fit $d.x^2$ constans, ea abit in $-2x$; si $d.x^4$ sit constans, ea abit in $-3x$ & ita por-

porro. Neque ergo determinatum valorem habere potest, nisi definiatur, cuiusmodi differentiale constans sit assumtum.

253. Ista inconstantia significationis simili ratione ostenditur, si differentiale tertium in quapiam formula insit. Consideremus hanc formulam $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$, quae pariter finitum valorem prae se fert. Si differentiale dx fit constans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit dx^2 constans, erit $ddx = -\frac{dx^3}{x}$; & denuo differentiando

$$d^3x = -\frac{2dxddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}, \text{ ob } ddx = -\frac{dx^3}{x},$$

hoc ergo casu formula proposita $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$ abit in $-3x^2$.

At si fuerit dx^n constans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^3}{x}$,

hinc que

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dxddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx}$$
$$+\frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}$$

Hoc ergo casu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \text{ \& } \frac{x^3 d^3 x}{dx ddx} = -(2n-1)x^2,$$

unde patet si sit $n = 1$, seu dx constans, valorem formulae fore $= -x^2$. Ex quo manifestum est, si in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque simul indicetur, cuiusmodi differentiale assumtum sit constans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil

pror-

prorsus significare; quamobrem tales expressiones in calculo occurrere non possunt.

254. Simili modo si formula contineat duas pluresve variabiles, in eaque occurrant differentialia secundi altiorisve gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non posse, nisi differentiale quodpiam constans statuatur, iis tantum exceptis casibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula inest, quoniam pro variis differentialibus, quae constantia ponuntur, valor ipsius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, ut formula statum obtineat valorem; hocque idem valet de quovis differentiali altiori ipsius x, atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium secundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumve variabilium differentialia secunda insint, fieri potest, ut inconstantia ab uno oriunda per inconstantiam reliquarum destruatur; hincque nascitur ille casus, cuius meminimus, quo formula huiusmodi differentialia secunda duarum pluriumve variabilium involvens valorem definitum habere potest, non obstante quod nullum differentiale constans sit positum.

255. Haec igitur formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, statam atque fixam significationem habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans statuatur. Nam si dx constans ponatur habebitur $\frac{xddy}{dxdy}$; sin autem dy constans ponatur, habebitur $\frac{yddx}{dxdy}$; manifestum autem est has formulas non necessario inter se esse aequales. Si enim necessario essent aequales, tales minime deberent, quaecunque functio ipsius x loco y substitueretur. Ponamus tantum esse $y = xx$, & cum posito dx constante, sit $ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dxdy}$ abibit

in

in 1, sin autem dy seu $2xdx$ ponatur constans, fiet $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, unde formula $\frac{yddx}{dxdy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in unico casu reperiatur discrepantia, multo minus in genere erit $\frac{xddy}{dxdy}$ posito dx constante aequalis $\frac{yddx}{dxdy}$ posito dy constante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ sibi non constat, dummodo vel dx vel dy constans ponatur, multo minus sibi constabit, si functionis cuiusvis vel ipsius x vel ipsius y vel utriusque differentiale constans ponatur.

256. Hinc apparet huiusmodi formulam statum valorem habere non posse, nisi ita sit comparata, ut postquam loco variabilium y, & z, quae praeter x insunt, functiones quaecunque ipsius x fuerint substitutae, differentialia secunda & altiora ipsius x, nempe ddx, d^3x, &c. penitus ex calculo excedant. Si enim post talem substitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx, vel d^3x, vel d^4x, &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque constantia assumuntur, significationem suam variant, valor quoque ipsius formulae erit vagus. Sic comparata est formula ante proposita $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, quae si statum haberet valorem, quicquid y significet, statum quoque habere deberet valorem, si y denotaret functionem quampiam ipsius x. At si tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2xddx}{dx^2}$ quae utique ob ddx in ea contentum est vaga, atque alios alioque valores induit, prouti alia

atque

atque alia differentialia constantia ponuntur, uti ex §. 252 satis est manifestum.

257. Dubium autem hic subnascetur, utrum dentur tales formulae duo plurave differentialia secundi altiorisve gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, ut si loco reliquarum variabilium quaecunque functiones unius substituantur, differentialia secundi gradus prorsus se destruant. Huic dubio primum ita occurramus, ut huiusmodi formulam proponamus, quae ista proprietate sit praedita, quo per explorationem vis quaestionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ memoratam proprietatem possidere: quaecunque enim functio ipsius x loco y substituatur, semper differentialia secundi gradus penitus evanescent; quam proprietatem sequentibus exemplis comprobemus.

I. Sit $y = x^2$; erit $dy = 2xdx$, & $ddy = 2xddx + 2dx^2$, qui valores in formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ substituti dabunt,

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = nx^{n-1}dx$,
& $ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$
qui valores substituti formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -\sqrt{(1-xx)}$; erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$,

&

$$\& \quad ddy = \frac{xddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}};$$

atque formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, abit in

$$\frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{xddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}},$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia secunda ddx se mutuo tollunt, hocque ita eveniet, quaecunque aliae functiones loco y substituantur.

258. Cum ista exempla iam probaverint veritatem nostrae propositionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ fixum habeat valorem, etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, demonstrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipsius x, eiusque differentiale dy huiusmodi erit, ut sit $dy = pdx$, atque p erit functio quaepiam ipsius x, eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = qdx$, eritque q iterum functio ipsius x. Cum igitur sit $dy = pdx$, erit differentiando $ddy = pddx + qdx^2$, & $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = -qdx^3$; in qua expressione cum nullum insit differentiale secundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ erit $= -q$.

Quomodocunque igitur y pendeat ab x, differentialia secunda in hac formula semper se mutuo tollent, hancque ob causam eius valor, qui alioquin esset vagus, fiet status ac fixus.

259. Quanquam hic posuimus y esse functionem ipsius x, tamen veritas aeque subsistit, si y ab x prorsus non pendeat, uti assumsimus. Dum enim pro y functionem quamcunque substituimus, neque qualis sit determinavimus, nullam pendentiam ab x ipsi y tribuimus. Interim tamen sine func-

ctionis mentione demonstratio formari potest; quaecunque enim y sit quantitas sive pendens ab x sive non pendens, eius differentiale dy homogeneum erit cum dx, sicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum, neque a differentialium secundorum lege pendebit. Sit igitur $\frac{dy}{dx}=p$;

erit $dy=pdx$, & $ddy=pddx+dpdx$, unde fit

$$dxddy-dyddx=dpdx^2,$$

cuius valor non est vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, sive quodpiam differentiale constans accipiatur, qualecunque id demum sit, sive nullum differentiale positum sit constans.

260. Quia igitur $dyddx-dxddy$ non obstantibus differentialibus secundis, quae potentia se mutuo destruere censeri possunt, significationem habet fixam; expressio quaecunque, in qua nulla alia differentialia secunda praeter formulam $dyddx-dxddy$ insunt, pariter significationem habebit fixam. Seu si ponatur $dyddx-dxddy=\omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y, earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω utcunque composita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrariae, qua valores successivi ipsius x crescere ponuntur, in ω differentialia secunda se mutuo tollunt, etiam ipsa quantitas V non erit vaga sed fixa. Sic ista expressio $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}$ valorem obtinet fixum, quamvis ea differentialibus secundis inquinata videatur, atque insuper, quia numerator est homogeneus denominatori, valorem obtinet finitum, nisi is casu vel infinitae magnus vel infinitae parvus evadat.

261.

261. Quemadmodum formula $dxddy - dyddx$ valorem fixum habere oſtenſa eſt, ita quoque ſi tertia variabilis z accedat; hae formulae $dxddz - dzddx$ & $dyddz - dzddy$ valores fixos habebunt. Hinc expreſſiones, quas tres variabiles x, y, & z involvunt, ſi in eis nulla alia differentialia ſecunda occurrant, praeter haec aſſignata, tum perinde erunt fixae, ac ſi nulla plane differentialia ſecunda ineſſent. Ita haec expreſſio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

non obſtantibus differentialibus ſecundis, fixa gaudet ſignificatione. Similique modo formulae exhiberi poſſunt, plures variabiles continentes, in quibus differentialia ſecunda non impediunt, quominus earum ſignificatio ſit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia ſecunda complectuntur, reliquae omnes ſignificationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere poſſunt, niſi quodpiam differentiale primum definiatur, quod conſtans ſit aſſumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum conſtans aſſumitur, omnes expreſſiones quotcunque variabiles contineant, & cuiuſcunque ordinis differentialia poſt primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt ſignificationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx aſſumtum ſit conſtans, ipſius x differentialia ſecunda & ſequentia evaneſcunt; & quaecunque functiones ipſius x loco reliquarum variabilium y, z, &c. ſubſtituantur, earum differentialia ſecunda per dx^2, tertia per dx^3, &c. determinabuntur, ſicque inconſtantia a differentialibus ſecundis oriunda tollitur. Idem evenit, ſi alius variabilis ſeu functionis cuiuſcunque differentiale primum conſtans ponatur.

263. Ex his igitur ſequitur differentialia ſecunda & altiorum ordinum revera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam ſignificationem prorſus ad Analyſin eſſe inepta.

Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum constans assumitur, vel nullum. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo evanescunt, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem nisi se mutuo destruant, significatio erit vaga, & propterea in Analysi locum nullum inveniunt; sin autem se mutuo destruunt, tantum apparenter adsunt, & revera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime apparenter tantum in calculo usurpantur, necesse fuit, ut methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus, cuius ope differentialia secunda & altiora semper exterminari queant.

264. Si expressio unicam contineat variabilem x, eiusque differentialia altiora ddx, d^3x, d^4x, &c. in ea occurrant, ea significatum fixum habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans sit positum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt sit constans positum, ita ut sit $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, &c. Ponatur $dx = pdt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga significatione differentialium secundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp = qdt$, similique modo ulterius $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c. erunt q, r, s, &c. quantitates finitae fixos significatus habentes. Cum igitur sit $dx = pdt$; erit

$$ddx = dpdt = qdt^2; \; d^3x = dqdt^2 = rdt^3;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4; \text{ &c.}$$

qui valores si loco ddx, d^3x, d^4x, &c. substituantur, tota expressio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam significationem habebit.

265. Si x sit functio ipsius t, poterit hoc modo quantitas x prorsus eliminari, ita ut sola quantitas t cum suo differentiali dt in expressione remaneat: sin autem t sit functio

ctio ipsius x, vicissim quoque x erit ipsius t functio. Interim tamen ipsa quantitas x cum suo differentiali primo dx, in calculo retineri potest, dummodo post substitutiones ante factas ubique loco t & dt earum valores per x & dx expressi restituantur. Quod quo planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita ut differentiale primum ipsius x^n constans sit positum.

Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx \text{ ; erit } p = \frac{1}{nx^{n-1}} \text{ ; &}$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx \text{ ;}$$

$$\text{unde fit } q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}} \text{ ; &}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = mx^{n-1}dx .$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \text{ ; & } s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}} .$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx}$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variabiles x & y, earumque unius x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentialia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy, d^3y, &c. Haec autem eodem modo, quo ante usi sumus, tolli poterunt ponendo

dy

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.

fiet enim $ddy = qdx^2$; $d^3y = rdx^3$; $d^4y = sdx^4$ &c.

quibus substitutis expressio orietur, quae praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. nonnisi differentiale primum dx continebit. Sic si proposita fuerit haec expressio

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx + yy)ddy}$$

in qua dx est constans assumtum; ponatur

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; & $dr = sdx$;

quibus valoribus substitutis expressio proposita transmutabitur in hanc: $\frac{(y + xpr + xs)dx^2}{(xx + yy)q}$ quae nulla amplius differentialia secunda altiorave continet.

267. Simili modo differentialia secunda & altiora tollentur, si dy fuerit constans assumtum. Verum si aliud differentiale primum quodcunque dt statuatur constans, tum primum modo ante indicato differentialia ipsius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$dx = pdt$; $dp = qdt$; $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c.

unde fit

$ddx = qdt^2$; $d^3x = rdt^3$; $d^4x = sdt^4$; &c.

Deinde simili modo differentialia altiora ipsius y ponendo

$dy = Pdt$; $dP = Qdt$; $dQ = Rdt$; $dR = Sdt$; &c.

unde fiet

$ddy = Qdt^2$; $d^3y = Rdt^3$; $d^4y = Sdt^4$; &c.

quibus substitutis obtinebitur expressio, quae praeter quantitates finitas, x, p, q, r, s, &c. y, P, Q, R, S, &c. solum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit significationem.

268. Si differentiale primum, quod constans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab utroque simul pendet, tum non

opus

opus est, ut duplex quantitatum finitarum p, q, r, &c. series introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae p, q, r, &c. fient functiones ipsius x, solaeque litterae P, Q, R, &c. ingrediuntur; idemque evenit, si differentiale constans dt ab y tantum pendeat. At si dt ab utraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale ydx constans esse assumtum, eritque $yddx + dxdy = 0$; unde fit $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Sit nunc $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ &c. eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$; ulteriusque differentiando

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

substituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{pdx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}; \text{ porroque}$$

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right)3dx^2ddx;$$

& pro ddx substituto valore $-\frac{pdx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right)dx^4 \text{ &c.}$$

Deinde cum sit $dy = pdx$; erit

$$ddy = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{pp}{y}\right)dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{pdx^2}{y}$ substituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right)dx^3, \quad \&$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right)dx^4 \quad \&c.$$

qui valores loco differentialium altiorum ipsarum x & y substituti mutabunt expressionem propositam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque consideratione cuiuspiam differentialis constantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia secunda non insunt, nequidem opus est, ut quale differentiale sumtum sit constans, commemoretur.

269. Saepissime autem in calculo ad lineas curvas applicato evenire solet, ut hoc differentiale primum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constans assumatur: quare quemadmodum hoc casu differentialia secunda & altiora eliminari debeant, ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absolvendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c. atque differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1+pp)}$, quae cum sit constans fiet

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0,$$

ideoque $$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp};$$

unde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

d^3x

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$
$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$
$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

Deinde fiet

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Quia autem assumsimus $dy = pdx$, fiet differentiando

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp}, \quad \text{ideoque}$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

porroque differentiando:

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora utriusque variabilis x & y per quantitates finitas & potestates ipsius dx exprimentur, atque post has substitutiones factas resultabit expressio a differentialibus secundis prorsus libera.

270. Exposito igitur modo differentialia secunda & altiora exuendi, conveniet hoc negotium aliquot exemplis illustrari.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx positum

est constans. Posito ergo $dy = pdx$, & $dp = qdx$, ob $ddy = qdx^2$, expressio proposita abit in hanc finitam xq.

II. Sit proposita haec expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua positum sit dy constans. Ponatur $dx = pdy$; $dp = qdy$, ob $ddx = qdy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem ut ante statuere velimus $dy = pdx$, $dp = qdx$; ob dy constans erit $0 = pddx + dpdx$ & $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$; unde expressio proposita transibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit proposita haec expressio $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ in qua ydx positum sit constans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$, quibus substitutis expressio proposita transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit proposita ista expressio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua constans sit positum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ponatur iterum $dy = pdx$, $dp = qdx$, & ex paragrapho praecedente erit $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$; unde expressio proposita abibit in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Ex

Ex his autem exemplis satis intelligitur, quemadmodum in quovis casu oblato, quodcunque differentiale primum assumtum sit constans, differentialia secunda atque altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quantitatibus finitis $p, q, r, s,$ &c. differentialia secunda & altiora ita eliminari queant, ut tota expressio praeter quantitates finitas $x, y, p, q, r, s,$ &c. solum differentiale dx complectatur; vicissim si huiusmodi expressio reducta proponatur, ea iterum in formam priorem transmutari poterit loco litterarum $p, q, r, s,$ &c. introducendis differentialibus secundis & altioribus. Nunc autem perinde erit, quodnam differentiale primum constans assumatur; atque vel id ipsum, quod ante fuit assumtum constans poni potest, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorsus nullum differentiale constans assumi poterit, hocque modo prodibunt expressiones differentialia secunda altiorave continentes, quae etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, tamen fixas significationes obtineant, cuiusmodi expressiones dari supra ostendimus.

272. Sit ergo proposita expressio quaecunque continens litteras finitas $x, y, p, q, r,$ &c. una cum differentiali dx, in qua sit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; &c. Si enim has litteras $p, q, r,$ &c. ita eliminare velimus, ut earum loco introducamus differentialia secunda & altiora ipsarum x & y, nullo differentiali constante assumto; fiet

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}, \text{ hincque } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3},$$

quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4},$$

unde fit $r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$

Quod si insuper littera s, quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, insit, pro ea substitui debebit hic valor $s = \frac{dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y - 4dx^2ddyd^3x + 15dxddx^2ddy + 10dxdyddxd^3x - 15dyddx^3 - dx^3dyd^4x}{dx^7}$

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s &c. substitutis expressio proposita transmutabitur in aliam differentialia altiora ipsarum x & y continentem, quae etiamsi nullum differentiale primum constans sit assumtum, tamen non vagam sed fixam habebit significationem.

273. Hoc ergo modo quaevis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum assumtum est constans, transmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale constans ponitur, quae hoc non obstante eundem valorem fixum habeat. Primum scilicet ope methodi ante traditae assumtis valoribus

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \text{&c.}$$

differentialia altiora eliminentur, tum loco p, q, r, s, &c. valores nunc inventi substituantur, atque orietur expressio priori aequalis nullum differentiale constans involvens: quam transformationem exempla sequentia illustrabunt.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx positum constans, quae transmutari debeat in aliam formam nullum differentiale constans involventem. Ponatur $dy = pdx$; $dp = qdx$; atque ut ante (270) vidimus expressio proposita transibit in hanc: qx. Nunc loco q substituatur valor, quem obtinet nullo differentiali constanti assumto $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ atque reperietur haec expressio $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$ propositae aequalis, & nullum amplius differentiale constans involvens.

II.

II. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$; in qua dy affumtum eft conftans. Ponatur $dy=pdx$ & $dp=qdx$; eaque tranfibit in hanc: $-\frac{p(1+pp)}{q}$, ftatuatur nunc $p=\frac{dy}{dx}$ & $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, atque invenietur: $\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dyddx-dxddy}$ quae nullo differentiali affumto conftante eundem fixum habet valorem, quem propofita.

III. Sit propofita haec expreffio: $\frac{yddx-xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conftans eft affumtum. Ponatur $dy=pdx$, atque uti fupra (270) vidimus haec expreffio tranfmutatur in hanc: $-1-\frac{xq}{p}+\frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali conftante affumto transformabitur in iftam:

$$-1-\frac{xdxddy-xdyddx}{dx^2dy}+\frac{xdy}{ydx}$$
$$=\frac{xdxdy^2-ydx^2dy-yxdxddy+yxdyddx}{ydx^2dy}.$$

IV. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$, in qua conftans affumtum eft differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Pofito $dy=pdx$, & $dp=qdx$, orietur haec expreffio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p=\frac{dy}{dx}$, & $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, atque nullo affumto differentiali conftan-

ſtante nanciſcemur iſtam expreſſionem $\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy-dxdyddx}$ propoſitae aequivalentem.

V. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dxd^3y}{xddy}$, in qua differentiale dx conſtans ſit aſſumtum. Ponatur

$$dy=pdx; \quad dp=qdx \quad \& \quad dq=rdx;$$

atque ob

$$ddy=qdx^2 \quad \& \quad d^3y=rdx^3$$

formula propoſita abibit in hanc $\frac{rdx^2}{xq}$. Nunc loco q & r ſubſtituantur valores, quos nullo differentiali conſtante aſſumto recipiunt ſcilicet: $q=\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$, &

$$r=\frac{dx^2d^3y-3dxddxddy+3dyddx^2-dxdyd^3x}{dx^5}$$

atque obtinebitur ſequens expreſſio propoſitae aequivalens:

$$\frac{dx^2d^3y-3dxddxddy+3dyddx^2-dxdyd^3x}{x(dxddy-dyddx)}$$
$$=\frac{dx(dxd^3y-dyd^3x)}{x(dxddy-dyddx)}-\frac{3ddx}{x}.$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita ut non opus ſit litteras p, q, r, &c. introducere. Varii autem modi hoc opus abſolvendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula propoſita conſtans fuerit aſſumtum. Ponamus primum in formula propoſita differentiale dx conſtans eſſe aſſumtum; & quia loco dy poſuimus pdx, rurſuſque $\frac{dy}{dx}$ loco p: differentialia prima dx & dy,

ubi-

ubicunque in expreſſione occurrunt, ſine alteratione relinquuntur. Ubi autem occurrit ddy, quia eius loco ſcribitur qdx^2, & porro loco q valor $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, tranſmutatio abſolvetur, ſi ubique loco ddy ſtatim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ ſeu $ddy - \frac{dyddx}{dx}$. Si inſuper in expreſſione propoſita occurrat d^3y, quia eius loco ponitur rdx^3, ob valorem ipſius r ante inventum, ubique loco d^3y ſcribi debebit

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

quo facto expreſſio propoſita tranſmutabitur in aliam ✦ quae nullum differentiale conſtans involvit. Sic ſi proponatur iſta expreſſio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx poſitum eſt conſtans, ei aequalis erit poſito $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy, haec nullum differentiale conſtans involvens: $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$.

275. Hinc facile colligitur, ſi in expreſſione quapiam propoſita aſſumtum fuerit differentiale dy conſtans, tum ubique loco ddx ſcribi debere $ddx - \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$; ut obtineatur expreſſio aequivalens, in qua nullum differentiale conſtans ponatur. Sin autem in expreſſione propoſita conſtans fuerit aſſumtum ydx, quoniam fit $ddx = -\frac{fdx^2}{y}$, &

ddy

$ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$; loco ddx ubique scribi debebit $-\frac{dxdy}{y}$, & loco ddy ubique $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentialia, quia in hoc negotio rarissime occurrere solent, non progredior. Quod si vero in expressione proposita hoc differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ assumtum fuerit constans, quia invenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$: pro ddx ubique scribi debet $\frac{dy^2\,ddx - dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ & loco ddy ubique $\frac{dx^2\,ddy - dxdyddx}{dx^2+dy^2}$. Sic si proposita fuerit expressio $\frac{dy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{ddx}$, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ assumtum sit constans, ea transmutabitur in hanc: $\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, in qua nullum differentiale constans assumitur.

276. Quo istae reductiones facilius ad usum accommodari queant, eas in sequenti tabella complecti visum est.

Formula igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale constans involventem transmutabitur ope substitutionum sequentium:

I. Si differentiale dx fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$

II.

II. Si differentiale dy fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$

III. Si differentiale ydx fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$-\frac{dxdy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} - \frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx} + \frac{3dy^3}{yy}$.

IV. Si differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2+dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2+dy^2}$
d^3x	$- - - - - \frac{dy^2d^3x - dxdyd^3y}{dx^2+dy^2} + \frac{(dxddy - dyddx)(3dy^2ddy - dx^2ddy + 4dxdyddx)}{(dx^2+dy^2)^2}$
d^3y	$- - - - - \frac{dx^2d^3y - dxdyd^3x}{dx^2+dy^2} + \frac{(dyddx - dxddy)(3dx^2ddx - dy^2ddx + 4dxdyddy)}{(dx^2+dy^2)^2}$

277. Expressiones ergo istae, quae nullum differentiale constans includunt, ita erunt comparatae, ut pro lubitu quodvis differentiale constans assumi queat. Hincque expressiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale constans assumtum perhibetur, examinari possunt, utrum significatio earum sit vaga an fixa. Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx constans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expressio iterum ad formam, in qua nullum differentiale constans sit assumtum, quae si cum proposita conveniat, ea erit fixa, neque ab inconstantia differentialium secundorum pendebit: sin autem expressio prodeat diversa, tum proposita vagam habet significationem. Sic si ponatur haec expressio $ydddx - xddy$, in qua nullum differentiale positum sit constans; ad investigandum, utrum significationem fixam habeat an vagam, ponatur dx constans, eaque abibit in $-\frac{1}{2}xddy$; nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponatur, $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ ac prodibit $-xddy + \frac{xdyddx}{dx}$, cuius a proposita discrepantia indicat, propositam expressionem fixam statamque significationem non habere.

278. Simili modo si proponatur expressio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiri poterit, sub qua ea nullo differentiali constante assumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx constans, atque expressio proposita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, ut eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx + Rdy = 0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P = -\frac{Rdy}{dx}$ seu $R = -\frac{Pdx}{dy}$ tum expressio proposita $Pddx + Qdxdy + Rddy$ valorem fixum

xum non habebit, sed eius significatio erit vaga atque diversa, prout aliud atque aliud differentiale constans assumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialem, in qua quodpiam differentiale constans est positum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans involvat, quo facto illud alterum differentiale constans ponatur. Sic si in expressione proposita differentiale dx assumtum sit constans, eaque transmutanda sit in aliam, quae differentiale dy constans implicet: in formulis supra loco ddy & d^3y substituendis ob dy constans ponatur $ddy = 0$, $d^3y = 0$, atque quaesito satisfiet, si loco ddy substituatur $-\frac{dyddx}{dx}$ & $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ loco d^3y. Hoc modo ista formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$, in qua dy ponitur constans.

280. Si contra formula, in qua dy constans est positum, transmutari debeat in aliam; in qua dx sit constans, tum loco ddx substitui debet $-\frac{dxddy}{dy}$ & loco d^3x haec expressio $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$. Simili modo si formula, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ positum est constans, transmutari debeat in aliam, in qua dx sit constans, tum loco ddx scribatur $-\frac{dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{dx^2ddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. At si formula, qua dx constans est assumtum, transmu-

mutari debeat in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ fit conſtans, quia ob $dx^2 + dy^2$ conſtans fit $dxddx + dyddy = 0$, & $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, hoc valore loco ddx aſſumto, pro ddy ſcribi debebit $ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)ddy}{dx^2}$.

Sic haec formula $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx eſt conſtans, tranſmutabitur in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ponitur conſtans, quae erit $-\frac{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddy}$.



CA-

CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS

281.

In hoc Capite imprimis est propositum earum functionum ipsius x, quae non explicite, sed implicite per aequationem, qua relatio functionis istius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriantur, ostendemus. Cum enim in calculo integrali summum negotium consistat in integratione aequationum differentialium, seu in inventione eiusmodi aequationum finitarum, qua cum differentialibus conveniant; necesse est, ut hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine sequuntur, diligentius scrutemur, sicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Ut igitur hoc negotium absolvamus, sit y functio eiusmodi ipsius x, quae per hanc aequationem quadratam $yy+Py+Q=0$ definiatur. Cum ergo haec expressio $yy+Py+Q$ sit $=0$, quicquid x significet, nihilo quoque aequalis erit, si loco x scribatur $x+dx$, quo casu y abit in $y+dy$. Facta autem hac substitutione, si a quantitate resultante subtrahatur prior $yy+Py+Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $=0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $=0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit

$$yy+Py+Q=0,$$ erit quoque
$$2ydy+Pdy+ydP+dQ=0$$

quia

quia vero P & Q sunt functiones ipsius x, earum differentialia huiusmodi formam hebebunt,

$$dP = p\,dx, \text{ \& } dQ = q\,dx;$$

unde fiet

$$2y\,dy + P\,dy + y\,p\,dx + q\,dx = 0$$

ex qua oritur $\frac{dy}{dx} = \frac{-yp-q}{2y+P}$.

283. Quemadmodum ergo aequatio finita $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x, ita aequatio differentialis exprimit relationem seu rationem, quam dy tenet ad dx. Quoniam vero est $\frac{dy}{dx} = \frac{-yp-q}{2y+P}$, haec ratio $dy : dx$ cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita: neque vero res aliter se habere potest; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, uterque suum peculiare habebit differentiale, & utriusque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expressione $\frac{-yp-q}{2y+P}$ loco y substituatur. Simili modo functio y per aequationem cubicam definiatur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici scilicet ipsius y valori respondens. Si in aequatione proposita finita y quatuor pluresve habeat dimensiones, necesse est ut $\frac{dy}{dx}$ totidem significationes fortiatur.

284. Interim tamen ipsa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita scilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimensiones assurget, quot ante habuerat y, sicque ista aequatio omnes diversas rationes ipsius dy ad dx simul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$, cuius differentialis est:

2y-

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = \frac{-Pdy - dQ}{2dy + dP}$ qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\tfrac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP - 4Q)}}$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita: $y = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{(PP - 4Q)}$.

285. Invento valore ipsius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipsius ddy, porroque ipsorum d^3y, d^4y, &c. qui autem, cum determinati non sint, nisi aliquod differentiale primum constans statuatur; ponamus commoditatis ergo dx constans, atque ad hoc ostendendum sumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, unde per differentiationem oritur $3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, sumantur denuo differentialia posito dx constante atque invenietur

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

substituatur loco dy eius valor modo inventus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$, atque divisione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

seu $$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

$$= -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum

cum ex aequatione finita sit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae hi valores in innumeras formas transmutari possunt.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis potest variari, dum cum aequatione finita permiscetur. Sic cum exemplo praecedente inventa esset aequatio differentialis

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

si ea multiplicetur per y, orietur

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx,$$

in qua si loco y^3 substituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio nova

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

quae denuo per y multiplicata, postquam loco y^3 eius valor fuerit substitutus, praebebit

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Generaliter autem si P, Q, R denotent functiones quascunque ipsarum x & y, si aequatio differentialis multiplicetur per P, erit

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum sit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes invicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex propositа aequatione finita natam

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy + Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

287. Possunt vero etiam per ipsam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequatione finita inveniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut dividitur. Sic si P fuerit functio quaecunque ipsarum x & y, ut sit $dP = pdx + qdy$, si aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diversas induet, prout pro P aliae atque aliae fun-

functiones assumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, si ad hanc aequationem differentialem inventam addatur ipsa aequatio finita per huiusmodi formulam $Qdx+Rdy$ multiplicata, ubi pro Q & R functiones quascunque ipsarum x & y assumere licet. Quanquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx, quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipsius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potissimum explicabitur.

288. Non solum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci possunt, sed etiam plures imo infinitae exhiberi possunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy=ax+ab$ & $yy=ax$ omnino sunt diversae, dum in priori quaecunque quantitas constans in locum ipsius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatae eandem dant aequationem differentialem $2ydy=adx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy=ax$ contentae, quicunque valor ipsi a tribuatur, in una aequatione differentiali, in qua a non insit, comprehendi possunt. Dividatur enim aequatio illa per x ut sit $\frac{yy}{x}=a$, haecque differentiata dabit $2xdy-ydx=0$. Possunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perduci, uti fit in istis aequationibus

$$yy-ax=0 \quad \& \quad yy-ax=bbe^{\frac{x}{a}},$$

si enim utraque per $e^{\frac{x}{a}}$ dividatur, ut habeantur istae aequationes: $e^{-\frac{x}{a}}(yy-ax)=0$ & $e^{-\frac{x}{a}}(yy-ax)=bb$, ex utriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diversitatis in hoc consistit, quod quantitatis constantis differentiale sit $=0$. Quodsi ergo aequatio finita ad eiusmodi formam reducatur, ut quantitas quaepiam constans sola adsit, neque per variabiles vel multiplicetur vel dividatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas constans prorsus non adsit. Hoc modo quaelibet quantitas constans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli potest. Sic si proposita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; si ea per xy dividatur ut habeatur $\frac{x^3+y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam constans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates constantes, quae in aequatione finita insunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesve repetitam; sicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis constantibus prorsus carentes. Sit proposita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem constantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tolletur prima differentiatione, unde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae sumto dx constante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0,$$

quae etsi nullam constantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m, n & aa tribuantur, in se aeque comprehendit.

291. Non solum vero quantitates constantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli possunt, sed etiam altera variabilis, eius scilicet, cuius differentiale constans assumitur, per differentiationem eliminari po-

poterit. Ex aequatione enim inter x & y propofita quaeratur valor x, ut fit $x = Y$ denotante Y functionem ipfius y; eritque $dx = dY$, & fumto dx conftante, fiet differentiando $0 = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $0 = d^3Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $0 = d^4Y$. Quanquam autem in his aequationibus una tantum variabilis ineffe videtur, quae propterea variabilis effe ceffaret, dum unica variabilis in nulla aequatione adeffe poteft; tamen quia differentiale dx conftans eft affumtum, eiufque ratio in aequatione haberi debet, revera in aequationem ingredi cenfendum eft. Hinc mirandum non eft, fi faepius aequationes differentiales fecundi altiorifve gradus occurrant, in quibus unica tantum variabilis ineffe videatur.

292. Praecipue autem notandum eft, per differentiationem quantitates irrationales ac tranfcendentes ex aequatione tolli poffe. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitas irrationalitas eliminari poteft, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc faepenumero commodius fine ifta reductione fieri poteft, dum per comparationem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, fi una tantum infit, eliminari poteft. Sin autem duae pluresve partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, ficque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad fingulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli poterunt. Uti fi fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, poft differentiationem habebitur

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

quae per finitam divifa dat $\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa - xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam

ortam esse posse ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes involvente.

293. Ut autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminentur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum sint algebraica, negotium sine difficultate absolvetur. Sit enim $y = x lx$: erit $\frac{y}{x} = lx$, unde differentiando fit $\frac{x dy - y dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, ideoque $x dy - y dx = x dx$. Si bini insint logarithmi duplici differentiatione erit opus: sit enim $y lx = x ly$; erit $\frac{y lx}{x} = ly$, & differentiando, $\frac{x dy lx + y dx - y dx lx}{xx} = \frac{dy}{y}$, ex qua concluditur fore $lx = \frac{x x dy - y y dx}{y x dy - y y dx}$. Haec aequatio iam iterum differentietur posito dx constante, atque prodibit

$$\frac{dx}{x} = \frac{x x ddy + 2 x dx dy - 2 y dx dy}{y x dy - y y dx} + \frac{(y y dx - x x dy)(y x ddy + x dy^2 - y dx dy)}{(y x dy - y y dx)^2} \text{ seu } \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{y^2 x dx ddy - y y x x dx ddy + 3 y x x dx dy^2 - y^2 x dx dy^2 + y^2 dx^2 dy - 2 x y y dx^2 dy - x^2 dy^3}{(y x dy - y y dx)^2}$$

quae reducta dabit:

$$y^3 x dx ddy - y y x x dx ddy + 3 y x x dx dy^2 - 2 x y y dx dy^2 + 3 y^3 dx^2 dy - 2 x y y dx^2 dy - x^2 dy^3 - \frac{y^4 dx^3}{x} = 0$$

seu $$y y x x (y - x) dx ddy + 3 y x dx dy (x x dy + y y dx) - 2 y y x x dx dy (dx + dy) = x^4 dy^3 + y^4 dx^3.$$

194. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi proposita fuerit $P = e^Q$, ubi P & Q functio-

ctiones quaſcunque ipſarum x & y denotent; ea aequatio tranſmutari poterit in hanc logarithmicam $lP=Q$; cuius differentialis eſt $\frac{dP}{P}=dQ$ ſeu $dP=PdQ$. Neque obſtat, ſi quantitates exponentiales magis fuerint complicatae, tum enim ſi una differentiatio non ſufficit, duabus pluribuſve negotium abſolvetur.

I. Sit $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ unde fit

$$e^{2x}=\frac{y+1}{y-1} \quad \& \quad 2x=l\frac{y+1}{y-1},$$

cuius differentiale eſt $dx=-\frac{dy}{yy-1}=\frac{dy}{1-yy}$.

II. Sit $y=l\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentiationem $dy=\frac{(e^x-e^{-x})dx}{e^x+e^{-x}}$, ſeu $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, atque $e^{2x}=\frac{dy+dx}{dx-dy}$. Ergo $2x=l\frac{dy+dx}{dx-dy}$.

Sumto ergo dx conſtante erit

$$dx=\frac{dxddy}{dx^2-dy^2} \quad \text{ſeu} \quad dx^2=ddy+dy^2.$$

295. Simili modo quantitates tranſcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, uti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y=a\,\text{A}\,\text{ſin}\frac{x}{a}$; erit $dy=\frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

II. Sit $y=a\,\text{cof}\frac{y}{x}$; erit $\frac{y}{a}=\text{cof}\frac{y}{x}$, &

$\frac{dy}{a} = -\frac{xdy+ydx}{xx}\sin\frac{y}{x}$. At cum sit

$\cos\frac{y}{x} = \frac{y}{a}$; erit $\sin\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(aa-yy)}}{a}$;

quo valore substituto habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx-xdy)\sqrt{(aa-yy)}}{axx}$$

seu $xxdy = (ydx-xdy)\sqrt{(aa-yy)}$

III. Sit $y = m\sin x + n\cos x$, erit post differentiationem primam $dy = mdx\cos x - ndx\sin x$: quae denuo differentiata posito dx constante dabit

$$ddy = -mdx^2\sin x - ndx^2\cos x,$$

haec autem per primam divisa dat

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2 \quad \text{seu} \quad ddy + ydx^2 = 0,$$

ex qua non solum sinus & cosinus, sed etiam constantes m & n evanuerunt.

IV. Sit $y = \sin lx$; erit $A\sin y = lx$, unde per differentiationem fit $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{dx}{x}$; quae sumtis quadratis dat $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, haecque posito dx constante ulterius differentiata praebet,

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$$

seu $xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0$.

V. Sit $y = ae^{mx}\sin nx$, erit differentiando

$$dy = mae^{mx}dx\sin nx + nae^{mx}dx\cos nx,$$

quae per propositam divisa dat

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx\cos nx}{\sin nx} = mdx + ndx\cot nx.$$

Erit ergo $A\cot\left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Quae aequatio posito dx constante differentiata dat:

ndx

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{mmyydx^2 + nnyydx^2 - 2mydxdy}$$

seu $(mm+nn)yydx^2 - 2mydxdy = dy^2 - yddy$.
Perspicuum igitur est, etiamsi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes insint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuisse, quae a quantitatibus transcendentibus utcunque sit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales sive primi sive altioris gradus, quae duas variabiles x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variabiles exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variabiles x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y, qua y sit functio quaedam ipsius x. Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, ut si ea ubique loco y, eiusque differentiale loco dy, atque eius altiora differentialia loco ddy, d^3y, &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functionis investigatione versatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, ut proposita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipsius x, cui altera variabilis y est aequalis, definiatur; seu quod eodem redit, ut aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

ad quam supra §. 288 pervenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae simul hac aequatione finita $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc sit $yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$, patet $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$

cam

eam esse functionem ipsius x, cui variabilis y vi propositae aequationis differentialis sit aequalis. Namque si in aequatione loco yy, hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco $2ydy$ eius differentiale $adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$ substituamus, orietur aequatio identica:

$$adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - adx - xdx - \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + xdx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variabiles x & y exhibere, quae autem sine subsidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x, quae ipsi y vi cuiuscunque aequationis differentialis sive primi sive altioris gradus, conveniat; sitque

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \text{ &c.}$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$, &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per divisionem evanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r, &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r, &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio revera tantum inter duas variabiles x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quandam relationem inter variabiles x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusvis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perveniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset perventum.

299. Hoc igitur modo aequatio quaevis differentialis ita ad formam finitam reduci potest, ut in ea nonnisi quantitates

tates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parva prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x, si ponatur

$$dy = p\,dx;\ dp = q\,dx;\ dq = r\,dx;\ \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differentialia secunda & altiora per potestates ipsius dx exprimentur, quae deinceps per divisionem penitus tollentur. Ut si proponeretur haec aequatio

$$xyd^2y + xxdydy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur constans; facto

$$dy = p\,dx,\ dp = q\,dx,\ \&\ dq = r\,dx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

postquam scilicet tota aequatio per dx^3 est divisa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque sint ordinis, his substitutionibus

$$dy = p\,dx;\ dp = q\,dx;\ dq = r\,dx;\ \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque si aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita ut differentialia prima eam tantum ingrediantur, per istam reductionem praeter variabiles y & x insuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit secundi ordinis continens differentialia secunda, praeterea quantitas q; ac, si fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur insuper quantitas r, sicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorsus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis constantis penitus cessat; neque amplius, etiamsi insint quantitates q, r, ex differentialibus secundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale constans sit assumtum. Perinde enim est, utrum in evolutione aliquod differentiale pro lubitu constans statuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis secundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum

constans esse assumtum perhibetur, hoc modo statim explorari poterit, utrum ea determinatam relationem inter variabiles x & y contineat, nec ne. Quia enim nullum differentiale constans assumitur, in arbitrio nostro relinquitur, quodnam differentiale constans ponere velimus; hinc que tantum erit despiciendum, utrum diversis differentialibus constantibus positis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quodsi non eveniat, certum est signum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in solutione nullius problematis locum habere posse. Tutissimus autem modus simulque facillimus hoc explorandi erit is ipse, quem supra in simili negotio pro expressionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant significatus, dignoscendis tradidimus.

302. Proposita ergo huiusmodi aequatione differentiali secundi altiorisve ordinis, in qua nullum differentiale constans sit positum, statuatur differentiale dx constans; deinde haec aequatio, uti supra de expressionibus differentialibus ostendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans supponat, statuendo scilicet

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \text{ loco } ddy;$$

$$\& \; d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \text{ loco } d^3y,$$

&c.

Quo facto despiciatur, utrum aequatio hoc modo resultans conveniat cum aequatione proposita; quod si eveniat, aequatio proposita determinatam relationem inter x & y complectetur; sin autem secus accidat, aequatio erit vaga, neque definitam rationem inter variabiles x & y exprimet: quemadmodum hoc iam ante fusius est demonstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequatio proposita, quae nullo differentiali constante posito reperta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx constans, atque ea transibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum consideratio differentialis constantis exuatur, modo ante praescripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a proposita tantum ratione primi termini discrepat, videndum est, utrum sit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod si deprehendatur, aequatio proposita fixam relationem inter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo integrali tradendas reperietur, quodcunque differentiale primum constans accipiatur. At, si fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio proposita erit impossibilis.

304. Nisi igitur haec proposita aequatio:

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

sit absurda, necesse est ut sit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo evenire potest: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ seu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipsa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione proposita est orta: quo posteriore casu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum proposita, eandemque relationem inter x & y continebit, sicque sine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim sit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione proposita subtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Cum autem sit $dy = -\frac{P dx}{Q}$, differentialia prorsus extingui poterunt, nasceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in solutione problematis nullo differentiali constante assumto perventum esse ad hanc aequationem:

$$x^3 ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit ergo, cum aequationem absurdum non continere constet: $x^3 dx + xxydy = 0$, seu $xdx + ydy = 0$:

cuius differentiale erit

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a proposita subtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0, \quad \text{seu}$$
$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem sit

$$xdx + ydy = 0; \quad \text{erit} \quad 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \quad \text{seu} \quad yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, siquidem ea consentit cum differentiali primum inventa $xdx + ydy = 0$. Qui consensus, nisi se manifestasset, aequatio proposita pro impossibili esset habenda; cum autem hoc casu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ sine calculo integrali elicere licuit.

306. Ut vero etiam exemplum aequationis impossibilis afferamus, proposita sit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale constans sit assumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy - 2xdxdy = 0,$$

quae propositae aequalis posita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

Cum

Cum vero sit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differentialibus obtinebitur: $y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}$ seu

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae utrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ consentiat, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{seu } \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax + 4xy - 2xx},$$

at ex illa est $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$, foretque ergo

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{seu } axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y}$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inventa est

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab ista subtracta relinquit:

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3,$$ quae resolvitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$ constare potest, at vero aequationi finitae primum inventae adversatur, nisi statuatur $a = 0$, vel nisi utraque variabilis x & y constans statuatur, quo quidem casu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus satisfit, aequatio proposita subsistere nequit.

307. Consideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variabiles x, y, & z involventes, quae erunt vel primi, vel secundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam scrutandam no-

notari oportet, aequationem finitam tres variabiles complectentem determinare relationem, quam unaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio sit ipsarum x & y. Quemadmodum igitur aequatio huiusmodi finita resolvitur, si reperiatur qualis functio ipsarum x & y loco z substitui debeat, ut aequationi satisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variabiles complectens determinabit, qualis functio una sit reliquarum; isque huiusmodi aequationem resolvisse censendus est, qui indicaverit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z substituta aequationi satisfaciat, seu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis resolvitur, si vel functio ipsarum x & y valorem ipsius z exhibens definiatur, vel aequatio finita assignetur, qua idem debitus ipsius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variabiles complectens, semper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non semper evenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiusmodi aequationes, quibus plane nullo modo satisfieri poterit, quaecunque functio ipsarum x & y in locum ipsius z substituatur. Uti si proposita fuerit haec aequatio $zdy = ydx$ facile patet, nullam prorsus dari functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta reddat $zdy = ydx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguentur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipsarum x & z, quae loco y substituta eidem aequationi satisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipsarum x & z, in eius differentiali dy ineſt dz, quod quia in aequatione non ineſt, destrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x, y, & z dari potest, quae aequationi differentiali $zdy = ydx$ conveniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variabiles continentes distribui oportet in imaginarias & reales. Huiusmodi autem aequatio erit imaginaria seu absurda, cui per nullam

aequa-

aequationem finitam satisfieri potest; cuiusmodi erat illa $zdy = ydz$, quam modo consideravimus. Aequatio autem erit realis, cui aequivalens aequatio finita exhiberi potest, quod evenit, si una variabilis aequalis fit certae cuipiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \quad \text{fitque} \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imaginarias & reales diligentissime est observandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integralem, hoc est aequationem finitam satisfacientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z, tantum inesse differentialia dx & dy, differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tolentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, uti fit in hac aequatione:

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem investigatur, quibus casibus hoc eveniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variabiles involvens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse po-

poterit. Quos casus ut evolvamus, ponamus P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = Pdx + Qdy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaepiam ipsarum x & y, cuius differentiale sit

$dz = pdx + qdy$, eritque $P = p$ & $Q = q$.

At supra demonstravimus $pdx + qdy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y, nisi sit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, uti ante assumsimus $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy divisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q, posita sola x variabili, divisum per dx. Quocirca aequatio $dz = Pdx + Qdy$ realis esse nequit, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = Pdx + Qdy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z, P vero & Q sint functiones ipsarum x & y, tertiam variabilem z non complectentes. Ut enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y, necesse est ut sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur, diiudicari potest, utrum sit realis an absurda. Sic patebit hanc aequationem $zdz = ydx + xdy$ esse realem, nam ob

$P = y$ & $Q = x$, fit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$.

Haec vero aequatio $zzdz = yydx + xxdy$ est absurda, fit

fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$; qui valores sunt inaequales.

313. Ut autem criterium latissime patens investigemus, sint P, Q, & R functiones quaecunque ipsarum x, y, & z; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, siquidem sit primi gradus, continebitur in hac forma:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Quoties ergo haec aequatio est realis, z aequabitur functioni cuipiam ipsarum x & y; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = pdx + qdy$. Quare si in aequatione proposita ista functio ipsarum x & y loco z, & $pdx + qdy$ loco dz substituatur, necesse est, ut prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione proposita fiat: $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$, si in P, Q, & R valor ille loco z substituatur, necesse est ut fiat $p = -\frac{P}{R}$, & $q = -\frac{Q}{R}$.

314. Quoniam vero est $dz = pdx + qdy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y sit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

erit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right)$

& $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

ubi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP, dQ, dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitatibus P, Q, & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P, Q, & R sunt functiones ipsarum x, y, & z, ponamus

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \theta dy + \iota dz$$

ubi α, β, γ, δ, ε, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z ubique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz, ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\varepsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\theta + \iota q)dy.$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, ut sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inventi valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante invenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$

qui

qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non fubſtituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

ſeu $0 = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\delta - \beta)$.

Quia autem quantitates δ, β, γ, η, ζ, θ, per differentiationem inveniuntur, erit ſuperiori notandi modo adhibito:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Quae proprietas, niſi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, ſed imaginaria & abſurda.

317. Quanquam hanc regulam ex conſideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aeque ingrediuntur, manifeſtum eſt, & reliquarum conſideratione, eandem expreſſionem prodituram fuiſſe. Propoſita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variabiles involvat, quacunque, ſtatim diiudicari poterit utrum ſit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

qui ſi fuerit $= 0$, aequatio erit realis, ſin autem non fuerit $= 0$, certum hoc eſt ſignum, aequationem eſſe imaginariam ſeu abſurdam.

318. Aequatio propoſita per diviſionem quoque ſemper ad huiuſmodi formam reduci poteſt:

$$Pdx + Qdy + dz = 0,$$

in quam, cum prior abeat ſi fiat $R = 1$, criterium ſimplicius exprimetur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Quoties enim haec expressio revera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eveniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstravimus, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, utrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione $Pdx+Qdy+Rdz=0$, fuerit P functio ipsius x, Q functio ipsius y, & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem.

Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=0 \; ; \; \left(\frac{dP}{dz}\right)=0 \; ; \; \left(\frac{dQ}{dz}\right)=0 \; ;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0 \; ; \; \left(\frac{dR}{dx}\right)=0 \; \& \; \left(\frac{dR}{dy}\right)=0 \; ;$$

ideoque tota expressio criterii sponte evanescet.

320. Si fuerit ut ante P ipsius x, & Q ipsius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipsarum x, y, & z, aequatio erit realis si fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ seu } \left(\frac{dR}{dx}\right):\left(\frac{dR}{dy}\right)=P:Q$$

Sic si proposita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2dx}{x}+\frac{3dy}{y}+\frac{x^2y^3dz}{z^6}=0.$$

Quia hic est $P=\frac{2}{x}$; $Q=\frac{3}{y}$, & $R=\frac{x^2y^3}{z^6}$

hinc

hinc $\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{2xy^3}{z^5}$; atque $\left(\frac{dR}{dy}\right)=\frac{3xxyy}{z^4}$;

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio proposita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipsarum x & y, at R functio ipsius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=0;\left(\frac{dQ}{dz}\right)=0;\left(\frac{dR}{dx}\right)=0;\ \&\left(\frac{dR}{dy}\right)=0,$$

aequatio erit realis si fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec eadem vero conditio requiritur, si $Pdx+Qdy$ debeat esse differentiale determinatum, seu ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae ipsarum x & y ortum. Hucque redit quod supra §. 312 iam observavimus, aequationem $dZ=Pdx+Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y, realem esse non posse, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ambo autem isti casus inter se prorsus conveniunt: nam loco Rdz, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z.

322. Ut hoc criterium inventum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^3z-5yz^3)dx+(5x^3yz-4xz^3)dy$$
$$+(4x^3y^2-6xyz^2)dz=0,$$

qua cum forma generali comparata fit:

$$P=6xy^3z-5yz^3;\ \left(\frac{dP}{dy}\right)=12xyz-5z^3;$$
$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=6xy^3-15yz^2$$
$$Q=5x^3yz-4xz^3;\ \left(\frac{dQ}{dx}\right)=10xyz-4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2;$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

His inventis valoribus aequatio iudicium continens erit haec:

$$+(6xy^2z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz)$$
$$+(5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+(4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expreſſio ſi evolvatur, omnes termini actu ſe mutuo deſtruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propoſitam eſſe realem.

323. Quando autem expreſſio hoc modo ex criterio eruta non evaneſcit, tum id ſignum eſt aequationem propoſitam eſſe imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita invenitur, ea, ſi quidem aequationi differentiali conveniat, ſimul relationem indicabit, quam variabiles inter ſe tenent. Atque hoc modo ii caſus, quorum ſupra meminimus (310), evolvuntur. Sit enim propoſita iſta aequatio:

$$(z - x)\,dx + (y - z)\,dy = 0,$$

fiet $P = z - x$; $Q = y - z$; & $R = 0$,

porro $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$, & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$.

Aequatio iudicium exhibens fit $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$

ſeu $z - x = z - y$; unde fit $y = x$.

Quoniam igitur hic caſu evenit, ut aequatio $y = x$ ſimul aequationi differentiali ſatisfaciat, dicendum eſt propoſitam aequationem nil aliud ſignificare, niſi eſſe $y = x$.

324.

324. Proposita ergo aequatione differentiali tres variabiles continente: $Pdx+Qdy+Rdz=0$, tres considerandi erunt casus sequentes, ad quos haec aequatio deducit:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Primus est si haec expressio revera sit $=0$, tumque aequatio proposita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non sit identica, tum dispiciendum est, utrum ea aequationi propositae satisfaciat: quodsi evenit, habebitur aequatio finita, qui est casus secundus. Tertius autem casus locum habet, si aequatio finita cum proposita differentiali subsistere nequeat, atque tum aequatio proposita erit imaginaria: neque enim ulla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipsi satisfaciat.

325. Casus primus ac tertius per se sunt perspicui, secundus autem, etsi rarissime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam supra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia insint:

$(z-y)dx+xdy+(y-z)dz=0$. Erit ergo:

$$P=z-y \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right)=0 \;;\; \left(\frac{dR}{dy}\right)=1$$

$$Q=x \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right)=0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right)=1$$

$$R=y-z \;;\; \left(\frac{dP}{dy}\right)=-1 \;;\; \left(\frac{dQ}{dx}\right)=1$$

unde aequatio finita criterium continens evadet:

$z-x-y=0$, seu $z=x+y$

substituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque

$$xdx+xdy-x(dx+dy)=0;$$

quae aequatio, cum sit identica, sequitur aequationem differentialem nil aliud significare, nisi $z=x+y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variabiles insunt contineri in hac forma $Pdx+Qdy+Rdz=0$,

dubium hic nasci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresve dimensiones constituunt, cuiusmodi est haec:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz.$$

Verum de huiusmodi aequationibus notandum est, eas nullo modo reales esse posse, nisi habeant divisores prioris formae, qui propterea aequationes simplices constituent. Cum enim ex hac aequatione fiat: $dz = \frac{Tdx+Vdy \pm \sqrt{(dx^2(T^2-PR)+2dxdy(TV+RS)+dy^2(V^2-QR))}}{R}$

facile patet z functioni cuipiam ipsarum x & y, seu dz huiusmodi expressioni $pdx+qdy$ aequale fieri non posse, nisi quantitas irrationalis evadat rationalis, quod eveniet si fuerit:

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

seu $$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

Nisi ergo haec aequatio finita ipsi aequationi propositae satisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Supereffet ut in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variabiles complectuntur, perpenderemus, casusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae evadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praesertim, cum ex iisdem fontibus, quos hic aperuimus, sequantur. Ceterum si in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem causam hic quoque aequationes, quae plures variabiles complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, si unquam occurrerent, ex principiis hic traditis sine negotio examinari possent. Quare his expositis Institutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progressuri ad insignes usus ostendendos, quos iste calculus cum in ipsa Analysi, tum in Geometria sublimiori affert.

INSTITUTIONUM

CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS POSTERIOR

CONTINENS

USUM HUIUS CALCULI IN ANALYSI

FINITORUM, NEC NON IN DOCTRINA

SERIERUM.

CAPUT I.

DE TRANSFORMATIONE SERIERUM



1.

Cum nobis propositum sit usum Calculi differentialis tam in universa Analysi, quam in doctrina de seriebus ostendere; nonnulla subsidia ex Algebra communi, quae vulgo tractari non solent, hic erunt repetenda. Quae quamvis maximam partem iam in introductione sumus complexi, tamen quaedam ibi sunt praetermissa, vel studio quod expediat ea tum demum explicari, quando necessitas id exigat, vel quia cuncta, quibus opus sit futurum, praevideri non poterant. Huc pertinet transformatio serierum, cui hoc Caput destinavimus, qua quaevis series in innumerabiles alias series transmutatur, quae omnes eandem habeant summam communem, ita ut, si seriei propositae summa sit cognita, reliquae series omnes simul summari queant. Hoc autem capite praemisso, eo uberius doctrinam serierum per calculum differentialem & integralem amplificare poterimus.

2. Considerabimus autem potissimum eiusmodi series, quarum singuli termini per potestates successivas quantitatis cuiusdam indeterminatae sunt multiplicati: quoniam hae latius patent, maioremque utilitatem afferent.

Sit igitur propoſita ſequens ſeries generalis, cuius ſummam, ſive ſit cognita ſive ſecus, ponamus $= S$, ſitque

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

Ponatur iam $x = \frac{y}{1+y}$, & cum ſit per ſeries infinitas

$$\begin{aligned}
x &= y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \&c.\\
x^2 &= y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 5y^6 - 6y^7 + \&c.\\
x^3 &= y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \&c.\\
x^4 &= y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \&c.\\
&\&c.
\end{aligned}$$

hi valores ſubſtituti, ſerieque ſecundum poteſtates ipſius y diſpoſita, dabunt

$$\begin{array}{llllll}
S = ay & - ay^2 & + ay^3 & - ay^4 & + ay^5 & \&c.\\
& + b & - 2b & + 3b & - 4b & \\
& & + c & - 3c & + 6c & \\
& & & + d & - 4d & \\
& & & & + e &
\end{array}$$

3. Quoniam poſuimus $x = \frac{y}{1+y}$; erit $y = \frac{x}{1-x}$; quo valore loco y ſubſtituto, ſeries propoſita

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

tranſmutabitur in hanc:

$$S = a.\frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} \&c.$$

in qua coefficiens ſecundi termini $b - a$ eſt differentia prima ipſius a ex ſerie $a, b, c, d, e,$ &c. quam ſupra per Δa expoſuimus; coefficiens tertii termini $c - 2b + a$ eſt differentia ſecunda $\Delta^2 a$; coefficiens quarti eſt differentia tertia $\Delta^3 a$, &c. Hinc differentiis ipſius a continuis, quae formantur ex ſerie $a, b, c, d, e,$ &c. adhibendis propoſita ſeries tranſmutabitur in hanc

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \&c.$$

cuius ergo ſeriei ſumma habebitur, ſi propoſitae ſumma fuerit cognita.

4.

4. Si igitur series a, b, c, d, &c. ita fuerit comparata, ut tandem differentias habeat constantes, quod evenit, si eius terminus generalis fuerit functio rationalis integra, tum series posterior $\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a +$ &c. tandem habebit terminos evanescentes, sicque eius summa per expressionem finitam exhiberi poterit. Ita si seriei a, b, c, d, &c. differentiae primae iam fuerint constantes, tum seriei huius: $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ &c. summa erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a$. At si illius seriei coefficientium differentiae secundae fiant constantes, tum ipsius seriei propositae erit

$$= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta\Delta a.$$

Unde summae huiusmodi serierum ex differentiis coefficientium facile invenientur.

I. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 +$$ &c.

Diff. I. 2, 2, 2, 2, &c.

Cum ergo differentiae primae sint constantes, ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$: erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei*

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 +$$ &c.

Diff. I. 3, 5, 7, 9, &c.

Diff. II. 2, 2, 2, &c.

Quia itaque est

$$a = 1;\ \Delta a = 3,\ \Delta^2 a = 2;$$

erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^3}.$$

III. *Quaeratur summa huius seriei*

$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \&c.$

Diff. I. 11, 25, 45, 71, 103

Diff. II. 14, 20, 26, 32

Diff. III. 6, 6, 6,

Quia est $a = 4$; $\Delta a = 11$; $\Delta^2 a = 14$; $\Delta^3 a = 6$; erit summa

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4},$$

sive $$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+xx)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

5. Quanquam hoc modo istarum serierum in infinitum progredientium summae inveniuntur; tamen ex iisdem principiis hae series quoque ad datum quemvis terminum summari possunt. Proposita enim sit haec series

$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots\ldots\ldots + ox^n$

& quaeratur eius summa, si in infinitum progrediatur, quae erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{xx}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \&c.$

Nunc considerentur eiusdem seriei termini post ultimum ox^n sequentes, qui sint

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \&c.$$

cuius seriei, si per x^n dividatur, summa, ut ante inveniri poterit; quae rursus per x^n multiplicata erit

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p + \&c.$$

quae summa si a totius seriei in infinitum continuatae summa subtrahatur, remanebit summa portionis propositae quaesita: $S =$

$$\frac{x}{1-x}(a - x^n p) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a - x^n \Delta p) + \frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p)$$

&c.

I. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$S = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots\ldots + nx^n$

Tam

Tam horum coefficientium, quam terminum ultimum sequentium quaerantur differentiae:

1, 2, 3, 4, &c. | $n+1, n+2, n+3$, &c.
1, 1, 1, | 1, 1;

eritque $a=1$, $\Delta a=1$, $p=n+1$, $\Delta p=1$,

unde summa quaesita est;

$$S=\frac{x}{1-x}(1-(n+1)x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(1-x^n), \text{ seu}$$

$$S=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

II. *Quaeratur summa huius seriei finitae*

$$S=1x+4x^2+9x^3+16x^4+\ldots\ldots+n^2x^n.$$

Investigentur primum differentiae hoc modo:

1, 4, 9, 16, &c. | $(n+1)^2, (n+2)^2, (n+3)^2$, &c.
3, 5, 7, | $2n+3$, $2n+5$
2, 2, | 2

quibus inventis erit summa quaesita $S=$

$$\frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)x^n)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n),$$

seu $$S=\frac{x+xx-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3},$$

6. Quodsi autem series proposita non eiusmodi habeat coefficientes, qui tandem ad differentias constantes deducantur, tum transmutatio hic exhibita nihil confert ad eius summam determinandam. Neque vero etiam eius ope summa proxime definiri poterit commodius, quam per ipsam seriei propositae additionem fieri licet. Si enim in serie

$$ax+bx^2+cx^3+dx^4+\text{ &c.}$$

fuerit $x<1$ quo solo casu summatio proprie sic dicta locum habere potest, erit $\frac{x}{1-x}>x$, ideoque non series minus convergit quam proposita. Sin autem in serie proposita fuerit $x=1$

$x = 1$ tum novae seriei omnes plane termini fiunt infiniti, quo ergo casu ista transmutatio nullius prorsus erit usus.

7. Consideremus autem seriem, in qua signa $+$ & $-$ alternatim se excipiant, quae ex praecedente deducetur ponendo x negativum. Si itaque fuerit

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{&c.}$$

cuius seriei negativa oritur, si in praecedente statuatur x negativum. Sumantur ergo ut ante differentiae Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. ex serie coefficientium a, b, c, d, e, &c. signis ad solas ipsius x potestates relatis, atque series proposita transformabitur in hanc: $S =$

$$\frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4}\Delta^3 a + \text{&c.}$$

unde perspicitur aequationem propositam iisdem casibus summari posse quibus praecedens. Scilicet si series a, b, c, d, &c. tandem ad differentias constantes deducatur.

8. Hoc autem casu ista transformatio commodam praebet approximationem ad valorem seriei propositae:

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - fx^6 + \text{&c.}$$

quantuscunque enim x fuerit numerus, fractio $\frac{x}{1+x}$ secundum cuius potestates altera series progreditur, fit unitate minor: atque si fit $x = 1$, erit $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. Sin autem sit $x < 1$ puta $x = \frac{1}{n}$ fiet $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, ideoque series per transformationem inventa semper magis convergit quam proposita. Consideremus imprimis casum, quo $x = 1$, qui ad series summandas ingens affert subsidium, sitque

$$S = a - b + c - d + e - f + \text{&c.}$$

ac denotentur differentiae primae, secundae & sequentes ipsius a, quas progressio a, b, c, d, e, &c. praebet per

Δ,

Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. quibus inventis erit

$$S = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{4} \Delta a + \tfrac{1}{8} \Delta^2 a - \tfrac{1}{16} \Delta^3 a + \text{&c.}$$

quae nisi actu terminatur, summam vero proximam satis commode exhibet.

9. Usum igitur huius ultimae transmutationis, qua sumsimus $x = 1$, in aliquot exemplis ostendamus, ac primo quidem in eiusmodi, quibus vera summa finite exprimi potest. Tales sunt series divergentes, quibus numeri a, b, c, d, &c. tandem ad differentias constantes deducant, quarum summae, cum recepto huius vocis significatu, proprie non exhiberi queant, vocem summae hic eo sensu, quem supra tribuimus, accipimus, ita ut denotet valorem expressionis finitae, ex cuius evolutione proposita series nascatur.

I. *Sit igitur proposita haec series Leibnitzii:*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{&c.}$$

in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \frac{1}{2}$.

II. *Sit proposita ista series:*

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{&c.}$$

Diff. I. $= 1, 1, 1, 1, 1,$ &c.

Cum ergo sit $a = 1$, $\Delta a = 1$, erit $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

III. *Sit proposita haec series:*

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{&c.}$$

Diff. I. $= 2, 2, 2, 2,$ &c.

Ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$ fit $S = 1 - 1 = 0$.

IV. *Sit proposita haec series trigonalium numerorum.*

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \text{&c.}$$

Diff. I. $= 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.

Diff. II. $= 1, 1, 1, 1,$ &c.

Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. *Sit proposita series quadratorum:*

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{&c.}$$

Diff. I. $= 3, 5, 7, 9, 11,$ &c.

Diff. II. $= 2, 2, 2, 2,$ &c.

Ob $a = 1$; $\Delta a = 3$; $\Delta\Delta a = 2$; erit $S = \frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = 0$.

VI. *Sit propoſita ſeries biquadratorum:*

$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \&c.$

Diff. I. $= 15, 65, 175, 369, 671$

Diff. II. $= 50, 110, 194, 302$

Diff. III. $= 60, 84, 108$

Diff. IV. $= 24, 24$

Erit ergo $S = \frac{1}{1} - \frac{15}{4} + \frac{50}{16} - \frac{60}{64} + \frac{24}{256} = 0$.

10. Si ſeries magis divergant uti geometricae aliaeque ſimiles, eae hoc modo ſtatim in ſeriem magis convergentem tranſmutantur, quae niſi adhuc ſatis convergat, eodem modo in aliam magis convergentem convertetur.

I. *Sit propoſita haec ſeries geometrica:*

$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c.$

Diff. I. $= 1, 2, 4, 8, 16, \&c.$

Diff. II. $= 1, 2, 4, 8, \&c.$

Diff. III. $= 1, 2, 4, \&c.$

Cum igitur in omnibus differentiis primus terminus ſit $= 1$. Summa ſeriei exprimetur hoc modo

$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \&c.$

cuius ſumma eſt $= \frac{1}{1+2}$, oritur enim ex evolutione fractionis $\frac{1}{2+1}$, dum propoſita oritur ex $\frac{1}{1+2}$.

II. *Sit propoſita haec ſeries recurrens:*

$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \&c.$

Diff. I. $= 1, 3, 7, 17, 41, 99 \&c.$

Diff. II. $= 2, 4, 10, 24, 58 \&c.$

Diff. III. $= 2, 6, 14, 34 \&c.$

Diff. IV. $= 4, 8, 20 \&c.$

Diff. V. $= 4, 12 \&c.$

Diff. VI. $= 8 \&c.$

$\&c.$

Continuarum ergo differentiarum termini primi conſtituunt hanc progreſſionem geometricam geminatam:

1,

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, &c. unde erit

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \text{ &c.}$$

cum igitur praeter primum terminum reliqui bini se continuo destruant, erit $S = \frac{1}{2}$. Oritur autem series proposita ex evolutione fractionis $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, uti in expressione naturae serierum recurrentium ostendimus.

III. *Sit proposita series hypergeometrica:*

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \text{&c.}$$

cuius differentias continuas hoc modo commodius investigabimus:

	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
1			
	1		
2		3	
	4		11
6		14	
	18		64
24		78	
	96		426
120		504	
	600		3216 &c.
720		3720	
	4320		27240
5040		30960	
	35280		256320
40320		287280	
	322560		2656080
362880		2943360	
	3265920		
3628800			

Quibus differentiis ulterius continuatis erit:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \frac{16687}{256}$$

$$+ \frac{148329}{512} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} - \frac{190899411}{4096} + \text{&c.}$$

Colligantur duo termini initiales, eritque $S = \frac{1}{4} + A$

existente $A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \text{&c.}$

Si nunc eodem modo differentiae capiantur, erit

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}} - \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \&c.$$

Colligantur duo termini initiales, quia convergunt, fietque

$$A = \frac{7}{2^6} + B \quad \text{existente} \quad B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \&c.$$

cuius seriei differentiis denuo sumendis fiet:

$$B = \frac{21}{2^9} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \&c.$$

Colligantur quatuor termini initiales in unum & statuatur

$$B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C \quad \text{existente} \quad C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \&c.$$

fietque aliquot terminis actu colligendis proxime:

$$C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}.$$

Ex his ergo tandem concludetur summa seriei propositae: $S = 0,40082038$, quae tamen vix ultra tres quatuorve figuras pro accurata haberi potest ob nimiam seriei divergentiam, est tamen certe iusto minor. Aliunde enim inveni hanc summam esse $= 0,4036524077$, ubi ne ultima quidem nota a vero aberrat.

11. Imprimis autem haec transmutatio ingentem affert utilitatem ad series iam quidem, sed lente convergentes in alias, quae multo promtius convergant, transmutandas. Quoniam vero termini sequentes minores sunt quam praecedentes, differentiae primae fiunt negativae; unde in sequentibus signorum ratio probe est habenda.

I. *Sit proposita haec series:*

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

Diff.

Diff. I. $= -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2.3}; -\frac{1}{3.4}; -\frac{1}{4.5}; -\frac{1}{5.6}$

Diff. II. $= +\frac{1}{3}; \frac{2}{2.3.4}; \frac{2}{3.4.5}; \frac{2}{4.5.6}$

Diff. III. $= -\frac{1}{4}; -\frac{2.3}{2.3.4.5}; -\frac{2.3}{3.4.5.6}$

Diff. IV. $= +\frac{1}{5}$; &c. Hinc ergo erit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \text{&c.}$$

utramque autem hanc seriem logarithmum hyperbolicum binarii exhibere, iam in Introductione ostendimus.

II. *Sit proposita ista series pro circulo:*

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ &c.}$$

Diff. I. $= -\frac{2}{1.3}; -\frac{2}{3.5}; -\frac{2}{5.7}; -\frac{2}{7.9}; -\frac{2}{9.11}$ &c.

Diff. II. $= +\frac{2.4}{1.3.5}; \frac{2.4}{3.5.7}; \frac{2.4}{5.7.9}; \frac{2.4}{7.9.11}$ &c.

Diff. III. $= -\frac{2.4.6}{1.3.5.7}; -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}; -$ &c.
&c.

Hinc ergo concluditur fore summam seriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{&c.}$$

seu $$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{&c.}$$

III. *Quaeratur valor huius seriei infinitae*

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 \text{ &c.}$$

Quia differentiae ab initio nimis fiunt inaequales, colligantur actu termini usque ad $l10$ ex tabulis, quorum valor reperietur $= -0{,}3911005$; eritque

$S = -0{,}3911005 + l10 - l11 + l12 - l13 + l14 - l15 + \&c.$
in infinitum.

Desumantur hi logarithmi ex tabulis, eorumque differentiae quaerantur hoc modo

		Diff. 1.	Diff. 2.	Diff. 3.	Diff. 4.	Diff. 5.
$l10 = 1{,}0000000$		+	−	+	−	+
			36042			
$l11 = 1{,}0413927$		413927		5779		
			30263		1292	
$l12 = 1{,}0791812$		377885		4487		368
			25776		924	
$l13 = 1{,}1139434$		347622		3563		
			22213			
$l14 = 1{,}1461280$		321846				
$l15 = 1{,}1760913$		299633				

Ex quibus reperitur

$$l10 - l11 + l12 - l13 + \&c. = \frac{1{,}0000000}{2} - \frac{413927}{4} - \frac{36042}{8} - \frac{5779}{16} - \frac{1292}{32} - \frac{368}{64}$$

$$= 0{,}4891606.$$

Hinc valor seriei propositae erit

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + \&c. = 0{,}0980601;$$

cui logarithmo respondet numerus $1{,}253315$.

12. Quemadmodum has transmutationes obtinuimus ponendo in serie loco x hanc fractionem $\frac{y}{1 \pm y}$, ita innumerabiles aliae transmutationes orientur, si loco x aliae functiones ipsius y substituantur. Sit iterum proposita ista series:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

atque ponatur $x = y(1 - y)$, quo facto series orietur sequens

$$\begin{aligned} S = {} & ay - ayy \\ & + byy - 2by^3 + by^4 \\ & + cy^3 - 3cy^4 + 3cy^5 - cy^6 \\ & + dy^4 - 4dy^5 + 6dy^6 \\ & + ey^5 - 5ey^6 \quad \&c. \\ & + fy^6 \end{aligned}$$

Quodsi ergo altera harum serierum fuerit summabilis, simul alterius summa erit cognita. Ita si statuatur

$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{&c.} = \frac{x}{1-x}$, erit

$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \text{&c.}$

Cuius ergo seriei summa erit $= \frac{y - yy}{1 - y + yy}$.

13. Si altera series alicubi abrumpatur, tum summa prioris absolute exhiberi poterit. Ponamus esse $a = 1$, & in serie inventa omnes terminos post primum evanescere, ut sit $S = y$; ideoque ob $x = y - yy$, erit summa prioris $= \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$. Fiet autem ob $a = 1$; ut sequitur:

$$b = 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot 2^{12}$$

&c.

unde prior series abibit in hanc: $S = \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \text{&c.}$ quae eadem invenitur, si quantitas surda $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ in seriem evolvatur, atque ab $\frac{1}{2}$ subtrahatur.

14. Statuamus, quo transmutatio latius pateat $x = y(1 + ny)$, atque series proposita:

$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{&c.}$

transmutabitur in sequentem: $S =$

$$S = ay + \frac{y}{1}nay^2 + \frac{y(y-1)}{1.2}n^2ay^3 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}n^3ay^4 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}n^4ay^5$$
$$+ by^2 + \frac{2y}{1}nby^3 + \frac{2y(2y-1)}{1.2}n^2by^4 + \frac{2y(2y-1)(2y-2)}{1.2.3}n^3by^5$$
$$+ cy^3 + \frac{3y}{1}ncy^4 + \frac{3y(3y-1)}{1.2}n^2cy^5$$
$$+ dy^4 + \frac{4y}{1}ndy^5$$
$$+ ey^5$$
$$\&c.$$

Si ergo illius seriei summa fuerit cognita, & huius simul summa habebitur, ac vicissim. Quoniam vero n & y pro lubitu accipi possunt, hinc ex una serie summabili innumerae aliae summabiles inveniri possunt.

15. Possunt etiam eiusmodi transmutationes fieri, ut seriei inventae summa fiat irrationalis, hoc modo.

Sit proposita ista series:

$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \&c.$ erit
$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \&c.$

Iam statuatur $x = \frac{y}{\sqrt{(1-nyy)}}$; erit $xx = \frac{yy}{1-nyy}$,

atque series proposita transmutabitur in hanc: $\frac{Sy}{\sqrt{(1-nyy)}} =$

$$ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \&c.$$
$$+ by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \&c.$$
$$+ cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \&c.$$
$$+ dy^8 + 4ndy^{10} + \&c.$$
$$+ ey^{10} + \&c.$$

Si igitur summa S ex priori serie fuerit cognita, habebitur simul summa sequentis seriei: $\frac{S}{\sqrt{(1-nyy)}} =$

$$ay + (na+b)y^3 + (n^2a+2nb+c)y^5 + (n^3a+3n^2b+3nc+d)y^7 + \&c.$$

16.

16. Si sumatur $n = -1$; erunt coefficientes huius seriei differentiae continuae ipsius a, ex serie a, b, c, d, &c. sin autem signa in serie proposita alternentur, tum posito $n = 1$ coefficientes erunt istae differentiae. Denotent ergo Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, &c. differentias primas, secundas, tertias, &c. ipsius a ex serie numerorum a, b, c, d, e, &c.

Ac si fuerit

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \text{&c.}$$

posito $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1+yy)}} = ay + \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 + \Delta^3 a.y^7 + \text{&c.}$$

Sin autem fuerit:

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \text{&c.}$$

ponaturque $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1-yy)}} = ay - \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 - \Delta^3 a.y^7 + \text{&c.}$$

Quodsi ergo series a, b, c, d, e, &c. tandem ad differentias constantes deducat, tum utraque series absolute summari poterit; quae summatio autem quoque ex superioribus sequitur.

17. Ponamus coefficientes a, b, c, d, &c. constituere hanc seriem $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, &c. eritque, uti supra iam vidimus:

$$a = 1$$

$$\Delta a = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta^2 a = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\Delta^3 a = -\frac{2.4.6}{3.5.7} \quad \text{&c.}$$

unde sequentes duas series summabimus:

I. Sit $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$,

fiet

$$S = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(1+yy)}+y}{\sqrt{(1+yy)}-y} = l(\sqrt{(1+yy)}+y):$$

unde erit

$$\frac{l(\sqrt{(1+yy)}+y)}{\sqrt{(1+yy)}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

II. Sit $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = A \text{ tang } x$. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$,

fiet

$$S = A \text{ tang } \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}} = A \text{ sin } y = A \text{ cos } \sqrt{(1-yy)}.$$

Hancobrem obtinebitur ista summatio:

$$\frac{A \text{ sin } y}{\sqrt{(1-yy)}} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

18. Possunt quoque loco x functiones transcendentes ipsius y substitui, sicque summationes aliae inventu difficiliores erui; verumtamen ne series novae fiant nimis perplexae, eiusmodi functiones eligi debent, quarum potestates facile exhiberi queant; quales sunt quantitates exponentiales e^y. Proposita igitur hac serie:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

ponatur $x = e^{ny}$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

erit $x^2 = e^{2ny}$; $x^3 = e^{3ny}$; &c.

Generaliter vero est, uti constat:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Quare series proposita in hanc transmutabitur:

$$S = ay + 1nay^2 + \tfrac{1}{2}n^1ay^3 + \tfrac{1}{6}n^2ay^4 + \tfrac{1}{24}n^3ay^5 + \text{ &c.}$$
$$+ by^2 + \tfrac{2}{1}nby^3 + \tfrac{3}{2}n^1by^4 + \tfrac{4}{6}n^2by^5 + \text{ &c.}$$
$$+ cy^3 + \tfrac{3}{1}ncy^4 + \tfrac{6}{2}n^1cy^5 + \text{ &c.}$$
$$+ dy^4 + \tfrac{4}{1}ndy^5 + \text{ &c.}$$
$$+ ey^5 + \text{ &c.}$$

I. Sit series proposita geometrica:

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ &c. erit } S = \frac{x}{1-x}.$$

Ponatur iam

$$n = -1; \text{ ut sit } x = e^{-y}; \text{ \& } S = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{y}{e^y - y},$$

reperietur summa haec

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{5}{24}y^5 + \frac{19}{120}y^6 - \text{ &c.}$$

cuius autem seriei lex non perspicitur.

II. Sint in altera serie omnes termini praeter primum $= 0$; erit $b = -na$; $c = \frac{3}{2}n^1a$; $d = -\frac{8}{3}n^2a$;

$$e = \frac{125}{24}n^3a; \quad f = -\frac{29}{30}n^4a; \text{ &c.}$$

Cum ergo sit summa $S = ay$; \& $x = e^{-y}$; fiet:

$$y = x - nx^2 + \frac{3}{2}n^1x^3 - \frac{8}{3}n^2x^4 + \frac{125}{24}n^3x^5 - \frac{29}{30}n^4x^6 + \text{ &c.}$$

Quoniam vero in his seriebus lex progressionis non est manifesta, summationes ex hac substitutione deductae parum habent utilitatis. Praecipue autem notari merentur transformationes ex substitutione $x = \frac{y}{1 \pm y}$ derivatae, quippe quae non solum eximias summationes, sed etiam idoneos modos ad summas serierum appropinquandi suppeditant. His ergo, quae sine calculi differentialis ope sunt expedita, praemissis, ad ipsum huius calculi usum in doctrina serierum ostendendum progrediamur.

CAPUT II.

DE INVESTIGATIONE SERIERUM SUMMABILIUM.

19.

Si Seriei, in cuius terminis ineſt quantitas indeterminata x, ſumma fuerit cognita, quae utique erit functio ipſius x; tum quicunque valor ipſi x tribuatur, ſeriei ſumma perpetuo aſſignari poterit. Quare ſi loco x ponatur $x + dx$, ſeriei reſultantis ſumma erit aequalis ſummae prioris, una cum ipſius differentiali: unde ſequitur fore differentiale ſummae $=$ differentiali ſeriei. Quia vero hoc modo tam ſumma, quam ſinguli ſeriei termini multiplicati erunt per dx, ſi ubique per dx dividatur, habebitur nova ſeries, cuius ſumma erit cognita. Simili modo ſi haec ſeries cum ſua ſumma denuo differentietur, & ubique per dx dividatur, nova exoritur ſeries cum ſua ſumma: ſicque ex una ſerie ſummabili quantitatem indeterminatam x involvente, per continuam differentiationem innumerae novae ſeries pariter ſummabiles elicientur.

20. Quo haec clarius perſpiciantur, propoſita ſit progreſſio geometrica indeterminata, quippe cuius ſumma eſt cognita, haec:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c.$$

Si nunc differentiatio inſtituatur, erit:

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2x\,dx + 3x^2\,dx + 4x^3\,dx + 5x^4\,dx + \&c.$$

atque diviſione per dx inſtituta, habebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c.$$

Si

Si denuo differentietur, atque per dx dividatur, prodibit:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \&c. \quad \text{seu}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \&c.$$

ubi coefficientes sunt numeri trigonales. Si haec porro differentietur, atque per $3dx$ dividatur, obtinebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c.$$

cuius coefficientes sunt numeri pyramidales primi. Sicque ulterius procedendo oriuntur eaedem series quas ex evolutione fractionis $\frac{1}{(1-x)^n}$ nasci constat.

21. Latius autem patebit haec serierum investigatio, si antequam quaevis differentiatio suscipiatur, ipsa series una cum summa per quamvis ipsius x potestatem seu functionem multiplicetur. Sic cum sit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

multiplicetur ubique per x^m, eritque

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \&c.$$

nunc differentietur haec series, fietque per dx diviso:

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+1} + (m+3)x^{m+2} + \&c.$$

Dividatur nunc per x^{m-1}, habebitur:

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + \&c.$$

multiplicetur haec antequam nova differentiatio suscipiatur per x^n, ut sit

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \text{ &c.}$$

Nunc instituatur differentiatio, & diviso per dx erit:

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mnx^{n-1} + (m+1)(n+1)x^n + (m+2)(n+2)x^{n+1} + \text{ &c.}$$

Divisione autem per x^{n-1} instituta, fiet

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2xx}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \text{ &c.}$$

ficque ulterius progredi licebit: invenientur autem perpetuo eaedem series, quae ex evolutione fractionum summam constituentium nascuntur.

22. Quoniam progressionis geometricae primum assumtae summa ad quemvis terminum usque assignari potest, hoc modo quoque series definito terminorum numero constantes summabuntur. Ita cum sit

$$\frac{x-x^{n+1}}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots\ldots + x^n$$

erit differentiatione instituta & terminis per dx divisis

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$$

Hinc summae potestatum numerorum naturalium ad quemvis terminum inveniri poterunt. Multiplicetur enim haec series per x, ut fiat:

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

quae denuo differentiata ac per dx divisa dabit:

$$\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2nn+2n-1)x^{n+1}-nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots\ldots \pm n^2x^{n-1}$$

quae

quae per x multiplicata dabit:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3} = x+4x^2+9x^3+\ldots\ldots+n^2x^n$$

quae differentiata, per dx diuisa ac per x multiplicata producet seriem hanc:

$$x+8x^2+27x^3+\ldots\ldots+n^2x^n$$

cuius summa propterea inuenietur. Ex hacque simili modo summa biquadratorum altiorumque potestatum indefinita eruetur.

23. Methodus igitur haec ad omnes series quantitatem indeterminatam continentes accommodari potest, quarum quidem summae constant. Cum igitur praeter geometricas series recurrentes omnes eadem praerogativa gaudeant, ut non solum in infinitum, sed etiam ad quemvis terminum summari queant; ex iis quoque hac methodo innumerae aliae series summabiles inveniri poterunt. Quod cum opus foret maxime diffusum, si id persequi vellemus, unicum casum perpendamus.

Sit scilicet proposita haec series:

$$\frac{x}{1-x-xx} = x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+\text{&c.}$$

quae differentiata ac per dx diuisa dabit:

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1+2x+6x^2+12x^3+25x^4+48x^5+91x^6+\text{&c.}$$

Facile autem patet omnes has series hoc modo resultantes fore quoque recurrentes, quarum adeo summae ex ipsarum natura inveniri poterunt.

24. In genere igitur si seriei cuiuspiam in hac forma contentae: $ax+bx^2+cx^3+dx^4+$ &c.
summa fuerit cognita, quam ponamus $= S$, eiusdem seriei, si singuli termini singulatim per terminos progressionis arithmeticae multiplicentur, summa inveniri poterit. Sit enim

$$S = ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{&c.}$$

multiplicetur per x^m, erit

$$Sx^m = ax^{m+1}+bx^{m+2}+cx^{m+3}+dx^{m+4}+\text{&c.}$$

differentietur haec aequatio, & dividatur per dx.

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \&c.$$

dividatur per x^{m-1}, eritque

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

Quodsi ergo huius sequentis seriei summa desideretur:
$aax + (a+\beta)bx^2 + (a+2\beta)cx^3 + (a+3\beta)dx^4 + \&c.$
multiplicetur superior per β ac statuatur $m\beta + \beta = a$ ut sit $m = \frac{a-\beta}{\beta}$, eritque huius seriei summa $= (a-\beta)S + \frac{\beta x dS}{dx}$

25. Poterit etiam huius seriei propositae summa inveniri, si singuli eius termini multiplicentur per terminos seriei secundi ordinis singulatim, cuius scilicet differentiae demum secundae sint constantes. Quoniam enim iam invenimus.

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

multiplicetur per x^n, ut sit

$$mSx^n + \frac{x^{n+1}dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + \&c.$$

differentietur posito dx constante, & per dx dividatur:

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1}ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \&c.$$

Dividatur per x^{n-1}, ac multiplicetur per k, ut sit

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kxdS}{dx} + \frac{kx^2ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)kcx^3 + \&c.$$

Comparetur nunc haec series cum ista:

erit

erit:

	Diff. 1.	Diff. 2.
$kmn + kn + k = a$	$km + kn + 3k = b$	$2k = \gamma$
$kmn + 2km + 2kn + 4k = a + b$	$km + kn + 5k = b + \gamma$	
$kmn + 3km + 3kn + 9k = a + 2b + \gamma$		

Ergo $k = \frac{1}{2}\gamma$; & $m + n = \frac{2b}{\gamma} - 3$; atque

$$mn = \frac{a}{k} - m - n - 1 = \frac{2a}{\gamma} - \frac{2b}{\gamma} + 2 = \frac{2(a - b + \gamma)}{\gamma}.$$

Hinc summa seriei quaesita erit:

$$(a - b + \gamma)S + \frac{(b - \gamma)xdS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2}.$$

26. Simili modo summa reperiri poterit seriei huius

$$A\alpha + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

si quidem cognita fuerit summa S seriei huius:

$$S = \alpha + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

atque A, B, C, D, &c. constituant seriem, quae ad differentias constantes deducitur. Fingatur enim summa, quoniam eius forma ex antecedentibus colligitur, haec

$$\alpha S + \frac{bxdS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3 S}{6dx^3} + \frac{\varepsilon x^4 d^4 S}{24dx^4} + \&c.$$

Nunc ad litteras α, ε, γ, δ, &c. inveniendas evolvantur singulae series, eritque:

$$\begin{aligned}
\alpha S &= \alpha\alpha + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3 + \alpha ex^4 + \&c. \\
\frac{bxdS}{dx} &= \quad bbx + 2bcx^2 + 3bdx^3 + 4bex^4 + \&c. \\
\frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} &= \quad \gamma cx^2 + 3\gamma dx^3 + 6\gamma ex^4 + \&c. \\
\frac{\delta x^3 d^3 S}{6dx^3} &= \quad \delta dx^3 + 4\delta ex^4 + \&c. \\
\frac{\varepsilon x^4 d^4 S}{24dx^4} &= \quad \varepsilon ex^4 + \&c.
\end{aligned}$$

quae simul sumtae comparentur cum proposita:

$$Z = A\alpha + B\beta x + C\gamma x^2 + D\delta x^3 + E\varepsilon x^4 + \&c.$$

fietque comparatione singulorum terminorum instituta:

$$\alpha = A$$
$$\beta = B - \alpha = B - A$$
$$\gamma = C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A$$
$$\delta = D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A$$
$$\&c.$$

His igitur valoribus inventis erit summa quaesita:

$$Z = AS + \frac{(B-A)x dS}{1 dx} + \frac{(C-2B+A)x^2 ddS}{1.2 dx^2} + \frac{(D-3C+3B-A)x^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

seu si seriei A, B, C, D, E, &c. differentiae continuae more consueto indicentur, erit

$$Z = AS + \frac{\Delta A.x dS}{1 dx} + \frac{\Delta^2 A.x^2 d^2S}{1.2 dx^2} + \frac{\Delta^3 A.x^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

si quidem fuerit uti assumsimus:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

Si ergo series A, B, C, D, &c. tandem habeat differentias constantes, summa seriei Z finite exprimi poterit.

27. Quia sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, est:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

sumatur haec series pro priori, & cum sit

$$S = e^x \quad \text{erit} \quad \frac{dS}{dx} = e^x ; \quad \frac{ddS}{dx^2} = e^x \quad ; \quad \&c.$$

Quare huius seriei, quae ex illa & hac A, B, C, D, &c. componitur:

$$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

sum-

summa hoc modo exprimetur:

$$e^x\left(A+\frac{x\Delta A}{1}+\frac{xx\Delta^2 A}{1.2}+\frac{x^3\Delta^3 A}{1.2.3}+\frac{x^4\Delta^4 A}{1.2.3.4}+\&c.\right)$$

Sic si proponatur haec series:

$$2+\frac{5x}{1}+\frac{10x^2}{1.2}+\frac{17x^3}{1.2.3}+\frac{26x^4}{1.2.3.4}+\frac{37x^5}{1.2.3.4.5}+\&c.$$

Ob seriem A, B, C, D, E, &c.

erit $A = 2, 5, 10, 17, 26$ &c.

$\Delta A = 3, 5, 7, 9$ &c.

$\Delta^2 A = 2, 2, 2$ &c.

erit huius seriei:

$$2+5x+\frac{10x^2}{2}+\frac{17x^3}{6}+\frac{26x^4}{24}+\&c.$$

$$\text{summa} = e^x(2+3x+xx) = e^x(1+x)(2+x):$$

quod quidem sponte patet. Est enim

$$2e^x = 2+\frac{2x}{1}+\frac{2x^2}{2}+\frac{2x^3}{6}+\frac{2x^4}{24}+\&c.$$

$$3xe^x = 3x+\frac{3x^2}{1}+\frac{3x^3}{2}+\frac{3x^4}{6}+\&c.$$

$$xxe^x = xx+\frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{2}+\&c.$$

$$e^x(2+3x+xx) = 2+5x+\frac{10xx}{2}+\frac{17x^3}{6}+\frac{26x^4}{24}+\&c.$$

28. Quae hactenus sunt tradita non solum ad series in infinitum excurrentes spectant, sed etiam ad summas quotcunque terminorum: coefficientes enim a, b, c, d, &c. vel in infinitum progredi, vel ubicunque libuerit abrumpi possunt. Verum cum hoc non egeat uberiori explicatione, quae ex hactenus allatis sequuntur, accuratius perpendamus. Proposita ergo quacunque serie, cuius singuli termini duobus constent factoribus, quorum alteri seriem ad differentias constantes de-

ducentem constituant, huius seriei summa poterit assignari; dummodo omissis istis factoribus, series fuerit summabilis.

Scilicet si proposita sit ista series

$$Z = Aa + Bbx + Ccxx + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

in qua quantitates A, B, C, D, E, &c. eiusmodi seriem constituant, quae tandem ad differentias constantes perducatur; tum istius seriei summa exhiberi poterit, dummodo habeatur summa S huius seriei

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

Sumtis enim ex progressione A, B, C, D, E, &c. differentiis continuis, uti initio huius libri ostendimus:

A, B, C, D, E, F, &c.
ΔA, ΔB, ΔC, ΔD, ΔE, &c.
Δ^2A, Δ^2B, Δ^2C, Δ^2D, &c.
Δ^3A, Δ^3B, Δ^3C, &c.
Δ^4A, Δ^4B, &c.
Δ^5A, &c.
&c.

erit seriei propositae summa

$$Z = SA + \frac{xdS}{1dx}\Delta A + \frac{x^2 ddS}{1.2dx^2}\Delta^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3dx^3}\Delta^3 A + \&c.$$

posito in altioribus ipsius S differentialibus dx constante.

29. Si igitur series A, B, C, D, &c. nunquam ad differentias constantes deducat, summa seriei Z per novam seriem infinitam exprimetur, quae interdum magis converget quam proposita; sicque ista series in aliam sibi aequalem transformabitur. Sit ad hoc declarandum proposita haec series:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \&c.$$

quam constat exprimere $l\frac{1}{1-y}$, ita ut sit $Y = -l(1-y)$. Dividatur haec series per y, & statuatur $y = x$, & $Y = yZ$, ut sit $Z = -\frac{1}{y}l(1-y) = -\frac{1}{x}l(1-x)$, erit

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \&c.$$

quae comparata cum ista:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c. = \frac{1}{1-x},$$

dabit pro serie A, B, C, D, E, &c. hos valores:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$
$$-\frac{1}{1.2}, -\frac{1}{2.3}, -\frac{1}{3.4}, -\frac{1}{4.5}$$
$$\frac{1.2}{1.2.3}, \frac{1.2}{2.3.4}, \frac{1.2}{3.4.5}$$
$$-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}, -\frac{1.2.3}{2.3.4.5}$$
$$\&c.$$

Erit ergo $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{1}$, $\Delta^2 A = \frac{1}{1}$, $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$ &c.

Porro cum sit $S = \frac{1}{1-x}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$$
$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$$
$$\&c.$$

Quibus valoribus substitutis orietur summa: $Z = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5} - \&c.$

Cum ergo sit $x = y$, & $Y = -l(1-y) = yZ$; erit

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4} + \&c.$$

quae series utique exprimit

$$l\left(1+\frac{y}{1-y}\right)=l\frac{1}{1-y}=-l(1-y),$$

cuius adeo veritas per ante demonstrata constat.

30. Proposita nunc sit ista series, ut etiam usus pateat, si potestates tantum impares occurrant, & signa alternentur.

$$Y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\frac{y^9}{9}-\frac{y^{11}}{11}+\text{&c.}$$

ex qua constat esse $Y=A\operatorname{tang} y$.

Dividatur haec series per y, & ponatur $\frac{Y}{y}=Z$,

& $yy=x$; erit:

$$Z=1-\frac{x}{3}+\frac{xx}{5}-\frac{x^3}{7}+\frac{x^4}{9}-\frac{x^5}{11}+\text{&c.}$$

quae si comparetur cum ista:

$S=1-x+xx-x^3+x^4-\text{&c.}$ fiet $S=\frac{1}{1+x}$,

& series coefficientium A, B, C, D, &c. fiet:

$$A=1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9}\ \text{&c.}$$

$$\Delta A=-\frac{2}{3};-\frac{2}{3\cdot5};-\frac{2}{5\cdot7};-\frac{2}{7\cdot9}$$

$$\Delta^2 A=\frac{2\cdot4}{3\cdot5};\frac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot7};\frac{2\cdot4}{5\cdot7\cdot9}$$

$$\Delta^3 A=-\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7};-\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$$

$$\Delta^4 A=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$$

&c.

At

At cum sit $S = \frac{1}{1+x}$; erit

$$\frac{dS}{1dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad \frac{ddS}{1.2dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3}; \quad \frac{d^3S}{1.2.3dx^3} = \frac{-1}{(1+x)^4}$$

&c.

Quare substitutis his valoribus fiet forma $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2.4x^2}{3.5(1+x)^3} + \frac{2.4.6x^3}{3.5.7(1+x)^4} + \&c.$$

Restituto ergo $x = yy$; & per y multiplicato fiet.

$$Y = A \text{ tang } y =$$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2.4y^5}{3.5(1+yy)^3} + \frac{2.4.6y^7}{3.5.7(1+yy)^4} + \&c.$$

31. Potest quoque superior series, qua arcus circuli per tangentem exprimitur, alio modo transmutari, eam comparando cum serie logarithmica.

Consideremus nempe seriem

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quam comparemus cum hac;

$$S = \frac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \&c. = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x),$$

atque valores litterarum A, B, C, D, &c. erunt

$$A = \frac{0}{1}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \frac{8}{9}; \&c.$$

$$\Delta A = \frac{2}{3}; \frac{+2}{3.5}; \frac{+2}{5.7}; \frac{+2}{7.9}; \&c.$$

$$\Delta^2 A = \frac{-2.4}{3.5}; \frac{-2.4}{3.5.7}; \frac{-2.4}{5.7.9}; \&c.$$

$$\Delta^3 A = \frac{2.4.6}{3.5.7}; \&c.$$

Dein-

Deinde cum sit $S = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x)$; erit

$$\frac{dS}{1.dx} = -\frac{1}{2(1+x)}$$
$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = +\frac{1}{4(1+x)^2}$$
$$\frac{d^3S}{1.2.3dx^3} = -\frac{1}{6(1+x)^3}$$
$$\frac{d^4S}{1.2.3.4dx^4} = \frac{1}{8(1+x)^4}$$
&c.

erit igitur $SA = S.\frac{0}{1} = 1$: & ex reliquis fiet:

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3.5(1+x)^2} - \frac{2.4x^3}{3.5.7(1+x)^3} - \text{&c.}$$

Ponatur nunc $x = yy$, & multiplicetur per y fiet:

$$Y = A \text{ tang } y =$$
$$y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3.5(1+yy)^2} - \frac{2.4y^7}{3.5.7(1+yy)^3} - \text{&c.}$$

Haec ergo transmutatio non impediebatur termino infinito $\frac{1}{0}$ qui in seriem S ingrediebatur. Sin autem cui superfit dubium, is tantum singulos terminos praeter primum secundum potestates ipsius y in series resolvat, atque deprehendet actu seriem primum propositam resultare.

32. Hactenus eiusmodi tantum series sumus contemplati, in quibus omnes potestates variabilis occurrunt. Nunc igitur ad alias series progrediamur, quae in singulis terminis eandem potestatem ipsius variabilis complectantur, cuiusmodi est haec:

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \text{&c.}$$

Hu-

Huius enim seriei si summa S fuerit cognita, ac per functionem quampiam ipsius x exprimatur, erit differentiando ac per $-dx$ dividendo:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \text{&c.}$$

Si haec ulterius differentietur, atque per $-2dx$ dividatur, cognoscetur series cuborum:

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \text{&c.}$$

haecque denuo differentiata, atque per $-3dx$ divisa dabit:

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \text{&c.}$$

Similique modo omnium sequentium potestatum summae reperientur, dummodo summa seriei primae fuerit cognita.

33. Huiusmodi autem series fractionum quantitatem indeterminatam involventes supra in introductione elicuimus, ubi ostendimus, si circuli, cuius radius $= 1$, semiperipheria statuatur $= \pi$, fore

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \text{&c.}$$

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{&c.}$$

Cum igitur pro m & n numeros quoscunque assumere liceat, statuamus $n = 1$, & $m = x$; ut obtineamus series illi quam in §. praec. proposueramus similes; hoc facto erit:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \text{&c.}$$

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{&c.}$$

Per differentiationes ergo summae quarumvis potestatum ex his fractionibus oriundarum exhiberi poterunt.

34. Consideremus seriem priorem, sitque brevitatis gratia $\frac{\pi}{\sin\pi x} = S$, cuius differentialia altiora capiantur posito dx constante: eritque

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \text{&c.}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \text{&c.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \text{&c.}$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \text{&c.}$$

$$\frac{d^4S}{1.2.3.4dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \text{&c.}$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \text{&c.}$$

&c.

ubi notandum est in potestatibus paribus signa eandem sequi legem, pariterque in imparibus eandem legem signorum observari. Omnium ergo istarum serierum summae invenientur ex differentialibus expressionis $S = \frac{\pi}{\sin\pi x}$.

35. Ad Differentialia haec simplicius exprimenda ponamus $\sin\pi x = p$ & $\cos\pi x = q$, erit $dp = \pi dx\cos\pi x = \pi q dx$, & $dq = -\pi p dx$. Cum ergo sit $S = \frac{\pi}{p}$ erit

$-dS$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp}$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\pi^3(pp+2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3(qq+1)}{p^3} \text{ ob } pp+qq=1$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4}\right) = \frac{\pi^4(q^3+5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right) = \frac{\pi^5(q^4+18q^2+5)}{p^5}$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp}\right) = \frac{\pi^6(q^5+58q^3+61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^7(q^6+179q^4+479q^2+61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^8}{p^8}(q^7+543q^5+3111q^3+1385q)$$

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

Quae expreſſiones facile ulterius quouſque libuerit continuari poſſunt, ſi enim fuerit:

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{aq^n}{p^{n+1}} + \frac{bq^{n-2}}{p^{n-1}} + \frac{gq^{n-4}}{p^{n-3}} + \frac{dq^{n-6}}{p^{n-5}} + \&c.\right)$$

erit differentiale ſequens ſignis mutatis:

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)aq^{n+1}}{p^{n+2}} - \frac{na}{+(n-1)b}\right\}\frac{q^{n-1}}{p^n} + \frac{(n-2)b}{+(n-3)g}\left.\right\}\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}} + \frac{(n-4)g}{+(n-5)d}\left.\right\}\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}} \&c.\right)$$

36. Ex his ergo obtinebuntur ſummae ſerierum ſuperiorum §. 34 exhibitarum ſequentes:

$$S = \pi \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2}{1} \cdot \frac{q}{p^2}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3} + \frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4} + \frac{5q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right)$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{\pi^6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^6S}{720dx^6} = \frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right)$$

$$\frac{-d^7S}{5040dx^7} = \frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8S}{40320dx^8} = \frac{\pi^9}{40320}\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

&c.

37. Tractemus simili modo alteram seriem supra inventam:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

atque posito brevitatis ergo $\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = T$, orientur sequentes summationes:

$$T = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \&c.$$

$$\frac{-dT}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \&c.$$

$$\frac{ddT}{}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \&c.$$
$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \&c.$$
$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} - \&c.$$
$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} + \&c.$$
$$\&c.$$

ubi in poteſtatibus paribus omnes termini ſunt affirmativi, in imparibus autem ſigna + & — alternatim ſe excipiunt.

38. Quo differentialium horum valores innoteſcant, ponamus ut ante $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$, ut ſit $pp + qq = 1$; erit $dp = \pi q dx$ & $dq = -\pi p dx$.

Quibus valoribus adhibitis erit:

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$
$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2 \left(\frac{qq}{pp} + 1 \right) = \frac{\pi^2}{pp}$$
$$\frac{ddT}{dx^2} = \pi^3 \left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p} \right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$
$$\frac{-d^3T}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2 \right) = \pi^4 \left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp} \right)$$
$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^3}{p^4} + \frac{16q}{p^3} \right)$$
$$\frac{-d^5T}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp} \right)$$
$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3} \right)$$

$$\frac{-d^7T}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2}\right)$$
$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3}\right) \quad \&c.$$

Quae formulae facile ulterius quousque libuerit continuari possunt. Si enim sit

$$\pm\frac{d^nT}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{aq^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{bq^{n-3}}{p^{n-1}} + \frac{gq^{n-5}}{p^{n-3}} + \frac{dq^{n-7}}{p^{n-5}} + \&c.\right)$$

erit expressio sequens

$$\mp\frac{d^{n+1}T}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)aq^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(a+b)q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(b+g)q^{n-4}}{p^{n-2}} + \&c.\right)$$

39. Series ergo potestatum §. 37. datae sequentes habebunt summmas posito $\sin\pi x = p$ & $\cos\pi x = q$.

$$T = \pi.\frac{q}{p}$$
$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\frac{1}{pp}$$
$$\frac{ddT}{2dx^2} = \pi^3\frac{q}{p^3}$$
$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \pi^4\left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp}\right)$$
$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \pi^5\left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3}\right)$$
$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \pi^6\left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp}\right)$$
$$\frac{d^6T}{720dx^6} = \pi^7\left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^5} + \frac{17q}{45p^3}\right)$$
$$\frac{-d^7T}{5040dx^7} = \pi^8\left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11qq}{15p^4} + \frac{17}{315pp}\right)$$
$$\frac{d^8T}{40320dx^8} = \pi^9\left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3}\right) \quad \&c.$$

40. Praeter has series invenimus in introductione nonnullas alias, ex quibus simili modo per differentiationes novae elici possunt. Ostendimus enim esse: $\frac{1}{2x} - \frac{\pi\sqrt{x}}{2x \tang \pi\sqrt{x}} =$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x} + \frac{1}{25-x} + \&c.$$

Ponamus summam huius seriei esse $= S$,

ut sit $S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi\sqrt{x}}{\sin \pi\sqrt{x}}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi\sqrt{x}}{\sin \pi\sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\sin \pi\sqrt{x})^2},$$

quae ergo expressio praebet summam huius seriei:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \&c.$$

Deinde quoque ostendimus esse:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} - \frac{1}{2x} =$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \&c.$$

Quodsi ergo haec summa ponatur $= S$, erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \&c.$$

At est

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}} - 1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

Ergo summa huius seriei erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}} + 1}{e^{2\pi\sqrt{x}} - 1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}} - 1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Similique modo ulterioribus differentiationibus summae sequentium potestatum invenientur.

41.

41. Si cognitus fuerit valor producti cuiuſpiam ex factoribus indeterminatam litteram involventibus compoſiti, ex eo per eandem methodum innumerabiles ſeries ſummabiles inveniri poterunt. Sit enim huius producti

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x)\ \&c.$$

valor $= S$, functioni ſcilicet cuipiam ipſius x, erit logarithmis ſumendis:

$$lS = l(1+\alpha x) + l(1+\beta x) + l(1+\gamma x) + l(1+\delta x) + \&c.$$

Sumantur iam differentialia, erit diviſione per dx inſtituta:

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \&c.$$

ex cuius ulteriori differentiatione ſummae poteſtatum quarumvis iſtarum fractionum reperietur; plane uti in exemplis praecedentibus fuſius expoſuimus.

42. Exhibuimus autem in introductione nonnullas iſtiuſmodi expreſſiones, ad quas hanc methodum accommodemus. Scilicet ſi ſit x arcus 180° circuli, cuius radius $= 1$, oſtendimus eſſe:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{4nn-mm}{4nn}\cdot\frac{16nn-mm}{16nn}\cdot\frac{36nn-mm}{36nn}\ \&c.$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{nn-mm}{nn}\cdot\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\frac{49nn-mm}{49nn}\ \&c.$$

Ponamus $n = 1$ & $m = 2x$; ut ſit

$$\sin\pi x = \pi x\cdot\frac{1-xx}{1}\cdot\frac{4-xx}{4}\cdot\frac{9-xx}{9}\cdot\frac{16-xx}{16}\cdot\&c.\ \text{vel}$$

$$\sin\pi x = \pi x\cdot\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{2+x}{2}\cdot\frac{3-x}{3}\cdot\frac{3+x}{3}\cdot\frac{4-x}{4}\cdot\&c.\ \&$$

$$\cos\pi x = \frac{1-4xx}{1}\cdot\frac{9-4xx}{9}\cdot\frac{25-4xx}{25}\cdot\frac{49-4xx}{49}\cdot\&c.\ \text{ſeu}$$

$$\cos\pi x = \frac{1-2x}{1}\cdot\frac{1+2x}{1}\cdot\frac{3-2x}{3}\cdot\frac{3+2x}{3}\cdot\frac{5-2x}{5}\cdot\frac{5+2x}{5}\cdot\&c.$$

Ex

Ex his ergo expressionibus, si logarithmi sumantur, erit:

$$l\sin\pi x = l\pi x + l\frac{1-x}{1} + l\frac{1+x}{1} + l\frac{2-x}{2} + l\frac{2+x}{2} + l\frac{3-x}{3} + \text{&c.}$$

$$l\cos\pi x = l\frac{1-2x}{1} + l\frac{1+2x}{1} + l\frac{3-2x}{3} + l\frac{3+2x}{3} + l\frac{5-2x}{5} + \text{&c.}$$

43. Sumamus nunc harum serierum logarithmicarum differentialia, & divisione ubique per dx facta prior series dabit:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{&c.}$$

quae est ea ipsa series, quam §. 37. tractavimus. Altera vero series dabit:

$$\frac{-\pi\sin\pi x}{\cos\pi x} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \text{&c.}$$

Ponamus $2x = z$, ut sit $x = \frac{z}{2}$, & dividamus per -2 erit:

$$\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi z}{2\cos\frac{1}{2}\pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \text{&c.}$$

Cum autem sit

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1-\cos\pi z}{2}} \quad \& \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1+\cos\pi z}{2}}$$

erit:

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi z)}}{\sqrt{(1+\cos\pi z)}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \text{&c.}$$

seu loco z scribendo x erit:

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \text{&c.}$$

Addatur haec series ad primum inventam:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{&c.}$$

Atque reperietur huius seriei:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} -$ &c.

Summa $= \frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}} + \frac{x\cos\pi x}{\sin\pi x}$. At fractio haec $\frac{\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}}$, si numerator & denominator multiplicetur per $\sqrt{(1-\cos\pi x)}$ abit in $\frac{1-\cos\pi x}{\sin\pi x}$. Quocirca summa seriei erit $= \frac{\pi}{\sin\pi x}$, quae est ea ipsa, quam §. 34. habuimus: unde eam ulterius non persequemur.

CAPUT III.

DE INVENTIONE DIFFERENTIARUM FINITARUM

44.

Quemadmodum ex functionum differentiis finitis earum differentialia facile inveniri queant, in initio fusius exposuimus, atque adeo ex hoc fonte principium differentialium derivavimus. Si enim differentiae, quae assumtae erant finitae, evanescant, in nihilumque abeant, oriuntur differentialia; & quia hoc casu plures & saepe innumeri termini, qui differentiam finitam constituunt, reiiciuntur, differentialia multo facilius inveniri, atque commodius succinctiusque exprimi possunt, quam differentiae finitae. Neque igitur hinc vicissim via patere videtur, a differentialibus ad differentias finitas ascendendi. Interim tamen eo modo, quo hic utemur, ex differentialibus omnium ordinum cuiuscunque functionis, eiusdem differentiae finitae omnes definiri poterunt.

45. Sit y functio quaecunque ipsius x, quae cum posito $x + dx$ loco x abeat in $y + dy$, si denuo loco x ponatur $x + dx$, valor $y + dy$ suo differentiali $dy + ddy$ augebitur, fietque $= y + 2dy + ddy$, qui ergo valor respondebit ipsius x valori $x + 2dx$. Simili modo si ponamus quantitatem x continuo suo differentiali dx augeri, ut successive valores

$$x + dx;\ x + 2dx;\ x + 3dx;\ x + 4dx;\ \&c.$$

induat, valores ipsius y respondentes erunt, quos haec tabella indicat:

Valores ipsius	Valores respondentes functionis
x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+ddy$
$x+3dx$	$y+3dy+3ddy+d^3y$
$x+4dx$	$y+4dy+6ddy+4d^3y+d^4y$
$x+5dx$	$y+5dy+10ddy+10d^3y+5d^4y+d^5y$
$x+6dx$	$y+6dy+15ddy+20d^3y+15d^4y+6d^5y+d^6y$
&c.	&c.

46. Generaliter ergo si x abeat in $x+ndx$, functio y recipiet hanc formam:

$$y+\frac{n}{1}dy+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}d^3y$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d^4y+\text{&c.}$$

in qua expressione, etsi quilibet terminus infinities minor est quam praecedens, tamen nullum praetermisimus, quo ista formula ad praesens negotium apta redderetur. Statuemus enim pro n numerum infinite magnum, & quoniam notavimus, fieri posse ut productum ex quantitate infinite magna in infinite parvam aequetur quantitati finitae, terminus secundus utique homogeneus fieri poterit primo, seu ndy quantitatem finitam repraesentare poterit. Ob eandemque rationem terminus tertius $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy$, etsi ddy infinities minus est quam dy, tamen quia alter factor $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ infinities maior est quam n, terminus quoque tertius quantitatem finitam exprimere poterit: ficque posito n numero infinito nullum illius expressionis terminum reiicere licebit.

47. Posito autem n numero infinito quocunque is nume-

mero finito sive augeatur sive diminuatur, numerus resultans ad n habebit rationem aequalitatis, hincque pro singulis factoribus $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. ubique scribi poterit n. Cum enim sit

$$\frac{n(n-1)}{1.2}ddy = \frac{1}{2}nnddy - \frac{1}{2}nddy$$

prior terminus $\frac{1}{2}nnddy$ ad posteriorem $\frac{1}{2}nddy$ rationem tenebit ut n ad 1, sicque hic respectu illius evanescet; loco $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ergo scribi poterit $\frac{1}{2}nn$. Simili modo quarti termini coefficiens $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ contrahi poterit in $\frac{n^3}{6}$ pariterque in sequentibus numeri, quibus n in factoribus diminuitur, negligi poterunt. Hoc vero facto functio y, si loco x ponatur $x+ndx$, existente numero n infinito, sequentem valorem accipiet:

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{nnddy}{1.2} + \frac{n^3d^3y}{1.2.3} + \frac{n^4d^4y}{1.2.3.4} + \frac{n^5d^5y}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

48. Cum igitur sumto n numero infinite magno etiamsi dx sit infinite parvum, productum ndx quantitatem finitam exprimere possit, ponamus $ndx = \omega$, ut sit $n = \frac{\omega}{dx}$ erit utique n numerus infinitus, cum sit quotus ex divisione quantitatis finitae ω, per infinite parvam dx resultans. Valore autem hoc loco n adhibito cognoscemus, si quantitas variabilis x augeatur quavis quantitate finita ω, seu si loco x ponatur $x+\omega$, tum quamvis ipsius functionem y abituram esse in hanc formam:

$$y + \frac{\omega dy}{1dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \&c.$$

cuius expressionis singuli termini per continuam ipsius y differentiationem inveniri poterunt. Cum enim y sit functio ipsius

x,

x, oſtendimus ſupra, has functiones omnes $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. quantitates finitas exhibere.

49. Cum igitur, dum quantitas variabilis x quantitate finita ω augeri aſſumitur, functio eius quaecunque y augeatur ſua differentia prima, quam ſupra per Δy indicavimus, exiſtente $\omega = \Delta x$: differentia ipſius y per continuam differentiationem reperiri poterit; erit enim:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{&c.} \quad \text{ſeu}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \text{&c.}$$

Sicque differentia finita Δy exprimitur per progreſſionem, cuius ſinguli termini ſecundum poteſtates ipſius Δx procedunt. Atque hinc viciſſim patet, ſi quantitas x tantum quantitate infinite parva augeatur, ut Δx abeat in eius differentiale dx, omnes terminos prae primo evaneſcere, foreque $\Delta y = dy$; facto enim $\Delta x = dx$, differentia Δy abit per definitionem in differentiale dy.

50. Quoniam ſi loco x ponatur $x + \omega$, eius functio quaecunque y induit ſequentem valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{&c.}$$

veritas huius expreſſionis comprobari poterit eiuſmodi exemplis, quibus differentialia altiora ipſius y tandem evaneſcunt: his enim caſibus numerus terminorum ſuperioris expreſſionis fiet finitus:

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor expreſſionis $xx - x$ *ſi loco* x *ponatur* $x + 1$.

Ponatur $y = xx - x$; & cum x in $x + 1$ abire ſtatuatur, fiet $\omega = 1$, ſumtis iam differentialibus erit:

dy

$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$; $\frac{ddy}{dx^2} = 2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; &c.

Hinc functio $y = xx - x$ posito $x + 1$ loco x abibit in: $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{1}.2 = xx + x$.

Quodsi autem in $xx - x$ loco x actu ponatur $x + 1$ abibit

xx	in	$xx + 2x + 1$
x	in	$x + 1$
Ergo $xx - x$	in	$xx + x$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor expressionis $x^3 + xx + x$, *si loco* x *ponatur* $x + 2$.

Ponatur $y = x^3 + xx + x$, fietque $\omega = 2$; nunc cum sit $y = x^3 + xx + x$

erit
$$\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$$
$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Ex his valor functionis $y = x^3 + xx + x$, si pro x statuatur $x + 2$, erit sequens:
$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \frac{2}{2}(6x + 2) + \frac{6}{6}.6 = x^3 + 7xx + 17x + 14$, qui idem prodit si actu loco x substituatur $x + 2$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor expressionis $xx + 3x + 1$, *si loco* x *ponatur* $x - 3$.

Fiet ergo $\omega = -3$; & posito $y = xx + 3x + 1$, erit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$; $\frac{ddy}{dx^2} = 2$:

unde posito $x-3$ loco x functio x^3+3x+1 abibit in $x^3+3x+1-\frac{1}{1}(xx+3)+\frac{2}{1}.2=x^3-3x+1$.

51. Si pro ω sumatur numerus negativus, reperietur valor, quem functio quaecunque ipsius x induit, dum ipsa quantitas x diminuitur data quantitate ω. Scilicet si loco x ponatur $x-\omega$, functio ipsius x quaecunque y accipiet istum valorem: $y-\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}-\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}-$ &c. unde omnes variationes, quas functio y subire potest, dum quantitas x utrinque variatur, inveniri poterunt. Quodsi autem y fuerit functio rationalis integra ipsius x, quoniam tandem ad eius differentialia evanescentia devenitur, valor variatus per expressionem finitam exprimetur; sin autem y non fuerit huiusmodi functio, valor variatus per seriem infinitam exprimetur, cuius propterea summa, quoniam si substitutio actu instituatur, valor variatus facile assignatur, expressione finita exhiberi poterit.

52. Quemadmodum autem differentia prima est inventa, ita quoque differentiae sequentes similibus expressionibus exhiberi possunt. Induat enim x successive valores $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$, &c. atque valores ipsius y respondentes indicentur per y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sicuti in initio huius libri posuimus. Quoniam ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sunt valores, quos y nanciscitur, si loco x scribatur respective $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$, &c. per modo demonstrata isti ipsius y valores ita exprimentur:

$$y^{\mathrm{I}}=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\text{ &c.}$$

$$y^{\mathrm{II}}=y+\frac{2\omega dy}{dx}+\frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\text{ &c.}$$

$$y^{\mathrm{III}}=y+\frac{3\omega dy}{dx}+\frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\text{ &c.}$$

$$y^{\mathrm{IV}}=y+\frac{4\omega dy}{dx}+\frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\text{ &c.}$$

53. Cum igitur, si Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, &c. denotent differentias, primam, secundam, tertiam, quartam, &c. sit:

$$\Delta y = y^{I} - y$$
$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$
$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$
$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

istae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2-2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3-2.1)\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(2^4-2.1)\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3-3.2^3+3.1)\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(3^4-3.2^4+3.1)\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4-4.3^4+6.2^4-4.1)\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \frac{(4^5-4.3^5+6.2^5-4.1)\omega^5 d^5 y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

54. Quantam utilitatem afferant istae differentiarum expressiones in doctrina serierum & progressionum, cum sponte patet, tum in sequentibus uberius exponemus. Interim tamen in hoc capite usum, qui hinc ad serierum notitiam immediate redundat, perpendamus. Quamquam vulgo indices terminorum seriei cuiuscunque progressionem arithmeticam, cuius differentia est unitas, constituere assumuntur; tamen quo usus latius pateat, atque applicatio facilius fieri possit, differentiam statuamus $= \omega$, ita ut, si terminus generalis seu is qui indici x respondet, fuerit y; sequentes conveniant

indicibus

$$x + \omega, \quad x + 2\omega, \quad x + 3\omega, \quad \&c.$$

Quodsi ergo his indicibus respondeant sequentes seriei termini

$$x, \quad x + \omega, \quad x + 2\omega, \quad x + 3\omega, \quad x + 4\omega, \quad \&c.$$
$$y, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad \&c.$$

singuli ex y eiusque differentialibus definientur hoc modo:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
&c.

55. Si hae expressiones a se invicem subtrahantur, in differentias non amplius ingredietur y, eritque

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{175\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{369\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
&c.

Si hae expressiones denuo a se invicem subtrahantur, etiam differentialia prima se destruent; eritque

$$Q - 2P + y = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$R - 2Q + P = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$
$$S - 2R + Q = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T-2S+R=\frac{2\omega^3 ddy}{2dx^3}+\frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

&c.

His autem denuo a se invicem subtractis differentialia quoque secunda ex computo egredientur:

$$R-3Q+3P-y=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$S-3R+3Q-P=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$T-3S+3R-Q=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

subtractionem autem ulterius continuando fiet:

$$S-4R+6Q-4P+y=\frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$T-4S+6R-4Q+P=\frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c. \quad \text{atque}$$

$$T-5S+10R-10Q+5P-y=\frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5}+\&c.$$

56. Quodsi ergo y fuerit functio rationalis integra ipsius x, quia eius differentialia altiora tandem evanescent, hoc modo procedendo tandem ad expressiones evanescentes pervenietur. Cum igitur istae expressiones sint differentiae ipsius y, earum formas & coefficientes diligentius perpendamus:

$$y=y$$

$$\Delta y=\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}+\&c.$$

$$\Delta^2 y=\frac{\omega^2 ddy}{dx^2}+\frac{3\omega^3 d^3y}{3dx^3}+\frac{7\omega^4 d^4y}{3.4dx^4}+\frac{15\omega^5 d^5y}{3.4.5dx^5}+\frac{31\omega^6 d^6y}{3.4.5.6dx^6}+\&c.$$

$$\Delta^3 y=\frac{\omega^3 d^3y}{dx^3}+\frac{6\omega^4 d^4y}{4dx^4}+\frac{25\omega^5 d^5y}{4.5dx^5}+\frac{90\omega^6 d^6y}{4.5.6dx^6}+\frac{301\omega^7 d^7y}{4.5.6.7dx^7}+\&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4 y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5 y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6 y}{5.6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7 y}{5.6.7.dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5 y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6 y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7 y}{6.7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8 y}{6.7.8dx^8} + \&c.$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6 y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7 y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8 y}{7.8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9 y}{7.8.9dx^9} + \&c.$$

&c.

In quibus seriebus quemadmodum denominatores procedant, clarum est; numeratorum autem coefficientes ita formantur, ut quivis coefficiens numeratoris fit aggregatum ex supra stante & praecedente per exponentem differentiae multiplicato. Sic in serie differentiam $\Delta^6 y$ exprimente, est $2646 = 1050 + 6.266$.

57. Consideremus quoque seriem eandem simul retro continuatam, quae continet terminos indicibus

$x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c. respondentes:

$x-4\omega$; $x-3\omega$; $x-2\omega$; $x-\omega$; x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c.
s, r, q, p, y, P, Q, R, S, &c.

Cum igitur sit:

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4} - \&c.$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4 y}{24dx^4} - \&c.$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4 y}{24dx^4} - \&c.$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4 y}{24dx^4} - \&c.$$

&c.

erit his valoribus a superioribus P, Q, R, S, &c. subtrahendis:

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5 y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5 y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

fin autem termini hi ad fuperiores addantur, tum, quemadmodum hic differentialia parium ordinum deerant, differentialia imparia ex computo egredientur. Erit enim

$$\frac{P+p}{2} = y + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{Q+q}{2} = y + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{R+r}{2} = y + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

$$\frac{S+s}{2} = y + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \&c.$$

&c.

58. Quoniam termini antecedentes omnes exprimi poſſunt, ſi ii in unam ſummam colligantur, prodibit ſeriei propoſitae terminus ſummatorius. Reſpondeat ſcilicet terminus primus indici $x - n\omega$, eritque ipſe terminus primus $=$

$$y - \frac{n\omega dy}{dx} + \frac{n^2\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{n^3\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{n^4\omega^4 d^4y}{24dx^4} \quad \&c.$$

Cum igitur terminus indici x reſpondens ſit $= y$, terminorumque omnium numerus ſit $= n+1$, erit ſumma omnium a primo ad ultimum y inclusive ſumtorum ſeu terminus ſummatorius $=$

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(1+2+3+\ldots+n) + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

—

$$-\frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3}(1+2^3+3^3+\ldots+n^3)$$
$$+\frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4}(1+2^4+3^4+\ldots+n^4)$$
$$-\frac{\omega^5 d^5 y}{120dx^5}(1+2^5+3^5+\ldots+n^5)$$

&c.

59. Supra autem singularum harum serierum summas exhibuimus, quae si hic substituantur, erit summa seriei nostrae propositae =

$$(n+1)y-\frac{\omega dy}{dx}(\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{1}{2}n)$$
$$+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{1}{6}n)$$
$$-\frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3}(\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2)$$
$$+\frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4}(\tfrac{1}{5}n^5+\tfrac{1}{2}n^4+\tfrac{1}{3}n^3-\tfrac{1}{30}n)$$
$$-\frac{\omega^5 d^5 y}{120dx^5}(\tfrac{1}{6}n^6+\tfrac{1}{2}n^5+\tfrac{5}{12}n^4-\tfrac{7}{12}n^2)$$

&c.

ubi n dabitur ex indice termini primi, a quo summa computatur. Ita si ponatur $\omega=1$, & index termini primi sit $=1$, secundi $=2$, & ultimi $=x$, ita ut haec series sit proposita:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ x$$
$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ y$$

erit huius seriei summa (ob $x-n=1$ & $n=x-1$)

$$=xy-\frac{dy}{dx}(\tfrac{1}{2}xx-\tfrac{1}{2}x)$$
$$+\frac{ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{6}x)$$

—

$$- \frac{d^3y}{6dx^3}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx\right)$$
$$+ \frac{d^4y}{24dx^4}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{10}x\right)$$
$$- \frac{d^5y}{120dx^5}\left(\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{5}{12}x^2\right)$$
$$+ \frac{d^6y}{720dx^6}\left(\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{2}{21}x\right)$$

&c.

60. Ex hac summae expressione, quia coefficientes vehementer augentur, si x fuerit numerus magnus, parum utilitatis ad doctrinam serierum redundat; interim tamen iuvabit aliquas proprietates inde fluentes commemorasse. Sit terminus generalis $y = x^n$, atque terminus summatorius per Sy seu $S.x^n$ indicetur. Qua designatione ubique adhibita erit:

$$\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x = S.x - x$$
$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = S.x^2 - x^2$$
$$\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx = S.x^3 - x^3 \text{ &c.}$$

Quamobrem ex superiori expressione obtinebitur:

$$S.x^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-1}S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^n$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-1}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^n$$

&c.

At cum sit

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \text{&c.}$$

erit $n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} - \text{&c.} = 1$,

ideoque excepto casu $n = 0$, quo ista expressio fit $= 0$.

$$S.x^n = x^{n+1} + x^n - nx^{n-1}S.x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}S.x^4$$

&c.

61. Quo tam veritas quam vis huius formulae clarius perspiciatur, evolvamus singulos casus, sitque primo $n = 1$, eritque: $S.x = x^2 + x - S.x$, ideoque $S.x = \frac{xx+x}{2}$, quemadmodum satis constat.

Ponamus ergo $n = 2$, & erit:

$$S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2,$$

quae aequatio, cum utrinque termini $S.x^2$ se tollant, idem dat, quod praecedens $S.x = \frac{xx+x}{2}$. Si sit $n = 3$, erit

$$S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x^2S.x + 3xS.x^2 - S.x^3, \quad \text{ideoque}$$

$$S.x^3 = \tfrac{1}{2}xS.x^2 - \tfrac{1}{4}x^2S.x + \tfrac{1}{4}x^3(x+1),$$

si ponatur $n = 4$ prodibit:

$$S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3S.x + 6x^2S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x^4,$$

unde ob $S.x^4$ destructum erit:

$$S.x^3 = \tfrac{4}{5}xS.x^2 - x^2S.x + \tfrac{1}{5}x^3(x+1)$$

a cuius triplo, si praecedentis duplum subtrahatur remanebit:

$$S.x^3 = \tfrac{1}{5}xS.x^2 - \tfrac{1}{5}x^2(x+1).$$

Si ponatur $n = 5$ fiet:

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4S.x + 10x^3S.x^2 - 10x^2S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5$$

seu

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}xS.x^4 - \tfrac{5}{6}x^2S.x^3 + \tfrac{5}{6}x^3S.x^2 - \tfrac{1}{6}x^4S.x + \tfrac{1}{6}x^5(x+1)$$

atque ex $n = 6$ sequitur:

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5S.x + 15x^4S.x^2 - 20x^3S.x^3 + 15x^2S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

seu

seu

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}xS.x^4 - \tfrac{10}{6}x^2S.x^3 + \tfrac{1}{2}x^3S.x^2 - x^4S.x + \tfrac{1}{6}x^5(x+1).$$

62. Ex his ergo generaliter concludimus, si fuerit $n = 2m+1$ fore:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}xS.x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.1.2}x^2S.x^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.1.2.3}x^3S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots\ldots - \frac{(2m+1)}{2}x^{2m}S.x + \tfrac{1}{2}x^{2m+1}(x+1).$$

Sin autem sit $n = 2m+2$, quia termini $S.x^{2m+2}$ se mutuo destruunt, reperietur:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}xS.x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.3}x^2S.x^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.3.4}x^3S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots\ldots - x^{2m}S.x + \frac{1}{2m+2}x^{2m+1}(x+1).$$

Duplici ergo modo summae potestatum imparium ex summis potestatum inferiorum determinari possunt: atque ex varia combinatione harum duarum formularum infinitae aliae formari possunt.

63. Multo facilius autem summae potestatum imparium ex antecedentibus definiri possunt: atque ad hoc quidem sufficit solam summam potestatis paris antecedentis noviſſe. Ex summis enim potestatum supra exhibitis constat, numerum terminorum summas constituentium, imparibus tantum potestatibus augeri, ita ut summa potestatis imparis totidem constet terminis, quot summa potestatis paris praecedentis. Sic si potestatis paris x^{2n} summa sit:

$$S.x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} - \text{&c.}$$

vidimus enim, post terminum tertium alternos terminos deficere, simulque signa alternari; hinc summa sequentis potestatis x^{2n+1} invenietur, si singuli illius termini respective multiplicentur per hos numeros:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x;\ \frac{2n+1}{2n+1}x;\ \frac{2n+1}{2n}x;\ \frac{2n+1}{2n-1}x;\ \frac{2n+1}{2n-2}x;\ \text{&c.}$$

non omittendo terminos deficientes; eritque ergo

$$Sx^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n} - \frac{2n+1}{2n-1}\delta x^{2n-1} + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} + \&c.$$

Quodsi ergo constet summa potestatis x^{2n}, ex ea expedite summa sequentis potestatis x^{2n+1} formari poterit.

64. Haec sequentium summarum investigatio etiam ad potestates pares extenditur; quoniam autem harum summae novum terminum recipiunt, hic per istam methodum non invenitur, ex natura tamen ipsius seriei, qua constat, si ponatur $x = 1$, summam quoque fieri debere $= 1$, semper erui poterit. Vicissim autem semper ex summa cuiusvis potestatis cognita praecedentium potestatum summae inveniri poterunt. Si enim fuerit:

$$Sx^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \&c.$$

erit pro potestate praecedente:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}\alpha x^n + \frac{n}{n}\beta x^{n-1} + \frac{(n-1)}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{(n-3)}{n}\delta x^{n-4} + \&c.$$

hincque ulterius regredi licet, quousque libuerit. Notandum autem est esse perpetuo $\alpha = \frac{1}{n+1}$ & $\beta = \frac{1}{2}$, uti ex formulis iam supra datis apparet.

65. Attendenti statim patebit summam potestatum x^{n-1} prodire, si summa potestatum x^n differentietur, eiusque differentiale per ndx dividatur; eritque adeo

$$d.Sx^n = ndx.Sx^{n-1} \text{ & quia est } d.x^n = nx^{n-1}dx;$$

$$\text{erit } d.Sx^n = S.nx^{n-1}dx = S.d.x^n;$$

ex quo intelligitur differentiale summae aequari summae differentialis: ita in genere si seriei cuiusplam terminus generalis fuerit $= y$ & Sy eius terminus summatorius; erit quoque $S.dy = d.Sy$: hoc est summa differentialium omnium terminorum aequatur differentiali summae ipsorum terminorum.

rum. Ratio autem huius aequalitatis facile perspicitur ex iis, quae supra de serierum differentiatione attulimus. Cum enim sit

$$S.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \&c.$$

erit

$$\frac{d.Sx^n}{ndx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \&c. = S.x^{n-1}$$

quae demonstratio ad omnes alias series patet.

66. Revertamur autem, unde digressi sumus, ad differentias functionum, circa quas adhuc quaedam annotanda sunt. Quoniam vidimus, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, atque loco x ubique ponatur $x \pm \omega$, functionem y adepturam esse sequentem valorem:

$$y \pm \frac{\omega dy}{1dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} \pm \frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

haec expressio locum habebit, sive pro ω quantitas quaecunque constans accipiatur, sive etiam variabilis, ab ipsa x pendens. Inventis enim per differentiationem valoribus fractionum $\frac{dy}{dx}; \frac{ddy}{dx^2}; \frac{d^3y}{dx^3}$; &c. in factoribus ω, ω^2, ω^3, &c. variabilitas non spectatur, hincque perinde est sive ω denotet quantitatem constantem, sive variabilem ab x pendentem.

67. Ponamus ergo esse $\omega = x$, atque in functione y loco x scribi $x - x = 0$. Quamobrem si in functione ipsius x quacunque y loco x ubique scribatur 0, valor functionis erit hic:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c.$$

Haec ergo expressio semper indicat valorem, quem functio quaecunque y induit, si in ea ponatur $x = 0$, cuius veritatem sequentia exempla illustrabunt:

EXEMPLUM I.

Sit $y = xx + ax + ab$, cuius valor, si ponatur $x = 0$, quaeratur, quem quidem constat fore $= ab$

Cum sit $y = xx + ax + ab$ erit

$$\frac{dy}{1dx} = 2x + a \quad ; \quad \frac{ddy}{1.2dx^2} = 1$$

ideoque prodibit valor quaesitus

$$= xx + ax + ab - x(2x + a) + xx \,.\, 1 = ab.$$

EXEMPLUM II.

Sit $y = x^3 - 2x + 3$, cuius valor, posito $x = 0$, quaeratur, quem constat fore $= 3$.

Cum sit $y = x^3 - 2x + 3$ erit

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 2 \quad ; \quad \frac{ddy}{1.2dx^2} = 3x \quad ; \quad \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} = 1$$

obtinebitur valor quaesitus

$$= x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx \,.\, 3x - x^3 \,.\, 1 = 3.$$

EXEMPLUM III.

Sit $y = \frac{x}{1-x}$, cuius valor posito $x = 0$, quaeritur, quem constat fore $= 0$.

Cum sit $y = \frac{x}{1-x}$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$;

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}; \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}; \text{ \&c.}$$

Hinc erit valor quaesitus

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \text{ \&c.}$$

huiusque ergo seriei valor est $= 0$.

Quod etiam hinc patet, quod haec series primo termino truncata $\frac{x}{(1-)^2} - \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4} -$ &c. sit series geometrica, eiusque summa $= \frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x}$; unde valor inventus erit $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

EXEMPLUM IV.

Sit $y = e^x$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est unitas, & quaeratur valor ipsius y si ponatur $x = 0$, quem quidem constat fore $= 1$.

Cum sit $y = e^x$; erit $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^x$; &c.

ideoque valor quaesitus erit

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x xx}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \text{&c.}$$

$$= e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{&c.}\right)$$

At supra vidimus seriem $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{&c.}$ exprimere valorem e^{-x}, erit ergo valor quaesitus utique $= e^x . e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$.

EXEMPLUM V.

Sit $y = \sin x$, atque posito $x = 0$ manifestum est fore $y = 0$, id quod etiam formula generalis indicabit.

Cum enim sit $y = \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$;

$\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$; &c.

erit posito $x = 0$ valor ipsius y hic:

$$\sin x - \frac{x}{1}\cos x - \frac{xx}{1.2}\sin x + \frac{x^3}{1.2.3}\cos x + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sin x - \text{&c.}$$

qui est $= \sin x\left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \text{&c.}\right)$

$$- \cos x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \text{&c.}\right)$$

ha-

harum autem serierum superior exprimit $\cos x$, inferior autem $\sin x$, unde valor quaesitus erit

$$= \sin x . \cos x - \cos x . \sin x = 0.$$

68. Hinc igitur vicissim cognoscimus, si y eiusmodi fuerit functio ipsius x, ut ipsa evanescat, posito $x = 0$, tum fore

$$y - \frac{x dy}{1 dx} + \frac{xx ddy}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1,2.3.4 dx^4} - \text{&c.} = 0.$$

Unde haec est aequatio generalis omnium omnino functionum ipsius x, quae dum fit $x = 0$, simul ipsae evanescunt. Et hancobrem ista aequatio ita est comparata, ut quaecunque functio ipsius x, dummodo ea evanescat evanescente x, loco y substituatur, aequationi perpetuo satisfiat. Quodsi vero y eiusmodi fuerit functio ipsius x, quae posito $x = 0$, recipiat valorem datum $= A$, tum erit:

$$y - \frac{x dy}{1 dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} - \text{&c.} = A.$$

in qua aequatione omnes continentur functiones ipsius x, quae posito $x = 0$, abeunt in A.

69. Si loco x scribatur $2x$, seu $x + x$, functio quaecunque ipsius x, quae designetur per y hunc induet valorem

$$y + \frac{x dy}{1 dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{&c.}$$

Atque si loco x scribamus nx, hoc est $x + (n-1)x$ functio y accipiet valorem sequentem:

$$y + \frac{(n-1) x dy}{1 dx} + \frac{(n-1)^2 xx ddy}{1.2 dx^2} + \frac{(n-1)^3 x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \text{&c.}$$

Sin autem generaliter pro x scribamus z, functio quaecunque y ipsius x, transmutabitur ob $z = x + z - x$ in formam sequentem:

$$y + \frac{(z-x) dy}{1 dx} + \frac{(z-x)^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{(z-x)^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \text{&c.}$$

Si

Si igitur v fuerit talis functio ipsius t, qualis y est ipsius x, quia v ex y nascitur, ponendo t loco x, erit:

$$v = y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

cuius veritas quibuscunque exemplis comprobari potest.

EXEMPLUM.

Sit enim $y = xx - x$: manifestum est posito t loco x fore $v = tt - t$, quod idem expressio inventa declarabit.

Nam ob

$$y = xx - x; \text{ erit } \frac{dy}{dx} = 2x - 1; \text{ \& } \frac{ddy}{2dx^2} = 1;$$

unde fiet

$$v = xx - x + (t-x)(2x-1) + (t-x)^2 =$$
$$xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Si itaque y fuerit eiusmodi functio ipsius x, quae posito $x = a$ abeat in A; ob $t = a$ & $v = A$ fiet

$$A = y + \frac{(a-x)dy}{1dx} + \frac{(a-x)^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{(a-x)^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

huicque ergo aequationi omnes functiones ipsius x, quae facto $x = a$ abeunt in A, satisfaciunt.

CAPUT IV.

DE CONVERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES.

70.

In Capite superiori iam ex parte ostensus est usus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in investigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x, eius valor quem induit posito $x = 0$, erit cognitus; hicque si ponatur $= A$, erit uti invenimus:

$$y - \frac{x dy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} - \text{&c.} = A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A, etiamsi in singulis terminis insit quantitas variabilis x, sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus, erit enim:

$$y = A + \frac{x dy}{dx} - \frac{x x ddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} - \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{&c.}$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec investigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z, si loco x ubique scribatur $x + \omega$, ita ut z talis sit functio ipsius $x + \omega$, qualis y est ipsius x, atque ostendimus fore:

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{&c.}$$

Cum igitur huius seriei singuli termini per continuam ipsius y differentiationem ponendo dx constans inveniri, simulque valor ipsius z per substitutionem $x + \omega$ in locum ipsius x actu exhiberi queat; hoc modo perpetuo obtinebitur series valori ipsi-

ipsius z aequalis, quae si ω fuerit quantitas vehementer parva, maxime convergit, atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipsius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum uberrimus erit usus.

72. Ut igitur in insigni huius formulae usu ostendendo ordine procedamus, substituamus primo in locum ipsius y functiones ipsius x algebraicas. Ac primo quidem sit $y = x^n$; eritque si $x+\omega$ loco x ponatur $z = (x+\omega)^n$. Cum igitur sit:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad ; \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \quad ; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

&c.

his valoribus substitutis fiet:

$$(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\omega^3 + \text{&c.}$$

quae est notissima expressio Neutoniana, qua potestas binomii $(x+\omega)^n$ in seriem convertitur. Huiusque seriei terminorum numerus semper est finitus, si n fuerit numerus integer affirmativus.

73. Poterimus hinc quoque progressionem invenire, quae valorem potestatis binomii ita exprimat, ut ea abrumpatur, quoties exponens potestatis fuerit numerus negativus. Statuamus enim

$$\omega = \frac{-nx}{x+u}; \quad \text{erit} \quad z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

ideoque habebitur:

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^n u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{n-2}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \text{&c.}$$

dividatur ubique per x^{2n}, eritque

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n-1}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n-2}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n-3}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \text{&c.}$$

Ponatur nunc $-n=m$; prodibitque

$$(x+u)^m=x^m+\frac{mx^m u}{1(x+u)}+\frac{m(m+1)x^m u^2}{1.2(x+u)^2}+\frac{m(m+1)(m+2)x^m u^3}{1.2.3(x+u)^3}+\&c.$$

quae series, quoties m est numerus integer negativus, finito terminorum numero constabit. Haec igitur series aequalis est primum inventae, si pro ω & n scribantur u & m; erit enim inde

$$(x+u)^m=x^m+\frac{mx^{m-1}u}{1}+\frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1.2.3}+\&c.$$

74. Haec eadem series quoque deduci potest ex expressione initio §. 70. data. Cum enim, si posito $x=0$, abeat y in A sit:

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{xxddy}{1.2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4}-\&c.=A,$$

ponatur $y=(x+a)^n$; eritque $A=a^n$; & ob

$$\frac{dy}{dx}=n(x+a)^{n-1}\quad;\quad\frac{ddy}{dx^2}=n(n-1)(x+a)^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3};\ \&c.\ \text{fiet}$$

$$(x+a)^n-\frac{n}{1}x(x+a)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2(x+a)^{n-2}-\&c.=a^n$$

dividatur per $a^n(x+a)^n$, atque prodibit:

$$(x+a)^{-n}=a^{-n}-\frac{na^{-n}x}{1(x+a)}+\frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1.2(x+a)^2}-\&c.$$

quae positis respective u, x & $-m$ pro x, a & n orietur series ante inventa.

75. Si pro m statuantur numeri fracti, ambae series in infinitum excurrent, interim tamen si u prae x fuerit quantitas valde parva, vehementer ad verum valorem convergent. Sit igitur $m=\frac{\mu}{\nu}$; & $x=a^\nu$, erit ex serie primum inventa:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1+\frac{\mu u}{\nu.a^\nu}+\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu.\,2\nu}\cdot\frac{uu}{a^{2\nu}}+\frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu.\,2\nu.\,3\nu}\cdot\frac{u^3}{a^{3\nu}}+\text{&c.}\right)$$

Series autem posterius inventa dabit:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1+\frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)}+\frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu.2\nu(a^\nu+u)^2}+\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu.\,2\nu.\,3\nu\,(a^\nu+u)^3}+\text{&c.}\right)$$

Haec autem posterior series magis convergit quam prior, cum eius termini etiam decrescant, si fuerit $u > a^\nu$, quo casu tamen prior series divergit.

Si igitur sit $\mu = 1$, $\nu = 2$, erit

$$\sqrt{(a^2+u)} = a\left(1+\frac{1u}{2(a^2+u)}+\frac{1.3.u^2}{2.4(a^2+u)^2}+\frac{1.3.5u^3}{2.4.6(a^2+u)^3}+\text{&c.}\right)$$

simili modo pro ν ponendo numeros 3, 4, 5 &c.

manente $\mu = 1$, erit:

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1+\frac{1u}{3(a^3+u)}+\frac{1.4.u^2}{3.6(a^3+u)^2}+\frac{1.4.7u^3}{3.6.9(a^3+u)^3}+\text{&c.}\right)$$

$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1+\frac{1u}{4(a^4+u)}+\frac{1.5.u^2}{4.8(a^4+u)^2}+\frac{1.5.9u^3}{4.8.12(a^4+u)^3}+\text{&c.}\right)$$

$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1+\frac{1u}{5(a^5+u)}+\frac{1.6u^2}{5.10(a^5+u)^2}+\frac{1.6.11u^3}{5.10.15(a^5+u)^3}+\text{&c.}\right)$$

&c.

76. Ex his ergo formulis facile cuiusque numeri propositi radix cuiusvis potestatis inveniri poterit. Proposito enim numero c quaeratur potestas ei proxima, sive major sive minor: priori casu u fiet numerus negativus, posteriori affirmativus. Quod si vero series resultans non satis convergere videatur, multiplicetur numerus c per quampiam potestatem puta per f^ν, si radix dignitatis ν extrahi debeat, & quaeratur numeri $f^\nu c$ radix, quae per f divisa dabit radicem numeri c quaesitam. Quo major autem accipitur numerus f, eo magis series converget; idque imprimis, si quaepiam similis potestas a^ν non multum ab $f^\nu c$ discrepet.

EXEMPLUM I.

Quaeratur radix quadrata ex numero 2.

Si fine ulteriori praeparatione ponatur $a = 1$ & $n = 1$ fiet

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \&c.$$

quae etsi iam satis convergit, tamen praestabit numerum 2 ante per quadratum quodpiam uti 25 multiplicare, ut productum 50 ab alio quadrato 49 minime discrepet. Hancobrem quaeratur radix quadrata ex 50, quae per 5 divisa dabit $\sqrt{2}$. Erit autem tum $a = 7$ & $n = 1$, unde fiet:

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \&c.\right)$$

seu

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \&c.\right)$$

quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est aptissima.

Erit enim

$\frac{7}{5} =$	1,4000000000000
$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100} =$	14000000000
$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200} =$	210000000
$\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{100}\cdot\frac{5}{100}\cdot\frac{5}{100} =$	3500000
praec. in $\frac{7}{400} =$	612500
praec. in $\frac{7}{500} =$	11025
praec. in $\frac{21}{600} =$	202
praec. in $\frac{11}{700} =$	3
Ergo $\sqrt{2} =$	1,4142135623730

EXEMPLUM II.

Quaeratur radix cubica ex 3.

Multiplicetur 3 per cubum 8, & quaeratur radix cubica ex 24, erit enim $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. Ponatur ergo $a = 3$ & $n = -3$, eritque

$$\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \text{&c.}\right) \quad \&$$

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3.8} + \frac{1.4}{3.6.8^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9.8^3} + \text{&c.}\right) \quad \text{seu}$$

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \text{&c.}\right)$$

quae series iam vehementer convergit, cum quilibet terminus pluſquam octies minor ſit praecedente. Sin autem 3 multiplicetur per cubum 729 fiet 2187, &

$$\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3}.$$

Erit ergo ob $a = 13$ & $n = -10$

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{11}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \text{&c.}\right)$$

cuius quivis terminus pluſquam ducenties minor eſt quam praeced.

77. Evolutio binomii poteſtatis tam late patet, ut omnes functiones algebraicae in ea comprehendi queant. Si enim ver. gr. quaeratur valor huius functionis $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ per ſeriem expreſſus, hoc per praecedentes formulas, duos terminos tanquam unum conſiderando fieri poterit. Deinde vero haec explicatio fieri poterit ope expreſſionis primum traditae: nam ſi ponatur $\sqrt{(a + 2bx + cxx)} = y$, quia poſito $x = 0$ fit $y = \sqrt{a}$, erit $A = \sqrt{a}$, & cum differentialia ipſius y ita ſe habeant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

Ex

Ex his ergo obtinebitur:

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} - \frac{(b+cx)x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^{\frac{7}{2}}} - \&c. = \sqrt{a}.$$

Quodsi ergo ubique per $\sqrt{(a+2bx+cxx)}$ multiplicetur series fiet rationalis, eritque

$$\sqrt{a}(a+2bx+cxx) = a+2bx+cxx-(b+cx)x-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^3} - \&c.$$

sive

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} = \sqrt{a} + \frac{bx}{\sqrt{a}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)\sqrt{a}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2\sqrt{a}} \&c.$$

78. Transeamus ergo ad functiones transcendentes, quas loco y substituamus. Sit itaque primum $y = lx$, ac posito $x+\omega$ loco x fiet $z = l(x+\omega)$. Sint autem hi logarithmi quicunque, qui ad hiperbolicos rationem teneant $n : 1$, eritque pro logarithmis hyperbolicis $n = 1$ & pro tabularibus erit $n = 0,43429448190 32$. Hinc differentialia ipsius $y = lx$ erunt: $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{n}{x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2n}{x^3}$; &c. ex quibus conficitur: $l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$

Simili modo si ω statuatur negativum, erit:

$$l(x-\omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} - \&c.$$

Quodsi ergo haec series a priori subtrahatur, fiet

$$l\frac{x+\omega}{x-\omega} = 2n\left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \&c.\right)$$

79

79. Si in serie primum inventa:

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

ponatur $\omega = \frac{nx}{u-x}$; erit $x+\omega = \frac{ux}{u-x}$; &

$$l(x+\omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \&c.$$

atque

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \&c.$$

sumtoque x negativo habebitur:

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nxx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4}.$$

Harum ergo serierum ope logarithmi expedite inveniri poterunt, si quidem series valde convergant. Huiusmodi autem eruut sequentes, quae ex inventis facile deducuntur:

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

quae duae series, cum tantum signis a se invicem discrepent, si ad calculum revocentur, ex logarithmo numeri x cognito, eadem opera logarithmi amborum numerorum $x+1$ & $x-1$ reperientur. Deinde ex reliquis seriebus erit:

$$l(x+1) = l(x-1) + 2n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \&c.\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + \&c.\right)$$

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.\right)$$

80. Ex dato ergo logarithmo numeri x, logarithmi nu-

numerorum contiguorum $x+1$ & $x-1$ facile inveniri poterunt; quin etiam ex logarithmo numeri $x-1$ logarithmus numeri binario maioris & viciſſim eruetur. Quod quamvis in Introductione uberius ſit oſtenſum, tamen hic quaedam exempla adiungemus.

EXEMPLUM I.

Ex dato numeri 10 *logarithmo hyperbolico*, $= l10$ *qui eſt* 2,302585092994o, *logarithmos hyperbolicos numerorum* 11 *&* 9 *invenire.*

Quoniam haec quaeſtio logarithmos hyperbolicos ſpectat, erit $n=1$; ideoque habebuntur hae ſeries:

$$l11 = l10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \frac{1}{5.10^5} - \&c.$$

$$l9 = l10 - \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} - \frac{1}{5.10^5} - \&c.$$

Ad quarum ſerierum ſummas inveniendas, colligantur termini pares & impares ſeorſim, eritque

$\frac{1}{10} = 0,100000000000$	$\frac{1}{2.10^2} = 0,005000000000$
$\frac{1}{3.10^3} = 0,000333333333$	$\frac{1}{4.10^4} = 0,000025000000$
$\frac{1}{5.10^5} = 0,000002000000$	$\frac{1}{6.10^6} = 0,000000166666$
$\frac{1}{7.10^7} = 0,000000014285\overline{7}$	$\frac{1}{8.10^8} = 0,000000001250\overline{0}$
$\frac{1}{9.10^9} = 0,000000000111\overline{1}$	$\frac{1}{10.10^{10}} = 0,000000000010\overline{0}$
$\frac{1}{11.10^{11}} = 0,000000000009$	$\frac{1}{12.10^{12}} = 0,000000000001$
ſumma $= 0,100335347731\overline{0}$	ſumma $= 0,005025167916\overline{7}$

Sum-

Summa utriusque erit . . . 0,10536051565 77
Differentia ambarum erit 0,09531017980 43
Iam est $l10 = 2,3025850929940$
Ergo erit $l11 = 2,3978952727983$
& $l9 = 2,1972245773363$
Hinc porro erit $l3 = 1,0986122886681$
& $l99 = 4,5951198501346$

EXEMPLUM II.

Ex logarithmo hyperbolico numeri 99 nunc invento invenire logarithmum numeri 101.

Adhibeatur ad hoc series supra inventa:

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{7x^7} + \text{&c.}$$

in qua fiat $x = 100$; eritque:

$$l101 = l99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3.\,100^3} + \frac{2}{5.\,100^5} + \frac{2}{7.\,100^7} + \text{&c.}$$

cuius seriei summa ex his quatuor terminis colligitur $= 0,0200006667066$, quae ad $l99$ addita dabit $l101 = 4,6151205168412$.

EXEMPLUM III.

Ex dato logarithmo tabulari numeri 10, qui est $= 1$, *invenire logarithmos numerorum* 11 & 9.

Quoniam hic logarithmos communes tabulares quaerimus, erit $n = 0,4342944819032$, posito ergo $x = 10$ erit:

$$l11 = l10 + \frac{n}{10} + \frac{n}{2.\,10^2} + \frac{n}{3.\,10^3} + \frac{n}{4.\,10^4} + \text{&c.}$$

$$l9 = l10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2.\,10^2} - \frac{n}{3.\,10^3} - \frac{n}{4.\,10^4} - \text{&c.}$$

Colligantur termini pares & impares seorsim:

$\frac{n}{10} = 0{,}043429448 1903$	$\frac{n}{2.10^2} = 0{,}00217147 24095$
$\frac{n}{3.10^3} = 0{,}00014476 48273$	$\frac{n}{4.10^4} = 0{,}00001085 73620$
$\frac{n}{5.10^5} = 0{,}00000086 85889$	$\frac{n}{6.10^6} = 0{,}00000007 23824$
$\frac{n}{7.10^7} = 0{,}00000000 62042$	$\frac{n}{8.10^8} = 0{,}00000000 5428$
$\frac{n}{9.10^9} = 0{,}00000000 0482$	$\frac{n}{10.10^{10}} = 0{,}00000000 0043$
$\frac{n}{11.10^{11}} = 0{,}00000000 0003$	$\frac{n}{12.10^{12}} = 0{,}00000000 0000$
summa $= 0{,}04357508 78593$	summa $= 0{,}00218240 27010$

Aggregatum ambarum est $= 0{,}04575749 05603$

Differentia earum est $= 0{,}04139268 51583$

Cum ergo sit $l10 = 1{,}00000000 0000$

Erit $l11 = 1{,}04139268 51583$

& $l9 = 0{,}95424250 94396$

Hinc $l3 = 0{,}47712125 47198$

& $l99 = 1{,}99563519 45979$

EXEMPLUM IV.

Ex logarithmo tabulari numeri 99 hic invento invenire logarithmum tabularem numeri 101.

Adhibendo hic eandem seriem, qua in Exemplo secundo usi sumus, habebimus:

$$l101 = l99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3.100^3} + \frac{1}{5.100^5} + \&c.\right)$$

cuius seriei posito pro n valore debito, summa mox reperietur $= 0{,}00868617 91849$ quae addita ad $l99 = 1{,}99563519 45979$ oritur

$l101 = 2{,}00432137 37829$

81.

81. Tribuamus nunc in expressione nostra generali y valorem exponentialem, sitque $y = a^x$, posito $x + \omega$ loco x; erit $z = a^{x+\omega}$, cuius valor ob differentialia:

$\frac{dy}{dx} = a^x la$; $\frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3$; &c. erit

$$a^{x+\omega} = a^x \left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \text{&c.}\right)$$

quae si dividatur per a^x prodibit series valores quantitatis exponentialis exprimens, quam supra in Introductione iam elicuimus: nempe

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

Simili modo sumto ω negativo erit:

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} - \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} - \text{&c.}$$

ex quarum combinatione oritur

$$\frac{a^\omega + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6 (la)^6}{1.2 \ldots 6} + \text{&c.}$$

$$\frac{a^\omega - a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5 (la)^5}{1.2.3.4.5} + \text{&c.}$$

Ubi notandum est la denotare logarithmum hyperbolicum numeri a.

82. Huius formulae ope ex dato quovis logarithmo numerus ei conveniens reperiri poterit. Sit enim propositus logarithmus quicunque u ad canonem, in quo numeri a logarithmus $= 1$ statuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus x proxime ad u accedens, sitque $u = x + \omega$; numerus autem logarithmo x conveniens sit $= y = a^x$, erit numerus logarithmo $u = x + \omega$ respondens $= a^{x+\omega} = z$; fietque

$$z = y \left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}\right)$$

quae series ob ω numerum valde parvum, vehementer converget, cuius usum sequenti exemplo declaremus.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus isti binarii potestati, $2^{2^{24}}$ *aequalis.*

Cum sit $2^{24} = 16777216$, erit $2^{2^{24}} = 2^{16777216}$, sumendisque logarithmis vulgaribus, erit huius numeri logarithmus $= 16777216\, l2$. Cum autem sit:

$l2 = 0{,}30102999566398119521373889$

numeri quaesiti logarithmus erit:

$5050445{,}259733675932039063$

cuius characteristica indicat numerum quaesitum exprimi 5050446 figuris, quae cum omnes exhiberi nequeant, sufficiet figuras initiales assignasse, quae ex mantissa

$,259733675932039063 = u$

investigari debent. Ex tabulis autem colligitur, numerum cuius logarithmus proxime ad hunc accedat fore $18.101 = 1{,}818$; qui ponatur y; cuius logarithmus

$x = 0{,}25959387888 5948644$, unde erit

$\omega = 0{,}00013979704690419$. Cum iam sit

$A = 10$ erit

$lA = 2{,}30258509299404568401799 14$ &

$\omega lA = 0{,}00032189459437239 8$ Deinde erit

$y = 1{,}818000000000000000$

$\frac{\omega lA}{1}\, y = 5852043725690 20$

$\frac{\omega^2 (lA)^2}{1.2}\, y = 941870620 64$

$\frac{\omega^3 (lA)^3}{1.2.3}\, y = 10106100$

$\frac{\omega^4 (lA)^4}{1.2.3.4}\, y = 813$

1818585298569737997

haeque sunt figurae initiales numeri quaesiti, cuius omnes figurae excepta forte ultima sunt iustae.

83. Consideremus quantitates transcendentes a circulo pendentes, sitque uti perpetuo ponimus, radius circuli $= 1$, atque y denotet arcum circuli cuius sinus $= x$ seu sit $y = A \sin x$. Ponatur $x + \omega$ loco x, eritque $z = A \sin (x + \omega)$: ad quem valorem exprimendum quaerantur differentialia ipsius y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}} \quad ; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{+x}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}} \quad ; \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}} \quad ; \quad \text{&c.}$$

Ex his ergo invenitur:

$$A \sin (x+\omega) = A \sin x + \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{&c.}$$

84. Si ergo cognitus fuerit arcus, cuius sinus est $= x$, huius formulae beneficio inveniri poterit arcus, cuius sinus est $x + \omega$, si fuerit ω quantitas valde parva. Series autem cuius summa addi debet, exprimetur in partibus radii, quae ad arcum facile reducentur: uti ex hoc exemplo intelligetur.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus circuli, cuius sinus est $= \frac{1}{3} = 0{,}3333333333$.

Quaeratur ex tabulis sinuum arcus, cuius sinus sit proxime minor, quam $\frac{1}{3}$, qui erit 19°, $28'$, cuius sinus est $= 0{,}3332584$. Statuatur ergo 19°, $28'$, $= A \sin x = y$ erit $x = 0{,}3332584$, & $\omega = 0{,}0000749$, atque ex tabulis $\sqrt{(1-xx)} = \cos y = 0{,}9428356$. Erit ergo arcus quaesitus z, cuius sinus $= \frac{1}{3}$ proponitur $= 19^\circ, 28' + \frac{\omega}{\cos y} + \frac{\omega\omega \sin y}{2 \cos y^3}$, quae expressio iam sufficit; erit ergo per logarithmos calculum instituendo:

$l\omega = 5,8744818$
$l\cos y = \underline{9,9744359}$
$l\frac{\omega}{\cos y} = 5,9000459$; $\frac{\omega}{\cos y} = 0,0000794412$
$l\frac{\omega^2}{\cos y^2} = 1,8000918$
$l\frac{\sin y}{\cos y} = 9,5483452$
$1,3484370$
$l2 = \underline{0,3010300}$
$l\frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 1,0474070$; $\frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 0,0000000011$
Summa $= 0,0000794423$

qui est valor arcus ad 19°, 28' addendi, ad quem in minutis secundis exprimendum, sumamus eius logarithmum

qui est	5,9000518
a quo subtrahatur	4,6855749
	1,2144769

cui log. respondet num. $= 16,38615$

qui est numerus minutorum secundorum; fractionem vero in tertiis & quartis exprimendo fiet arcus quaesitus

$= 19°, 28', 16'', 23''', 10'''', 8^v, 24^{vi}$.

85. Simili modo expressio pro cosinibus eruetur; posito enim $y = A\cos x$; quia est $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, series ante inventa invariata manebit, dummodo eius signa permutentur. Erit itaque

$$A\cos(x+\omega) = A\cos x - \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{5}{2}}} - \text{&c.}$$

quae series pariter ac praecedens vehementer semper converget, si ex tabulis sinuum proxime veri anguli excerpantur, ita ut plerumque unicus terminus primus $\frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}}$ sufficiat. Interim tamen si x fuerit ipsi 1 seu sinui toti proxime aequalis, tum ob denominatores admodum parvos illa series convergentiam amittit. His igitur casibus, quibus x non multum ab 1 deficit, quoniam tum differentiae fiunt minimae, commodius utemur solita interpolatione.

86. Ponamus quoque pro y arcum cuius tangens datur, sitque $y = \text{A tang } x$ & $z = \text{A tang}(x+\omega)$ ita ut sit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{&c.}$$

Ad quos terminos indagandos quaerantur ipsius y singula differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}\ ;\quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}\ ;\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+xx)^4}\ ;\quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+xx)^5}\ ;$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+xx)^6}\ ;\quad \text{&c.}$$

unde colligitur fore: $\text{A tang}(x+\omega) = \text{A tang } x +$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3}\left(xx-\tfrac{1}{3}\right) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4}\left(x^3-x\right) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5}\left(x^4-2x^2+\tfrac{1}{5}\right) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6}\left(x^5-\tfrac{10}{3}x^3+x\right) + \text{&c.}$$

87. Haec series, cuius lex progressionis non adeo manifesta est, transmutari potest in aliam formam, cuius progressio statim in oculos incurrit. Ponatur in hunc finem $\text{A tang } x = 90^\circ - u$, ut sit $x = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$; erit

1 +

$1+xx=\frac{1}{\sin u^2}$, unde fit $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+xx}=\sin u^2$. Cum deinde fit $dx=\frac{-du}{\sin u^2}$, seu $du=-dx\sin u^2$, fiet ulteriora differentialia sumendo:

$\frac{ddy}{dx}=2du\sin u\cos u=du\sin 2u=-dx\sin u^2.\sin 2u$

ideoque $\frac{ddy}{1dx^2}=-\sin u^2.\sin 2u$.

$\frac{d^3y}{2dx^3}=-du\sin u.\cos u.\sin 2u-du\sin u^2\cos 2u=-du\sin u.\sin 3u$

$=dx\sin u^3\sin 3u$

ideoque $\frac{d^2y}{1.2dx^3}=+\sin u^3.\sin 3u$

$\frac{d^4y}{1.2.3dx^3}=du\sin u^3.(\cos u.\sin 3u+\sin u.\cos 3u)=du\sin u^3.\sin 4u$

$=-dx\sin u^4.\sin 4u$

ideoque $\frac{d^4y}{1.2.3dx^4}=-\sin u^4.\sin 4u$

$\frac{d^5y}{1.2.3.4dx^4}=-du\sin u^3(\cos u\sin 4u+\sin u.\cos 4u)=-du.\sin u^3.\sin 5u$

$=+dx\sin u^5.\sin 5u$

ideoque $\frac{d^5y}{1.2.3.4dx^5}=+\sin u^5.\sin 5u$

&c.

Ex quibus colligitur fore:

$$\operatorname{Atg}(x+\omega)=\operatorname{Atg}x+\frac{\omega}{1}\sin u.\sin u-\frac{\omega^2}{2}\sin u^3.\sin 2u+\frac{\omega^3}{3}\sin u^3.\sin 3u$$
$$-\frac{\omega^4}{4}\sin u^4\sin 4u+\frac{\omega^5}{5}\sin u^5.\sin 5u-\frac{\omega^6}{6}\sin u^6\sin 6u+\&c.$$

ubi

ubi cum sit A tg $x = y$ & A tg $x = 90° - u$, erit $y = 90° - u$.

88. Si ponatur A cot $x = y$ & A cot $(x+\omega) = z$; erit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \&c.$$

Cum autem sit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, termini huius seriei congruent praeter primum cum ante inventis, exceptis tantum signis. Quare si ponatur, ut ante A tang $x = 90° - u$, seu A cot $x = u$, ut sit $u = y$; erit:

$$\text{A cot}(x+\omega) = \text{A cot}\,x - \frac{\omega}{1}\sin u.\sin u + \frac{\omega^2}{2}\sin u^2.\sin 2u - \frac{\omega^3}{3}\sin u^3 \sin 3u$$
$$+ \frac{\omega^4}{4}\sin u^4.\sin 4u - \frac{\omega^5}{5}\sin u^5.\sin 5u + \&c.$$

quae expressio immediate ex praecedente sequitur: quia enim est A cot $(x+\omega) = 90 - \text{A tang}(x+\omega)$
& A cot $x = 90 - \text{A tang}\,x$; erit
A cot $(x+\omega) - \text{A cot}\,x = -\text{A tang}(x+\omega) + \text{A tang}\,x$.

89. Ex his expressionibus multa egregia corollaria consequuntur, prout loco x & ω dati valores substituantur. Sit igitur primum $x = 0$; & cum sit $u = 90° - \text{A tang}\,x$ fiet $u = 90°$; atque $\sin u = 1$; $\sin 2u = 0$; $\sin 3u = -1$; $\sin 4u = 0$; $\sin 5u = 1$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = -1$; &c. unde fiet

$$\text{A tang}\,\omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \&c.$$

quae est notissima series exprimens arcum, cuius tangens est $= \omega$. Sit $x = 1$, erit A tang $x = 45°$, ideoque $u = 45°$, hinc $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$; $\sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$; $\sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$ $\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ &c. Ex quibus fit:

$$A\,tg(1+\omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16} + \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \&c.$$

Si igitur fit $\omega = -1$; ob $A\,tang(1+\omega) = 0$, & $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ fiet:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \&c.$$

qui valor si loco arcus 45° substituatur in illa expressione erit: $A\,tang(1+\omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^3} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \&c.$$

Illa autem series maxime est idonea ad valorem ipsius $\frac{\pi}{4}$ proxime inveniendum Cum fit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$

termini autem in denominatoribus habentes 2, 6, 10, &c. $\frac{1}{2.2} - \frac{1}{6.2^3} + \frac{1}{10.2^5} - \frac{1}{14.2^7} + \&c.$ exprimunt $\frac{1}{4}\,A\,tg\,\frac{1}{2}$; erit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\,A\,tang\,\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} \&c.$$

In altera autem formula posito ω negativo, cum fit

$$A\,tang(1-\omega) = + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$
$$- \frac{\omega}{1.2} - \frac{\omega^2}{2.2} - \frac{\omega^3}{3.2^3} + \frac{\omega^5}{5.2^3} + \frac{\omega^6}{6.2^3} + \frac{\omega^7}{7.2^4} - \&c.$$

si fiat $\omega = \frac{1}{2}$; erit:

A

$$\text{A tang}\tfrac{1}{1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{6.2^9} + \frac{1}{7.2^{11}} - \&c.$$

& terminis per 2, 6, 10, &c. diuisis seorsim sumtis erit

$$\text{A tg}\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{1}\text{A tg}\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2}\text{A tang}\tfrac{1}{4} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \&c.$$

ideoque $$\tfrac{1}{2}\text{A tang}\tfrac{1}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2}\text{A tang}\tfrac{1}{4} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \&c.$$

qui valor si in superiore serie substituatur, atque A tang $\frac{1}{7}$ ipse in seriem convertatur, reperietur

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3.2^1} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \&c. \\ - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \&c. \\ - \frac{1}{1.2^4} + \frac{1}{3.2^{10}} - \frac{1}{5.2^{16}} + \frac{1}{7.2^{22}} - \frac{1}{9.2^{28}} + \&c. \end{array} \right.$$

90. Sequuntur hae multaeque aliae series ex positione $x = 1$: sin autem ponamus $x = \sqrt{3}$, ut fit A tang $x = 60°$, fiet $u = 30$, & $\sin u = \frac{1}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = \frac{1}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = -\frac{1}{2}$; &c. unde erit:

$$\text{A tang}(\sqrt{3} + \omega) = 60° + \frac{\omega}{1.2^2} - \frac{\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3} + \frac{\omega^3}{3.2^3} - \frac{\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} +$$

$$+\frac{\omega^5}{5.2^5}-\frac{\omega^7}{7.2^8}+\frac{\omega^8\sqrt{3}}{8.2^9}-\frac{\omega^9}{9.2^9}+\frac{\omega^{10}\sqrt{3}}{10.2^{11}}-\frac{\omega^{11}}{11.2^{12}}+\text{ &c.}$$

Sin autem ponatur $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ut sit A tang $x=30°$; erit $u=60°$; atque $\sin u=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2u=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u=0$; $\sin 4u=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 6u=0$; $\sin 7u=\frac{\sqrt{3}}{2}$; &c.

quibus valoribus substitutis erit:

$$\text{A tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\omega\right)=30°+\frac{3\omega}{1.2^2}-\frac{3\omega^3\sqrt{3}}{2.2^3}+\frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5}-\frac{3^3\omega^5}{5.2^6}+\text{ &c.}$$

si igitur sit $\omega=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ob $30°=\frac{\pi}{6}$; erit:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.2^3}-\frac{1}{4.2^5}-\frac{1}{5.2^6}+\frac{1}{7.2^8}+\frac{1}{8.2^9}-\text{ &c.}$$

91. Resumamus expressionem generalem inventam:

$$\text{A tang.}(x+\omega)=\text{A tang}\,x+\frac{\omega}{1}\sin u.\sin u-\frac{\omega^2}{2}\sin u^2.\sin 2u+\frac{\omega^3}{3}\sin u^3.\sin 3u-\text{ &c.}$$

ac ponamus $\omega=-x$, ut sit A tang$(x+\omega)=0$, eritque

$$\text{A tang}\,x=\frac{x}{1}\sin u.\sin u+\frac{x^2}{2}\sin u^2.\sin 2u+\frac{x^3}{3}\sin u^3.\sin 3u+\text{ &c.}$$

Cum autem sit A tang $x=90-u=\frac{\pi}{2}-u$;

erit: $x=\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}$. Quamobrem erit:

$$\frac{\pi}{2}=u+\cos u.\sin u+\tfrac{1}{2}\cos u^2.\sin 2u+\tfrac{1}{3}\cos u^3.\sin 3u+\tfrac{1}{4}\cos u^4.\sin 4u+\text{ &c.}$$

quae

quae series eo magis est notatu digna, quod quicunque arcus loco u accipiatur, valor seriei semper prodeat idem $= \frac{\pi}{2}$. Sin autem sit $\omega = -2x$, ob A tang $(-x) = -$ A tg x; fiet: 2 A tang $x =$

$$\frac{2x}{1} \sin u . \sin u + \frac{4x^2}{2} \sin u^2 . \sin 2u + \frac{8x^3}{3} \sin u^3 . \sin 3u + \&c.$$

Cum autem sit A tang $x = \frac{\pi}{2} - u$ & $x = \frac{\cos u}{\sin u}$, erit:

$$\pi = 2u + \frac{2}{1} \cos u . \sin u + \frac{2^2}{2} \cos u^2 . \sin 2u + \frac{2^3}{3} \cos u^3 . \sin 3u + \&c.$$

Sit $u = 45° = \frac{\pi}{4}$; erit $\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$;

$\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$; $\sin 5u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$;

$\sin 7u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$; $\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; eritque

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \&c.$$

quae series etsi divergit, tamen ob simplicitatem est notatu digna.

92. Ponatur in expressione generali inventa:

$$\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{\sin u . \cos u}, \text{ ob } x = \frac{\cos u}{\sin u}; \text{ erit:}$$

$$\text{A tang}(x + \omega) = \text{A tang} - \frac{1}{x} = -\text{A tang}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + \text{A tang} x.$$

Hinc ergo obtinebitur sequens expressio:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{1 \cos u} + \frac{\sin 2u}{2 \cos u^2} + \frac{\sin 3u}{3 \cos u^3} + \frac{\sin 4u}{4 \cos u^4} + \frac{\sin 5u}{5 \cos u^5} + \&c.$$

quae posito $u = 45°$ dat eandem seriem, quam ultimo loco invenimus. Sin autem ponamus $\omega = -\sqrt{(1 + xx)}$

ob

ob $x = \frac{\cos u}{\sin u}$, fiet $\omega = -\frac{1}{\sin u}$, &

$$\text{A tang}\,[x - \sqrt{(1+xx)}] - \text{A tang}\,[\sqrt{(1+xx)} - x]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{A tang}\,\frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang}\,x\right) = -\tfrac{1}{2}u,$$

& $\text{A tang}\,x = \frac{\pi}{2} - u$. Hancobrem erit:

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{1}\sin u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + \tfrac{1}{3}\sin 3u + \tfrac{1}{4}\sin 4u + \&c.$$

Quodſi haec aequatio differentietur erit:

$$0 = \tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cos 4u + \cos 5u + \&c.$$

cuius ratio ex natura ſerierum recurrentium intelligitur.

93. Si ſimili modo ſeries ante inventae differentientur, novae ſeries ſummabiles reperientur. Ac primo quidem ex ſerie:

$$\text{A tang}\,(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \&c.$$

ſequitur

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \tfrac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \&c.$$

quae oritur ex evolutione fractionis $\frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}$,

Deinde iſta ſeries:

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos u \sin u + \tfrac{1}{2}\cos u^2 . \sin 2u + \tfrac{1}{3}\cos u^3 \sin 3u + \tfrac{1}{4}\cos u^4 \sin 4u + \&c.$$

per differentiationem dabit:

$$0 = 1 + \cos 2u + \cos u . \cos 3u + \cos u^2 . \cos 4u + \cos u^3 \cos 5u + \&c.$$

Denique ſeries $\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin 2u}{2\cos u^2} + \frac{\sin 3u}{3\cos u^3} + \frac{\sin 4u}{4\cos u^4} + \&c.$

dat $0 = \frac{1}{\cos u^2} + \frac{\cos u}{\cos u^3} + \frac{\cos 2u}{\cos u^4} + \frac{\cos 3u}{\cos u^5} + \frac{\cos 4u}{\cos u^6} + \&c.$

ſeu

$$\text{seu } 0 = 1 + \frac{\cos u}{\cos x} + \frac{\cos 2u}{\cos x^2} + \frac{\cos 3u}{\cos x^3} + \frac{\cos 4u}{\cos x^4} + \&c.$$

94. Imprimis autem expressio inventa:

$$\text{A tang } (x+\omega) = \text{A tang } x + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin 2u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 . \sin 3u - \&c.$$

existente $x = \cot u$ seu $u = \text{A cot } x = 90° - \text{A tang } x$ inserviet ad angulum seu arcum datae cuique tangenti respondentem inveniendum. Sit enim proposita tangens $= t$, quaeraturque in tabulis tangens ad hanc proxime accedens $= x$, cui respondeat arcus $= y$; eritque $u = 90° - y$. Tum ponatur $x + \omega = t$, seu $\omega = t - x$; eritque arcus quaesitus:

$$= y + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin 2u + \&c.$$

quae regula tum praecipue est utilis, cum tangens proposita fuerit admodum magna, ac propterea arcus quae situs parum a 90° discrepet. His enim casibus ob tangentes vehementer increscentes, solita methodus interpolationum nimium a veritate abducit. Sit ergo propositum hoc exemplum.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus, cuius tangens sit $= 100$, *posito radio* $= 1$.

Arcus proxime quaesito aequalis est 89°, 25', cuius tangens est $x = 98, 217943$ secund.

quae subtrahatur a $t = 100, 000000$

remanebit $\omega = 1, 782057$

Deinde cum sit $y = 89°, 25'$, erit $u = 0°, 35'$, $2u = 1°, 10'$, $3u = 1°; 45'$, &c. Iam singuli termini per logarithmos investigentur.

Ad

Ad		$l\omega =$	0,2509215	
add.		$l \sin u =$	8,0077867	
		$l \sin u =$	8,0077867	
	$l\omega \sin u . \sin u =$		6,2664949	
			4,6855749	
	subtr.	$=$	1,5809200	
Ergo	$\omega \sin u . \sin u =$		38,09956	secund.
Ad	$l\omega \sin u^2 =$		6,2664949	
add.	$l\omega =$		0,2509215	
	$l \sin 2u =$		8,3087941	
			4,8262105	
subtr.	$l 2 =$		0,3010300	
$l \frac{1}{2}\omega^2 \sin u^2 . \sin 2u =$			4,5251805	
subtr.			4,6855749	
Remanet			9,8396056	
Ergo	$\frac{1}{2}\omega^2 \sin u^2 . \sin 2u =$		0,69120	secund.
Porro ad	$l\omega^3 =$		0,7527645	
add.	$l \sin u^3 =$		4,0233601	
	$l \sin 3u =$		8,4848479	
			3,2609725	
subtr.	$l 3 =$		0,4771213	
			2,7838512	
subtr.			4,6855749	
			8,0982763	
Ergo	$\frac{1}{3}\omega^3 \sin u^3 \sin 3u =$		0,01254	secund.
Denique ad	$l\omega^4 =$		1,0036860	
add.	$l \sin u^4 =$		2,0311468	
	$l \sin 4u =$		8,6097341	
			1,6445669	
subtr.	$l 4 =$		0,6020600	
			1,0425069	
subtr.			4,6855749	
			6,3569320	
Ergo	$\frac{1}{4}\omega^4 \sin u^4 \sin 4u =$		0,00023	secund.

Hinc:

Termini addendi	Termini subtrahendi
38,09956	0,69120
0,01254	0,00023
38,11210	0,69143
subtr. 0,69143	
37,42067	

$= 37^{\prime}, 25^{\prime\prime\prime}, 14^{\prime\prime}, 24^{\prime\prime\prime}, 36^{\prime\prime\prime}$.

Quocirca arcus, cuius tangens centies superat radium erit:

$89^{\circ}, 25^{\prime}, 37^{\prime\prime}, 25^{\prime\prime\prime}, 14^{\prime\prime}, 24^{\prime\prime\prime}, 36^{\prime\prime\prime}$,

neque error ad minuta quarta ascendit; sed in minutis tantum quintis inesse potest, ex quo vere hunc angulum pronunciare poterimus $= 89^{\circ}, 25^{\prime}, 37^{\prime\prime}, 25^{\prime\prime\prime}, 14^{\prime\prime}$. Si tangens adhuc maior proponatur, etiamsi fortasse ω maius prodeat, tamen ob u angulum adhuc minorem, aeque expedite arcus definiri poterit.

95. Cum hic pro y arcum circuli substituerimus, nunc functiones reciprocas in locum y ponamus, cuiusmodi sunt $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$, &c. Sit igitur $y = \sin x$, positoque $x + \omega$ loco x, fiet: $z = \sin(x + \omega)$, atque aequatio

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ob $\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; &c. dabit

$$\sin(x + \omega) = \sin x + \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$$

& sumto ω negativo erit:

$$\sin(x - \omega) = \sin x - \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$$

Quod si vero statuatur $y = \cos x$,

ob $\frac{dy}{dx} = -\sin x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\cos x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$; &c.

erit:

$$\cos(x + \omega) = \cos x - \omega \sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$$

& facto ω negativo erit:

$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x - \frac{1}{2}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$

96. Usus harum formularum eximius est cum in condendis, tum interpolandis tabulis sinuum & cosinuum. Si enim cogniti fuerint sinus & cosinus cuiuspiam arcus x, ex iis facili negotio sinus & cosinus angulorum $x+\omega$ & $x-\omega$ inveniri possunt, si quidem differentia ω fuerit satis exigua: hoc enim casu series inventae vehementer convergunt. Ad hoc vero necesse est, ut arcus ω in partibus radii exprimatur; quod cum arcus 180° sit: 3, 14159265358979323846 facile fiet: erit enim divisione per 180 instituta

arcus 1° = 0,01745329251994329576 9
arcus 1′ = 0,00029088820866572159 6
arcus 10″ = 0,00004848136811095359 9

EXEMPLUM I.

Invenire sinus & cosinus angulorum 45°, 1′, *&* 44°, 59′, *ex datis sinu & cosinu anguli* 45°, *quorum utrumque est*

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70710678118654.$$

Cum igitur sit:

$\sin x = \cos x = 0,70710678118654$
atque $\omega = 0,00029088820866$

erit ad multiplicationes facilius instituendas:

$2\omega = 0,00058177641732$
$3\omega = 0,00087266462598$
$4\omega = 0,00116355283464$
$5\omega = 0,00145444104330$
$6\omega = 0,00174532925196$
$7\omega = 0,00203621746062$
$8\omega = 0,00232710566928$
$9\omega = 0,00261799387794$

Ergo $\omega \sin x$ & $\omega \cos x$ hoc modo invenietur:

	7 .	0,0002036217460 5
	0	
	7 .	0,0000020362174 6
	1 . .	2908882
	0	
	6 . .	174532
	7 . .	20362
	8 . .	2327
	1 . .	29
	1 . . .	2
	8 . . .	2
	6 . . .	0
$\omega \sin x =$	$\omega \cos x =$	0,0002056890249 0
Ergo $\frac{1}{2}\omega \cos x =$		0,0001028445124 5
per ω .	1 .	0,0000000290888 2
	0	
	2 . .	58177
	8 . .	23271
	4 . .	1163
	4 . .	116
	5 . . .	14
$\frac{1}{4}\omega^2 \cos x =$		0,0000000299162 5
$\frac{1}{6}\omega^2 \cos x =$		0,0000000049860 4
per ω .	9 .	0,0000000000026 1
	9 . .	26
	7 . . .	2
$\frac{1}{6}\omega^3 \cos x =$		0,0000000000029 0

Ergo ad sin 45°, 1', inveniendum:

Ad	$\sin x =$	0,7071067811865
add.	$\omega \cos x =$	2056890249
		0,7073124702114
subtr.	$\frac{1}{2}\omega^2 \sin x =$	299162
		0,7073124402952

0,7073124402952
subtr. $\frac{1}{6}\omega^3 \cos x =$ 29
$\sin 45^\circ, 1', = 0,7073124402923 = \cos 44^\circ, 59'.$

At ad $\cos 45^\circ, 1'$, inveniendum:

$A \cos x = 0,7071067811865$
subtr. $\omega \sin x =$ 2056890249
0,7069010921616
subtr. $\frac{1}{2}\omega^2 \cos x =$ 299162
0,7069010622454
add. $\frac{1}{24}\omega^4 \sin x =$ 29
$\cos 45^\circ, 1', = 0,7069010622483 = \sin 44^\circ, 59'.$

EXEMPLUM II.

Ex datis sinu & cosinu arcus 67°, 30', invenire sinus & cosinus arcuum 67°, 31', & 67°, 29'.

Absolvamus hunc calculum in fractionibus decimalibus, tantum ad 7 notas, uti tabulae vulgares construi solent, sicque negotium facile per logarithmos conficietur. Cum sit $x = 67^\circ, 30'$, & $\omega = 0,000290888$; erit: $l\omega = 6,4637259$ &

$l \sin x = 9,9656153$; $l \cos x = 9,5828397$
$l\omega = 6,4637259$; $l\omega = 6,4637259$
$l\omega \sin x = 6,4293412$; $l\omega \cos x = 6,0465656$
$l\frac{1}{2}\omega = 6,1626959$; $l\frac{1}{2}\omega = 6,1626959$
$l\frac{1}{2}\omega^2 \sin x = 2,5920371$; $l\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 2,2092615$

ergo:

$\omega \sin x = 0,00026874$; $\omega \cos x = 0,00011132$
$\frac{1}{2}\omega^2 \sin x = 0,00000004$; $\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0,00000001$

unde fit:

$\sin 67^\circ, 31' = 0,9239908$; $\cos 67^\circ, 31' = 0,3824147$
$\sin 67^\circ, 29' = 0,9237681$; $\cos 67^\circ, 29' = 0,3829522$

ubi ne quidem terminis $\frac{1}{6}\omega^3 \sin x$ & $\frac{1}{6}\omega^3 \cos x$ erat opus.

97. Ex seriebus quas supra invenimus:

$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$

cos

$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x + \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$
$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x + \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$
$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x - \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$

sequitur per combinationem fore:

$$\frac{\sin(x+\omega) + \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \frac{1}{720}\omega^6 \sin x + \&c. = \sin x \cos \omega$$

Et

$$\frac{\sin(x+\omega) - \sin(x-\omega)}{2} =$$

$$\omega \cos x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{120}\omega^5 \cos x - \&c. = \cos x \sin \omega$$

unde prodeunt series pro sinibus & cosinibus iam supra inventae:

$$\cos \omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4 - \frac{1}{720}\omega^6 + \&c.$$
$$\sin \omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{5040}\omega^7 + \&c.$$

quae eaedem series ex primis ponendo $x = 0$ consequuntur; cum enim sit $\cos x = 1$ & $\sin x = 0$ prima series $\sin \omega$, secunda vero $\cos \omega$ exhibebit.

98. Ponamus nunc quoque $y = \tang x$, ut sit $x = \tang(x+\omega)$, erit ob

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos x^2} + \frac{3\sin x^2}{\cos x^4} = \frac{3}{\cos x^4} - \frac{2}{\cos x^2};$$

$$\frac{d^4y}{2.4dx^4} = \frac{3\sin x}{\cos x^5} - \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\frac{d^5y}{2.4dx^5} = \frac{15}{\cos x^6} - \frac{15}{\cos x^4} + \frac{2}{\cos x^2};$$

unde sequitur fore:

$$\tang(x+\omega) = \tang x + \frac{\omega}{\cos x^2} + \frac{\omega^2 \sin x}{\cos x^3} + \frac{\omega^3}{\cos x^4} + \frac{\omega^4 \sin x}{\cos x^5} - \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^7};$$

cu-

cuius formulae ope ex data cuiusvis anguli tangente inveniri possunt tangentes angulorum proximorum. Quia vero superior series est geometrica, ea in unam summam collecta erit:

$$\text{tang}(x+\omega) = \text{tang}x + \frac{\omega+\omega^2\,\text{tang}x}{\cos x^2-\omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^3} \text{ &c. seu}$$

$$\text{tang}(x+\omega) = \frac{\sin x \cos x + \omega}{\cos x^2-\omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos x^2} - \frac{\omega^4 \sin x}{3\cos x^3} \text{ &c.}$$

quae formula in hunc finem commodius adhibetur.

99. Similes expressiones quoque pro logarithmis sinuum, cosinuum & tangentium inveniri possunt. Sit enim $y = l$ logarithmo sinus anguli x, quod ita exprimamus $y = l\sin x$, & $z = l\sin(x+\omega)$, ob $\frac{dy}{dx} = \frac{n\cos x}{\sin x}$; erit: $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-n}{\sin x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+2n\cos x}{\sin x^3}$ &c. unde fiet:

$$z = l\sin(x+\omega) = l\sin x + \frac{n\omega\cos x}{\sin x} - \frac{n\omega^2}{2\sin x^2} + \frac{n\omega^3\cos x}{3\sin x^3} \text{ &c.}$$

ubi n denotat numerum, per quem logarithmi hyperbolici multiplicari debent, ut prodeant logarithmi propositi. Sin autem sit

$$y = l\,\text{tang}\,x \quad \& \quad z = l\,\text{tang}\,(x+\omega) \quad \text{fiet:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin x \cos x} = \frac{2n}{\sin 2x}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2n\cos 2x}{(\sin 2x)^2}; \quad \text{ideoque}$$

$$l\,\text{tang}\,(x+\omega) = l\,\text{tang}\,x + \frac{2n\omega}{\sin 2x} - \frac{n\omega^2\cos 2x}{(\sin 2x)^2} \text{ &c.}$$

quarum formularum ope logarithmi sinuum & tangentium interpolari possunt.

100. Ponamus denotare y arcum cuius sinus logarithmus sit $= x$, seu ut sit $y = \text{A}.l\sin x$, & z esse arcum, cuius sinus logarithmus sit $= x+\omega$, seu $z = \text{A}.l\sin(x+\omega)$; erit $x = l\sin y$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{n\cos y}{\sin y}$, unde $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{n\cos y}$; erit:

$$\frac{ddy}{dx} = -\frac{dy}{n\cos y^2} = \frac{dx\sin y}{n^2\cos y^3}; \quad \text{ergo} \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{n^2\cos y^3}:$$

Consequenter $z = y + \frac{\omega \sin y}{n \cos y} + \frac{\omega^2 \sin y}{2n^2 \cos y^3} + \&c.$

Simili modo si logarithmus cosinus detur, expressio reperietur.

Sin autem sit

$y = \text{A} . l \tang z$ & $z = \text{A} . l \tang (x + \omega)$.

Cum sit $x = l \tang y$; fiet:

$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin y \cos y}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{n} = \frac{\sin 2y}{2n}$;

quare $\frac{ddy}{dx} = \frac{2dy \cos 2y}{2n} = \frac{dx \sin 2y \cos 2y}{2nn}$ &

$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin 2y \cos 2y}{2nn} = \frac{\sin 4y}{4nn}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin 2y . \cos 4y}{2n^3}$ &c. hinc

$z = y + \frac{\omega \sin 2y}{2n} + \frac{\omega^2 \sin 2y \cos 2y}{4nn} + \frac{\omega^3 \sin 2y . \cos 4y}{12n^3} + \&c.$

101. Quoniam usus harum expressionum in condendis tabulis logarithmorum sinuum & tangentium ex antecedentibus facile perspici potest, his diutius non immorabimur. Consideremus ergo adhuc huiusmodi valorem:

$y = e^x \sin nx$; sitque $z = e^{x+\omega} \sin n(x + \omega)$: quia est

$\frac{dy}{dx} = e^x (\sin nx + n \cos nx)$

$\frac{ddy}{dx^2} = e^x [(1 - nn) \sin nx + 2n \cos nx]$

$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x [(1 - 3nn) \sin nx + n(3 - nn) \cos nx]$

$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x [(1 - 6nn + n^4) \sin nx + n(4 - 4nn) \cos nx]$

$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x [(1 - 10nn + 5n^4) \sin nx + n(5 - 10nn + n^4) \cos nx]$

His substitutis & divisione per e^x instituta erit: $e^\omega \sin n(x + \omega) = \sin nx + \omega \sin nx + \frac{(1 - nn)}{2} \omega^2 \sin nx + n\omega \cos nx + \frac{2n\omega^3}{2} \cos nx$

$$+\frac{(1-3nn)}{6}\omega^3 \sin nx+\frac{(1-6nn+n^4)}{24}\omega^4 \sin nx+\&c.$$
$$+\frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 \cos nx+\frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 \cos nx+\&c.$$

102. Hinc plurima egregia corollaria deduci possunt; sufficiat autem nobis haec annotasse:

Si fuerit $x=0$ erit:

$$e^{n\omega}\sin n\omega = n\omega$$
$$+\frac{2n\omega^3}{2}+\frac{n(3-nn)}{6}\omega^3+\frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4+\frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}\omega^5+\&c.$$

Si sit $\omega=-x$, ob $\sin n(x+\omega)=0$; erit:

$$\text{tang } nx = \frac{nx-\frac{2n}{2}x^2+\frac{n(3-nn)}{6}x^3-\frac{n(4-4nn)}{24}x^4+\frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5}{1-x+\frac{(1-nn)}{2}x^2-\frac{(1-3nn)}{6}x^3+\frac{(1-6nn+n^4)}{24}x^4-\&c.}$$

Generaliter vero si sit $n=1$ habebitur:

$$e^x \sin(x+\omega)=\sin x(1+\omega-\tfrac{1}{3}\omega^3-\tfrac{1}{6}\omega^4-\tfrac{1}{120}\omega^5+\tfrac{1}{5040}\omega^7+\&c.)$$
$$+\omega\cos x(1+\omega+\tfrac{1}{3}\omega^2-\tfrac{1}{30}\omega^4-\tfrac{1}{90}\omega^5-\tfrac{1}{5040}\omega^6+\&c.)$$

Sin autem fit $n=0$, ob $\sin n(x+\omega)=n(x+\omega)$, & $\sin nx=nx$ atque $\cos nx=1$, si ubique per n dividatur, prodibit:

$$e^{\omega}(x+\omega)=x+\omega x+\tfrac{1}{2}\omega^2 x+\tfrac{1}{6}\omega^3 x+\tfrac{1}{24}\omega^4 x+\&c.$$
$$+\omega+\omega^2+\tfrac{1}{2}\omega^3+\tfrac{1}{6}\omega^4+\tfrac{1}{24}\omega^5+\&c.$$

cuius seriei ratio est manifesta.

CAPUT V.

INVESTIGATIO SUMMAE SERIERUM EX TERMINO GENERALI.

103.

Sit Seriei cuiusque terminus generalis $=y$, respondens indici x, ita ut y sit functio quaecunque ipsius x. Sit porro Sy summa seu terminus summatorius seriei, exprimens aggregatum omnium terminorum a primo seu alio termino fixo usque ad y inclusive. Computabimus autem summas serierum a termino primo, unde si sit $x=1$, dabit y terminum primum, atque Sy hunc y terminum primum exhibebit: sin autem ponatur $x=0$, terminus summatorius Sy in nihilum abire debet, propterea quod nulli termini summandi adsunt. Quocirca terminus summatorius Sy eiusmodi erit functio ipsius x, quae evanescat posito $x=0$.

104. Si terminus generalis y ex pluribus partibus constet, ut sit $y=p+q+r+$ &c. tum ipsa series considerari poterit tanquam conflata ex pluribus aliis seriebus, quarum termini generales sint p, q, r, &c. Hinc si singularum istarum serierum summae fuerint cognitae, simul seriei propositae summa poterit assignari; erit enim aggregatum ex summis singularum serierum. Hancobrem si sit $y=p+q+r+$&c. erit $Sy=Sp+Sq+Sr+$&c. Cum igitur supra exhibuerimus summas serierum, quarum termini generales sint quaecunque potestates ipsius x, habentes exponentes integros affirmativos, hinc cuiusque seriei, cuius terminus generalis est $ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+$&c. denotantibus α, β, γ, &c. numeros integros affirmativos, seu cuius terminus generalis est functio rationalis integra ipsius x, terminus summatorius inveniri poterit.

105. Sit in serie, cuius terminus generalis seu exponenti x respondens est $=y$, terminus hunc praecedens seu ex-

exponenti $x-1$ respondens $=v$, quoniam v oritur ex y, si loco x scribatur $x-1$; erit:

$$v=y-\frac{dy}{dx}+\frac{ddy}{2dx^2}-\frac{d^3y}{6dx^3}+\frac{d^4y}{24dx^4}-\frac{d^5y}{120dx^5}+\&c.$$

Si igitur y fuerit terminus generalis huius seriei

$$\begin{matrix}1&2&3&4&.&.&.&.&.&x-1&x\\ a&+b&+c&+d&+&.&.&.&+&v&+y\end{matrix}$$

huiusque seriei terminus indici o respondens fuerit $=A$, erit v, quatenus est functio ipsius x, terminus generalis huius seriei:

$$\begin{matrix}1&2&3&4&5&.&.&.&.&.&x\\ A&+a&+b&+c&+d&+&.&.&.&+&v\end{matrix}$$

unde si Sv denotet summam huius seriei, erit $Sv=Sy-y+A$. Sicque posito $x=o$, quia fit $Sy=o$ & $y=A$, quoque Sv evanescet.

106. Cum igitur fit $v=y-\frac{dy}{dx}+\frac{ddy}{2dx^2}-\frac{d^3y}{6dx^3}+\&c.$ erit per ante ostensa:

$$Sv=Sy-S\frac{dy}{dx}+S\frac{ddy}{2dx^2}-S\frac{d^3y}{6dx^3}+S\frac{d^4y}{24dx^4}-\&c.$$

atque ob $Sv=Sy-y+A$, erit:

$$y-A=S\frac{dy}{dx}-S\frac{ddy}{2dx^2}+S\frac{d^3y}{6dx^3}-S\frac{d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

ideoque habebitur:

$$S\frac{dy}{dx}=y-A+S\frac{ddy}{2dx^2}-S\frac{d^3y}{6dx^3}+S\frac{d^4y}{24dx^4}-\&c.$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. ex iis obtinebitur terminus summatorius seriei, cuius terminus generalis est $\frac{dy}{dx}$. Quantitas vero constans **A** ita debet esse comparata, ut fa-

facto $x=0$ terminus summatorius $S\frac{dy}{dx}$ evanescat; hacque conditione facilius determinatur, quam si diceremus, eam esse terminum indici 0 respondentem in serie, cuius terminus generalis sit $=y$.

107. Ex hoc fonte summae potestatum numerorum naturalium investigari solent. Sit enim $y=x^{n+1}$; quoniam fit $\frac{dy}{dx}=(n+1)x^n$; $\frac{ddy}{2dx^2}=\frac{(n+1)n}{1.2}x^{n-1}$;

$\frac{d^3y}{6dx^3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^{n-2}$; $\frac{d^4y}{24dx^4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}x^{n-3}$; &c.

erit his valoribus substitutis:

$$(n+1)Sx^n=x^{n+1}-A+\frac{(n+1)n}{1.2}Sx^{n-1}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Sx^{n-2}+\&c.$$

atque si utrinque per $n+1$ dividatur; erit:

$$Sx^n=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{n}{2}Sx^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2.3}Sx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}Sx^{n-3}+\&c.$$

— Const.

quae constans ita accipi debet, ut posito $x=0$, totus terminus summatorius evanescat. Ope huius ergo formulae ex iam cognitis summis potestatum inferiorum, quarum termini generales sunt x^{n-1}, x^{n-2}, &c. inveniri poterit summa potestatum superiorum termino generali x^n expressarum.

108. Si in hac expressione n denotet numerum integrum affirmativum, numerus terminorum erit finitus. Atque adeo hinc summa infinitarum potestatum si $n=0$, absolute cognoscetur; erit enim: $S.x^0=x$. Hacque cognita ad superiores progredi licebit, posito enim $n=1$; fiet:

$Sx^1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}Sx^0=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

si porro ponatur $n=2$ prodibit

$Sx^2=\frac{1}{3}x+Sx-\frac{1}{3}Sx^0=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$; deinde

$Sx^3=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}Sx^2-Sx+\frac{1}{4}Sx^0=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{5}Sx^3 - \frac{4}{5}Sx^2 + Sx - \frac{1}{5}Sx^0$ sive
$Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

Sicque porro quarumvis poteſtatum ſuperiorum ſummae ſucceſſivae ex inferioribus colligentur ; hoc autem facilius per ſequentes modos praeſtabitur.

109. Quoniam ſupra inveninus eſſe:

$$S\frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{2}S\frac{ddy}{dx^2} - \frac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{120}S\frac{d^5y}{dx^5} + \&c.$$

Si ponamus $\frac{dy}{dx} = z$; fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}$; &c.

tum vero ob $dy = zdx$, erit y quantitas, cuius differentiale eſt $= zdx$, quod hoc modo indicamus, ut ſit $y = \int zdx$. Quanquam autem haec inventio ipſius y ex dato z a calculo integrali pendet, tamen hic iam iſta forma $\int zdx$ uti poterimus, ſi quidem pro z alias ipſius x functiones non ſubſtituamus, niſi eiuſmodi, ut functio illa, cuius differentiale eſt $= zdx$, ex praecedentibus exhiberi queat. His igitur valoribus ſubſtitutis erit:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

adiiciendo eiuſmodi conſtantem, ut poſito $x = 0$ ipſa ſumma Sz evaneſcat.

110. Subſtituendo autem loco y in ſuperiori expreſſione litteram z, vel quod eodem redit differentiando iſtam aequationem erit:

$$S\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

ſin autem loco y ponatur $\frac{dz}{dx}$; erit:

$$S\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \&c.$$

Similique modo ſi pro y ſucceſſive ponantur valores

$\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. reperietur:

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \tfrac{1}{14}S\frac{d^6z}{dx^6} - \&c.$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} + \tfrac{1}{14}S\frac{d^7z}{dx^7} - \&c.$$

ficque porro in infinitum.

111. Si nunc ifti valores pro $S\frac{dz}{dx}$; $S\frac{ddz}{dx^2}$; $S\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. fucceffive fubftituantur in expreffione:

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{14}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

invenietur expreffio pro Sz, quae conftabit ex his terminis $\int z dx$; z; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. quorum coefficientes facilius fequenti modo inveftigabuntur. Ponatur

$$Sz = \int z dz + \alpha z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\gamma ddz}{dx^2} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4z}{dx^4} + \&c.$$

atque pro his terminis fui valores fubftituantur, quos obtinent ex praecedentibus feriebus, ex quibus eft:

$$\int z dx = Sz - \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\alpha z = +\alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\beta dz}{dx} = \beta S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

qui

qui valores additi, cum producere debeant Sz, coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ex sequentibus aequationibus definientur:

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

112. Ex his ergo aequationibus successive valores omnium litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. definiri poterunt, reperietur autem:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

&c.

sicque ulterius progrediendo reperientur continuo termini alterni evanescentes. Litterae ergo ordine tertia, quinta, septima,

ma, &c. omnesque impares erunt $=0$, excepta prima, quo ipso haec valorum series contra legem continuitatis impingere videtur. Quamobrem eo magis necesse est, ut rigide demonstretur, omnes terminos impares praeter primum necessario evanescere.

113. Quoniam singulae litterae secundum legem constantem ex praecedentibus determinantur, eae seriem recurrentem inter se constituent. Ad quam explicandam concipiatur ista series: $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 +$ &c. cuius valor sit $= V$; atque manifestum est hanc seriem recurrentem oriri ex evolutione huius fractionis:

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \text{ &c.}}$$

atque si ista fractio alio modo in seriem infinitam secundum potestates ipsius u progredientem resolvi queat, necesse est, ut semper eadem series:

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ &c.}$$

resultet: hocque modo alia lex, qua isti iidem valores α, β, γ, δ, &c. determinantur, eruetur.

114. Quoniam, si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus unitati aequatur, erit:

$$e^{-u} = 1 - u + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 - \tfrac{1}{120}u^5 + \text{ &c.}$$

erit: $\dfrac{1 - e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \text{ &c.}$

ideoque $V = \dfrac{u}{1 - e^{-u}}$. Nunc extinguatur ex serie secundus terminus $\alpha u = \frac{1}{2}u$, ut sit:

$V - \frac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 +$ &c. erit:

$V - \frac{1}{2}u = \dfrac{\frac{1}{2}u\left(1 + e^{-u}\right)}{1 - e^{-u}}$. Multiplicentur numerator ac denominator per $e^{\frac{1}{2}u}$, eritque $V - \frac{1}{2}u = \dfrac{u\left(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u}\right)}{2\left(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}\right)}$,

& quantitatibus $e^{\frac{1}{2}u}$ & $e^{-\frac{1}{2}u}$ in series conversis fiet

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2.4.6} + \frac{u^4}{2.4.6.8.10} + \&c.\right)}$$

sive

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} + \&c.}$$

115. Cum igitur in hac fractione potestates impares prorsus desint, in eius quoque evolutione potestates impares omnino nullae ingredientur; quare cum $V - \frac{1}{2}u$ aequetur isti seriei:

$$1 + \beta u^2 + \gamma u^4 + \delta u^6 + \varepsilon u^8 + \zeta u^{10} + \&c.$$

coefficientes imparium potestatum γ, ε, η, ι, &c. omnes evanescent. Sicque ratio manifesta est, cur in serie:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \&c.$$

termini ordine pares omnes praeter secundum sint $= 0$, neque tamen lex continuitatis vim patiatur. Erit ergo

$$V = 1 + \tfrac{1}{2}u + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \varkappa u^{10} + \&c.$$

litterisque β, δ, ζ, θ, $\varkappa$, &c. per evolutionem superioris fractionis determinatis, obtinebimus terminum summatorium Sz seriei, cuius terminus generalis est $= z$, indici x respondens, hoc modo expressum:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\zeta d^5 z}{dx^5} + \frac{\theta d^7 z}{dx^7} + \&c.$$

116. Quia series $1 + \beta u^2 + \gamma u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$ oritur ex evolutione huius fractionis:

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \&c.}$$

lit-

litterae $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{h}$, &c. hanc legem tenebunt, ut sit:

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\mathfrak{b}}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2.4.6...12} - \frac{\mathfrak{d}}{4.6} - \frac{\mathfrak{b}}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6...14}$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2.4...16} - \frac{\mathfrak{z}}{4.6} - \frac{\mathfrak{d}}{4.6.8.10} - \frac{\mathfrak{b}}{4.6...14} - \frac{1}{4.6...18}.$$

Hi autem valores alternative fiunt affirmativi & negativi.

117. Si igitur harum litterarum alternae capiantur negative, ita ut sit:

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z - \frac{\mathfrak{b}dz}{dx} + \frac{\mathfrak{d}d^3z}{dx^3} - \frac{\mathfrak{z}d^5z}{dx^5} + \frac{\mathfrak{h}d^7z}{dx^7} - \&c.$$

litterae $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{h}$, &c. definientur ex hac fractione:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \&c.}$$

eam evolvendo in seriem:

$$1 + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{d}u^4 + \mathfrak{z}u^6 + \mathfrak{h}u^8 + \&c.$$ quocirca erit;

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{b}}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{d}}{4.6} - \frac{\mathfrak{b}}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6...14} - \frac{1}{2.4...12}$$

&c.

nunc autem omnes termini fient negativi.

118. Ponamus ergo $\mathfrak{b} = -A$; $\mathfrak{d} = -B$; $\mathfrak{z} = -C$; &c. ut sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{A\,dz}{dx} - \frac{B\,d^3z}{dx^3} + \frac{C\,d^5z}{dx^5} - \frac{D\,d^7z}{dx^7} + \&c.$$

atque ad litteras A, B, C, D, &c. definiendas consideretur haec series:

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \&c.$$

quae oritur ex evolutione huius fractionis:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \&c.}$$

vel consideretur ista series:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c. = s$$

quae oritur ex evolutione huius fractionis:

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6...14} + \&c.}$$

Cum autem sit:

$$\cos\tfrac{1}{2}u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4...14} + \&c.$$

sequitur fore: $s = \dfrac{\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u.$

Quare si cotangens arcus $\frac{1}{2}u$ in seriem convertatur, cuius termini secundum potestates ipsius u procedant, ex ea cognoscentur valores litterarum A, B, C, D, E, &c.

119. Cum igitur sit $s = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u$; erit $\frac{1}{2}u =$ A cot 2s, & differentiando erit $\frac{1}{2}du = \dfrac{-2\,ds}{1+4s^2}$ seu

$$\frac{4ds}{}$$

$4ds + du + 4ssdu = 0$, sive $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$.

Quia autem est $s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - \&c.$ erit

$$\frac{4ds}{du} = -\frac{4}{uu} - 4A - 3.4Bu^2 - 5.4Cu^4 - 7.4Du^6 - \&c.$$

$$1 = \quad 1$$

$$4ss = \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \&c.$$

$$+ 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \&c.$$

$$+ 4BBu^6 + \&c.$$

perductis iis terminis homogeneis ad cyphram fiet:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

&c.

Ex quibus formulis iam manifesto liquet, singulos hos valores esse affirmativos.

120. Quoniam vero denominatores horum valorum fiunt vehementer magni, calculumque non mediocriter impediunt; loco litterarum A, B, C, D, &c. has novas introducamus:

$$A = \frac{\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{\varepsilon}{1.2.3.4.5}$$

$$C = \frac{\zeta}{1.2.3....7}$$

$$D = \frac{\vartheta}{1.2.3.....9}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{1.2.3.....11} \quad \&c.$$

Atque reperietur fore:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\alpha^2$$

$$\gamma = 2.\frac{3}{3}\alpha\varepsilon$$

$$\vartheta = 2.\frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8.7}{4.5}\varepsilon^2$$

$$\varepsilon = 2.\frac{5}{3}\alpha\vartheta + 2.\frac{10.9.8}{1....5}\varepsilon\gamma$$

$$\zeta = 2.\frac{12}{1.2.3.}\alpha\varepsilon + 2.\frac{12.11.10}{1.....5}\varepsilon\vartheta + \frac{12.11.10.9.8}{1.....7}\gamma\gamma$$

$$\eta = 2.\frac{14}{1.2.3}\alpha\zeta + 2.\frac{14.13.12}{1.....5}\varepsilon\varepsilon + 2.\frac{14.13.12.11.10}{1.....7}\gamma\vartheta$$

&c.

121. Commodius autem utemur his formulis:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon = \frac{4}{3}\cdot\frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3}\cdot\alpha\epsilon$$

$$\delta = \frac{8}{3}\cdot\alpha\gamma + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{\epsilon\epsilon}{2}$$

$$\iota = \frac{10}{3}\cdot\alpha\delta + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\epsilon\gamma$$

$$\zeta = \frac{12}{3}\cdot\alpha\iota + \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\epsilon\delta + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3}\cdot\alpha\zeta + \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\epsilon\iota + \frac{14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 10}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 7}\cdot\gamma\delta$$

$$\theta = \frac{16}{3}\cdot\alpha\eta + \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\epsilon\zeta + \frac{16\cdot 15\cdot\ldots\cdot 12}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 7}\cdot\gamma\iota + \frac{16\cdot 15\ldots 10}{3\cdot 4\cdots 9}\cdot\frac{\delta\delta}{2}$$

&c.

Ex hac igitur lege, secundum quam calculus non difficulter instituitur, si inventi fuerint valores litterarum α, β, γ, δ, &c. tum feriei cuiuscunque; cuius terminus generalis seu indici x conveniens fuerit $= z$, terminus summatorius ita exprimetur, ut sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\alpha dz}{1.2.3\,dx} - \frac{\epsilon d^3 z}{1.2.3.4.5\,dx^3} + \frac{\gamma d^5 z}{1.2\ldots 7\,dx^5}$$

$$- \frac{\delta d^7 z}{1.2\ldots 9\,dx^7} + \frac{\varepsilon d^9 z}{1.2\ldots 11\,dx^9} - \frac{\zeta d^{11} z}{1.2\ldots 13\,dx^{11}} + \&c.$$

istae autem litterae α, β, γ, δ, &c. sequentes valores habere inventae sunt:

$$\alpha =$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $1.2\,a = 1$

$\beta = \frac{1}{6}$ $1.2.3\,\beta = 1$

$\gamma = \frac{1}{6}$ $1.2.3.4\gamma = 4$

$\delta = \frac{3}{10}$ $1.2.3.4.5\,\delta = 36$

$\varepsilon = \frac{5}{6}$ $1.2.3\ldots 6\varepsilon = 600$

$\zeta = \frac{691}{210}$ $1.2.3\ldots 7\zeta = 24.691$

$\eta = \frac{35}{2}$ $1.2.3\ldots 8\eta = 20160.35$

$\theta = \frac{3617}{30}$ $1.2.3\ldots 9\theta = 12096.3617$

$\iota = \frac{43867}{42}$ $1.2.3\ldots 10\iota = 86400.43867$

$\kappa = \frac{1222277}{110}$ $1.2.3\ldots 11\kappa = 362880.1222277$

$\lambda = \frac{854513}{6}$ $1.2.3\ldots 12\lambda = 79833600.854513$

$\mu = \frac{1181820455}{546}$ $1.2.3\ldots 13\mu = 11404800.1181820455$

$\nu = \frac{76977927}{2}$ $1.2.3\ldots 14\nu = 435891456000.76977927$

$\xi = \frac{2374046 1029}{30}$ $1.2.3\ldots 15\xi = 435891456000.2374046 1029$

$\pi = \frac{861584127600 5}{462}$ $1.2.3\ldots 16\pi = 45287424000.861584127600 5$

&c.

122. Numeri isti per universam serierum doctrinam amplissimum habent usum. Primum enim ex his numeris formari possunt ultimi termini in summis potestatum parium, quos non aeque ac reliquos terminos ex summis praecedentium reperiri posse supra annotavimus. In potestatibus enim paribus postremi summarum termini sunt x per certos numeros multiplicati; qui numeri pro potestatibus II; IV; VI; VIII; &c. sunt $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}$, &c. signis alternantibus affecti. Oriuntur autem hi numeri si valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. supra inventi respective dividantur per numeros impares 3, 5, 7, &c. unde isti numeri, qui ab Inventore *Iacobo Bernoullio* vocari solent Bernoulliani erunt:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$$\frac{\theta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$

$$\frac{\varkappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283.617}{330}$$

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11.131.593}{2.3.23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M}$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{6} = \mathfrak{N} = \frac{13.657931}{6}$$

$$\frac{\xi}{29} = \frac{2374946 1029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{86158412 76005}{14322} = \mathfrak{P}$$

&c.

123. Isti igitur numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. immediate ex sequentibus aequationibus inveniri poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{43}{1.2}.\frac{1}{5}\mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6.5}{1.2}.\frac{2}{7}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8.7}{1.2}.\frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{1}{9}\mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10.9}{1.2}.\frac{2}{11}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.\frac{2}{11}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2}.\frac{2}{13}\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.\frac{2}{13}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1}{13}\mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14.13}{1.2}.\frac{2}{15}\mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4}.\frac{2}{15}\mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6}.\frac{2}{15}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

&c.

qua-

quarum aequationum lex per se est manifesta, si tantum noterur, ubi quadratum cuiuspiam litterae occurrit, eius coefficientem duplo esse minorem, quam secundum regulam esse debere videatur. Revera autem termini, qui continent producta ex disparibus litteris, bis occurrere censendi sunt, erit enim verbi gratia:

$$13\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2}\mathfrak{AE} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}\mathfrak{BD} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\mathfrak{CC} +$$
$$\frac{12.11.10\ \ldots\ 5}{1.2.3\ \ldots\ 8}\mathfrak{DB} + \frac{12.11.10\ \ldots\ 3}{1.2.3.\ \ldots\ 10}\mathfrak{EA} /$$

124. Deinde vero etiam iidem numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ingrediuntur in expressiones summarum serierum fractionum in hac forma generali:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \&c.$$

quoties n est numerus par affirmativus; contentarum. Has enim summas in introductione per potestates semiperipheriae circuli π radio existente $= 1$ expressas dedimus, atque in harum potestatum coefficientibus isti ipsi numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ingredi deprehenduntur. Quo autem haec convenientia non casu evenire, sed necessario locum habere intelligatur, has easdem summas singulari modo investigemus, quo lex summarum illarum facilius patebit. Quoniam supra invenimus esse:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

binis terminis coniungendis habebimus:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} - \&c.$$

unde colligimus fore:

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn}\cot.\frac{m}{n}\pi$$

Statuamus nunc $n=1$, & pro m ponamus u; ut fit:

$$\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{4-u^2}+\frac{1}{9-u^2}+\frac{1}{16-u^2}+\&c.=\frac{1}{2uu}-\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Resolvantur singulae istae fractiones in series:

$$\frac{1}{1-u^2}=1+u^2+u^4+u^6+u^8+\&c.$$

$$\frac{1}{4-u^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{u^2}{2^4}+\frac{u^4}{2^6}+\frac{u^6}{2^8}+\frac{u^8}{2^{10}}+\&c.$$

$$\frac{1}{9-u^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{u^2}{3^4}+\frac{u^4}{3^6}+\frac{u^6}{3^8}+\frac{u^8}{3^{10}}+\&c.$$

$$\frac{1}{16-u^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{u^2}{4^4}+\frac{u^4}{4^6}+\frac{u^6}{4^8}+\frac{u^8}{4^{10}}+\&c.$$

&c.

125. Quod si ergo ponatur:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.=a$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.=b$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\&c.=c$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\&c.=d$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\&c.=e$$

&c.

superior series transmutabitur in hanc:

$$a+bu^2+cu^4+du^6+eu^8+fu^{10}+\&c.=\frac{1}{2uu}-\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Cum igitur in §. 118. litterae A, B, C, D, &c. ita comparatae sint inventae, ut posito:

$s=$

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

fit $s = \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}u$, erit posito πu loco $\frac{1}{2}u$ seu $2\pi u$ loco u

$$\tfrac{1}{2}\cot \pi u = \frac{1}{2\pi u} - 2A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - 2^7 D\pi^7 u^7 - \&c.$$

unde per $\frac{\pi}{u}$ multiplicando erit:

$$\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3 B\pi^4 u^2 - 2^5 C\pi^6 u^4 - \&c.$$

hincque sequitur fore:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + 2^7 D\pi^8 u^6 + \&c.$$

Quia igitur modo invenimus esse:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \&c.$$

necesse est ut sit:

$$\mathfrak{a} = 2A\pi^2 = \frac{2\pi}{1.2.3}\cdot\pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\pi^2$$

$$\mathfrak{b} = 2^3 B\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4.5}\cdot\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\cdot\pi^4$$

$$\mathfrak{c} = 2^5 C\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots7}\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots\ldots6}\pi^6$$

$$\mathfrak{d} = 2^7 D\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2.3\ldots9}\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots\ldots8}\pi^8$$

$$\mathfrak{e} = 2^9 E\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2.3\ldots11}\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots.10}\pi^{10}$$

$$\mathfrak{f} = 2^{11} F\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2.3\ldots13}\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots.12}\pi^{11} \quad \&c.$$

126. Ex hoc ergo tam facili ratiocinio non solum omnes series potestatum reciprocarum, quas §. praeced. exhibui-

huimus, expedite summantur; sed simul quoque perspicitur, quemadmodum istae summae ex cognitis valoribus litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. vel etiam ex numeris Bernoullianis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. formentur. Quare cum istorum numerorum quindecim §. 122. definiverimus, ex iis summae omnium potestatum parium usque ad summam huius seriei inclusive assignari poterunt:

$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} +$ &c. erit enim huius seriei summa $= \frac{2^{30}\pi^{30}}{1.2.3...31} = \frac{2^{30}\mathfrak{B}}{1.2.....30}\pi^{30}$.

Atque si quis voluerit has summas ulterius determinare, id continuandis numeris α, β, γ, &c. vel his $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, &c. facillime praestabitur.

127. Origo ergo horum numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. vel inde formatorum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. potissimum debetur evolutioni cotangentis cuiusvis anguli in seriem infinitam. Cum enim sit

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{&c.}$$

erit:

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \text{&c.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u,$$

si igitur loco coefficientium A, B, C, D, &c. valores ipsorum substituantur, reperietur:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\beta u^4}{1.2...5} + \frac{\gamma u^6}{1.2....7} + \frac{\delta u^8}{1.2...9} + \text{&c.} = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

atque numeros Bernoullianos adhibendo erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2...6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2....8} + \text{&c.} = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

ex quibus seriebus per differentiationem innumerabiles aliae deduci possunt, sicque infinitae series summari, in quas isti numeri notatu tantopere digni ingrediuntur.

128. Summamus aequationem priorem, quam per u multiplicemus, ut fit:

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\beta u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^7}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^9}{1.2\ldots9} + \&c. = u - \frac{uu}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

quae differentiata ac per du divisa dat:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2} + \frac{\beta u^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots6} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots8} + \&c. = 1 - u\cot\tfrac{1}{2}u + \frac{uu}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

&, si denuo differentietur erit:

$$\frac{\alpha u}{1} + \frac{\beta u^3}{1.2.3} + \frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5} + \&c. = -\cot\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{(\sin\frac{1}{2}u)^2} - \frac{uu\cos\frac{1}{2}u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^3}$$

Sin autem altera aequatio differentietur erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1} + \frac{\mathfrak{B}u^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\mathfrak{D}u^7}{1.2\ldots7} = -\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

Ex his ergo si ponatur $u = \pi$, ob $\cot\frac{1}{2}\pi = 0$, & $\sin\frac{1}{2}u = 1$, sequuntur istae summationes:

$$1 = \frac{\alpha\pi^3}{1.2.3} + \frac{\beta\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\gamma\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{\delta\pi^9}{1.2.3\ldots9} + \&c.$$

$$1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\alpha\pi^2}{1.2} + \frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots8} + \&c.$$

$$\pi = \frac{\alpha\pi}{1} + \frac{\beta\pi^3}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \&c.$$

seu $$1 = \alpha + \frac{\beta\pi^2}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \&c.$$

a qua si prima subtrahatur remanebit:

$$\alpha = \frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1.2.3} + \frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \&c.$$

Tum vero erit:

$$1 = \frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1.2.3\ldots8} + \&c.$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}\pi}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \&c.$$

seu $\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1.2.3....7} + \&c.$

129. Ex tabula valorum numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. quam supra §. 121. exhibuimus, patet eos primum decrescere tum vero iterum crescere, & quidem in infinitum. Operae igitur pretium erit investigare, in quanam ratione hi numeri, postquam iam vehementer longe fuerint continuati, ulterius progredi pergant. Sit igitur φ numerus quicunque huius seriei numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. longissime ab initio remotus, & sit ψ numerorum sequens. Quoniam per hos numeros summae potestatum reciprocarum definiuntur, sit $2n$ exponens potestatis, in cuius summa numerus φ ingreditur, erit $2n+2$ exponens potestatis numero ψ respondens, atque numerus n iam erit vehementer magnus. Hinc ex §. 125. habebitur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{2^{2n-1}\varphi}{1.2.3...(2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \&c. = \frac{2^{2n+1}\psi}{1.2.3...(2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Quod si ergo haec per istam dividatur, erit:

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \&c.}{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \&c.} = \frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)}\frac{\pi^2}{\varphi}$$

Quia vero n est numerus vehementer magnus, ob seriem utramque proxime $= 1$, erit:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2} = \frac{nn}{\pi\pi}$$

Cum igitur n designet, quotus sit numerus φ a primo α computatus, se habebit hic numerus φ ad suum sequentem ψ ut π^2 ad n^2, quae ratio, si n fuerit numerus infinitus, veritati penitus sit consentanea. Quoniam est fere $n\pi = 10$,

si

si ponatur $n = 100$; erit terminus centesimus circiter millies minor suo sequente. Constituunt ergo numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. pariter ac Bernoulliani $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. seriem maxime divergentem, quae etiam magis increscat, quam ulla series geometrica terminis crescentibus procedens.

130. Inventis ergo his valoribus numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. seu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. si proponatur series, cuius terminus generalis z fuerit functio quaecunque ipsius indicis x, terminus summatorius Sz huius seriei sequenti modo exprimetur, ut sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1.2\,dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3z}{1.2.3.4\,dx^3}$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5z}{1.2.3\ldots6\,dx^5} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^7z}{1.2.3\ldots8\,dx^7}$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1.2.3\ldots10\,dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11}z}{1.2.3\ldots12\,dx^{11}}$$
$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13}z}{1.2.3\ldots14\,dx^{13}} - \frac{3617}{510}\cdot\frac{d^{15}z}{1.2.3\ldots16\,dx^{15}}$$
$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17}z}{1.2.3\ldots18\,dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot\frac{d^{19}z}{1.2.3\ldots20\,dx^{19}}$$
$$+ \frac{854513}{138}\cdot\frac{d^{21}z}{1.2.3\ldots22\,dx^{21}} - \frac{236364091}{2730}\cdot\frac{d^{23}z}{1.2.3\ldots24\,dx^{23}}$$
$$+ \frac{8553103}{6}\cdot\frac{d^{25}z}{1.2.3\ldots26\,dx^{25}} - \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{d^{27}z}{1.2.3\ldots28\,dx^{27}}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{d^{29}z}{1.2.3\ldots30\,dx^{29}} - \text{&c.}$$

Si igitur innotuerit integrale $\int z\,dx$, seu quantitas illa cuius differentiale fit $= z\,dx$, terminus summatorius ope continuae differentiationis invenietur. Perpetuo autem notandum est ad hanc expressionem semper eiusmodi constantem addi oportere, ut summa fiat $= 0$, si index x ponatur in nihilum abire:

131. Si igitur z fuerit functio rationalis integra ipsius

n, quia eius differentialia tandem evanescunt, terminus summatorius per expressionem finitam exprimetur; id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei:

$$1^1 + 9^2 + 25^3 + 49^4 + 81^5 + \ldots + (2x-1)^x$$

Quia hic est $z = (2x-1)^x = 4xx - 4x + 1$;

erit $\int z\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$,

ex huius enim differentiatione oritur:

$$4xx\,dx - 4x\,dx + dx = z\,dx.$$

Deinde vero per differentiationem erit:

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0 \quad \&c.$$

Hinc erit terminus summatorius quaesitus: $= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2xx - 2x + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \pm$ Const. qua constante tolli debent termini $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, unde erit

$$S(2x-1)^x = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1).$$

Sic erit posito $x = 4$ summa 4 primorum terminorum

$$1 + 9 + 25 + 49 = \frac{4}{3} \cdot 7 \cdot 9 = 84.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei:

$$1^1 + 27^2 + 125^3 + 343^4 + \ldots + (2x-1)^x$$

Quia est $z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; erit

$\int z\,dx$

$\int z dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$; $\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6$;

$\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 48$; sequentia evanescunt.

Quare erit $S(2x-1)^3 = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$
$+ 4x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{1}{2}$
$+ 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
$- \frac{1}{10}$

hoc est $S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1)$. Sic erit posito $x = 4$ $1 + 27 + 125 + 343 = 16.31 = 496$.

132. Ex hac inventa generali expressione pro termino summatorio sponte sequitur ille terminus summatorius, quem superiori parte pro potestatibus numerorum naturalium dedimus, cuiusque demonstrationem ibi tradere non licuerat. Quod si enim ponamus $z = x^n$, erit utique

$\int z dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$; differentialia vero ita se habebunt:

$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$

$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$

$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)n-3)(n-4)x^{n-5}$

$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \ldots \ldots (n-6)x^{n-7}$ &c.

Ex his ergo deducetur sequens terminus summatorius respondens termino generali x^n; scilicet

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1}$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}x^{n-3}$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5.6}x^{n-5}$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{2.3.\ldots.8}x^{n-7}$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{2.3.\ldots.10}x^{n-9}$$
$$- \frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{2.3.\ldots.12}x^{n-11}$$
$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{2.3.\ldots.14}x^{n-13}$$
$$- \frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2.3.\ldots.16}x^{n-15}$$
$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-16)}{2.3.\ldots.18}x^{n-17}$$
$$- \frac{174611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-18)}{2.3.\ldots.20}x^{n-19}$$
$$+ \frac{854513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-20)}{2.3.\ldots.22}x^{n-21}$$
$$- \frac{236364091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)}{2.3.\ldots.24}x^{n-23}$$
$$+ \frac{8553103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-24)}{2.3.\ldots.26}x^{n-25}$$
$$- \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-26)}{2.3.\ldots.28}x^{n-27}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-28)}{2.3.\ldots.30}x^{n-29}\ \&c.$$

quae

quae expreſſio non differt ab ea, quam ſupra dedimus, niſi quod hic numeros Bernoullianos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. introduximus, cum ſupra uſi eſſemus numeris α, β, γ, δ, &c. interim tamen conſenſus ſponte elucet. Hinc ergo terminos ſummatorios omnium poteſtatum uſque ad poteſtatem trigeſimam incluſive exhibere licuit; quae inveſtigatio, ſi alia via fuiſſet ſuſcepta, ſine longiſſimis & taedioſiſſimis calculis abſolvi non potuiſſet.

133. Iam ſupra §. 59. ſimilem fere expreſſionem pro termino ſummatorio dedimus ex termino generali definiendo. Ea enim pariter ſecundum differentialia termini generalis procedebat; ab iſta autem in hoc potiſſimum erat diverſa, quod illa non integrale $\int z dx$ requirebat, ſingula vero termini generalis differentialia per certas ipſius x functiones habebat multiplicata. Eandem igitur expreſſionem ſequenti modo ad naturam ſerierum magis accommodato denuo eliciamus, ex quo ſimul lex clarius patebit, ſecundum quam coefficientes illi differentialium progrediuntur. Sit igitur ſeriei terminus generalis z, functio quaecunque ipſius indicis x, terminus vero ſummatorius quaeſitus ſit s: qui quoniam uti vidimus eiuſmodi erit functio ipſius x, ut evaneſcat poſito $x = 0$, erit per ea, quae ſupra de natura huiuſmodi functionum demonſtravimus:

$$s - \frac{x\,ds}{1\,dx} + \frac{x \cdot dds}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3 d^3 s}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4 d^4 s}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{&c.} = 0.$$

134. Quia s denotat ſummam omnium terminorum ſeriei a primo uſque ad ultimum z, perſpicuum eſt ſi in s loco x ponatur $x - 1$, tum priorem ſummam ultimo termino z mulctari: erit ſcilicet

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3 s}{6dx^3} + \frac{d^4 s}{24dx^4} - \text{&c.}$$

ideoque $$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3 s}{6dx^3} - \frac{d^4 s}{24dx^4} + \text{&c.}$$

quae aequatio modum suppeditat ex dato termino summatorio s definiendi terminum generalem, quod quidem per se est facillimum. Ex idonea autem combinatione huius aequationis cum ea, quam §. praeced. invenimus, valor ipsius s per x & z determinari poterit. Ponamus in hunc finem esse:

$$s - Az + \frac{Bdz}{dx} - \frac{Cddz}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \&c. = 0.$$

ubi A, B, C, D, &c. denotent coefficientes necessario sive constantes sive variabiles: nam cum sit

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{ddx}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} - \&c.$$

si hinc valores pro z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ &c. in superiori aequatione substituantur, prodibit:

$$\begin{array}{rcl}
s & = & s \\
-Az & = & -\frac{Ads}{dx} + \frac{Addx}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \&c. \\
+\frac{Bdz}{dx} & = & +\frac{Bddx}{dx^2} - \frac{Bd^3s}{2dx^3} + \frac{Bd^4s}{6dx^4} - \frac{Bd^5s}{24dx^5} + \&c. \\
-\frac{Cddz}{dx^2} & = & -\frac{Cd^3s}{dx^3} + \frac{Cd^4s}{2dx^4} - \frac{Cd^5s}{6dx^5} + \&c. \\
+\frac{Dd^3z}{dx^3} & = & +\frac{Dd^4s}{dx^4} - \frac{Dd^5s}{2dx^5} + \&c. \\
-\frac{Ed^4z}{dx^4} & = & -\frac{Ed^5s}{dx^5} + \&c. \\
 & & \&c.
\end{array}$$

quae igitur series iunctim sumtae aequales erunt nihilo.

135. Cum ergo ante invenimus esse:

$$0 = s - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2ddx}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \frac{x^5d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

si

si superior aequatio huic aequalis statuatur, prodibunt sequentes litterarum A, B, C, D, &c. denominationes:

$$A = \alpha$$
$$B = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{A}{2}$$
$$C = \frac{\alpha^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6}$$
$$D = \frac{\alpha^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24}$$
$$E = \frac{\alpha^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \quad \&c.$$

His igitur litterarum A, B, C, D, &c. valoribus inventis, ex termino generali z terminus summatorius $s = Sz$ ita determinabitur, ut sit:

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \&c.$$

136. Cum autem fiat:

$$A = \alpha$$
$$B = \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$C = \tfrac{1}{6}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{12}\alpha$$
$$D = \tfrac{1}{24}\alpha^4 - \tfrac{1}{12}\alpha^3 + \tfrac{1}{24}\alpha\alpha \quad \&c.$$

patet hos coefficientes esse eosdem, quos supra §. 59. habuimus, unde ista termini summatorii expressio eadem est, quam ibi invenimus; eritque propterea:

$$A = S\alpha^0 = S1$$
$$B = \tfrac{1}{1}S\alpha^1 - \tfrac{1}{1}\alpha$$
$$C = \tfrac{1}{2}S\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$D = \tfrac{1}{3}S\alpha^3 - \tfrac{1}{3}\alpha^3$$
$$E = \tfrac{1}{4}S\alpha^4 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 \quad \&c.$$

Hinc ergo erit:

$$Sz = \alpha z - \frac{dz}{dx}S\alpha + \frac{ddz}{2dx^2}S\alpha^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}S\alpha^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}S\alpha^4 - \&c.$$

+

$$+\frac{xdz}{dx}-\frac{x^2ddz}{2dx^2}+\frac{x^3d^3z}{6dx^3}-\frac{x^4d^4z}{24dx^4}+\text{&c.}$$

Quodsi autem in termino generali z ponatur $x=0$, prodibit terminus indici $=0$ respondens; qui si ponatur $=a$, erit: $a=z-\frac{xdz}{dx}+\frac{x^2ddz}{2dx^2}-\frac{x^3d^3z}{6dx^3}+$ &c. ideoque

$$\frac{xdz}{dx}-\frac{x^2ddz}{2dx^2}+\frac{x^3d^3z}{6dx^3}-\frac{x^4d^4z}{24dx^4}+\text{&c.}=z-a,$$

quo valore substituto habebitur:

$$Sz=(x+1)z-a-\frac{dz}{dx}Sx+\frac{ddz}{2dx^2}Sx^2-\frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3+\frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4-\text{&c.}$$

Cognitis ergo summis potestatum, hinc pro quovis termino generali ei conveniens terminus summatorius exhiberi potest.

137. Quoniam ergo geminam invenimus expressionem termini summatorii Sz pro termino generali z, earumque altera formulam integralem $\int zdx$ continet, si istae duae expressiones sibi aequales ponantur, obtinebitur valor ipsius $\int zdx$ per seriem expressus. Cum enim sit:

$$\int zdx+\tfrac{1}{2}z+\frac{\mathfrak{A}dz}{1.2dx}-\frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3}+\frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5}-\text{&c.}$$
$$=(x+1)z-a-\frac{dz}{1dx}Sx+\frac{ddz}{1.2dx^2}Sx^2-\frac{d^3z}{1.2.3dx^3}Sx^3+\text{&c.}$$

erit:

$$\int zdx=(x+\tfrac{1}{2})z-a-\frac{dz}{dx}(Sx+\tfrac{1}{2}\mathfrak{A})+\frac{ddz}{2dx^2}Sx^2-\frac{d^3z}{6dx^3}(Sx^3-\tfrac{1}{4}\mathfrak{B})$$
$$+\frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4-\frac{d^5z}{120dx^5}(Sx^5+\tfrac{1}{6}\mathfrak{C})+\frac{d^6z}{720dx^6}Sx^6$$
$$-\frac{d^7z}{5040dx^7}(Sx^7-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D})+\text{&c.}$$

ubi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. denotant numeros Bernoullianos supra §. 122. exhibitos.

Sit

Sit v. gr. $z = xx$, fiet $\frac{dz}{dx} = 2x$; & $\frac{ddz}{2dx^2} = 1$, hinc erit:

$\int xx dx = (x + \frac{1}{2})xx - 2x(\frac{1}{3}xx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}) + 1(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x)$

seu $\int xx dx = \frac{1}{3}x^3$; dat autem $\frac{1}{3}x^3$ differentiatum utique $xxdx$.

138. Nova ergo hinc patet via ad terminos summatorios ſerierum poteſtatum inveniendos; quoniam enim ex coefficientibus ante aſſumtis A, B, C, D, &c. hi termini ſummatorii facillime formantur, horum autem coefficientium quilibet ex praecedentibus conſtatur; ſi in formulis §. 135. datis loco iſtarum litterarum valores in §. 136. traditi ſubſtituantur, erit:

$Sx^1 - x = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$

$Sx^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(Sx - x)$

$Sx^3 - x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3}(Sx^1 - x^1)$

$Sx^4 - x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{6}(Sx^3 - x^3) - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}(Sx - x)$

&c.

Hinc ergo ſummae poteſtatum ſuperiorum ex ſummis inferiorum formari poterunt.

139. Quod ſi vero legem, qua coefficientes A, B, C, D, &c. ſupra §. 135. progredi inventi ſunt, attentius intueamur, eos ſeriem recurrentem conſtituere deprehendemus. Si enim evolvamus hanc fractionem:

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \&c.}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \&c.}$$

ſecundum poteſtates ipſius u, hancque ſeriem reſultare ſumamus.

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \&c.$$

erit uti ante invenimus $A = x$; $B = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}A$; &c. ſicque inventa hac ſerie, obtinebuntur termini ſummatorii ſerierum poteſtatum. Illa autem fractio, ex cuius evolutione iſta ſeries naſcitur, tranſit in hac formam: $\frac{e^{xu} - 1}{e^u - 1}$, quae ſi x fue-

rit

rit numerus integer affirmativus, abit in $1 + e^{u} + e^{2u} + e^{3u} + \ldots + e^{(x-1)u}$; cum ergo sit:

$$1 = 1$$

$$e^{u} = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.2.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ideoque erit

$$A = x$$
$$B = S(x-1) = Sx - x$$
$$C = \tfrac{1}{2}S(x-1)^2 = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}S(x-1)^3 = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{4}x^3$$
$$\&c.$$

Unde nexus horum coefficientium cum summis potestatum, ante iam observatus, penitus confirmatur ac demonstratur.

6978

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

VOL. II.

CAPUT VI.

DE SUMMATIONE PROGRESSIONUM PER SERIES INFINITAS.

140.

Expressio generalis, quam in Capite praecedente pro termino summatorio cuiusque seriei, cuius terminus generalis seu indici x respondens est $= z$, invenimus:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{&c.}$$

proprie inservit seriebus summandis, quarum termini generales sunt functiones quaecunque rationales integrae indicis x, quoniam his casibus ad differentialia tandem evanescentia pervenitur. Sin autem z non fuerit eiusmodi functio ipsius x, tum eius differentialia in infinitum progrediuntur, sicque resultat series infinita summam seriei propositae exprimens, & quidem ad datum usque terminum, cuius index est $= x$. Quocirca progressionis propositae in infinitum continuatae summa prodibit, si ponatur $x = \infty$; hocque pacto alia invenitur series infinita priori aequalis.

141. Sin autem ponatur $x = 0$, tum expressio summam exhibens debet evanescere, uti iam annotavimus; quod nisi fiat, eiusmodi quantitas constans ad summam addi vel inde auferri debet, ut huic conditioni satisfiat. Quo facto si ponatur $x = 1$, summa inventa praebebit terminum primum seriei: si $x = 2$, aggregatum primi & secundi; si $x = 3$, orietur aggregatum trium terminorum initialium seriei, & ita porro. His igitur casibus, quia summa unius, vel duorum, vel trium, &c. terminorum est cognita, seriei infinitae, qua ista summa exprimitur; valor innotescet; ex hocque fonte innumerabiles series summari poterunt.

142. Quoniam, si eiusmodi constans summae fuerit adiecta,

ſta, ut ea evaneſcat poſito $x=0$, tum ſumma omnibus reliquis caſibus, quicunque numeri pro x ſubſtituantur, ſatisfacit; manifeſtum eſt, dummodo ſummae inventae eiuſmodi quantitas conſtans adiiciatur, ut uno quodam caſu vera ſumma indicetur, tum omnibus reliquis caſibus veram ſummam prodire debere. Quare ſi ponendo $x=0$, non pateat, cuiuſmodi valorem expreſſio ſummae recipiat, neque igitur conſtans adiicienda hinc inveniri queat; tum alius quicunque numerus pro x ſtatui poterit, adiiciendaque conſtante effici ut debita ſumma indicetur: quod quomodo fieri debeat, ex ſequentibus magis fiet perſpicuum.

Conſideremus primum hanc progreſſionem harmonicam:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \ldots\ +\frac{1}{x}=s,$$

cuius terminus generalis cum ſit $=\frac{1}{x}$, fiet $z=\frac{1}{x}$, & terminus ſummatorius s ita invenietur. Primo erit $\int z\,dx=\int\frac{dx}{x}=lx$; deinde differentialia ita ſe habebunt:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2};\quad \frac{ddz}{2dx^2}=\frac{1}{x^3};\quad \frac{d^3z}{6dx^3}=-\frac{1}{x^4};$$

$$\frac{d^4z}{24dx^4}=\frac{1}{x^5};\quad \frac{d^5z}{120dx^5}=-\frac{1}{x^6}\ \text{&c.}$$ Hinc itaque erit:

$$s=lx+\frac{1}{2x}-\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{8x^8}-\ \text{&c.}+\text{Conſt.}$$

Conſtans igitur hic addenda ex caſu $x=0$ non poteſt definiri. Ponatur ergo $x=1$, quia tum fit $s=1$, erit

$$1=\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}+\text{Conſt.}$$ unde fit iſta conſtans $=\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\text{\&c.}$ eritque ideo terminus ſummatorius quaeſitus:

$s=$

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \&c.$$

143. Quoniam numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. constituunt seriem divergentem, hic valor constantis cognosci nequit. Sin autem loco x substituatur numerus maior, atque summa totidem terminorum actu quaeratur, valor constantis commode investigabitur. Ponatur in hunc finem $x = 10$, decemque primis terminis colligendis reperietur eorum summa $=$
$$2,928968253968253968$$
cui aequalis esse debet expressio summae, si in ea ponatur $x = 10$, quae fit:
$$l10 + \frac{1}{20} - \frac{\mathfrak{A}}{200} + \frac{\mathfrak{B}}{40000} - \frac{\mathfrak{C}}{6000000} + \frac{\mathfrak{D}}{800000000} - \&c. + C.$$
sumto ergo pro $l10$ logarithmo hyperbolico denarii & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. substitutis valoribus supra inventis, reperietur constans illa: $C = 0,577215664901532 5$
qui numerus ergo exprimit summam seriei:
$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \&c.$$

144. Si pro x numeri non nimis magni substituantur, quia summa seriei facile actu invenitur, obtinebitur, summa seriei huius:
$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c. = s - lx - C.$$
Sin autem x significet numerum valde magnum, quia tum valor huius expressionis in infinitum excurrentis facile in fractionibus decimalibus assignatur, vicissim summa seriei definietur. Ac primo quidem constat, si series in infinitum continuetur, eius summam futuram esse infinite magnam; facto enim $x = \infty$ fit lx quoque infinitus; etsi ∞ ad x rationem infinite parvam teneat. Quo autem commodius summa

quotcunque terminorum seriei assignari queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. in fractionibus decimalibus exprimamus:

$$\mathfrak{A} = 0,1666666666666$$
$$\mathfrak{B} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{C} = 0,0238095238095$$
$$\mathfrak{D} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{E} = 0,0757575757575$$
$$\mathfrak{F} = 0,2531135531135$$
$$\mathfrak{G} = 1,1666666666666$$
$$\mathfrak{H} = 7,0921568627451 \quad \text{&c.}$$

unde ergo erit

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0,0083333333333$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0,0039682539682$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0,0041666666666$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0,0075757575757$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0,0210927960928$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{H}}{16} = 0,4432598039216 \quad \text{&c.}$$

EXEMPLUM I.

Invenire summam mille terminorum seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{&c.}$$

Po-

Ponatur ergo $x = 1000$, & cum sit

$l10 = 2,302585092994045684\,0$ erit

$lx = 6,907755278982\,1$

Const. $= 0,577215664901\,5$

$\frac{1}{2x} = 0,000500000000\,0$

$7,485470943883\,6$

subt. $\frac{\mathfrak{A}}{2xx} = 0,000000083333\,3$

$7,485470850550\,3$

add. $\frac{\mathfrak{B}}{4x^4} = 0,000000000000\,0$

Ergo $7,485470850550\,3$

est summa quaesita mille terminorum, qui nequidem septem unitates cum semisse conficiunt.

EXEMPLUM II.

Invenire summam millies mille terminorum seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{&c.}$$

Quia est $x = 1000000$, erit $lx = 6.l10$, ergo

$lx = 13,815510557964\,2$

Const. $= 0,577215664901\,5$

$\frac{1}{2x} = 0,000000500000\,0$

$14,392726722865\,7$ = summae quaesitae.

145. Si ergo pro x statuatur numerus vehementer magnus, summa satis exacte invenitur ex solo primo termino lx constante C aucto: unde egregia corollaria deduci possunt. Sic si x fuerit numerus vehementer magnus, ponaturque:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{x} = s$$

$$\& \; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{x} + \ldots \frac{1}{x+y} = t$$

quia

quia est proxime $s = lx + C$, & $t = l(x+y) + C$;

erit $t - s = l(x+y) - lx = l\frac{x+y}{x}$, ideoque hic logarithmus proxime per seriem harmonicam finito terminorum numero constantem exprimetur hoc modo:

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots + \frac{1}{x+y}.$$

Accuratius autem hic logarithmus exhibebitur, si superiores summae s & t exactius capiantur. Sic cum sit

$$s = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12xx}, \quad \&$$

$$t = l(x+y) + C + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12(x+y)^2};$$ erit

$$t - s = l\frac{x+y}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{12xx} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$ ideoque

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12xx} + \frac{1}{12(x+y)^2}$$

Sin autem sit numerus tam magnus, ut bini termini ultimi reiici queant, erit proxime:

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right)$$

Ex hac quoque serie harmonica derivare poterimus summam huius seriei, in qua tantum numeri impares occurrunt:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots + \frac{1}{2x+1}.$$

Cum enim omnibus terminis capiendis sit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1} =$$

$$l(2x+1) + C + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6} + \&c.$$

termi-

terminorum vero ordine parium:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\ \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2x}$$

summa sit semissis superioris nempe:

$$\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}lx+\frac{1}{4x}-\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{12x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{16x^8}-\&c.$$

erit hac serie ab illa ablata:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ \ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2x+1}=$$

$$\tfrac{1}{2}C+l\frac{2x+1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4}-\&c.$$

$$-\frac{1}{4x}+\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}-\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}+\&c.$$

146. Potest vero etiam per eandem expressionem generalem summa cuiusque seriei harmonicae inveniri; sit enim;

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}+\frac{1}{4m+n}+\ \ldots\ +\frac{1}{mx+n}=s,$$

quia est terminus generalis $z=\frac{1}{mx+n}$, erit:

$$\int z\,dx=\frac{1}{m}l(mx+n);\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{m}{(mx+n)^2}$$

$$\frac{ddz}{2dx^2}=\frac{mm}{(mx+n)^3};\quad \frac{d^3z}{6dx^3}=-\frac{m^3}{(mx+n)^4}$$

$$\frac{d^4z}{24dx^4}=\frac{m^4}{(mx+n)^5};\quad \frac{d^5z}{120dx^5}=-\frac{m^5}{(mx+n)^6}\ \&c.$$

Ex his ergo reperitur:

$$s=D+\frac{1}{m}l(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2}+\frac{\mathfrak{B}m^3}{4(mx+n)^4}$$

$$-\frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8}-\&c.$$

Po-

Posito ergo $x=0$, fiet constans illa addenda:

$$D=-\frac{1}{m}ln-\frac{1}{2n}+\frac{\mathfrak{A}n}{2n^2}-\frac{\mathfrak{B}n^3}{4n^4}+\frac{\mathfrak{C}n^5}{6n^6}-\&c.$$

147. Si vero sit $n=0$, quoniam seriei:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}+\frac{1}{4m}+\ldots\ldots+\frac{1}{mx}$$ summa est $$=\frac{1}{m}C+\frac{1}{m}lx+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2mx^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4mx^4}-\&c.$$

at vero huius seriei:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{mx}$$

summa est $$=C+lmx+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4}-\&c.$$

si ab hac serie illa m vicibus sumta subtrahatur ut prodeat haec series:

$$1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{2m}+\ldots+\frac{1}{3m}+\ldots+\frac{1}{mx}$$
$$-\frac{m}{m}\quad-\frac{m}{2m}\quad-\frac{m}{3m}\quad-\frac{m}{mx}$$

eius summa erit $$=lm+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4}-\&c.$$
$$-\frac{1}{2x}+\frac{\mathfrak{A}}{2xx}-\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}+\&c.$$

atque si statuatur $x=\infty$ summa erit $=lm$. Hinc pro m ponendo numeros 2, 3, 4, &c. erit:

$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\&c.$
$l3=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\&c.$
$l4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\&c.$
$l5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\&c.$
&c.

148. Relicta autem serie harmonica progrediamur ad seriem quadratorum reciprocam, sitque:

$s=$

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{xx},$$

in qua cum sit terminus generalis $z = \frac{1}{xx}$, erit

$$\int z\,dx = -\frac{1}{x}, \text{ \& differentialia ipsius } z \text{ ita se habebunt}$$

$$\frac{dz}{2dx} = -\frac{1}{x^3}; \quad \frac{ddz}{2.3dx^2} = \frac{1}{x^4}; \quad \frac{d^3z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5}; \text{ \&c.}$$

unde erit summa

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^5} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \text{\&c.}$$

in qua constans addenda C ex uno casu, quo summa constat, est definienda. Ponamus ergo $x = 1$, quia fit $s = 1$ debet esse: $C = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{\&c.}$ quae series autem cum sit maxime divergens, valorem constantis C non ostendit. Quia autem supra demonstravimus summam huius seriei in infinitum continuatae esse $= \frac{\pi\pi}{6}$: facto $x = \infty$, si ponatur $s = \frac{\pi\pi}{6}$, fiet $C = \frac{\pi\pi}{6}$, ob reliquos terminos omnes evanescentes. Erit ergo

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{\&c.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

149. Sin autem summa huius seriei cognita non fuisset, valor constantis illius C ex alio quopiam casu, quo summa actu est inventa, determinari deberet. Hunc in finem ponamus $x = 10$, atque decem terminis actu addendis reperietur:

$s = 1,549767731166540690$ tum est

add. $\frac{1}{x} = 0,1$

subtr. $\frac{1}{2xx} = 0,005$

$1,644767731166540690$

$$\begin{array}{lll}
 & & 1,644767731166540690 \\
\text{add.} & \frac{\mathfrak{A}}{x^3} = & 0,000166666666666666 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934397833207356 \\
\text{subtr.} & \frac{\mathfrak{B}}{x^5} = & 0,000000333333333333 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934064499874023 \\
\text{add.} & \frac{\mathfrak{C}}{x^7} = & 0,000000023809523810 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934066880826404 \\
\text{subtr.} & \frac{\mathfrak{D}}{x^9} = & 0,000000003333333333 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934066847493071 \\
\text{add.} & \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} = & 0,000000000757575757 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934066848250646 \\
\text{subtr.} & \frac{\mathfrak{F}}{x^{13}} = & 0,000000000025311355 \\
 & & \hline \\
 & & 1,644934066848225335 \\
\text{add.} & \frac{\mathfrak{G}}{x^{15}} = & 0,000000000001166905 \\
 & & \hline \\
\text{subtr.} & \frac{\mathfrak{H}}{x^{17}} = & \frac{71}{1,644934066848226430} = \mathfrak{C}.
\end{array}$$

Hicque numerus simul est valor expressionis $\frac{\pi\pi}{6}$, quemadmodum ex valore ipsius π cognito calculum instituenti patebit. Unde simul intelligitur, etiamsi series $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. divergat, tamen hoc modo veram prodire summam.

150. Sit nunc $z = \frac{1}{x^3}$; atque

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^3},$$ quia est

$$\int z\,dx = -\frac{1}{2xx}; \quad \frac{dz}{1.2.3\,dx} = -\frac{1}{2x^4}; \quad \frac{ddz}{1.2.3.4\,dx^2} = \frac{1}{2x^5}$$

$$\frac{d^3z}{1.2\ldots5\,dx^3} = -\frac{1}{2x^6}; \quad \frac{d^5z}{1.2\ldots7\,dx^5} = -\frac{1}{2x^8}; \text{ &c. erit}$$

$s =$

$$s = C - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{2n^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2n^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2n^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2n^8} + \text{&c.}$$

hincque posito $n = 1$, ob $s = 1$, fiet:

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} - \tfrac{5}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{7}{2}\mathfrak{C} - \tfrac{9}{2}\mathfrak{D} + \text{&c.}$$

atque iste valor ipsius C simul ostendet summam seriei propositae in infinitum continuatae. Quoniam vero summae potestatum imparium non aeque ac parium constant, iste ipsius C valor ex cognita summa aliquot terminorum definiri debet. Sit ergo $n = 10$, erit:

$$C = s + \frac{1}{2nn} - \frac{1}{2n^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2n^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2n^6} + \frac{7\mathfrak{C}}{2n^8} - \text{&c.}$$

Est vero ad computum facilius instituendum:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0,250000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0,083333333333$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2} = 0,083333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0,150000000000$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0,416666666666$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1,645238095238$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8,750000000000$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60,283333333333 \quad \text{&c.}$$

Hinc ergo fient termini ad s addendi:

$$\frac{1}{2xx} = 0,005000000000000000$$
$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0,000025000000000000$$
$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0,000000008333333333$$
$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0,000000000000416666$$
$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0,000000000000000875$$

$0,005025000833750875$

termini autem subtrahendi sunt:

$$\frac{1}{2x^5} = 0,000500000000000000$$
$$\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} = 0,000000083333333333$$
$$\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} = 0,000000000015000000$$
$$\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} = 0,000000000000016452$$
$$\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} = 0,000000000000000060$$

$0,000500083348349845$

ab : $0,005025000833750875$

$0,004524917485401030$

$s = 1,197531985674193251$

$C = 1,202056903159594281.$

151. Si hoc modo ulterius progrediamur, inveniemus summas omnium ferierum poteſtatum reciprocarum in fractionibus decimalibus expreſſas:

1+

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.=1{,}644934066848226\,4=\frac{2\,\mathfrak{A}}{1.\ 2}\,\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.=1{,}20\ldots\ldots031595942$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.=1{,}082323233711138\,1=\frac{2^3\,\mathfrak{B}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\&c.=1{,}036927755106863\,2$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\&c.=1{,}017343061984449\,1=\frac{2^5\,\mathfrak{C}}{1.\ 2\ldots\ 6}\,\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\&c.=1{,}008349277386601\,8$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\&c.=1{,}004077356197944\,3=\frac{2^7\,\mathfrak{D}}{1.\ 2\ldots\ 8}\,\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\&c.=1{,}002008392826082\,2$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\&c.=1{,}000994575127818\,0=\frac{2^9\,\mathfrak{E}}{1.2\ldots\ 10}\,\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\&c.=1{,}000494188604109\,4$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\&c.=1{,}000246086553308\,0=\frac{2^{11}\,\mathfrak{F}}{1.2\ldots\ 12}\,\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{3^{13}}+\frac{1}{4^{13}}+\&c.=1{,}000122723347585\,7$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\&c.=1{,}000061248135058\,7=\frac{2^{13}\,\mathfrak{G}}{1.2\ldots\ 14}\,\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{4^{15}}+\&c.=1{,}000030588236307\,0$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\&c.=1{,}000015282259408\,6=\frac{2^{15}\,\mathfrak{H}}{1.2\ldots 16}\,\pi^{16}$$

152. Ex his ergo viciſſim ſummae illarum ſerierum infinitarum numeris Bernoullianis conſtantium exhiberi poterunt. Erit enim:

$$1+0-\tfrac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\&c.=0,57721\ \&c.$$

$$1+1-\tfrac{1}{2}+\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\mathfrak{D}+\&c.=\frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{3\mathfrak{A}}{2}-\frac{5\mathfrak{B}}{2}+\frac{7\mathfrak{C}}{2}-\frac{9\mathfrak{D}}{2}+\&c.=1,2020\ \&c.$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4\mathfrak{A}}{2.3}-\frac{5.6\mathfrak{B}}{2.3}+\frac{7.8\mathfrak{C}}{2.3}-\frac{9.10\mathfrak{D}}{2.3}+\&c.=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5\mathfrak{A}}{2.3.4}-\frac{5.6.7.\mathfrak{B}}{2.3.4}+\frac{7.8.9\mathfrak{C}}{2.3.4}-\frac{9.10.11\mathfrak{D}}{2.3.4}+\&c.=1,0369\ \&c.$$

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5.6\mathfrak{A}}{2.3.4.5}-\frac{5.6.7.8\mathfrak{B}}{2.3.4.5}+\frac{7.8.9.10\mathfrak{C}}{2.3.4.5.}-\&c.=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

Harum ergo ſerierum alternae ope quadraturae circuli ſummari poſſunt; a quanam vero quantitate tranſcendente reliquae pendeant, adhuc non conſtat: neque enim ad poteſtates ipſius π exponentes impares habentes revocari poſſunt, ita ut coefficientes eſſent numeri rationales. Quo autem ſaltem proxime appareat, quales futuri ſint coefficientes poteſtatum ipſius π pro exponentibus imparibus, tabellam ſequentem adiunximus:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\&c.\text{ in infin.}=\frac{\pi}{0,0000}=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.\ \ .\ .\ .=\frac{\pi^3}{6,0000}\quad\text{vere}$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.\ \ .\ .\ .=\frac{\pi^3}{25,79436}\quad\text{prox.}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.\ \ .\ .\ .=\frac{\pi^4}{90,00000}\quad\text{vere}$$

1+

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\&c. \quad . \quad . \quad = \frac{\pi^5}{295,1215} \quad \text{prox.}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\&c. \quad . \quad . \quad = \frac{\pi^6}{945,000} \quad \text{vere}$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\&c. \quad . \quad . \quad = \frac{\pi^7}{2995,286} \quad \text{prox.}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\&c. \quad . \quad . \quad = \frac{\pi^8}{9450,000} \quad \text{vere}$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\&c. \quad . \quad . \quad = \frac{\pi^9}{29749,35} \quad \text{prox.} \quad \&c.$$

153. Ex hoc fonte series numerorum Bernoullianorum

$$\mathfrak{A}^1, \ \mathfrak{B}^2, \ \mathfrak{C}^3, \ \mathfrak{D}^4; \ \mathfrak{E}^5 \ \mathfrak{F}^6, \ \mathfrak{G}^7, \ \mathfrak{H}^8, \ \mathfrak{I}^9, \ \&c.$$

quantumvis irregularis videatur interpolari, seu termini in medio binorum quorumcunque constituti assignari poterunt: si enim terminus medium interiacens inter primum $\mathfrak{A}$ & secundum $\mathfrak{B}$, seu indici $1\frac{1}{2}$ respondens fuerit $= p$; erit utique:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c. \quad = \quad \frac{2^3 p}{1.2.3}\pi^3$$

ideoque $p = \frac{3}{2\pi^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c.\right) = 0,05815227$

Simili modo si terminus inter $\mathfrak{B}$ & $\mathfrak{C}$ medium interiacens seu indicem habens $2\frac{1}{2}$ ponatur $= q$, quia erit:

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c. \quad = \quad \frac{2^4 q}{1.2.3.4.5}\pi^5$$

fiet $q = \frac{15}{2\pi^5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c.\right) = 0,02541327$

Si ergo istarum serierum, in quibus exponentes potestatum sunt numeri impares, summae exhiberi possent, tum quoque series numerorum Bernoullianorum interpolari posset.

154. Ponamus nunc $z = \frac{1}{mn+xx}$, & quaeratur

summa huius seriei:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots + \frac{1}{nn+xx}.$$

Quia est $\int z\,dx = \int \frac{dx}{nn+xx}$; erit $\int z\,dx = \frac{1}{n} A\,\text{tang}\,\frac{x}{n}$.

Ponatur $A\cot\frac{x}{n} = u$, erit $\int z\,dx = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$, &

$\frac{x}{n} = \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$, & $\frac{nn+xx}{nn} = \frac{1}{\sin u^2}$, & $z = \frac{\sin u^2}{nn}$,

& $\frac{dx}{n} = -\frac{du}{\sin u^2}$, unde fit $du = -\frac{dx \sin u^2}{n}$.

Hinc differentialia ipsius z invenientur hoc modo:

$$dz = \frac{2\,du \sin u.\cos u}{nn} = -\frac{dx \sin u^2.\sin 2u}{n^3} \quad \& \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\sin u^2.\sin 2u}{n^3}$$

$$\frac{ddz}{2dx} = -\frac{du(\sin u \cos u \sin 2u + \sin u^2.\cos 2u)}{n^3} = \frac{dx \sin u^3.\sin 3u}{n^4}$$

$$\& \quad \frac{ddz}{2dx^2} = \frac{\sin u^3.\sin 3u}{n^4}.$$

Simili modo erit, uti iam supra pro eodem casu invenimus: $\frac{d^3z}{2.3dx^3} = -\frac{\sin u^4.\sin 4u}{n^5}$; $\frac{d^4z}{2.3.4dx^4} = \frac{\sin u^5.\sin 5u}{n^6}$ &c.

ex quibus formabitur summa quaesita:

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\sin u.\sin u}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2}.\frac{\sin u^2.\sin 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4}.\frac{\sin u^4.\sin 4u}{n^5}$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{6}.\frac{\sin u^6.\sin 6u}{n^7} + \frac{\mathfrak{D}}{8}.\frac{\sin u^8.\sin 8u}{n^9} - \text{&c.} \quad + \text{Const.}$$

Si hic ad constantem determinandam ponatur $x = 0$, quo fiat $s = 0$, erit $\cot u = 0$, ideoque u angulus $90°$, ac propterea $\sin u = 1$, $\sin 2u = 0$, $\sin 4u = 0$, $\sin 6u = 0$, &c. videtur ergo fore $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, hinc $C = -\frac{1}{2nn}$:

at vero notandum est, etiamsi reliqui termini evanescant, tamen quia coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. tandem in infinitum excrescunt, eorum summam posse esse finitam.

155. Ad hanc ergo constantem rite determinandam ponamus esse $x = \infty$, summam enim huius seriei in infinitum excurrentis supra iam in introductione definivimus, ostendimusque esse eam $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$. Posito autem $x = \infty$, fiet $u = 0$, ideoque $\sin u = 0$, simulque sinus omnium arcuum multiplorum evanescent. Cum autem in hac serie potestates ipsius $\sin u$ crescant, divergentia seriei impedire nequit, quominus valor seriei hoc casu evanescat. Fiet ergo $s = \frac{\pi}{2n} + C$; unde erit

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}, \quad \&$$

$$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$ Quare summa seriei quaesita erit $s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\cos u^2}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{\sin u^2 \cdot \sin 2u}{n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} \cdot \frac{\sin u^4 \cdot \sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6} \cdot \frac{\sin u^6 \cdot \sin 6u}{n^7} + \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$. Ubi notandum est, si n fuerit numerus mediocriter magnus, ultimum terminum $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$ tantopere fieri exiguum, ut negligi queat.

156. Ponamus esse $x = n$, ita ut denotet:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots + \frac{1}{nn+nn}.$$

Tum vero erit $\cot u = 1$, & $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Quamobrem

habebitur $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 4u = 0$; $\sin 6u = -1$; $\sin 8u = 0$; $\sin 10u = 1$; &c. Hancobrem erit:

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{4nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2.2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6.8n^7} - \frac{\mathfrak{E}}{10.2^5 n^{11}} + \frac{\mathfrak{G}}{14.2^7 n^{15}} - \&c. + \frac{\pi}{n\left(e^{2n\pi}-1\right)},$$

in qua expressione tantum numeri alterni ex Bernoullianis occurrunt. Si igitur valor ipsius s per computum actu institutum iam fuerit inventus, hinc quantitas π definiri poterit, erit enim:

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1.n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3.2^2 n^5} + \frac{\mathfrak{E}}{5.2^4 n^{10}} - \frac{\mathfrak{G}}{7.2^6 . n^{14}} + \&c. - \frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}.$$

Etsi enim in termino ultimo inest π, tamen quia is tantopere est parvus, sufficit valorem ipsius π proxime nosse.

EXEMPLUM. Sit $n = 5$; erit:

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

qui termini actu additi dabunt:

$$s = 0,146746305690549494$$

unde erunt termini illi;

$$4ns = 2,934926113810989 88$$
$$\frac{1}{n} = 0,2$$
$$\frac{\mathfrak{A}}{nn} = 0,00666666666666666$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{3.2^1 . n^6} = 0,000000126984126 98$$

3, 14159265349352956

$\mathfrak{C}$

$$3,141592653493529 56$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{5.2^4.n^{16}} = 0,000000000096969 69$$

$$3,141592653590499 25$$

$$\frac{\mathfrak{G}}{7.2^5.n^{24}} = 0,000000000000426 66$$

$$3,141592653590072 59$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{9.2^8.n^{32}} = \frac{625}{3,141592653590078 84}$$

Hic valor iam tam prope ad veritatem accedit, ut mirandum fit tam levi calculo eousque perveniri posse. Est vero haec expressio aliquantillum iusto maior, subtrahi enim adhuc inde debet $\frac{4\pi}{e^{20\pi}-1}$, cuius valor, dummodo π prope fit cognitum, exhiberi potest; quod per logarithmos ita expedietur.

Quia est $\pi le = 1,3643763538$

erit $le^{20\pi} = 10\pi le = 13,6437635$.

Cum iam sit $\frac{4\pi}{e^{20\pi}-1} = \frac{4\pi}{e^{20\pi}} + \frac{4\pi}{e^{40\pi}} + \&c.$

facile intelligitur ad nostrum calculum sufficere primum terminorum sumsisse. Augeamus ergo characteristicam numero 17, quia habemus totidem figuras decimales, erit:

$$l\pi = 17,4971498$$
$$l4 = 0,6020600$$
$$18,0992098$$

Subtr. $le^{20\pi} = 13,6437635$

$$4,4554463$$

Ergo $\frac{4\pi}{e^{20\pi}} = 28539$ subtrahatur

ab $3,141592653590078 84$ erit

$\pi = 3,141592653589793 45$

quae expressio in figura demum penultima a veritate recedit;

quod mirandum non est, cum adhuc terminum $\frac{\mathfrak{L}}{11.2^{10}.n^{22}}$, qui dat 22, subtrahere debuissemus, sicque ne ultima quidem figura aberrasset. Ceterum intelligitur, si pro n maiorem numerum uti 10 assumsissemus, tum facili negotio peripheriam π ad 25 plureſque figuras inveniri potuisse.

157. Ponamus nunc quoque pro z functiones transcendentes ipsius x, sitque $z = lx$, sumendo logarithmos hyperbolicos, quoniam vulgares facile eo revocantur; sitque:

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx.$$

Quia igitur est $z = lx$, erit $\int z dx = xlx - x$, huius enim differentiale dat $dxlx$. Deinde est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}; \frac{ddz}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}; \frac{d^3z}{1.2dx^3} = \frac{1}{x^3}; \frac{d^4z}{1.2.3.4dx^4} = \frac{1}{x^4}; \text{ &c.}$$

Hinc itaque concluditur fore:

$$s = xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \text{&c.}$$
$$+ \text{Const.}$$

Haec autem constans ponendo $x = 1$, quia fit $s = l1 = 0$ ita definietur, ut sit: $C = 1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \text{&c.}$ quae series ob nimiam divergentiam est inepta ad valorem ipsius C saltem proxime eruendum.

158. Non solum autem proximum sed etiam ipsum verum valorem ipsius C inveniemus, si consideremus expressionem Wallisianam pro valore ipsius π inventam, atque in introductione demonstratam: quae erat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{ &c.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{ &c.}}$$

hinc enim logarithmis sumendis erit:

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + 2l10 + \text{&c.}$$
$$- l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - 2l11 - \text{&c.}$$

Ponamus ergo in serie assumta $x = \infty$ & cum sit:

$l1$

$l1+l2+l3+l4+\ldots+lx = C+(x+\frac{1}{2})lx-x$
erit $l1+l2+l3+l4+\ldots+l2x = C+(2x+\frac{1}{2})l2x-2x$
& $l2+l4+l6+l8+\ldots+l2x = C+(x+\frac{1}{2})lx+xl2-x$
hinc $l1+l3+l5+l7+\ldots+l(2x-1) = xlx+(x+\frac{1}{2})l2-x$

Cum igitur fit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2+2l4+2l6+\ldots+2l2x-l2x$$
$$-2l1-2l3-2l5-\ldots-2l(2x-1)$$

posito $x=\infty$, erit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2C+(2x+1)lx+2xl2-2x-l2-lx$$
$$-2xlx-(2x+1)l2+2x,$$

ideoque $l\frac{\pi}{2} = 2C-2l2$, ergo $2C=l2\pi$, & $C=\frac{1}{2}l2\pi$,

unde in fractionibus decimalibus reperitur:

$C=0,9189385332046727417803297$

atque simul sequens series summatur:

$$1-\frac{\mathfrak{A}}{1.2}+\frac{\mathfrak{B}}{3.4}-\frac{\mathfrak{C}}{5.6}+\frac{\mathfrak{D}}{7.8}-\frac{\mathfrak{E}}{9.10}+\&c. = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

159. Cognita nunc ista constante $C=\frac{1}{2}l2\pi$, summa quotcunque logarithmorum ex hac serie $l1+l2+l3+$ &c. exhiberi potest. Si enim ponatur:

$$s = l1+l2+l3+l4+\ldots+lx, \text{ erit}$$
$$s = \tfrac{1}{2}l2\pi+(x+\tfrac{1}{2})lx-x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+\frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5}-\frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7}+\&c.$$

si quidem logarithmi propositi fuerint hyperbolici; sin autem proponantur logarithmi vulgares, tum in terminis $\frac{1}{2}l2\pi+(x+\frac{1}{2})lx$ pro $l2\pi$ & lx summi debebunt logarithmi vulgares, reliqui autem seriei termini $-x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+$ &c. multiplicari debent per $0,4342944819032518 27 = n$.

Erit igitur hoc casu pro logarithmis vulgaribus:

$l\pi$

$$\begin{aligned} ln &= 0,49714987269413385435 1268 \\ l2 &= 0,30102999566398119521 3738 \\ l2\pi &= 0,79817986835811504956 5006 \\ \tfrac{1}{2}l2\pi &= 0,39908993417905752478 2503 \end{aligned}$$

EXEMPLUM

Quaeratur aggregatum mille logarithmorum tabularium

$$s = l1 + l2 + l3 + \ldots + l1000.$$

Erit ergo $n = 1000$, & $ln =$ 3, 000000000000

unde fit

	$nln =$	3000, 000000000000
	$\frac{1}{2}ln =$	1, 500000000000
	$\frac{1}{2}l2\pi =$	0, 399089934179 0
		3001, 899089934179 0
subtr.	$mn =$	434, 294481903251 8
		2567, 604608030927 2

Deinde est $\frac{mA}{1.2n} =$ 0, 000036191206 8

subtr.	$\frac{mB}{3.4n^3} =$	0, 000000000001 2
		0, 000036191205 6
addatur		2567, 604608030927 2
summa quaesita	$s =$	2567, 604644222132 8.

Cum igitur s sit logarithmus producti numerorum:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 1000

patet hoc productum, si actu multiplicetur, constare ex 2568 figuris, atque notas a leva initiales fore 4023872 quas insuper 2561 figurae sequentur.

160. Ope ergo huius logarithmorum summationis producta ex quotcumque factoribus, qui secundum numeros naturales procedunt, proxime assignari poterunt. Huc potissimum referri potest problema, quo quaeritur uncia media seu maxima in potestate binomii quacumque $(a+b)^m$; ubi quidem notandum est, si m sit numerus impar, binas dari medias inter se aequales, quae iunctim sumtae praebeant unciam mediam

diam in potestate sequente pari. Quare cum uncia maxima in quaque potestate pari sit duplo maior quam uncia media in potestate praecedente impari, sufficiet pro potestatibus paribus unciam mediam maximam determinasse. Sit igitur $m = 2n$, & uncia media ita exprimetur ut sit:

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ \ldots\ \ldots\ (n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ n}$$

Vocetur ista uncia media quae quaeritur $= u$, atque eo hoc modo repraesentari poterit, ut sit:

$$u = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 2n}{(1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n)^2}$$

sumtisque logarithmis erit:

$$lu = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \ldots + l2n$$
$$- 2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \ldots - 2ln$$

161. Iam vero sumendis his logarithmis hyperbolicis erit:

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + l2n =$$
$$= \tfrac{1}{2} l2\pi + (2n + \tfrac{1}{2}) ln + (2n + \tfrac{1}{2}) l2 - 2n$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3 n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5 n^5} - \&c.$$

$$\& \quad 2l1 + 2l2 + 2l3 + 2l4 + \ldots + 2ln =$$
$$l2\pi + (2n+1) ln - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} - \&c.$$

qua expressione ab illa sublata relinquetur:

$$lu = -\tfrac{1}{2} l\pi - \tfrac{1}{2} ln + 2nl2 + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3 n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5 n^5} - \&c.$$
$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} + \&c.$$

his vero binis terminis colligendis, erit:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3 n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5 n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^7 n^7} - \&c.$$

Sit

Sit $\frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2^1n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^4n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^6n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^8n^8} + \&c.$
$= l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \&c.\right)$; erit

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right);$$

ideoque $$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right)^n \sqrt{n\pi}}$$

Erit vero posito $2n = m$

$$l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \&c.\right) =$$
$$\frac{A}{m^2} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \&c.$$
$$- \frac{A^2}{2m^4} - \frac{AB}{m^6} - \frac{AC}{m^8} - \frac{AD}{m^{10}} - \&c.$$
$$- \frac{BB}{2m^8} - \frac{BC}{m^{10}} - \&c.$$
$$+ \frac{A^3}{3m^6} + \frac{A^2B}{m^8} + \frac{A^2C}{m^{10}} + \&c.$$
$$+ \frac{AB^2}{m^{10}} + \&c.$$
$$- \frac{A^4}{4m^8} - \frac{A^3B}{m^{10}} - \&c.$$
$$+ \frac{A^5}{5m^{10}} + \&c.$$

quae expressio cum aequalis esse debeat huic: $\frac{3\mathfrak{A}}{1.2m^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4m^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6m^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8m^8} + \&c.$ fiet:

$$A = \frac{3\mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B = \frac{A^2}{2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C = AB - \tfrac{1}{2}A^3 + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6}$$

$$D = AC + \tfrac{1}{2}B^2 - A^2B + \tfrac{1}{4}A^4 - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8}$$

$$E = AD + BC - A^2C - AB^2 + A^3B - \tfrac{1}{2}A^5 + \frac{1023\mathfrak{E}}{9.10}$$

&c.

162. Cum iam sit $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$; erit :

$$A = \frac{1}{4}\,;\ B = -\frac{1}{96}\,;\ C = \frac{27}{640}\,;\ D = -\frac{90031}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\ \text{&c.}$$

Hinc efficitur :

$$n = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4 n^2} - \frac{1}{2^9\cdot 3 n^4} + \frac{27}{2^{13}\cdot 5 n^6} - \frac{90031}{2^{19}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 n^8} + \text{&c.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

vel si ista seriei elevatio actu instituatur, erit proxime :

$$n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \text{&c.}\right)}$$

hinc terminus medius in $(1+1)^{2n}$, erit ad summam omnium terminorum 2^{2n}

uti 1 ad $\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4} - \text{&c.}\right)$

vel posito brevitatis gratia $4n = \nu$, erit ista ratio :

ut 1 ad $\sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{2y^3}-\frac{5}{8y^4}+\frac{23}{8y^5}+\frac{53}{16y^6}-\text{&c.}\right)$

EXEMPLUM I.

Quaeratur uncia media in binomio $(a+b)^{10}$ *evoluto*, *quam constat esse* $=\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}=252$.

Adhibendo ultimam formulam pro u inventam erit $n=5$

$$\frac{1}{4n} = 0,0500000$$
$$\frac{1}{32n^2} = 0,0012500$$
$$0,0512500$$
subtr. $\frac{1}{128n^4} = 625$
$$0,0511875$$
subtr. $\frac{5}{16.128n^4} = 39$

Ergo $1+\frac{1}{4n}+\text{&c.} = 1,0511836$

Huius log. $= 0,0216784$
$ln = 0,6989700$
$lx = 0,4971498$
$1,2177982$
$l\sqrt{n\pi}(1+\text{&c.}) = 0,6088991$
a $l2^{10} = 3,0102999$
$lu = 2,4014008$

unde fit $u=252$.

EXEMPLUM II.

Investigetur ratio, *quam in potestate centesima binomii* $1+1$ *terminus medius ad summam omnium* 2^{100} *tenet*.

Utamur ad hoc formula primum inventa:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \text{&c.}$$

in

in qua posito $2n = m$ ut habeatur ista potestas $(1+1)^m$ & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, substitutis valoribus, fiet:

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \&c.$$

qui logarithmi cum sint hyperbolici multiplicentur ii per

$$k = 0,434294481903251,$$

ut transmutentur in tabulares, eritque

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \&c.$$

unde cum uncia media sit u, erit $2^m : u$ ratio quaesita, ideoque

$$l\frac{2^m}{u} = l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} + \frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \frac{691k}{88m^{11}} + \&c.$$

Quare cum sit ob exponentem $m = 100$

$$\frac{k}{m} = 0,00434294481; \quad \frac{k}{m^3} = 0,0000004343;$$

$$\frac{k}{m^5} = 0,0000000000;$$ erit:

$$\frac{k}{4m} = 0,00108573620$$

$$\frac{k}{24m^3} = \underline{0,0000000181}$$

$$0,00108571810$$

Tum est $l\pi = 0,4971498726$

$$l\tfrac{1}{2}m = \underline{1,6989700043}$$

$$l\tfrac{1}{2}m\pi = \underline{2,1961198769}$$

$$l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} = \underline{1,0980599384}$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \&c. = 0,00108571810$$

$$\underline{1,0991456565} = l\frac{2^{100}}{u}.$$

Erit ergo $\frac{2^{100}}{u} = 12,56451$, atque adeo in potestate

$(1+1)^{100}$ evoluta terminus medius se habebit ad summam omnium 2^{100} uti 1 ad 12, 56451.

163. Denotet nunc terminus generalis z functionem exponentialem a^x, ita ut summari debeat haec series geometrica:

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^x$$

quae cum sit geometrica, eius summa iam constat, erit enim $s = \frac{(a^x - 1)a}{a-1}$. Modo autem hic exposito hanc summam investigemus. Quia est $z = a^x$, erit $\int z\,dx = \frac{a^x}{la}$, huius enim differentiale est $a^x dx$, tum vero erit:

$$\frac{dz}{dx} = a^x la;\ \frac{ddz}{dx^2} = a^x (la)^2;\ \frac{d^3z}{dx^3} = a^x (la)^3;\ \text{&c.}$$

unde sequitur fore:

$$s = a^x\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \text{&c.}\right) + C.$$

Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, & ob $s = 0$, erit $C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 - \text{&c.}$

ideoque fiet:

$$s = (a^x - 1)\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \text{&c.}\right)$$

Cum igitur summa sit $\frac{(a^x - 1)a}{a-1}$, erit:

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2} la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}(la)^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.}$$

ubi la denotat logarithmum hyperbolicum ipsius a: hinc fit

$$\frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{\mathfrak{A}(la)^2}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}(la)^6}{1.2\ldots6} - \text{&c.}$$

sicque istius seriei summa exhiberi poterit.

164

164. Sit terminus generalis $z = \sin ax$, &
$s = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin ax$
quae series cum sit recurrens quoque summari potest; erit enim

$$s = \frac{\sin a + \sin ax - \sin(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = \frac{\sin a + (1-\cos a)\sin ax - \sin a \cos ax}{2(1-\cos a)}$$

Erit vero $\int z\,dx = \int dx \sin ax = -\frac{1}{a}\cos ax$, & $\frac{dz}{dx} = a\cos ax$;

$$\frac{ddz}{dx^2} = -aa\sin ax;\ \frac{d^3z}{dx^3} = -a^3\cos ax;\ \frac{d^5z}{dx^5} = a^5\cos ax \text{ &c.}$$

$$s = C - \frac{1}{a}\cos ax + \tfrac{1}{2}\sin ax + \frac{\mathfrak{A}a\cos ax}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}a^3\cos ax}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}a^5\cos ax}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\mathfrak{D}a^7\cos ax}{1.2\ldots8} + \text{&c.}$$

Ponatur $x = 0$ ut fiat $s = 0$; eritque:

$$C = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.} \quad \text{ergo}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sin ax + (1-\cos ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.}\right)$$

At cum sit $s = \frac{1}{2}\sin ax + \frac{(1-\cos ax)\sin a}{2(1-\cos a)}$, fiet:

$$\frac{\sin a}{2(1-\cos a)} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.}$$

quam eandem seriem iam supra §. 127. habuimus.

165. Sit nunc $z = \cos ax$, ac series summanda:
$s = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos ax$
cuius seriei, quia est recurrens, erit summa:

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a \cdot \sin ax.$$

At vero ad summam nostra methodo exprimendam, erit:

$\int z\,dx$

$\int z dx = \int dx \cos ax = \frac{1}{a} \sin ax$, & $\frac{dz}{dx} = -a \sin ax$;

$\frac{d^3z}{dx^3} = a^3 \sin ax$; $\frac{d^5z}{dx^5} = -a^5 \sin ax$; &c. Ergo

$$s = C + \frac{1}{a} \sin ax + \tfrac{1}{2} \cos ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Sit $x = 0$, erit $s = 0$, & $C = -\frac{1}{2}$, hincque erit:

$$s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos ax + \frac{1}{a} \sin ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Quare cum fit $s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos ax + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} a . \sin ax$, erit uti iam modo invenimus:

$$\tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$$

166. Quoniam supra invenimus, si a denotet arcum quemcunque, esse

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \tfrac{1}{2} \sin 2a + \tfrac{1}{3} \sin 3a + \tfrac{1}{4} \sin 4a + \&c.$$

consideremus hanc seriem, sitque $z = \frac{1}{x} \sin ax$, ut sit

$$s = \sin a + \tfrac{1}{2} \sin 2a + \tfrac{1}{3} \sin 3a + \ldots + \frac{1}{x} \sin ax.$$

Hoc autem casu fit $\int z dx = \int \frac{dx}{x} \sin ax$, quod integrale exhiberi nequit.

Erit vero $\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x} \cos ax - \frac{1}{xx} \sin ax$;

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x} \sin ax - \frac{2a}{xx} \cos ax + \frac{2}{x^3} \sin ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\cos ax + \frac{3a^2}{x^2}\sin ax + \frac{6a}{x^3}\cos ax - \frac{6}{x^4}\sin ax;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\sin ax + \frac{4a^3}{xx}\cos ax - \frac{12a^2}{x^3}\sin ax - \frac{24a}{x^4}\cos ax + \frac{24}{x^5}\sin ax.$$

Quia igitur neque formulam integralem $\int z dx$ exhibere, neque haec differentialia satis commode exprimere licet, summam huius seriei per hanc methodum definire non potuimus, ita ut quicquam inde concludi posset. Idem incommodum in multis aliis seriebus occurrit, quoties terminus generalis non satis est simplex, ut eius differentialia ad commodam legem exprimi queant. Quamobrem in sequenti Capite alias expressiones generales pro summis serierum, quarum termini generales vel nimis sunt compositi vel prorsus dari nequeunt, eliciemus; quae feliciori successu in usum vocari poterunt. Imprimis autem insufficientia methodi hic traditae elucet, si signa terminorum seriei propositae alternentur, tum enim quantumvis termini generales sint simplices, tamen termini summatorii hac methodo exhiberi commode nequeunt.

CA-

CAPUT VII.

METHODUS SUMMANDI SUPERIOR ULTERIUS PROMOTA.

167.

Ut defectum methodi summandi ante traditae suppleamus, in hoc Capite eiusmodi series considerabimus, quarum termini generales magis sint complexi. Cum igitur expressio ante inventa in progressionibus geometricis, etsi aliis methodis facillime summari possunt, veram summam finita formula contentam non praebeat, hic primum eiusmodi series contemplabimur, quarum termini sint producta ex terminis seriei geometricae & alius cuiuscunque. Sit igitur proposita haec series:

$$s = ap + bp^2 + cp^3 + dp^4 + \ldots + yp^x$$

quae est composita ex geometrica p, p^2, p^3, &c. & alia quacunque serie $a + b + c + d +$ &c. cuius terminus generalis seu indici x respondens sit $= y$, atque expressionem generalem investigemus pro valore eius summae $s = S.yp^x$.

168. Instituamus ratiocinium eodem modo, quo supra usi sumus, sitque v terminus antecedens ipsi y in serie $a + b + c + d +$ &c. atque A praecedens ipsi a seu is qui indici o respondet, eritque vp^{x-1} terminus generalis huius seriei:

$$A + ap + bp^2 + cp^3 + \ldots + vp^{x-1}$$

cuius summa, si indicetur per $S.vp^{x-1}$ erit:

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p} S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A.$$

Cum autem sit:

$v =$

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

erit:

$$Syp^x - yp^x + A = \frac{1}{p} Syp^x - \frac{1}{p} S\frac{dy}{dx}p^x + \frac{1}{2p} S\frac{ddy}{dx^2}p^x - \frac{1}{6p} S\frac{d^3y}{dx^3}p^x + \frac{1}{24p} S\frac{d^4y}{dx^4}p^x - \&c.$$ Ex qua fit:

$$Syp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S\frac{dy}{dx}p^x + S\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \&c.\right)$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{dy}{dx}p^x$; $\frac{ddy}{dx^2}p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$; &c. ex iis definiri poterit terminus summatorius Syp^x.

169. Hinc iam summae inveniri poterunt serierum, quarum termini generales in hac forma $x^n p^x$ continentur. Sit enim $y = x^n$, erit $A = 0$, nisi fit $n = 0$, quo casu foret $A = 1$, & quia est:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3};$$

erit:

$$Sx^n p^x = \frac{1}{p-1}\left(x^n p^{x+1} - Ap - nSx^{n-1}p^x + \frac{n(n-1)}{1.2}Sx^{n-2}p^x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Sx^{n-3}p^x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}Sx^{n-4}p^x - \&c.\right)$$

Ex hac forma nunc successive pro n substituendo numeros 0, 1, 2, 3, &c. obtinebuntur sequentes summationes; ac primo quidem si $n = 0$, fit $A = 1$, in reliquis autem casibus erit $A = 0$:

$$Sx^0 p^x = Sp^x = \frac{1}{p-1}(p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1} - p}{p-1} = \frac{p(p^x - 1)}{p-1},$$

quae est summa progressionis geometricae cognita:

$$S.xp^x = \frac{1}{p-1}(xp^{x+1} - S.p^x) = \frac{xp^{x+1}}{p-1} - \frac{p^{x+1}-p}{(p-1)^2}$$

seu $$S.xp^x = \frac{pxp^x}{p-1} - \frac{p(p^x-1)}{(p-1)^2},$$

$$S.x^2p^x = \frac{1}{p-1}(x^2p^{x+1} - 2S.xp^x + S.p^x) \quad \text{seu}$$

$$S.x^2p^x = \frac{x^2p^{x+1}}{p-1} - \frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x-1)}{(p-1)^3},$$

Porro est

$$S.x^3p^x = \frac{1}{p-1}(x^3p^{x+1} - S.x^2p^x + 3S.xp^x - S.p^x) \quad \text{seu}$$

$$S.x^3p^x = \frac{x^3p^{x+1}}{p-1} - \frac{3x^2p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x-1)}{(p-1)^4}$$

sicque ulterius progrediendo superiorum potestatum x^4p^x; x^5p^x; x^6p^x; &c. summae definiri poterunt, hoc vero commodius praestabitur ope expressionis generalis, quam nunc investigabimus.

170. Quoniam invenimus esse:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S.\frac{dy}{dx}p^x + S.\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S.\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \text{&c.}\right)$$

ubi A est eiusmodi constans, ut summa fiat $= 0$, si ponatur $x = 0$: namque hoc casu fit $y = A$, & $yp^{x+1} = Ap$; hanc constantem omittere poterimus, dummodo perpetuo meminerimus ad summam quamque semper eiusmodi constantem adiici oportere, ut facto $x = 0$, evanescat, seu ut alii cuipiam casui satisfiat. Statuamus ergo z loco y, eritque

$$S.p^xz = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{1}{p-1}S.p^x\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)}S.p^x\frac{ddz}{dx^2}$$
$$- \frac{1}{6(p-1)}S.p^x\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)}S.p^x\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)}S.p^x\frac{d^5z}{dx^5}$$
$$+ \text{&c.}$$

Dein-

Deinde ſtatuamus ſucceſſive $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. in locum y eritque:

$$S.\frac{p^x dz}{dw} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \&c.$$

$$S.\frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^5z}{dx^5} - \&c.$$

&c.

Si igitur hi valores ſucceſſive ſubſtituantur, $S.p^x z$ huiuſmodi forma exprimetur:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{6p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\delta p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^5z}{dx^5} + \&c.$$

171. Ad valores litterarum α, 6, γ, δ, ε, &c. definiendos, ſubſtituantur pro quovis termino ſeries ante inventae nempe:

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1} = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx} = S.\frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} = S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}d^3z}{(p-1)dx^3} = S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \&c.$$

Habebimus ergo:

$$S.p^x z = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \frac{1}{24(p-1)}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} -\alpha & - & \frac{\alpha}{p-1} & + & \frac{\alpha}{2(p-1)} & - & \frac{\alpha}{6(p-1)} \\ & + & \beta & + & \frac{\beta}{p-1} & - & \frac{\beta}{2(p-1)} \\ & & & - & \gamma & - & \frac{\gamma}{p-1} \\ & & & & & + & \delta \end{array}$$

unde coefficientium α, β, γ, δ, &c. valores sequentes obtinebuntur.

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1}\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1}\left(\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}\left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120}\right) \quad \&c.$$

172. Sit brevitatis gratia $\frac{1}{p-1} = q$, erit:

$$\alpha = q$$
$$\beta = \alpha q + \frac{1}{2}q = qq + \frac{1}{2}q$$
$$\gamma = \beta q + \frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{6}q = q^3 + qq + \frac{1}{2}q$$
$$\delta = \gamma q + \frac{1}{2}\beta q + \frac{1}{6}\alpha q + \frac{1}{24}q = q^4 + \frac{1}{2}q^3 + \frac{7}{12}q^2 + \frac{1}{4}q$$
$$\varepsilon = \delta q + \frac{1}{2}\gamma q + \frac{1}{6}\beta q + \frac{1}{24}\alpha q + \frac{1}{120}q$$

seu $\varepsilon = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{5}{4}q^2 + \frac{5}{12}q$ &

$\zeta = q^6 + \frac{1}{2}q^5 + \frac{11}{12}q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{37}{120}q^2 + \frac{1}{20}q$ &c.

seu

seu hoc modo exprimantur:

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \frac{2qq + q}{1.\ 2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1.\ 2.\ 3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$\varepsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \quad \&c.$$

ubi quilibet coefficiens 16800 oritur, si summa binorum superiorum 1560 + 1800 per exponentem ipsius q, qui hic est 5, multiplicetur.

173. Restituamus autem loco q valorem $\frac{1}{p-1}$,

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1.2\,(p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3\,(p-1)^3}$$

$$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4\,(p-1)^4}$$

$$\varepsilon = \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1.2.3.4.5\,(p-1)^5}$$

$\zeta =$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.2.3.4.5.6\,(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.2.3.4.5.6.7\,(p-1)^7}$$

&c.

Lex harum quantitatum ita se habet, ut si ponatur terminus quicunque:

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \&c.}{1.2.3 \ldots\ldots (n-1)(p-1)^{n-1}}$$

futurum sit:

$$A = 2^{n-1} - n$$

$$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

&c.

unde isti coefficientes α, β, γ, δ, &c. quousque libuerit, continuari possunt.

174. Quodsi vero legem, qua hi coefficientes inter se cohaerent, consideremus, facile patet, eos seriem recurrentem constituere, atque prodire si haec fractio evolvatur:

$$\frac{1}{1 - \frac{u}{p-1} - \frac{u^2}{2(p-1)} - \frac{u^3}{6(p-1)} - \frac{u^4}{24(p-1)} - \&c.}$$

prodibit enim haec series:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

Ponatur illa fractio $= V$, & cum sit:

$$V = \frac{p-1}{p - 1 - u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{24} - \&c.}$$

erit $V = \frac{p-1}{p-e^u}$; ubi e est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$.

Atque si valor ipsius V per seriem exprimatur secundum potestates ipsius u, orietur:

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{&c.}$$

cuius coefficientes α, β, γ, δ, &c. erunt ii ipsi, quorum in praesenti negotio opus habemus. Iis igitur inventis erit:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \text{&c.}\right) \pm \text{Const.}$$

quae ergo expressio est terminus summatorius seriei huius:

$$ap + bp^2 + cp^3 + \ldots\ldots + p^x z$$

cuius terminus generalis est $= p^x z$.

175. Quoniam invenimus esse $V = \frac{p-1}{p-e^u}$, erit $e^u = \frac{pV-p+1}{V}$, & logarithmis sumendis fiet $u = l(pV-p+1) - lV$, hinque; differentiando $du = \frac{(p-1)dV}{pV^2-(p-1)V}$ quocirca erit $pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}$. Quoniam ergo est $V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{&c.}$ erit:

$$\begin{aligned} pV^2 = {} & p + 2\alpha pu + 2\beta pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \text{&c.} \\ & + \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\beta pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \text{&c.} \\ & + \beta^2 pu^4 + 2\beta\gamma pu^5 + \text{&c.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p-1)V = {} & p - 1 + \alpha(p-1)u + \beta(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3 \\ & + \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \text{&c.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)dV}{du} = {} & (p-1)\alpha + 2(p-1)\beta u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3 \\ & + 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \text{&c.} \end{aligned}$$

quibus expressionibus inter se coaequatis reperietur:

(p

$$
\begin{aligned}
&(p-1)\,\alpha = 1\\
2\,&(p-1)\,\beta = \alpha(p+1)\\
3\,&(p-1)\,\gamma = \beta(p+1) + \alpha^2 p\\
4\,&(p-1)\,\delta = \gamma(p+1) + 2\alpha\beta p\\
5\,&(p-1)\,\varepsilon = \delta(p+1) + 2\alpha\gamma p + \beta^2 p\\
6\,&(p-1)\,\zeta = \varepsilon(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\beta\gamma p\\
7\,&(p-1)\,\eta = \zeta(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\beta\delta p + \gamma^2 p
\end{aligned}
$$

&c.

ex quibus formulis, si pro p datus numerus assumatur, valores coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. facilius determinari possunt, quam ex lege primum inventa.

176. Antequam ad casus speciales ratione valoris ipsius p descendamus, ponamus esse $z = x^n$, ita ut haec series summari debeat:

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \ldots + x^n p^x$$

eritque per expressionem ante inventam:

$$s = p^x\left(\frac{p}{p-1}\cdot x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3}\cdot\frac{n(n-1)}{1.\,2}\,x^{n-2} - \frac{(p^3+4p^2+p)}{(p-1)^4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\,x^{n-3} + \text{&c.}\right)$$

$\pm$ C, quae reddat $s = 0$ si ponatur $x = 0$.

Hinc ponendo pro n successive numeros 0, 1, 2, 3, 4, &c. erit:

$$
\begin{aligned}
S.x^0p^x &= p^x\cdot\frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}\\
S.x^1p^x &= p^x\left(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2}\right) + \frac{p}{(p-1)^2}\\
S.x^2p^x &= p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}\right) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}\\
S.x^3p^x &= p^x\left(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1}{(p-1)^4}\right)\\
&\quad + \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}
\end{aligned}
$$

S.x^4

$$\mathfrak{S}.x^4p^x = p^x\left(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4} + \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}\right) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$\mathfrak{S}.x^5p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3} - \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^4} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5} - \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

$$\mathfrak{S}.x^6p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3} - \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5} - \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6} + \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

&c.

177. Hinc intelligitur, quoties z fuerit functio rationalis integra ipsius x, toties seriei, cuius terminus generalis est $p^x z$, summam exhiberi posse; propterea quod differentialia ipsius z sumendo, tandem ad evanescentia perveniatur. Ita si proponatur haec series:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \ldots + \frac{(xx+x)}{2}p^x,$$

ob $z = \frac{xx+x}{2}$, & $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; atque $\frac{ddz}{dx^2} = 1$;

erit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x - \frac{2x+1}{2(p-1)} + \frac{p+1}{2(p-1)^2}\right) - \frac{p}{p-1}\left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)}\right)$$

seu $s = p^{x+1}\left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^3}$.

Sin autem z fuerit functio non rationalis integra, tum ista termini summatorii expressio in infinitum excurret. Ita si sit $z = \frac{1}{x}$, ut summanda sit haec series:

$$s = p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{4}p^4 + \ldots + \frac{1}{x}p^x, \text{ ob}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx};\ \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3};\ \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4};\ \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5};\ \text{&c.}$$

prodibit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \text{&c.}\right) + C.$$

Hoc ergo casu constans C non ex casu $x = 0$ definiri potest: ad eam igitur definiendam ponatur $x = 1$, & quia fit $s = p$, erit:

$$C = p - \frac{pp}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \text{&c.}\right)$$

178. Ex his perspicuum est, nisi p determinatum numerum significet, parum utilitatis hinc ad summas serierum proxime exhibendas redundare. Primum autem patet pro p non posse scribi 1, propterea quod omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. fierent infinite magni. Quare cum series, quam nunc tractamus, abeat in eam quam ante iam sumus contemplati si ponatur $p = 1$, mirum est, quod ille casus tanquam facillimus ex hoc erui nequeat. Tum vero quoque notabile est, quod casu $p = 1$ summatio requirat integrale $\int z dx$, cum tamen generaliter summa fine ullo integrali exhiberi queat. Sic igitur fit, ut dum omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. in infinitum excrescunt, simul formula illa integralis invehatur. Hicque adeo casus, quo $p = 1$, est solus, ad

quem

quem generalis expreſſio hic inventa applicari nequeat. Neque vero hoc caſu generalis forma a vero recedere cenſenda eſt; nam etſi ſinguli termini fiunt infiniti, tamen revera omnia infinita ſe deſtruunt, reſtatque quantitas finita ſummae aequalis, & congruens cum ea, quae per priorem methodum invenitur, quod infra fuſius ſumus declaraturi.

179. Sit igitur $p = -1$, atque ſigna in ſerie ſummanda alternatim ſe excipient:

$$\overset{1}{-}a\overset{2}{+}b\overset{3}{-}c\overset{4}{+}d \ldots \ldots \overset{x}{\pm}z$$

ubi z erit affirmativum ſi x fuerit numerus par, negativum autem, ſi x ſit numerus impar. Poſito ergo

$$-a+b-c+d \ldots \pm z = s, \text{ erit}$$

$$s = \frac{\pm 1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \text{&c.}\right) + C.$$

ubi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi x ſit numerus par, contra vero ſi x ſit numerus impar. Mutandis ergo ſignis erit:

$$a-b+c-d+e-f+ \ldots \mp z =$$

$$\mp\frac{1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \text{&c.}\right) + C.$$

ubi ſignorum ambiguitas eandem ſequitur legem.

180. Hoc caſu coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, &c. inveniri poſſunt ex valoribus ante traditis ponendo ubique $p = -1$. Facilius autem eruentur ex formulis generalibus §. 175. datis, ex quibus ſimul perſpicietur alternos iſtos coefficientes evaneſcere. Facto enim $p = -1$ iſtae formulae abibunt in

$$\begin{aligned}
-2\alpha &= 1\\
-4\beta &= 0\\
-6\gamma &= 0 - \alpha^2\\
-8\delta &= 0 - 2\alpha\beta\\
-10\varepsilon &= 0 - 2\alpha\gamma - \beta\beta\\
-12\zeta &= 0 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma \quad \text{&c.}
\end{aligned}$$

unde cum sit $\delta = 0$, erit quoque $\delta = 0$, porroque $\zeta = 0$, $\theta = 0$, &c. & reliquae litterae ita determinabuntur, ut sit:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \; ; \quad \gamma = \frac{a^2}{6} \; ; \quad \varepsilon = \frac{2a\gamma}{10} \; ;$$

$$\eta = \frac{2a\varepsilon + \gamma\gamma}{14} \; ; \quad \iota = \frac{2a\eta + 2\gamma\varepsilon}{18} \; ; \text{ &c.}$$

181. Quo iste calculus commodius absolvi possit introducamus novas litteras sitque:

$$\alpha = -\frac{A}{1.2} \; ; \quad \gamma = \frac{B}{1.2.3.4} \; ; \quad \varepsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6} \; ;$$

$$\eta = \frac{D}{1.2.3.\ldots.8} \; ; \; \iota = -\frac{E}{1.2.3\ldots10} \; ; \quad \text{&c.}$$

Eritque summa ante exhibita:

$$\mp\frac{1}{2}\left(z + \frac{Adz}{1.2dx} - \frac{Bd^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{Cd^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \frac{Dd^7z}{1.2\ldots8dx^7} + \text{&c.}\right) + \text{Const.}$$

Coefficientes vero ex sequentibus formulis definientur:

$$A = 1$$

$$3B = \frac{4.3}{1.2}\,\frac{AA}{2}$$

$$5C = \frac{6.5}{1.2}\,AB$$

$$7D = \frac{8.7}{1.2}\,AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{BB}{2}$$

$$9E = \frac{10.9}{1.2}\,AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot BC$$

$$11F = \frac{12.11}{1.2.}\,AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}\cdot BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{CC}{2}$$

&c.

quae hoc modo facilius atque ad calculum accommodatius repraesentari possunt:

$$A = 1$$

$$B = 2.\frac{AA}{2}$$

$$C = 3.AB$$

$$D = 4.AC + 4.\frac{6.5}{3.4}.\frac{BB}{2}$$

$$E = 5.AD + 5.\frac{8.7}{3.4}.BC$$

$$F = 6.AE + 6.\frac{10.9}{3.4}.BD + 6.\frac{10.9.8.7}{3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$

$$G = 7.AF + 7.\frac{12.11}{3.4}.BE + 7.\frac{12.11.10.9}{3.4.5.6}.CD$$

&c.

Hinc igitur calculo instituto reperietur:

$A = 1$
$B = 1$
$C = 3$
$D = 17$
$E = 155 = 5.31$
$F = 2073 = 691.3$
$G = 38227 = 7.5461 = 7.\frac{127.129}{3}$
$H = 929569 = 3617.257$
$I = 28820619 = 43867.9.73$ &c.

182. Si hos numeros attentius perpendamus, ex factoribus 691, 3617, 43867, facile concludere licet, hos numeros cum supra exhibitis Bernoullianis nexum habere, indeque determinari posse. Hanc igitur relationem investiganti mox patebit hos numeros ex Bernoullianis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. sequenti modo formari posse:

$A = 2.1.3$ $\mathfrak{A} = 2(2^2-1)\mathfrak{A}$
$B = 2.3.5$ $\mathfrak{B} = 2(2^4-1)\mathfrak{B}$
$C = 2.7.9$ $\mathfrak{C} = 2(2^6-1)\mathfrak{C}$
$D = 2.15.17$ $\mathfrak{D} = 2(2^8-1)\mathfrak{D}$
$E = 2.31.33$ $\mathfrak{E} = 2(2^{10}-1)\mathfrak{E}$
$F = 2.63.65$ $\mathfrak{F} = 2(2^{12}-1)\mathfrak{F}$
$G = 2.127.129$ $\mathfrak{G} = 2(2^{14}-1)\mathfrak{G}$
$H = 2.255.257$ $\mathfrak{H} = 2(2^{16}-1)\mathfrak{H}$

&c.

Cum igitur numeri Bernoulliani sint fracti, coefficientes vero nostri integri, patet hos factores semper tollere fractiones; eruntque ergo:

$A = 1$
$B = 1$
$C = 3$
$D = 17$
$E = 5.31 = 155$
$F = 3.691 = 2073$
$G = 7.43.127 = 38227$
$H = 257.3617 = 929569$
$I = 9.73.43867 = 28820619$
$K = 5.31.41.174611 = 1109652905$
$L = 89.683.854513 = 5194328173 1$
$M = 3.4097.23636409 1 = 29051510424 81$
$N = 2731.8191.8553103 = 1913296724 83963$

&c.

Ex his ergo numeris integris viciſſim numeri Bernoulliani inveniri poterunt.

183. Adhibendo igitur numeros Bernoullianos ſeriei propoſitae: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \infty \\ a & -b & +c & -d & +e & - & \mp z \end{matrix}$, ſumma erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \frac{(2^8-1)\mathfrak{D}d^7z}{1.2\ldots8dx^7} + \text{&c.}\right) + \text{Conſt.}$$

Hinc

Hinc autem perſpicitur iſtos numeros non caſu in hanc expreſſionem ingredi; quemadmodum enim ſeries propoſita oritur, ſi ab iſta: $a+b+c+d+\ldots\ldots+z$, ubi omnes termini ſignum habent $+$ ſubtrahatur ſumma alternorum $b+d+f+$ &c. bis ſumta; ita quoque expreſſio inventa in duas reſolvi poteſt partes, quarum altera eſt ſumma omnium terminorum ſigno $+$ affectorum, quae erit:

$$\int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{&c.}$$

Summa vero alternorum pari modo invenietur, quo ſupra uſi ſumus. Cum enim ultimus terminus ſit z indici x reſpondens, antecedens indici $x-2$ reſpondens erit;

$$z - \frac{2dz}{dx} + \frac{2^2ddz}{1.2dx^2} - \frac{2^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \frac{2^4d^4z}{1.2.3.4dx^4} - \text{&c.}$$

quae forma ex illa, qua ante terminus antecedens exprimebatur, oritur, ſi loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$. Habebitur ergo ſumma alternorum, ſi in ſumma omnium ubique loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$, quae propterea erit:

$$\frac{1}{2}\int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{2\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{2^3\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{2^5\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{&c.}$$

cuius duplum ſi a ſumma praecedente ſubtrahatur, exiſtente x numero pari, vel ſi praecedens ſumma a duplo huius ſi x eſt numerus impar ſubtrahatur, reſiduum oſtendet ſummam ſeriei:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & x \\ a & -b & +c & -d & +e & \ldots & \ldots & \mp & z \end{array}$$

quae ergo erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \text{&c.}\right) + C.$$

quae eſt eadem expreſſio, quam modo invenieramus.

184. Sumatur pro z potestas ipsius x, nempe x^n, ut reperiatur summa seriei:

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots \mp x^n.$$

Ob $\frac{dz}{1dx} = \frac{n}{1} x^{n-1}$; $\frac{d^3z}{1.2.3\,dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}$; &c.

erit adhibendis coefficientibus A, B, C, &c. summa quaesita:

$$\mp \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{A}{2} n x^{n-1} - \frac{B}{4} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-2} + \frac{C}{6} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} x^{n-5} - \frac{D}{8} \frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.2\ldots\ldots7} x^{n-7} + \text{&c.}\right) + \text{Const.}$$

ubi signum superius valet si sit x numerus par, inferius vero si impar. Constans autem ita definiri debet, ut summa evanescat, si $x = 0$, quo casu signum superius valet. Pro n ergo successive numeros 0, 1, 2, 3, &c. substituendo sequentes prodibunt summationes:

I. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \mp 1 = \mp \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}$
scilicet si numerus terminorum fuerit par, summa erit $= 0$, sin impar erit $= +1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \mp x = \mp \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
scilicet si numerus terminorum sit par, summa erit $= -\frac{1}{2}x$
& pro numero terminorum impari $= +\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots \mp x^2 = \mp \frac{1}{2}(x^2 + x)$
scilicet pro pari numero $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
& pro impari numero $= +\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots \mp x^3 = \mp \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
scilicet pro pari $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2$
& pro impari $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots \mp x^4 = \mp \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
scilicet pro numero pari $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
& pro numero impari $= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$
&c.

185. Apparet ergo in potestatibus paribus praeter $n = 0$, constantem adiiciendam evanescere, hisque casibus sum-

summam terminorum numero sive parium sive imparium tantum ratione signi discrepare. Quodsi ergo n fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, haec consideratio cessare debet, ac propterea in summa termini ambigui sunt reiiciendi: unde sequitur huiusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adiiciendam. Hancobrem erit:

$$1-1+1-1+\text{&c. in infinitum} = \frac{1}{2}$$

$$1-2+3-4+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = \frac{A}{4} = +\frac{(2^1-1)\mathfrak{A}}{2}$$

$$1-2^2+3^2-4^2+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = 0$$

$$1-2^3+3^3-4^3+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = -\frac{B}{8} = -\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}}{4}$$

$$1-2^4+3^4-4^4+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = 0$$

$$1-2^5+3^5-4^5+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = \frac{C}{12} = +\frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6}$$

$$1-2^6+3^6-4^6+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = 0$$

$$1-2^7+3^7-4^7+\text{&c.} \quad . \quad . \quad . = -\frac{D}{16} = -\frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}$$

&c.

Quae eaedem summae per methodum supra traditam series, in quibus signa + & — alternantur, summandi inveniuntur.

186. Si pro n statuantur numeri negativi, expressio summae in infinitum excurret. Sit $n=-1$, erit summa seriei:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+ \quad . \quad . \quad . \quad . \mp\frac{1}{x} =$$

$$\mp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{A}{2x^2}+\frac{B}{4x^4}-\frac{C}{6x^6}+\frac{D}{8x^8}-\text{&c.}\right)+\text{Const.}$$

Hic autem quia constans non ex casu $x=0$ definiri potest,

ex alio casu erit definienda. Ponatur $x = 1$, atque ob summam $= 1$ & signum inferius erit:

$$\text{Const.} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \&c.\right) \quad \text{seu}$$

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \&c.$$

Vel ponatur $x = 2$, ob summam $= \frac{1}{2}$, & signum superius reperietur:

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2.2^2} + \frac{B}{4.2^4} - \frac{C}{6.2^6} + \&c.\right)$$

$$\text{seu Const.} = \frac{3}{4} - \frac{A}{4.2^2} + \frac{B}{8.2^4} - \frac{C}{12.2^6} + \frac{D}{16.2^8} - \&c.$$

sin autem ponatur $x = 4$, erit:

$$\text{Const.} = \frac{17}{24} - \frac{A}{4.4^2} + \frac{B}{8.4^4} - \frac{C}{12.4^6} + \frac{D}{16.4^8} - \&c.$$

Utcumque autem constans definiatur, idem prodibit valor, qui simul summam seriei in infinitum continuatae, quae est $= l2$, indicabit.

187. Ceterum ex his novis numeris A, B, C, D, E, &c. summae serierum potestatum reciprocarum parium, in quibus tantum numeri impares occurrunt, commode summari poterunt. Si enim ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \&c. = s \text{ erit}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \&c. = \frac{s}{2^{2n}},$$

quae ab illa subtracta relinquet:

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)s}{2^{2n}}.$$

Cum

Cum igitur valores ipsius s pro singulis numeris n iam supra exhibuerimus: (125), erit:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\&c. = \frac{A}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{4}$$
$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\&c. = \frac{B}{1.2.3.4}\cdot\frac{\pi^4}{4}$$
$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\&c. = \frac{C}{1.2.3\ldots6}\cdot\frac{\pi^6}{4}$$
$$1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\&c. = \frac{D}{1.2.3\ldots8}\cdot\frac{\pi^8}{4}$$
$$1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\&c. = \frac{E}{1.2.3\ldots10}\cdot\frac{\pi^{10}}{4}$$

&c.

Sin autem omnes numeri ingrediantur, signaque alternentur quia erit:

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\&c. = \frac{(2^{2n}-1)s-s}{2^{2n}}$$

habebitur:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\&c. = \frac{(A-2\mathfrak{A})}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\pi^2$$
$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\&c. = \frac{(B-2\mathfrak{B})}{1.2.3.4}\cdot\frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\cdot\pi^4$$
$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\&c. = \frac{(C-2\mathfrak{C})}{1.2\ldots6}\cdot\frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\cdot\pi^6$$
$$1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}-\&c. = \frac{(D-2\mathfrak{D})}{1.2\ldots8}\cdot\frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.2\ldots8}\cdot\pi^8$$
$$1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\&c. = \frac{(E-2\mathfrak{E})}{1.2\ldots10}\cdot\frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1.2\ldots10}\cdot\pi^{10}$$

&c.

188. Quemadmodum hactenus seriem sumus contemplati, cuius termini erant producta ex terminis progressionis geome-

geometricae p, p^2, p^3, &c. & ex terminis seriei cuiuscunque a, b, c, &c. ita poterimus simili ratione prosequi seriem, cuius termini sint productа ex terminis duarum quarumcunque serierum, quarum altera tanquam cognita assumatur.

Sit series cognita: $A^1 + B^2 + C^3 + \ldots + Z^x$
altera vero incognita $a + b + c + \ldots + z$
atque quaeratur summa huius seriei:
$Aa + Bb + Cc + \ldots + Zz$
quae ponatur $= Zs$. Sit in serie cognita terminus penultimus $= Y$, atque posito $x - 1$ loco x expressio summae $S.Zs$ abibit in

$$Y\left(s - \frac{ds}{dx} + \frac{ddds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.\right)$$

Quae cum exprimat summam seriei Zs termino ultimo Zz multatae erit:

$$Zs - Zz = Ys - \frac{Yds}{dx} + \frac{Yddds}{2dx^2} - \frac{Yd^3s}{6dx^3} + \&c.$$

quae aequatio continet relationem, qua summa Zs pendet ab Y, Z, & z.

189. Ad hanc aequationem resolvendam negligantur primum termini differentiales, eritque $s = \frac{Zz}{Z - Y}$, ponatur iste valor $\frac{Zz}{Z - Y} = P^1$, sitque revera $s = P^1 + p$, quo valore in aequatione substituto fiet:

$$(Z - Y)p = -\frac{YdP^1}{dx} + \frac{YddP^1}{2dx^2} - \&c.$$
$$- \frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^2} - \&c.$$

addatur utrinque YP^1, & cum $P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2dx^2} - \&c.$

fit valor ipsius P', qui prodit si loco x ponatur $x-1$, sit iste valor $= P$, eritque

$$(Z-Y)p+YP' = YP - \frac{Y dp}{dx} + \frac{Y ddp}{2dx^2} - \&c.$$

unde neglectis differentialibus erit: $p = \frac{Y(P-P')}{Z-Y}$.

Ponatur $\frac{Y(P-P')}{Z-Y} = Q'$, fitque $p = Q' + q$; fiet

$$(Z-Y)q = -\frac{Y(dQ'+dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ'+ddq)}{2dx^2} - \&c.$$

positoque Q pro valore ipsius Q', quem induit si loco x scribatur $x-1$, erit:

$$(Z-Y)q + YQ' = YQ - \frac{Y dq}{dx} + \frac{Y ddq}{2dx^2} - \&c.$$

unde neglectis differentialibus fit $q = \frac{Y(Q-Q')}{Z-Y}$.

Ponatur $\frac{Y(Q-Q')}{Z-Y} = R'$, fitque revera $q = R' + r$;

ac simili modo reperitur $r = \frac{Y(R-R')}{Z-Y}$, sicque procedendo erit summa quaesita: $Zs = Z(P' + Q' + R' + \&c.)$.

190. Proposita ergo serie quacunque:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots\ldots + Yy + Z\varepsilon$$

eius summa sequenti modo definietur:

Ponatur posito $x-1$ loco x

$\frac{Z\varepsilon}{Z-Y} = P'$; abeatque P' in P

$\frac{Y(P-P')}{Z-Y} = Q'$; abeatque Q' in Q

$\frac{Y(Q-Q')}{Z-Y} = R'$; abeatque R' in R

$\frac{Y(R-R')}{Z-Y} = S'$; abeatque S' in S

&c.

His valoribus inventis erit summa seriei =

$$ZP' + ZQ' + ZR' + ZS' + \&c.$$

+ Constante, quae reddat summam $= 0$, si ponatur $x = 0$, seu quod eodem redit, quae efficiat, ut cuipiam casui satisfiat.

191. Formula haec, quia nullis differentialibus est implicata, in plurimis casibus facillime adhibetur, atque etiam veram summam saepenumero exhibet. Sic si proponatur haec series:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \ldots + x^2 p^x$$

fiat $Z = p^x$ & $z = x^2$, erit $Y = p^{x-1}$, atque

$\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}$, & $\frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}$, Hinc fiet

$$P' = \frac{px^2}{p-1}; \qquad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q' = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \qquad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R' = \frac{2p}{(p-1)^3}; \qquad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$S' = 0;$$ & reliqui evanescunt omnes:

unde erit summa =

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$= p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p+1}{(p-1)^3},$$

quemadmodum iam supra invenimus.

192. Simili modo, quo ad hanc summae expressionem pervenimus, aliam invenire poterimus expressionem, si series proposita non ex duabus aliis sit composita: quae illis potissimum

simum casibus in usum vocari poterit, cum in praecedente expressione ad denominatores evanescentes pervenitur. Sit igitur proposita haec series:

$$s = a + b + c + d + \ldots + z$$

quoniam posito $x-1$ loco x, summa ultimo termino truncatur, erit:

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.$$

seu $$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \&c.$$

Quia hic ipsa summa s non occurrit, negligantur differentialia altiora, fietque $s = \int z dx$, ponatur $\int z dx = P'$, cuius valor abeat in P si pro x scribatur $x-1$: sitque revera $s = P' + p$, erit:

$$z = \frac{dP'}{dx} - \frac{ddP'}{2dx^2} + \&c. + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \&c.$$

quia est $$P = P' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddP'}{2dx^2} - \&c.$$

erit $$z - P' + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \&c.$$ unde fit $p = \int (z - P' + P) dx$. Si porro ponatur $\int (z - P' + P) dx = Q'$, hicque valor abeat in Q posito $x-1$ loco x, fit $\int (z - P' + P - Q' + Q) dx = R' = Q' - \int (Q' - Q) dx$ porro $R' - \int (R' - R) dx = S'$; &c. erit summa quaesita: $s = P' + Q' + R' + S' + \&c. +$ Con. qua uni casui satisfiat.

193. Mutatis aliquantum litteris ista summatio huc redit. Proposita serie summanda:

$$s = a + b + c + d + \ldots + z$$

ponatur	*posito* $x-1$	*loco* x
$\int z dx = P$	abeatque P	in p
$P - \int (P - p) dx = Q$	abeatque Q	in q
$Q - \int (Q - q) dx = R$	abeatque R	in r

quibus valoribus inventis erit summa quaesita:

$$s = P + Q + R + S + \&c.$$

haecque expressio expedite ostendit summam, si formulae istae integrales exhiberi queant. Sit, ut usum eius exemplo illustremus, $z = xx + x$, eritque

$$P = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx; \quad p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}$$
$$P - p = xx - \frac{1}{6} \quad \& \quad \int (P - p)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$
$$Q = \frac{1}{3}xx + \frac{1}{6}x; \quad q = \frac{1}{3}xx - \frac{1}{6}x + \frac{1}{30}$$
$$Q - q = x - \frac{1}{5} \quad \& \quad \int (Q - q)\,dx = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{5}x$$
$$R = \frac{1}{2}x \quad ; \quad r = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$
$$R - r = \frac{1}{4} \quad ; \quad \int (R - r)\,dx = \frac{1}{4}x$$

$S = 0$, reliquique valores evanescunt. Quare summa quaesita erit:

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{5}{6}xx + \frac{1}{6}x = \frac{1}{3}x^3 + xx + \frac{5}{6}x = \frac{1}{4}x(x+1)(x+2) + \frac{1}{4}x.$$

Hocque ergo modo omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones rationales integrae ipsius x, summae ope integrationum continuarum inveniri possunt. Ex quibus facile perspicitur, quam amplum occupet campum doctrina de summatione serierum, neque omnibus methodis, quae tum habentur tum adhuc excogitari possunt, capiendis plura volumina sufficere.

194. Hactenus summas serierum investigavimus a termino primo usque ad eum cuius index est x, quibus cognitis ponendo $x = \infty$ ipsius seriei in infinitum continuatae summa innotescet. Saepenumero autem hoc expeditius praestatur, si non summa terminorum a primo usque ad eum cuius index est x, sed summa omnium terminorum ab isto, cuius index est x, in infinitum usque quaeratur, hocque casu imprimis expressiones ultimae fiunt tractabiliores. Sit igitur proposita series cuius terminus generalis seu indici x respondens sit $= z$, sequens indici $x + 1$ respondens sit $= z'$, hunc que ultra sequentes sint z'', z''', &c. quaeraturque summa huius seriei infinitae:

x,

$x, x+1, x+2, x+3,$ &c.

$s = z + z' + z'' + z''' +$ &c. in infinitum.

Haec igitur summa s erit functio ipsius x, in qua si ponatur $x+1$ loco x, orietur summa prior termino z truncata. Cum ergo hac mutatione s abeat in

$$s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \text{&c.} \quad \text{erit:}$$

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{&c.}$$

$$\text{seu } 0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{&c.}$$

195. Si nunc ut ante ratiocinium instituamus, fiet neglectis differentialibus superioribus, $s = C - \int z dx$. Ponatur ergo $\int z dx = P$, sitque revera $s = C - P + p$, erit

$$0 = z - \frac{dP}{dx} - \frac{ddP}{2dx^2} - \frac{d^3P}{6dx^3} - \text{&c.}$$
$$+ \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{&c.}$$

Abeat P in P', si loco x ponatur $x+1$, eritque

$$0 = z + P - P' + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{&c.}$$

Hinc neglectis differentialibus altioribus fiet:

$p = \int (P' - P) dx - P$. Statuatur $\int (P' - P) dx - P = -Q$, sitque $p = -Q + q$, erit:

$$0 = z + P - P' - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2dx^2} - \text{&c.} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{&c.}$$

Abeat Q in Q', si loco x ponatur $x+1$, eritque:

$$0 = z + P - P' + Q - Q' + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{&c.}$$

unde sequitur $q = \int (Q' - Q) dx - Q$. Quamobrem si comma cuique quantitati infixum denotet eius valorem, quem induit posito $x+1$ loco x, ponaturque

$$\int z\,dx = P$$
$$P - \int (P' - P)\,dx = Q$$
$$Q - \int (Q' - Q)\,dx = R$$
$$R - \int (R' - R)\,dx = S \quad \&c.$$

erit seriei propositae $z + z' + z'' + z''' + z'' + \&c.$ summa $= C - P - Q - R - S - \&c.$ ubi constans C ita debet definiri, ut posito $x = \infty$ tota summa evanescat. Quia autem applicatio huius expressionis integrationes requirit, hoc loco eius usum declarare non licet.

196. Ut autem formulas integrales evitemus, statuamus summam seriei $= y\,s$, existente y functione ipsius x quacunque cognita, cuius valores y', y'', &c. qui prodeunt ponendo $x + 1$, $x + 2$, &c. loco x, erunt noti. Si iam ponatur $x + 1$ loco x prodibit superior series termino primo mulctata, cuius summa propterea erit

$$y'\left(s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \&c.\right) = y's - z$$

seu $$z + \frac{y'ds}{dx} + \frac{y'dds}{2dx^2} + \frac{y'd^3s}{6dx^3} + \&c. = (y - y')s$$

unde neglectis differentialibus oritur $s = \frac{z}{y - y'}$. Statuatur $\frac{z}{y' - y} = P$, sitque revera $s = -P + p$, erit

$$-\frac{y'dP}{dx} - \frac{y'ddP}{2dx^2} - \frac{y'd^2P}{6dx^3} - \&c. + \frac{y'dp}{dx} + \frac{y'ddp}{2dx^2} + \frac{y'd^2p}{6dx^3} + \&c. = (y - y')p$$

ideoque $$\frac{y'dp}{dx} + \frac{y'ddp}{2dx^2} + \frac{y'd^2p}{6dx^3} + \&c. = y'(P' - P) - (y' - y)p.$$

Statuatur $Q = \frac{y'(P' - P)}{y' - y}$, sitque $p = Q + q$; erit:

$$y'(Q' - Q) + y'\left(\frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \&c.\right) = -(y' - y)q.$$

Statuatur $R = \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y}$, sitque $q = -R + r$.

Hocque modo si ulterius progrediamur. Seriei propositae:
$$z + z' + z'' + z''' + z'' + \&c.$$
summa sequenti modo invenietur.
Sumta pro lubitu functione ipsius x, quae sit $= y$, statuatur:

$$P = \frac{z}{y' - y} = \frac{z}{\Delta y}$$
$$Q = \frac{y'(P' - P)}{y' - y} = \frac{y\Delta P}{\Delta y} + \Delta P$$
$$R = \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y} = \frac{y\Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q$$
$$S = \frac{y'(R' - R)}{y' - y} = \frac{y\Delta R}{\Delta y} + \Delta R \quad \&c.$$

Hinc que erit summa quaesita:
$$= C - Py + Qy - Ry + Sy - \&c.$$
Sumta pro C eiusmodi constante, ut posito $x = \infty$ summa evanescat.

197. Sumatur $y = a^x$, ob $y' = a^{x+1}$, erit: $y' - y = a^x(a - 1)$, unde fiet:

$$P = \frac{z}{a^x(a-1)} \; ; \; P' = \frac{z'}{a^{x+1}(a-1)}$$
$$Q = \frac{a(P' - P)}{a-1} = \frac{z' - az}{a^x(a-1)^2} \; ; \; Q' = \frac{z'' - az'}{a^{x+1}(a-1)^2}$$
$$R = \frac{a(Q' - Q)}{a-1} = \frac{z'' - 2az' + aaz}{a^x(a-1)^3}$$
$$S = \frac{a(R' - R)}{a-1} = \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{a^x(a-1)^4} \quad \&c.$$

Quocirca summa seriei propositae erit:
$$C - \frac{z}{a-1} + \frac{z' - az}{(a-1)^2} - \frac{z'' + 2az' - a^2z}{(a-1)^3} + \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{(a-1)^4} \&c.$$
Haec vero eadem summae expressio iam supra est inventa Capite primo. Hinc autem aliis pro y valoribus accipiendis infinitae aliae expressiones erui poterunt; unde ea, quae cuique casui maxime sit accommodata, eligi potest.

CAPUT VIII.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN FORMANDIS SERIEBUS.

198.

Unum adhuc calculi differentialis usum in doctrina serierum commemorabimus, qui in ipsa formatione serierum consistit, & ad quem iam supra provocavimus, cum quaestio esset de fractione, cuius denominator sit potestas quaecunque functionis cuiuspiam, in seriem evolvenda. Ista methodus autem similis est ei, qua iam aliquoties sumus usi, dum functio in seriem convertenda aequalis fingitur cuipiam seriei, in singulis terminis coefficientes indeterminatos habenti, qui deinceps aequalitate constituta determinentur. Haec autem determinatio saepenumero mirifice adiuvatur, si antequam ea suscipiatur ad differentialia cum prima, tum nonnunquam quoque ad secunda aequatio perducatur. Quae methodus cum in calculo integrali amplissimi sit usus, eam hic diligentius exponemus.

199. Primum igitur breviter repetamus, quae supra de evolutione fractionum in series sine calculi differentialis subsidio attulimus. Sit fractio quaecunque proposita:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.} = s$$

quam in seriem secundum potestates ipsius x procedentem converti oporteat. Fingatur pro s series indeterminata:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

Cum igitur fractione per multiplicationem sublata sit:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 \quad \&c.$$
$$= s(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 \quad \&c.)$$

si pro s series ficta substituatur prodibit sequens aequatio:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c. =$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$
$$+\mathfrak{A}^\delta + \mathfrak{B}^\delta + \mathfrak{C}^\delta + \mathfrak{D}^\delta + \mathfrak{E}^\delta + \&c.$$
$$+\mathfrak{A}^\gamma + \mathfrak{B}^\gamma + \mathfrak{C}^\gamma + \mathfrak{D}^\gamma + \&c.$$
$$+\mathfrak{A}^\beta + \mathfrak{B}^\beta + \mathfrak{C}^\beta + \&c.$$
$$+\mathfrak{A}^\varepsilon + \mathfrak{B}^\varepsilon + \&c.$$
$$+\mathfrak{A}^\zeta + \&c.$$

Aequalitate ergo inter singulos terminos, qui easdem ipsius x potestates continent, constituta fiet:

$$\mathfrak{A}^\alpha - A = 0$$
$$\mathfrak{B}x + \mathfrak{A}^\delta - B = 0$$
$$\mathfrak{C}x + \mathfrak{B}^\delta + \mathfrak{A}^\gamma - C = 0$$
$$\mathfrak{D}x + \mathfrak{C}^\delta + \mathfrak{B}^\gamma + \mathfrak{A}^\beta - D = 0$$
$$\mathfrak{E}x + \mathfrak{D}^\delta + \mathfrak{C}^\gamma + \mathfrak{B}^\beta + \mathfrak{A}^\varepsilon - E = 0 \quad \&c.$$

ex quibus aequationibus coefficientes ficti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. determinantur, sicque series infinita invenitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

fractioni propositae s aequalis. Atque in hac forma si tam numerator quam denominator fractionis s finito terminorum numero constent, omnes series recurrentes comprehenduntur, de quibus iam supra fusius est tractatum.

200. Quodsi autem vel numerator vel denominator vel uterque ad dignitatem quamcunque fuerit elevatus, tum hoc modo series difficulter obtinetur; propterea quod negotium, nisi functio elevata sit binomium, perquam sit laboriosum. Calculo autem differentiali iste labor evitari potest. Adsit primum solus numerator, sitque:

$$s = (A + Bx + Cxx)^n,$$

unde quaeratur series secundum potestates ipsius x procedens huic trinomii dignitati aequalis; quam quidem finitam fore constat, si exponens n fuerit numerus integer affirmativus. Fingatur iterum pro s series indefinita:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

cuius terminum primum $\mathfrak{A}$ constat esse $= A^n$: si enim ponatur

tur $x=0$, ex priori forma proposita fit $s=A^n$, ex serie autem ficta $s=\mathfrak{A}$. Haec autem primi termini determinatio ex ipsa rei natura est petenda, si ad differentialia descendere velimus, quia hinc primus terminus non determinatur, uti mox patebit.

201. Cum sit $s=(A+Bx+Cx^2)^n$, erit logarithmis sumendis $ls=nl(A+Bx+Cx^2)$, hincque sumtis differentialibus habebitur: $\frac{ds}{s}=\frac{nBdx+2nCxdx}{A+Bx+Cx^2}$, seu

$$(A+Bx+Cx^2)\frac{ds}{dx}=ns(B+2Cx).$$

Ex serie autem ficta est:

$$\frac{ds}{dx}=\mathfrak{B}+2\mathfrak{C}x+3\mathfrak{D}x^2+4\mathfrak{E}x^3+5\mathfrak{F}x^4+\&c.$$

si igitur haec series loco $\frac{ds}{dx}$, & pro s ipsa series ficta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
A\mathfrak{B}+ & 2A\mathfrak{C}x+ & 3A\mathfrak{D}x^2+ & 4A\mathfrak{E}x^3+ & 5A\mathfrak{F}x^4+ & \&c. & \\
+ & B\mathfrak{B}+ & 2B\mathfrak{C}+ & 3B\mathfrak{D}+ & 4B\mathfrak{E}+ & \&c. & \\
+ & C\mathfrak{B}+ & 2C\mathfrak{C}+ & 3C\mathfrak{D}+ & \&c. & = & \\
\hline
nB\mathfrak{A}+ & nB\mathfrak{B}+ & nB\mathfrak{C}+ & nB\mathfrak{D}+ & nB\mathfrak{E}+ & \&c. & \\
+2nC\mathfrak{A}+ & 2nC\mathfrak{B}+ & 2nC\mathfrak{C}+ & 2nC\mathfrak{D}+ & \&c. & &
\end{array}$$

Aequalitate ergo hic inter terminos eiusdem ipsius x potestatis constituta erit:

$$\mathfrak{B}=\frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(n-1)B\mathfrak{B}+2nC\mathfrak{A}}{2A}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{(n-2)B\mathfrak{C}+(2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$$\mathfrak{E}=\frac{(n-3)B\mathfrak{D}+(2n-2)C\mathfrak{C}}{4A}$$

$$\mathfrak{F}=\frac{(n-4)B\mathfrak{E}+(2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}\qquad\&c.$$

Cum igitur ut ante vidimus sit $\mathfrak{A} = A^n$, erit $\mathfrak{B} = n A^{n-1} B$, hincque reliqui coefficientes omnes successive determinabuntur. Lex autem, quam ipsi sequuntur facillime ex his formulis patet, quae vehementer obscura manssisset, si trinomium actu elevare voluissemus.

202. Haec eadem methodus succedit, si polynomium quodcunque ad quampiam dignitatem elevari debeat. Sit $s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)^n$ fingaturque:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

erit $\mathfrak{A} = A^n$, qui valor colligitur, si ponatur $x = 0$. Sumtis iam ut ante logarithmis, eorumque differentialibus reperietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nB\,dx + 2nCx\,dx + 3nDx^2\,dx + 4nEx^3\,dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.}$$

seu $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)\frac{ds}{dx} =$

$s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \&c.)$. Cum igitur sit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

Erit his seriebus pro s & $\frac{ds}{dx}$ substitutis:

$$\begin{array}{rrrrrr}
A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x + 3A\mathfrak{D}x^2 + 4A\mathfrak{E}x^3 + 5A\mathfrak{F}x^4 + \&c. \\
+ B\mathfrak{B} + 2B\mathfrak{C} + 3B\mathfrak{D} + 4B\mathfrak{E} + \&c. \\
+ C\mathfrak{B} + 2C\mathfrak{C} + 3C\mathfrak{D} + \&c. \\
+ D\mathfrak{B} + 2D\mathfrak{C} + \&c. \\
+ E\mathfrak{B} + \&c. = \\
\hline
nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} + nB\mathfrak{C} + nB\mathfrak{D} + nB\mathfrak{E} + \&c. \\
+2nC\mathfrak{A} + 2nC\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{C} + 2nC\mathfrak{D} + \&c. \\
+3nD\mathfrak{A} + 3nD\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{C} + \&c. \\
+4nE\mathfrak{A} + 4nE\mathfrak{B} + \&c. \\
+5nF\mathfrak{A} + \&c.
\end{array}$$

Unde derivantur sequentes determinationes:

$$\begin{array}{l}
A\mathfrak{B} = n\,B\mathfrak{A} \\
2A\mathfrak{C} = (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A} \\
3A\mathfrak{D} = (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A} \\
4A\mathfrak{E} = (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A}
\end{array}$$

$5\mathfrak{A}\mathfrak{F} = (n-4)\,\mathfrak{B}\mathfrak{E} + (2n-3)\,\mathfrak{C}\mathfrak{D} + (3n-2)\,\mathfrak{D}\mathfrak{E} + (4n-1)\,\mathfrak{E}\mathfrak{B} + 5n\mathfrak{F}\mathfrak{A}$
&c.

unde quemadmodum coefficientes ficti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. a se invicem pendeant, hincque determinentur, cum sit $\mathfrak{A} = A^n$, luculentissime apparet.

203. Quoniam, si quantitas $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. ex finito terminorum numero constat, numerusque n fuerit integer affirmativus, quaecunque potestas finito etiam terminorum numero constare debet: manifestum est hoc casu, formulas modo inventas tandem evanescere debere, atque cum omnes termini adesse debeant, ut primum unus evanuerit, simul omnes sequentes evanescere debere. Ponamus formulam propositam $A + Bx + Cx^2$ esse trinomium, eiusque cubum quaeri, ut sit $n = 3$, erit

$$\begin{array}{rcl|l}
\mathfrak{A} = & A^3 & \text{ideoque} & \mathfrak{A} = A^3 \\
\mathfrak{A}\mathfrak{B} = & 3\mathfrak{B}\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{B} = 3A^2B \\
2\mathfrak{A}\mathfrak{C} = & 2\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C \\
3\mathfrak{A}\mathfrak{D} = & 1\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 5\mathfrak{C}\mathfrak{B} & ; & \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC \\
4\mathfrak{A}\mathfrak{E} = & 0 + 4\mathfrak{C}\mathfrak{C} & ; & \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2 \\
5\mathfrak{A}\mathfrak{F} = & \mathfrak{B}\mathfrak{E} + 3\mathfrak{C}\mathfrak{D} & ; & \mathfrak{F} = 3BC^2 \\
6\mathfrak{A}\mathfrak{G} = & 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E} & ; & \mathfrak{G} = C^3 \\
7\mathfrak{A}\mathfrak{H} = & 3\mathfrak{B}\mathfrak{G} + 1\mathfrak{C}\mathfrak{F} & ; & \mathfrak{H} = 0 \\
8\mathfrak{A}\mathfrak{J} = & 4\mathfrak{B}\mathfrak{H} + 0 & ; & \mathfrak{J} = 0.
\end{array}$$

Quoniam igitur iam bini sunt $= 0$, sequentiumque quilibet a duobus praecedentibus pendet, patet omnes sequentes pariter evanescere debere. Hancque ob causam lex, qua hi coefficientes a se invicem pendere sunt inventi, eo magis est notatu digna.

204. Si n fuerit numerus negativus, ita ut s aequale fiat fractioni, series in infinitum excurret. Sit igitur

$$s = \frac{1}{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.)^n}$$

fingatur pro eius valore haec series:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

At-

Atque si in superioribus formulis pro litteris A, B, C, D, &c. ponantur a, b, c, d, &c. simulque fiat n negativum, sequentes determinationes coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. prodibunt:

$$\mathfrak{A} = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a\mathfrak{B} + n b \mathfrak{A} = 0$$
$$2a\mathfrak{C} + (n+1) b \mathfrak{B} + 2nc\mathfrak{A} = 0$$
$$3a\mathfrak{D} + (n+2) b \mathfrak{C} + (2n+1) c \mathfrak{B} + 3nd\mathfrak{A} = 0$$
$$4a\mathfrak{E} + (n+3) b \mathfrak{D} + (2n+2) c \mathfrak{C} + (3n+1) d \mathfrak{B} + 4ne\mathfrak{A} = 0$$
$$5a\mathfrak{F} + (n+4) b \mathfrak{E} + (2n+3) c \mathfrak{D} + (3n+2) d \mathfrak{C} + (4n+1) e \mathfrak{B} + 5nf\mathfrak{A} = 0$$
&c.

Quae formulae eandem continent legem horum coefficientium numerorum, quam iam supra observavimus in Introductione; cuiusque adeo veritatem nunc demum rigide demonstrare licuit.

205. Haec ita se habent, si numerator fractionis fuerit unitas, vel etiam quaepiam ipsius x potestas, puta x^m; posteriori enim casu tantum oportebit seriem priori inventam $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ &c. multiplicare per x^m. At si numerator constet ex duobus pluribusve terminis, tum supra quidem legem progressionis non observavimus, quamobrem eam hic per differentiationem investigemus. Sit igitur:

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque pro valore huius fractionis sequens series:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

cuius primus terminus $\mathfrak{A}$ ut definiatur, ponatur $x = 0$, eritque ex priori expressione $s = \frac{A}{a^n}$, ex ficta vero $s = \mathfrak{A}$, unde necesse est, ut sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{a^n}$. Quo termino determinato reliqui per differentiationem innotescent.

206. Sumtis logarithmis erit;

$$ls = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.) - nl(\alpha + \delta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)$$

hincque differentiando orietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.} - \frac{n\delta dx - 2n\gamma xdx - 3n\delta x^2dx - \&c.}{\alpha + \delta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.}$$

sublatisque per multiplicationem fractionibus erit:

$$\left(\begin{array}{l} A\alpha + A\delta x + A\gamma x^2 + A\delta x^3 + \&c. \\ \quad + B\alpha + B\delta + B\gamma + \&c. \\ \quad\quad + C\alpha + C\delta + \&c. \\ \quad\quad\quad + D\alpha + \&c. \end{array}\right\} \frac{ds}{dx} =$$

$$\left(\begin{array}{l} B\alpha + B\delta x + B\gamma x^2 + B\delta x^3 + B\varepsilon x^4 + \&c. \\ \quad + 2C\alpha + 2C\delta + 2C\gamma + 2C\delta + \&c. \\ \quad\quad + 3D\alpha + 3D\delta + 3D\gamma + \&c. \\ \quad\quad\quad + 4E\alpha + 4E\delta + \&c. \\ \quad\quad\quad\quad + 5F\alpha + \&c. \end{array}\right\} s$$

$$-\left(\begin{array}{l} A\delta + 2A\gamma x + 3A\delta x^2 + 4A\varepsilon x^3 + 5A\zeta x^4 + \&c. \\ \quad + B\delta + 2B\gamma + 3B\delta + 4B\varepsilon + \&c. \\ \quad\quad + C\delta + 2C\gamma + 3C\delta + \&c. \\ \quad\quad\quad + D\delta + 2D\gamma + \&c. \\ \quad\quad\quad\quad + E\delta + \&c. \end{array}\right\} ns.$$

Cum nunc sit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \&c.$

erit factis substitutionibus:

$$\begin{array}{l} A\alpha\mathfrak{B} + nA\delta\mathfrak{A} - B\alpha\mathfrak{A} = 0 \\ 2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\delta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} + (n-1)B\delta\mathfrak{A} - 2C\alpha\mathfrak{A} = 0 \\ 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\delta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + 3nA\delta\mathfrak{A} \\ \quad B\alpha\mathfrak{C} + nB\delta\mathfrak{B} + (2n-1)B\gamma\mathfrak{A} \\ \quad - C\alpha\mathfrak{B} + (n-2)C\delta\mathfrak{A} \\ \quad\quad - 3D\alpha\mathfrak{A} \\ 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\delta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ \quad 2B\alpha\mathfrak{D} + (n+1)B\delta\mathfrak{C} + 2nB\gamma\mathfrak{B} + (3n-1)B\delta\mathfrak{A} \\ \quad\quad 0C\alpha\mathfrak{C} + (n-1)C\delta\mathfrak{B} + (2n-2)C\gamma\mathfrak{A} \\ \quad\quad\quad - 2D\alpha\mathfrak{B} + (n-3)D\delta\mathfrak{A} \\ \quad\quad\quad\quad - 4E\alpha\mathfrak{A} \end{array} = 0$$

Hinc lex; qua istae formulae progrediuntur, facile perspicitur: prima enim cuiusque aequationis linea eandem sequitur legem, quam §. 204. habuimus. Tum vero coefficientes secundarum linearum oriuntur, si a coefficientibus superioribus subtrahatur $n+1$, similique modo ex linea secunda formatur linea tertia & sequentes, a coefficientibus superioribus continuo subtrahendo $n+1$; ipsae autem litterae quemvis terminum componentes per solam inspectionem facillime formantur.

207. Sin autem quoque numerator fractionis fuerit quaepiam potestas: scilicet

$$s = \frac{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\&c.)^n}$$

fingaturque $s = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4+\&c.$

erit $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$; reliqui vero coefficientes ex sequentibus formulis determinabuntur:

$$\left.\begin{array}{l} A\mathfrak{B}+nA\mathfrak{A} \\ -m\mathfrak{B}A\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A\mathfrak{C}+(n+1)A\mathfrak{B}+2n\,A\mathfrak{A} \\ -(m-1)\mathfrak{B}\mathfrak{B}+(n-m)\mathfrak{B}\mathfrak{A} \\ -2m\,C\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A\mathfrak{D}+(n+2)A\mathfrak{C}+(2n+1)A\mathfrak{B}+3n\,A\mathfrak{A} \\ -(m-2)\mathfrak{B}\mathfrak{C}+(n-m+1)\mathfrak{B}\mathfrak{B}+(2n-m)\mathfrak{B}\mathfrak{A} \\ -(2m-1)C\mathfrak{B}+(n-2m)C\mathfrak{A} \\ -3m\,D\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4A\mathfrak{E}+(n+3)A\mathfrak{D}+(2n+2)A\mathfrak{C}+(3n+1)A\mathfrak{B}+4n\,A\mathfrak{A} \\ -(m-3)\mathfrak{B}\mathfrak{D}+(n-m+2)\mathfrak{B}\mathfrak{C}+(2n-m+1)\mathfrak{B}\mathfrak{B}+(3n-m)\mathfrak{B}\mathfrak{A} \\ -(2m-2)C\mathfrak{C}+(n-2m+1)C\mathfrak{B}+(2n-2m)C\mathfrak{A} \\ -(3m-1)D\mathfrak{B}+(n-3m)D\mathfrak{A} \\ -4m\,E\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Lex, qua istae formulae ulterius continuantur, ex inspectione facilius apparet, quam verbis describi queat. Descendendo autem coefficientes diminuuntur differentia $n+m$; horizontaliter autem progrediendo augentur continuo differentia $n-1$,

208. Hoc igitur modo doctrina de seriebus recurrentibus amplificatur, dum istum defectum supplevimus, atque legem coefficientium definivimus, si non solum denominator fractionis fuerit potestas quaecunque, sed etiam numerator ex quotlibet terminis constet, ad quam legem detegendam sola inductio non sufficiebat. Praeter plurimos autem usus serierum recurrentium, quos iam exposuimus, maximam quoque afferunt utilitatem ad summas quarumvis serierum proxime inveniendas: cuius specimen iam in Capite primo huius sectionis exhibuimus, dum seriem substitutione $x = \frac{y}{1+ny}$ in aliam transmutavimus, quae saepenumero terminorum numero finito constet. Eaque methodus ulterius extendi potuisset, si pro x aliae functiones substitutae fuissent. Quoniam vero tum lex progressionis serierum, quae loco potestatum ipsius x poni deberent, non satis luculenter constabat, in hunc locum istam amplificationem reservare visum est; cum memorata lex iam penitus esset detecta. Interim tamen re diligentius perpensa comperimus idem negotium sine hac progressionis lege expediri posse, in subsidium tantum vocando methodum, qua hic ad hanc ipsam legem investigandam sumus usi.

209. Sit igitur proposita series quaecunque

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

quam in aliam transformari oporteat, cuius termini singuli sint fractiones, quarum denominatores secundum potestates formulae huiusmodi $\alpha + \delta x$ procedant. Quo igitur a simplicioribus incipiamus, ponamus esse:

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\delta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha+\delta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\delta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha+\delta x)^4} + \&c.$$

aequalitate illius seriei cum hac expressione constituta, multiplicetur ubique per $\alpha + \delta x$, fietque:

$$A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \&c. + A\delta x + B\delta x^2 + C\delta x^3 + \&c. = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\delta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\delta x)^2} + \&c.$$

statuatur $\mathfrak{A} = A\alpha$; fiatque:

$$A\beta + B\alpha = A'$$
$$B\beta + C\alpha = B'$$
$$C\beta + D\alpha = C'$$
$$D\beta + E\alpha = D' \quad \text{&c.}$$

erit divisione per α instituta:

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{&c.} = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \text{&c.}$$

Multiplicetur denuo per $\alpha + \beta x$, positoque

$$A'\beta + B'\alpha = A''$$
$$B'\beta + C'\alpha = B''$$
$$C'\beta + D'\alpha = C'' \quad \text{&c.} \quad \text{fiet}$$

$$A'\alpha + A''x + B''x^2 + C''x^3 + \text{&c.} = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \text{&c.}$$

Sit igitur $\mathfrak{B} = A'\alpha$; atque operationem ut ante instituendo, si fiat:

$$A''\beta + B''\alpha = A''' \qquad A'''\beta + B'''\alpha = A^{IV}$$
$$B''\beta + C''\alpha = B''' \qquad B'''\beta + C'''\alpha = B^{IV}$$
$$C''\beta + D''\alpha = C''' \qquad C'''\beta + D'''\alpha = C^{IV}$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

erit $\mathfrak{C} = A''\alpha$; $\mathfrak{D} = A'''\alpha$; $\mathfrak{E} = A^{IV}\alpha$; &c.
unde summa seriei propositae hoc modo exprimetur, ut sit:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha+\beta x} + \frac{A'\alpha x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{A''\alpha x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{A'''\alpha x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \text{&c.}$$

Quae eadem series orta fuisset ex substitutione $\frac{x}{\alpha+\beta x} = y$ seu $x = \frac{\alpha y}{1-\beta y}$.

210. Haec transformatio optimo cum successu adhibetur, si series proposita $A + Bx + Cx^2 + \text{&c.}$ ita fuerit comparata, ut tandem confundatur cum serie recurrente seu potius geometrica ex fractione $\frac{P}{\alpha+\beta x}$ orta. Tum enim valores A',

A', B', C', D', &c. tandem evanescent; hincque multo magis litterae A'', A''', A'', &c. constituent seriem maxime convergentem. Poterimus autem simili modo denominatores trinomiales & polynomiales quoscunque adhibere, qui usum habebunt eximium, si series proposita tandem cum recurrente confundatur. Proposita ergo serie:

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

statuatur $s = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}$

$$+ \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}'''x^6 + \mathfrak{B}'''x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \&c.$$

Multiplicetur ubique per $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, positoque

$$\begin{array}{l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' \\ \qquad \&c. \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} \mathfrak{A} = A\alpha \\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha \end{array}$$

orietur aequatio priori similis, divisione per xx instituta.

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \&c. =$$

$$\frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{\mathfrak{A}''x^2 + \mathfrak{B}''x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{\mathfrak{A}'''x^4 + \mathfrak{B}'''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \&c.$$

Si igitur ut ante operatio instituatur faciendo

$$\begin{array}{l} A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'' \\ B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'' \\ C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'' \\ \qquad \&c. \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{A}' = A'\alpha \\ \mathfrak{B}' = A'\beta + B'\alpha \end{array}$$

porroque:

$$\begin{array}{l} A''\gamma + B''\beta + C''\alpha = A''' \\ B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = B''' \\ C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = C''' \\ \qquad \&c. \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{A}'' = A''\alpha \\ \mathfrak{B}'' = A''\beta + B''\alpha \end{array}$$

sique ulterius valores similes investigando erit: $s = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{[A'\alpha + (A'\beta + B'\alpha)x]x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{[A''\alpha + (A''\beta + B''\alpha)x]x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \&c.$

211. Si ponatur $x = 1$, qua positione amplitudini nihil decedit, cum α, β, γ pro lubitu accipi possint, fueritque

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Computentur succeſſive ſequentes valores:

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\delta + C\alpha = A' & A'\gamma + B'\delta + C'\alpha = A'' \\ B\gamma + C\delta + D\alpha = B' & B'\gamma + C'\delta + D'\alpha = B'' \\ C\gamma + D\delta + E\alpha = C' & C'\gamma + D'\delta + E'\alpha = C'' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

ſicque porro

inſuper vero brevitatis ergo ponatur: $\alpha + \delta + \gamma = m$ obtinebitur ſumma ſeriei propoſitae hoc modo expreſſa

$$s = (\alpha+\delta)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right) + \alpha\left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right)$$

212. Eodem modo denominatores ex pluribus terminis conſtantes accipi poſſunt; & quoniam operatio ex praecedentibus facile perſpicitur, hic tantum caſum pro quadrinomio evolvamus: Sit ergo

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Quaerantur valores ſequentes:

$$\begin{array}{l} A\varepsilon + B\gamma + C\delta + D\alpha = A' \\ B\varepsilon + C\gamma + D\delta + E\alpha = B' \\ C\varepsilon + D\gamma + E\delta + F\alpha = C' \\ \&c. \\ A'\varepsilon + B'\gamma + C'\delta + D'\alpha = A'' \\ B'\varepsilon + C'\gamma + D'\delta + E'\alpha = B'' \\ C'\varepsilon + D'\gamma + E'\delta + F'\alpha = C'' \\ \&c. \\ A''\varepsilon + B''\gamma + C''\delta + D''\alpha = A''' \\ B''\varepsilon + C''\gamma + D''\delta + E''\alpha = B''' \\ C''\varepsilon + D''\gamma + E''\delta + F''\alpha = C''' \\ \&c. \end{array}$$

Tum vero ſit $\alpha + \delta + \gamma + \varepsilon = m$; eritque

$$s = (\alpha+\delta+\gamma)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right) = (\alpha+\delta)\left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right) + \alpha\left(\frac{C}{m} + \frac{C'}{m^2} + \frac{C''}{m^3} + \frac{C'''}{m^4} + \&c.\right)$$

unde simul progressio, si adhuc plures partes denominatori m tribuantur, clarissime perspicitur.

213. Neque vero absolute opus est, ut denominatores fractionum, ad quas summam seriei reducimus, sint potestates eiusdem formulae $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ &c. sed haec ipsa in singulis terminis variari potest. Quo hoc clarius pateat, sumamus primo tantum duos terminos, fingaturque series

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

in hanc seriem fractionum converti:

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)} + \frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} + \&c.$$

Multiplicetur primum utrinque per $\alpha + \beta x$, ponaturque

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A' \\ B\beta + C\alpha &= B' \quad \& \quad \mathfrak{A} = A\alpha \\ C\beta + D\alpha &= C' \end{aligned}$$

&c. fietque per x diviso

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \&c. = \frac{\mathfrak{A}'}{\alpha'+\beta' x} + \frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} + \&c.$$

Deinde simili modo multiplicando per $\alpha' + \beta' x$; tumque per $\alpha'' + \beta'' x$, & ita porro, si statuatur:

$$\begin{array}{l|l|l} A'\beta' + B'\alpha' = A'' & A''\beta'' + B''\alpha'' = A''' & A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A'''' \\ B'\beta' + C'\alpha' = B'' & B''\beta'' + C''\alpha'' = B''' & B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B'''' \\ C'\beta' + D'\alpha' = C'' & C''\beta'' + D''\alpha'' = C''' & C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C'''' \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

fiet $\mathfrak{A}' = A'\alpha'$; $\mathfrak{A}'' = A''\alpha''$; $\mathfrak{A}''' = A'''\alpha'''$; &c.

atque hinc series proposita convertetur in hanc:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha+\beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)} + \frac{A''\alpha''xx}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} \&c.$$

ubi valores α, β, α', β', α'', β'', α''', β''' &c. sunt arbitrarii, quovis autem casu ita accipi possunt, ut ista nova series maxime convergat.

214. Applicemus hoc quoque ad factores trinomiales, sitque proposita serie quacunque:

$s =$

$$s = A+B+C+D+E+F+G+\&c.$$

$A\gamma + B\delta + C\alpha = A'$	$A'\gamma' + B'\delta' + C'\alpha' = A''$
$B\gamma + C\delta + D\alpha = B'$	$B'\gamma' + C'\delta' + D'\alpha' = B''$
$C\gamma + D\delta + E\alpha = C'$	$C\gamma' + D'\delta' + E'\alpha' = C''$
&c.	&c.

$A''\gamma'' + B''\delta'' + C''\alpha'' = A'''$	$A'''\gamma''' + B'''\delta''' + C'''\alpha''' = A''''$
$B''\gamma'' + C''\delta'' + D''\alpha'' = B'''$	$B'''\gamma''' + C'''\delta''' + D'''\alpha''' = B''''$
$C''\gamma'' + D''\delta'' + E''\alpha'' = C'''$	$C'''\gamma''' + D'''\delta''' + E'''\alpha''' = C''''$
&c.	&c.

Deinde ſtatuatur brevitatis gratia:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + \gamma &= m \\ \alpha' + \delta' + \gamma' &= m' \\ \alpha'' + \delta'' + \gamma'' &= m'' \\ \alpha''' + \delta''' + \gamma''' &= m''' \end{aligned} \qquad \&c.$$

eritque ſeriei propoſitae ſumma:

$$s = \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{mm'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{mm'm''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{mm'm''m'''} + \&c.$$
$$+ \frac{\delta A}{m} + \frac{\delta' A'}{mm'} + \frac{\delta'' A''}{mm'm''} + \frac{\delta''' A'''}{mm'm''m'''} + \&c.$$

215. Quoniam haec tam late patent, ut uſus minus clare percipi poſſit, reſtringamus transformationem §. 213. traditam, ſitque $x = -1$, ut habeatur haec ſeries:

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \&c.$$

ſtatuaturque:

$B-A=A'$	$B'-2A'=A''$	$B''-3A''=A'''$	$B'''-4A'''=A''''$
$C-B=B'$	$C'-2B'=B''$	$C''-3B''=B'''$	$C''-4B'''=B''''$
$D-C=C'$	$D'-2C'=C''$	$D''-3C''=C'''$	$D'''-4C'''=C''''$
$E-D=D'$	$E'-2D'=D''$	$E''-3D''=D'''$	$E'''-4D'''=D''''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Quibus valoribus inventis, erit ſumma ſeriei propoſitae aequalis ſequenti ſeriei:

$$s = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \&c.$$

Simili igitur modo ſeries quaecunque propoſita in innumerabiles

biles alias sibi aequales transmutari potest, inter quas sine dubio series maxime convergentes reperientur, quarum ope summa proposita vero proxime indagari queat.

216. Revertamur autem ad inventionem serierum, quarum progressionis legem calculus differentialis declarat. Cum igitur hoc in quantitatibus algebraicis iam sit praestitum, progrediamur ad transcendentes, quaeraturque series huic logarithmo aequalis:

$$s = l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{&c.})$$

fingatur quaesito satisfacere haec series:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \mathfrak{F}x^6 + \text{&c.}$$

Cum igitur ex illius aequationis differentiatione sequatur

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{&c.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{&c.}} \quad \text{erit:}$$

$$(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{&c.})\frac{ds}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + \text{&c.}$$

Quia vero ex facta aequatione est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{&c.}$$

facta hac substitutione oritur haec aequatio:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{&c.} \\ \quad + \mathfrak{A}\alpha + 2\mathfrak{B}\alpha + 3\mathfrak{C}\alpha + 4\mathfrak{D}\alpha + \text{&c.} \\ \quad\quad + \mathfrak{A}\beta + 2\mathfrak{B}\beta + 3\mathfrak{C}\beta + \text{&c.} \\ \quad\quad\quad + \mathfrak{A}\gamma + 2\mathfrak{B}\gamma + \text{&c.} \\ \quad\quad\quad\quad + \mathfrak{A}\delta + \text{&c.} = \end{array}$$

$$\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{&c.}$$

Ex qua sequentes determinationes obtinentur:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \alpha \\ \mathfrak{B} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta \\ \mathfrak{C} = -\frac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha - \frac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma \\ \mathfrak{D} = -\frac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha - \frac{1}{4}\mathfrak{B}\beta - \frac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta \\ \mathfrak{E} = -\frac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha - \frac{1}{5}\mathfrak{C}\beta - \frac{1}{5}\mathfrak{B}\gamma - \frac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon \quad \text{&c.} \end{array}$$

217. Proposita nunc sit quantitas exponentialis:

$$s =$$

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{&c.}}$$

in qua e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, atque fingatur series quaesita:

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{&c.}$$

iam enim ex casu $x = 0$ patet, primum terminum esse debere unitatem. Cum igitur sumendis logarithmis sit

$$ls = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{&c.}$$

erit differentialibus sumtis:

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{&c.})$$

At vero ex aequatione facta erit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{&c.} =$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} \alpha & + \mathfrak{A}\alpha x & + \mathfrak{B}\alpha x^2 & + \mathfrak{C}\alpha x^3 & + \mathfrak{D}\alpha x^4 & + \text{&c.} \\ & + 2\beta & + 2\mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 2\mathfrak{C}\beta & + \text{&c.} \\ & & + 3\gamma & + 3\mathfrak{A}\gamma & + 3\mathfrak{B}\gamma & + \text{&c.} \\ & & & + 4\delta & + 4\mathfrak{A}\delta & + \text{&c.} \\ & & & & + 5\varepsilon & + \text{&c.} \end{array}$$

ex quibus sequentes prodeunt litterarum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. determinationes

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \alpha \\ \mathfrak{B} &= \beta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha \\ \mathfrak{C} &= \gamma + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\beta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha \\ \mathfrak{D} &= \delta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \tfrac{1}{4}\mathfrak{B}\beta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon + \tfrac{2}{5}\mathfrak{A}\delta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{B}\gamma + \tfrac{1}{5}\mathfrak{C}\beta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha \qquad \text{&c.} \end{aligned}$$

218. Si quoque arcus, cuius sinus vel cosinus quaeritur, exprimatur binomio vel polynomio, vel etiam serie infinita, hoc modo quoque eius sinus & cosinus per seriem infinitam exprimi possunt. At vero quo hoc commodissime fiat, non sufficit ad differentialia prima processisse, sed opus est ut differentialia secundi gradus in subsidium vocemus. Sit igitur

$$s = \sin(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{&c.})$$

fingaturque series quae quaeritur:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{&c.}$$

primum enim terminum constat evanescere: quia vero ad differentialia secunda descendendum est, coefficientem $\mathfrak{A}$ quo-

que aliunde definiri oportet, quod fiet si x ponamus infinite parvum. Tum enim ob arcum $= zz$ sinus ipsi fiet aequalis, eritque ergo $\mathfrak{A} = a$. Ponamus nunc brevitatis gratia $z = ax + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 +$ &c. ut sit $s = \sin z$, erit differentiando $ds = dz \cos z$ denuoque differentiando $dds = ddz \cos z - dz^2 \sin z$.

Quia igitur est $\sin z = s$ & $\cos z = \frac{ds}{dz}$; erit

$$dds = \frac{dsddz}{dz} - sdz^2, \text{ seu } dzdds + sdz^3 = dsddz.$$

219. Ponamus arcum z tantum binomio exprimi esseque $z = ax + \mathfrak{b}x^3$; erit $dz = (a + 3\mathfrak{b}x^2)dx$, & posito dx constante, $ddz = 6\mathfrak{b}dx^2$; atque $dz^3 = (a^3 + 6a^2\mathfrak{b}x^2 + 12a\mathfrak{b}^2x^4 + 8\mathfrak{b}^3x^6)dx^3$. Deinde ob $s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 +$ &c.

erit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 +$ &c.

& $\frac{dds}{dx^2} = 2\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}x + 12\mathfrak{D}x^2 +$ &c.

Quibus valoribus in aequatione differentio-differentiali substitutis fiet:

$$\begin{aligned}
\frac{dzdds}{dx^3} &= 1.2\mathfrak{B}a^2 + 2.3\mathfrak{C}ax + 3.4\mathfrak{D}ax^2 + 4.5\mathfrak{E}ax^3 + \text{&c.} \\
&\quad + 2.1.2\mathfrak{B}\mathfrak{b} + 2.2.3\mathfrak{C}\mathfrak{b} + 2.3.4\mathfrak{D}\mathfrak{b} + \text{&c.} \\
+\frac{sdz^3}{dx^3} &= + \mathfrak{A}a^3 + \mathfrak{B}a^3 + \mathfrak{C}a^3 + \text{&c.} \\
&\quad + 6\mathfrak{A}a^2\mathfrak{b} + 6\mathfrak{B}a^2\mathfrak{b} + \text{&c.} \\
&\quad + 12\mathfrak{A}a\mathfrak{b}^2 + \text{&c.} \\
\hline
\frac{dsddz}{dx^3} &= 2\mathfrak{A}\mathfrak{b} + 4\mathfrak{B}\mathfrak{b} + 6\mathfrak{C}\mathfrak{b} + 8\mathfrak{D}\mathfrak{b} + \text{&c.}
\end{aligned}$$

Unde coefficientes sequenti modo definientur:

$\mathfrak{B} =$

$$\mathfrak{B} = \frac{2\mathfrak{A}\delta}{2\alpha}$$

$$\mathfrak{C} = 0 - \frac{\mathfrak{A}\alpha^3}{2.3}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\mathfrak{C}\delta}{4\alpha} - \frac{6\mathfrak{A}\alpha\delta}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}\alpha^4}{3.4}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\mathfrak{D}\delta}{5\alpha} - \frac{12\mathfrak{A}\delta^2}{4.5} - \frac{6\mathfrak{B}\alpha\delta}{4.5} - \frac{\mathfrak{C}\alpha^5}{4.5}$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{6\mathfrak{E}\delta}{6\alpha} - \frac{8\mathfrak{A}\delta^3}{5.6\alpha} - \frac{12\mathfrak{B}\delta\delta}{5.6} - \frac{6\mathfrak{C}\alpha\delta}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}\alpha^6}{5.6}$$

$$\mathfrak{G} = -\frac{8\mathfrak{F}\delta}{7\alpha} - \frac{8\mathfrak{B}\delta^3}{6.7\alpha} - \frac{12\mathfrak{C}\delta\delta}{6.7} - \frac{6\mathfrak{D}\alpha\delta}{6.7} - \frac{\mathfrak{E}\alpha^6}{6.7}$$

&c.

Quibus valoribus inventis erit:

$\sin(\alpha x + \delta x^2) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 +$ &c. existente $\mathfrak{A} = \alpha$

220. Pari modo cosinus cuiusque anguli in seriem convertitur, quia autem arcus rarissime per polynomium exprimitur, ostendamus usum differentio-differentialium in inveniendo serie pro cosinu arcus x. Sit ergo $s = \cos x$, & fingatur:

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \mathfrak{D}x^8 - \text{ &c.}$$

Quia est $ds = -dx \sin x$ & $dds = -dx^2 \cos x = -sdx^2$. erit $dds + sdx^2 = 0$; substitutione ergo facta fiet:

$$\frac{dds}{dx^2} = -1.2\mathfrak{A} + 3.4\mathfrak{B}x^2 - 5.6\mathfrak{C}x^4 + 7.8\mathfrak{D}x^6 - \text{ &c.}$$

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \text{ &c.}$$

& ex coaequatione terminorum sequitur:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1.2}; \quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{5.6} = \frac{1}{1.2.3\ldots6}; \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{7.8} = \frac{1}{1.2.3\ldots8}; \text{ &c.}$$

Patet ergo quod iam supra fusius demonstravimus esse:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots8} - \text{ &c.}$$

prior vero series pro sinu posito $b = 0$ & $a = 1$ dabit:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{x^9}{1.2.3\ldots9} - \&c.$$

221. Ex his seriebus pro sinu & cosinu notissimis deducuntur series pro tangente, cotangente, secante & cosecante cuiusvis anguli. Tangens enim prodit si sinus per cosinum, cotangens si cosinus per sinum, secans si radius 1 per cosinum, & cosecans si radius per sinum dividatur. Series autem ex his divisionibus ortae maxime videntur irregulares; verum excepta serie secantem exhibente reliquae per numeros Bernoullianos supra definitos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. ad facilem progressionis legem reduci possunt. Quoniam enim supra §. 127. invenimus esse:

$$\frac{\mathfrak{A}x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}x^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}x^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}x^8}{1.2.3\ldots8} + \&c. = 1 - \frac{x}{2}\cot\tfrac{1}{2}x$$

erit posito $\frac{1}{2}x = x$;

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2.3\ldots6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \&c.$$

atque si ponatur $\frac{1}{2}x$ pro x, erit:

$$\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2.3\ldots6} - \frac{2\mathfrak{D}x^7}{1.2.3\ldots8} - \&c.$$

222. Hinc autem tangens cuiusvis arcus sequenti modo per seriem exprimetur. Cum sit $\operatorname{tang} 2x = \frac{2\operatorname{tang} x}{1-\operatorname{tang} x^2}$, erit:

$$\operatorname{cotang} 2x = \frac{1}{2\operatorname{tang} x} - \frac{\operatorname{tang} x}{2} = \tfrac{1}{2}\cot x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} x:$$

ideoque $\operatorname{tang} x = \cot x - 2\cot 2x$. Cum igitur sit

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \&c.$$

$$2\cot 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^{16}\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \&c.$$

erit hanc seriem ab illa subtrahendo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^8(2^8-1)\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} + \&c.$$

Si ergo hic introducantur numeri A, B, C, &c. §. 182. inventi, erit: $\text{tang } x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5Cx^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^7Dx^7}{1.2\ldots8} + \text{&c.}$

223. Cosecans autem sequenti modo invenietur. Quia est $\cot x = \text{tang } x + 2\cot 2x = \frac{1}{\cot x} + 2\cot 2x$; erit $\cot x^2 = 2\cot x.\cot 2x + 1$, & radice extracta: $\cot x = \cot 2x + \text{cosec } 2x$, unde fit $\text{cosec } 2x = \cot x - \cot 2x$, & x pro $2x$, posito $\text{cosec } x = \cot \frac{1}{2}x - \cot x$. Quare cum cotangentes habeamus scilicet: $\cot \frac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.}$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \text{&c.}$$

erit hac serie ab illa subtracta:

$$\text{cosec } x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2.\ldots.6} + \text{&c.}$$

224. Per hos autem numeros Bernoullianos secans exprimi non potest, sed requirit alios numeros, qui in summas potestatum reciprocarum imparium ingrediuntur. Si enim ponatur:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{&c.} = \alpha.\frac{\pi}{2^2}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{&c.} = \frac{\beta}{1.2}.\frac{\pi^3}{2^4}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{&c.} = \frac{\gamma}{1.2.3.4}.\frac{\pi^5}{2^6}$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{&c.} = \frac{\delta}{1.2\ldots6}.\frac{\pi^7}{2^8}$$

$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \text{&c.} = \frac{\varepsilon}{1.2\ldots8}.\frac{\pi^9}{2^{10}}$$

$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \text{&c.} = \frac{\zeta}{1.2\ldots10}.\frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$

&c. erit:

erit: $a = 1$, $b = 1$, $\gamma = 5$, $\delta = 61$, $\varepsilon = 1385$, $\zeta = 50521$ | $\eta = 2702765$, $\theta = 199360981$, $\iota = 19391512145$, $\varkappa = 2404879661671$, &c.

ex hisque valoribus obtinebitur:

$$\sec x = 1 + \frac{b}{1.2}xx + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2...6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2...8}x^8 + \&c.$$

225. Ut autem nexum huius seriei cum numeris a, b, γ, δ, &c. ostendamus, consideremus seriem supra tractatam:

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

Ponatur $m = \frac{1}{2}n - k$, eritque

$$\frac{\pi}{2n \cos \frac{k}{n}\pi} = \frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \&c.$$

Sit $\frac{k\pi}{n} = x$, seu $k\pi = nx$, erit

$$\frac{\pi}{2n} \sec x = \frac{\pi}{nx - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi + 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi - 2nx} - \&c. \quad \text{seu}$$

$$\sec x = \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \&c.$$

$$\sec x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{4 \cdot 3\pi}{9\pi^2 - 4xx} + \frac{4 \cdot 5\pi}{25\pi^2 - 4xx} - \frac{4 \cdot 7\pi}{49\pi^2 - 4xx} + \&c.$$

si nunc singuli termini in series convertantur, fiet:

$$\sec x = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.\right)$$
$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.\right)$$
$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c.\right) \quad \&c.$$

qua-

quarum serierum loco si valores supra assignati substituantur, prodibit eadem series pro secante, quam dedimus.

226. Hinc simul patet lex, qua numeri α, β, γ, &c. quibus summae potestatum imparium constituuntur, procedunt. Cum enim sit $\text{sec. } x = \frac{1}{\cos x} = a + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6$ &c. necesse est ut haec series aequalis sit fractioni

$$\frac{1}{1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \frac{x^8}{1.2\ldots8} - \text{&c.}}$$

aequalitate ergo constituta fiet $1 =$

$$\begin{aligned}
&a + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2\ldots8}x^8 + \text{&c.}\\
&-\frac{a}{1.2} - \frac{\beta}{1.2.1.2} - \frac{\gamma}{1.2.1\ldots4} - \frac{\delta}{1.2.1\ldots6} \text{ &c.}\\
&+\frac{a}{1.2.3.4} + \frac{\beta}{1\ldots4.1.2} + \frac{\gamma}{1\ldots4.1\ldots4} \text{ &c.}\\
&-\frac{a}{1\ldots6} - \frac{\beta}{1\ldots6.1.2} \text{ &c.}\\
&+\frac{a}{1\ldots8} \text{ &c.}
\end{aligned}$$

unde sequuntur hae aequationes:

$$a = 1 \quad ; \quad \beta = \frac{2.1}{1.2}a \; ;$$

$$= \frac{4.3}{1.2}\beta - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}a \; ; \quad \gamma = \frac{6.5}{1.2}\gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\beta + \frac{6\ldots1}{1\ldots6}a \; ;$$

$$\iota = \frac{8.7}{1.2}\varepsilon - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\gamma + \frac{8\ldots3}{1\ldots6}\beta - \frac{8\ldots1}{1\ldots8}a \quad ; \quad \text{&c.}$$

Ex hisque formulis inventi sunt istarum litterarum valores, quos in §. 224. exhibuimus; & quorum ope summae serierum in hac forma contentarum, $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \text{&c.}$ si n fuerit numerus impar, exprimi possunt.

CAPUT IX.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS RESOLVENDIS.

227.

Conſtitutionem aequationum ad functionum rationem reduci poſſe ſupra iam ſatis oſtenſum eſt. Denotet enim y functionem quamcunque ipſius x, ſi ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae ſive ſint algebraicae ſive tranſcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y = 0$ reſolvi dicitur, ſi is ipſius x valor definiatur qui in functione y ſubſtitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiuſmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y = 0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros f, g, b, i, &c. eſſe radices aequationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, ut ſi in ea loco x vel f, vel g, vel b, &c. ſubſtituatur, fiat revera $y = 0$.

228. Quoniam igitur functio y evaneſcit, ſi in ea loco x ponatur f, ſeu $x + (f - x)$, exiſtente f radice aequationis $y = 0$, erit per ea, quae ſupra de functionibus demonſtravimus:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6dx^3} + \text{&c.}$$

ex qua aequatione valor radicis f ita definitur, ut quicquid pro x fuerit poſitum, indeque valores quantitatum y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, &c. ſubſtituti, ſemper reſultet aequatio verum valorem ipſius f exhibens. Quo hoc clarius percipiatur, ponamus eſſe $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; erit

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2; \quad \& \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = 1.$$

Quibus valoribus substitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3) + (f-x)^2(3x-2) + (f-x)^3$$

seu multiplicationibus actu institutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur scilicet aequatio similis ipsi propositae, quae propterea easdem continet radices.

229. Quanquam autem hoc modo ad novam aequationem non pervenitur, ex qua valor radicis f facilius definiri queat; tamen hinc ingentia subsidia ad inventionem radicum deduci possunt. Si enim pro x assumtus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita ut $f-x$ sit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer convergent, hancque ob causam non multum a veritate aberrabitur, si praeter binos terminos initiales reliqui reiiciantur. Erit ergo si pro x iam valor cuipiam aequationis $y = 0$ radici prope aequalis fuerit assumtus, proxime

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} \text{ seu } f = x - \frac{y\,dx}{dy},$$

ex qua formula etsi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x substitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f suppeditabit; sicque continuo propius ad verum radicis f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuscunque numeris extrahi possunt. Sit enim propositus numerus $x^n + b$ ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ seu $x^n - a^n - b = 0$, ut sit $y = x^n - a^n - b$; erit

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}; \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3};$$

&c.

Hinc si radix quaesita ponatur $= f$, ut sit $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ erit:

$$0 = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2 x^{n-2} + \text{&c.}$$

Si igitur pro x iam statuatur numerus ad valorem radicis quaesitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x = a$, si quidem b sit numerus tam parvus, ut $a^n + b < (a+1)^n$; erit

$b = na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$, unde valor radicis multo propius cognoscetur. Sin autem adhuc tertium terminum assumere velimus, ut sit

$b = na^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(f-a)^2$; fiet

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1}(f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}, \text{ ideoque}$$

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)} \text{ seu}$$

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{[aa + 2(n-1)b : na^{n-2}]}}{n-1}.$$

Quare ope extractionis radicis quadratae valor radicis f adhuc propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c, *seu sit* $xx - c = y$.

Ponatur ergo numerus radici proximus $= a$, & $b = c - aa$, ob $aa + b = c$, & quia est $n = 2$, fiet prior formula $f = a + \frac{c-aa}{2a} = \frac{c+aa}{2a}$; altera vero dat $f = \sqrt{c}$, quae est ipsa radix quaesita. Cum igitur sit proxime radix $= \frac{c+aa}{2a}$, hic ipse valor pro a scribatur, eritque propius radix $f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c+aa)}$. Sit verbi gratia $c = 5$; erit ex priori

formula $f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}$. Ponatur ergo $a = 2$; erit $f = 2,25$; nunc ponatur $a = 2,25$; fiet $f = 2,236111$, ſtatuatur porro $a = 2,236111$, erit $f = 2,2360679$, qui valor iam minime a vero diſcrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuſcunque aequationis inveniri poteſt proxime ope aequationis $f = x - \frac{ydx}{dy}$, poſtquam ſcilicet pro x aſſumtus fuerit valor parum a quapiam aequationis radice diſcrepans. Ad huiuſmodi vero valorem pro x inveniendum, ſubſtituantur ſucceſſive pro x varii valores, inter eoſque is eligatur, qui functionis y minimum hoc eſt cyphrae proximum valorem indicat. Sic ſi ſit $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$,

poſito $x = 0$ fit $y = -4$
$x = 1 \ldots y = -2$
$x = 2 \ldots y = +2$

unde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2, ipſius x. Cum ergo ſit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$, habebitur pro radice f aequationis $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$ inveniendа haec aequatio:

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{x^3 - 2xx + 3x - 4}{3xx - 4x + 3}.$$

Sit ergo $x = 1$; fiet $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nunc ponatur $x = 2$, fiet $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Sit ergo $x = \frac{12}{7}$; erit $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si ulterius progredi velimus, logarithmis commodius utemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

lx

$$\begin{array}{rl|rl}
lx = & 0,2182729 & x = & 1,653000 \\
lx^2 = & 0,4365458 & x^2 = & 2,732409 \\
lx^3 = & 0,6548187 & x^3 = & 4,516673 \\
x^3 = & 4,516673 & & \\
3x = & 4,959000 & & \\
\hline
 & 9,475673 & 3xx+3 = & 11,197227 \\
2xx+4 = & 9,464818 & 4x = & 6,612000 \\
\hline
\text{num.} & 0,010855 & \text{den.} = & 4,585227 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
l\,\text{num.} = & 8,0356298 \\
l\,\text{den.} = & 0,6613608 \\
\hline
l\,\text{fract.} = & 7,3742690 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
x = & 1,653000 \\
\text{fractio} = & 0,002367 \\
\hline
f = & 2,650633
\end{array}$$

qui valor iam proxime ad verum accedit.

232. Citiores autem approximationes ex generali expressione deducere poterimus. Cum enim posita functione quacunque $y = 0$, si radix huius aequationis fuerit $x = f$, invenerimus esse:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

fit $f - x = z$, ita ut fit radix $f = x + z$, atque ponatur

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dr}{dx} = s; \quad \text{erit:}$$

$$0 = y + zp + \frac{z^2 q}{2} + \frac{z^3 r}{6} + \frac{z^4 s}{24} + \frac{z^5 t}{120} + \&c.$$

in qua aequatione sumto pro x valore quocunque, ex quo simul y, p, q, r, s, &c. determinantur, inveniri debet quantitas z, qua inventa habebitur aequationis propositae $y = 0$, radix $f = x + z$. In id ergo est incumbendum, ut quam commodissime ex hac aequatione valor incognitae z eruatur.

233. Fingatur pro z series convergens haec:

$$z = A + B + C + D + E + \&c.$$

atque facta substitutione erit:

$$\begin{aligned}
y &= y \\
pz &= Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c. \\
\tfrac{1}{2}qz^2 &= \quad + \tfrac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c. \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}BBq + BCq + \&c. \\
\tfrac{1}{6}rz^3 &= \qquad\qquad \tfrac{1}{6}A^3r + \tfrac{1}{2}A^2Br + \tfrac{1}{2}A^2Cr + \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}AB^2r + \&c. \\
\tfrac{1}{24}sz^4 &= \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{4}A^4s + \tfrac{1}{2}A^3Bs + \&c. \\
\tfrac{1}{120}tz^5 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{120}A^5t + \&c.
\end{aligned}$$

Unde obtinentur sequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

&c. ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2q}{2p^3} - \frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2 \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = q = 20x^3 \quad ;$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2 \quad ; \quad \frac{dr}{dx} = s = 120x \quad ; \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 1$, quia hic valor parum a radice diferepat, erit:

$y = 1$; $p = 7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$. unde fiet:

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5.1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

seu

seu $x = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7}$ &c. eritque ergo $x = -0,18$, & radix $f = 0,82$, qui valor si denuo loco x substitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Invenimus ergo seriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo ut tum lex progressionis non pateat, tum ipsa nimis sit perplexa atque ad usum non satis accommodata. Alio igitur modo idem negotium suscipiamus, seriemque magis regularem investigemus, cuiuscunque aequationis propositae radicem exprimentem.

Sit ut ante proposita aequatio $y = 0$, existente y functione quacunque ipsius x; & quaestio huc redit, ut valor ipsius x definiatur, qui loco x substitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y sit functio ipsius x, vicissim x tanquam functio spectari poterit ipsius y, atque hac consideratione adhibita quaerendus est valor ipsius functionis x, quem induit, cum quantitas y evanescit. Si igitur f ponatur designare istum ipsius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0$, quoniam x abit in f, si statuatur $y = 0$, erit per ea quae supra sunt demonstrata:

$$f = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,ddx}{2dy^2} - \frac{y^3\,d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4\,d^4x}{24dy^4} - \text{&c.}$$

in qua aequatione statuitur differentiale dy constans. Si igitur ponatur: $\frac{dx}{dy} = p$; $\frac{dp}{dy} = q$; $\frac{dq}{dy} = r$; $\frac{dr}{dy} = s$; &c. erit his valoribus introductis, ut consideratio differentialis constantis exuatur:

$$f = x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{&c.}$$

235. Tributo ergo ipsi x quocunque valore, simul valores ipsius y, atque quantitatum p, q, r, s, &c. determinabuntur; hisque inventis habebitur series infinita valorem radicis f ex-

f exprimens. Sin autem aequatio $y = 0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, si pro x diversi valores assumantur: quia enim y eundem valorem induere potest, etiamsi ipsi x diversi valores tribuantur, mirum non est eandem semem saepenumero plures valores suppeditare posse. Quo igitur his casibus ambiguitas tollatur, simulque series convergens reddatur, pro x assumi debet valor iam prope ad valorem eius radicis, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum parvus, serieique termini vehementer decrescent, ita ut paucis terminis sumendis iam satis iustus valor pro f inveniatur. Hic igitur valor si deinceps loco x substituatur, quantitas y multo minor evadet, serieque multo magis converget; hocque modo statim radix f tam exacte innotescet, ut error futurus sit minimus. Hincque summa huius expressionis praerogativa prae ea, quam ante elicueramus, manifesto perspicitur.

236. Ponamus extrahendam esse radicem potestatis n ex numero quocunque N. Sumta igitur proxima potestate exponentis n, numerus propositus facile resolvetur in hanc formam $N = a^n + b$. Erit ergo

$$x^n = a^n + b \quad \& \quad y = x^n - a^n - b; \quad \text{unde fit:}$$

$$dy = nx^{n-1}\,dx \; ; \quad \& \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)\,dx}{nx^n} \; ; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{nnx^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)\,dx}{nnx^{3n}} \; ; \; \& \; \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\,dx}{n^3 x^{4n}} \; ; \; \& \; s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 x^{4n-1}}$$

&c.

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaesita $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ hoc modo exprimetur:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n.a^{4n-1}} + \&c.$$

ſicque prodit eadem ſeries, quae vulgo per evolutionem binomii $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ erui ſolet.

237. Poſtquam ergo in actuali extractione radix proxime vera a fuerit inventa, ſimulque reſiduum b fuerit repertum, tum ad radicem inſuper addi oportet valor fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$, quo propius vera radix obtineatur. Erit autem $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, ob $N = a^n + b$. At vero hoc modo radix iuſto maior invenietur, quoniam tertius terminus ſubtrahi debet. Quo igitur per diviſionem reſidui b radix multo propius ad verum accedens inveniatur idoneus diviſor debet inveſtigari, qui fingatur eſſe $na^{n-1} + \alpha b + 6bb + 7b^3 + \&c.$

Cum igitur debeat eſſe:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + 6b^2 + 7b^3 + \&c.} = \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \&c.$$

fiet multiplicatione per $na^{n-1} + \alpha b + 6b^2 + 7b^3 + \&c.$ inſtituta:

$$\frac{b}{} = \frac{b}{} - \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{\alpha b^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}}$$

$$+ \frac{6b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)6b^4}{2n^2a^{2n-1}}$$

$$\frac{7b^4}{na^{n-1}}$$

Hinc deducuntur sequentes determinationes:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\delta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

seu $$\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$$

Fractio ergo ad radicem iam inventam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \frac{(n-1)b}{2a} - \frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}} + \frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n+1}}}$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N, atque inventa iam sit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inventam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b dividatur per

$$2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \text{&c.}$$

Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b dividi debet per $3a^2 + \frac{b}{a} - \frac{2bb}{9a^4} + \frac{b^3}{9a^7} - \text{&c.}$ quarum formularum usum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum sit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea dividi debebit per $28 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7.196.98}$, eritque ergo divisor $= 28,142135$, per quem si 4 dividatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & ultra.

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero N = 10.

Proximus cubus est 8, & residuum = 2, unde $a = 2$ & $b = 2$, atque divisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12{,}9444$.

Quare radix cubica quaesita erit proxime $= 2 - \frac{2}{12{,}9444} = 2\frac{10000}{64722}$.

239. Series pro radice inventa etiam considerari potest tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini seriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis constituant, revocabuntur. Sic levi attentione adhibita perspicietur fore proxime:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a + \frac{n+1}{2} b}{a + \frac{n-1}{2} b}$$ atque adhuc propius

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{aa + \frac{n+2}{2} ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12} bb}{aa - \frac{n-2}{2} ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12} bb}.$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri possunt:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^3 + \frac{n+3}{2} a^2 b + \frac{(n+3)(n+2)}{10} ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{120} b^3}{a^3 - \frac{n-3}{2} a^2 b + \frac{(n-3)(n-2)}{10} ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{120} b^3}$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi potest, ad quam commode exprimendam sit:

A =

$$A = \frac{m(n+m)}{1.\ 2m} \qquad \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1.\ 2m}$$

$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2} \cdot \frac{}{(2m-1)} A \qquad \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2} \cdot \frac{}{(2m-1)} \mathfrak{A}$$

$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3} \cdot \frac{}{(2m-2)} B \qquad \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3} \cdot \frac{}{(2m-2)} \mathfrak{B}$$

$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4} \cdot \frac{}{(2m-3)} C \qquad \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4} \cdot \frac{}{(2m-3)} \mathfrak{C}$$

&c. &c.

His autem valoribus determinatis erit:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro n fubſtituatur numerus fractus, iſtae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic ſi radix quaecunque poteſtatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, ſequentes formulae in uſum vocari poſſunt:

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}.$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, ut ſit $a^n = N - b$; erit

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}.$$

241. Formula igitur generalis pro radice cuiuſque aequationis inveniendа in aequationibus, quae ex pluribus terminis conſtant, eundem praeſtat uſum, quem ſolita regula binomii ad reſolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre ſolet, atque adeo hoc caſu in regulam illam ipſam abit.

Sin

Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in usum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radicis exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius usum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur

$$x^n + cx - N = y, \text{ erit } dy = (nx^{n-1} + c)\,dx,$$

hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}\,dx}{(nx^{n-1}+c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}+c)^2}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$; &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = -\frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1}+c)^7}$$

$$t = +\frac{n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{2n-7} - n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5}}{(nx^{n-1}+c)^9} \quad \text{&c.}$$

Quibus valoribus inventis, erit aequationis propositae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ry^5 + \text{&c.}$$

quicquid enim pro x substituatur, unde simul litterae y, p, q, r, &c. valores determinatos induunt, summa seriei aequabitur valori unius radicis.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.

Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$.

Po-

Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{78}{5^5}$; $s = -\frac{1690}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{13}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \text{&c.} = 0,771072.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia est $y = x^3 + 2x - 2$;

$p = \frac{1}{3xx+2}$; $q = -6p^3x$; $r = 90xxp^5 - 12p^5$; atque $s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$; habebitur logarithmis adhibendis:

$lx = 9,8864907$	$x = 0,77$
$lx^2 = 9,7729814$	$x^2 = 0,5929$
$lx^3 = 9,6594721$	$x^3 = 0,456533$
	$2x = 1,54$
	$x^3 + 2x = 1,996533$

Ergo $y = -0,003467$

$l - y = 7,5399538$;	$3xx + 2 = 3,7787$
$lp = 9,4226575$;	$l(3xx+2) = 0,5773424$
$l - py = 6,9626113$;	$-py = 0,0009175II$
$lp^3 = 8,2679725$	
$lx = 9,8864907$	
$l3 = 0,4771213$	
$ly^2 = 5,0799076$	
$l - \frac{1}{2}qyy = 3,7114922$	$-\frac{1}{2}qyy = 0,000000514.$

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in ultima figura a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit proposita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3xx+1}{4(x^3-x+1)^2} \quad \text{Ergo}$$

$$q = \frac{-3xx+1}{16(x^3-x+1)^3}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{16(x^3-x+1)^4}$$

& $r = \frac{21x^4 - 12xx - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^3}$; &c.

ex quibus erit radix aequationis propositae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} - \frac{(3xx-1)yy}{32(x^3 - x + 1)^2} - \frac{(7x^3 - 4xx - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^3} - \text{&c.}$$

Oportet ergo ipsi x idoneum valorem tribui, quo series ista fiat convergens. Primum autem perspicuum est, si ipsi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3 - x + 1 = 0$, tum omnes seriei terminos praeter primum evadere infinitos, neque adeo exinde quicquam concludi posse. Convenit ergo ipsi x eiusmodi valorem assignare, quo & y fiat exiguum & $x^3 - x + 1$ non admodum parvum. Sit $x = 1$, erit $y = -5$, &

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \text{&c.}$$ ubi cum tres termini $\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ congruant cum progressione geometrica, cuius summa est $\frac{5}{9}$ erit circiter $f = \frac{14}{9}$. Statuamus ergo $x = \frac{3}{2}$, erit $y = -\frac{23}{16}$; & $x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}$, unde fit:

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{391}{256.529} - \text{&c.} = 1,61.$$

Ponatur nunc $x = 1,61$; erit:

$lx = 0,2068259$	$x = 1,61$	sit $x^3 - x + 1 = z$
$lx^2 = 0,4136518$	$x^2 = 2,5921$	
$lx^3 = 0,6204777$	$x^3 = 4,173281$	
$lx^4 = 0,8273036$	$x^4 = 6,718983$	
	hinc	
$l-y = 8,4016934$	$y = -0,025217$	
$lz = 0,5518502$	$z = 3,563281$	
$l\frac{-y}{z} = 7,8498432$		

$l4 =$

$l4 = 0,6020600$	
$l\frac{-y}{4x} = 7,2477832$	$\frac{-y}{4x} = 0,0017692$
$l(3xx-1) = 0,8309926$	$3xx-1 = 6,7763$
$ly^3 = 6,8033868$	
$7,6343794$	
$lx^3 = 1,6555506$	
$5,9788288$	
$l32 = 1,5051500$	$\frac{(3xx-1)y^3}{32x^3} = 0,000002976$
$4,4736783$	

Ergo $f = 1,6117662$.

242. Methodus haec inveniendi radices aequationum proxime aeque patet ad quantitates transcendentes. Quaeramus numerum x, cuius logarithmus ex quocunque canone desumptus ad ipsum numerum datum habeat rationem ut 1 ad n, atque habebitur ista aequatio $x - nlx = 0$: sit autem k modulus horum logarithmorum, ita ut isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur per k, erit $dlx = \frac{kdx}{x}$. Ponatur ergo $x - nlx = y$, sitque f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = nlx$. Cum igitur sit $y = x - nlx$, erit $dy = dx - \frac{kndx}{x} = \frac{dx(x-kn)}{x}$ &

$$\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x-kn}; \text{ unde } dp = -\frac{kndx}{(x-kn)^2} \text{ ergo}$$

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3}; \quad dq = \frac{2knxdx + k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^5}; \text{ &c.} \quad \text{Quare fiet:}$$

$$f = x - \frac{xy}{x-kn} - \frac{knxy^2}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \text{&c.}$$

Infra autem ostendemus hoc problema solutionem non admittere, nisi sit $kn > e$, existente e numero cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, seu debet esse $kn > 2,7182818$.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus praeter 10, *cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipsius numeri:*

Quia de logarithmis tabularibus quaestio instituitur, erit $k = 0,43429448190325$, atque ob $n = 10$ habebitur $kn = 4,34294481903 25$. Facto iam $x = 1$, erit $y = 1$, fietque $f = 1 + \frac{1}{3,3429} + \frac{2,1714724}{(3,3429)^3} -$ &c. sicque proxime erit $f = 1,37$. Statuatur ergo $x = 1,37$, erit $lx = 0,13672056715 6406$, & ob $y = x - 10lx$, erit $y = 0,00279432843503$. &
$-x + kn = 2,97294481903 25$. Fiat ergo

$$lx = 0,1367205$$
$$ly = \underline{7,4462773}$$
$$7,5829978$$
$$l(kn - x) = \underline{0,4731866}$$
$$7,1098112$$

$$\frac{-xy}{x - kn} = 0,00128769.$$

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{knxyy}{2(x-kn)^3} = \frac{kny}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{xy}{x-kn}$ erit:

$$l\frac{-xy}{x-kn} = 7,1098112$$
$$ly = 7,4462773$$
$$lkn = \underline{0,6377842}$$
$$5,1938727$$
$$l(kn-x)^2 = \underline{0,9463732}$$
$$4,2474995$$
$$l2 = \underline{0,3010300}$$
$$l \text{ tert. term.} = 3,9464695$$
$$\text{I. term. } x = 1,37$$

II.

II. term. $= 0,00128769$
III. term. $= 0,00000088$
$f = 1,37128857$
$lf = 0,137128857$.

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x, ut sit $x^x = a$, erit $xlx = la$. Quare posito $y = xlx - la$, fiet

$dy = dxlx + dx$, & $\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+lx}$. Tumque

$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}$; & $\frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$,

$dq = \frac{dx}{xx(1+lx)^3} + \frac{3dx}{xx(1+lx)^4}$, ideoque

$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1+lx)^4} + \frac{3}{xx(1+lx)^5}$; porro erit

$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6}$; ergo

$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}$, &

$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$

$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}$.

Hinc ergo si verus valor ipsius x sit $= f$, ita ut sit $f^f = a$; erit:

$$f = x - \frac{y}{1+lx} - \frac{yy}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2xx(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$
$$- \frac{y^3}{6x^3(1+lx)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$

$$-\frac{y^4}{12x^4(1+lx)^4}-\frac{y^5}{3x^5(1+lx)^5}$$
$$-\frac{y^6}{20x^6(1+lx)^6}$$
&c.

Haec ergo expressio in infinitum continuata, quicunque valor pro x statuatur, sumto $y = x\,lx - la$ verum ipsius f dabit valorem. Sic si ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, &

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{5(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} - \text{&c.}$$

ubi notandum est esse la logarithmum hyperbolicum ipsius a.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus f, *ut sit* $l = 100$.

Cum sit $a = 100$, & $y = xlx - la = xlx - l100$, quia patet esse $f > 3$ & < 4, statuatur

$x = \frac{1}{4}$; eritque $lx = 1,25276296849$
$xlx = 4,38467038972$
$l100 = 4,60517018599$
$y = -0,22049979627$
$1 + lx = 2,25276296849$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$l - y = 9,3434083$
$l(1+lx) = 0,3527156$
$8,9906927$; $\frac{-y}{1+lx} = 0,0978797$
$ly^3 = 8,6868166$
$3l(1+lx) = 1,0581468$
$= 7,6286698$
$l2x = l7 = 0,8450980$
$6,7835718$ $\frac{y^3}{2x(1+lx)^3} = 0,0006075$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$, sequentibus vero insuper terminis sumtis erit $f = 3,5972852$.

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet

bet usum in resolutione aequationum, si quaepiam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x. Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a hae duae radices facile invenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y evanescat, si x significet unam ex radicibus aequationis $y = 0$, evanescet quoque y, si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{6dx^3} + \text{&c.}$$

Unde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \text{&c.}$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radicis x, quam alia radix superat quantitate a.

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam undecunque constet, habere duas radices unitate differentes.

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3 y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4 y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5 y}{120dx^5} = 1$$

Iam ob $a = 1$ erit:

A . . . $5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0$. At est
B . . . $x^4 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0$.

Multiplicetur superior per x & inferior per 5, alteraque ab altera subtracta relinquet:

$10x^4 + 53x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0$ seu
C . . . $5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$

a qua prima A subtracta relinquet:

D . . . $19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0$
D.$5x$ . . . $95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0$
A.19 . . . $95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0$
E . . . . . $415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0$
D.415 . . . . . $7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0$
E.19 . . . . . $7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0$
F . . . . . $1997x^2 - 12581x + 17174 = 0$
D.247 . . . . $4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0$
E. 32 . . . $13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0$
$8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0$
G . . . . . $8587x^2 - 23701x + 13054 = 0$
F.8587 . . . $171482239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0$
G.1997 . . . $171482239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0$
$60702150x - 121404300 = 0$

Ex qua aequatione sequitur $x = 2$,
ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quorum uterque valor aequationis satisfacit.

245. Potest autem haec operatio absolvi sine subsidio calculi differentialis, propterea quod eadem aequatio, quam calculus differentialis suppeditavit, prodit si in ipsa aequatione proposita ponatur $x + \alpha$ loco x. Ceterum vero haec methodus eliminandi nimium est operosa, &, si aequationes essent altioris gradus, labor penitus foret insuperabilis; ex quo multo minus in aequationibus transcendentibus locum habere potest. Quod si autem ponamus duas aequationis propositae $y = 0$ radices inter se esse aequales, tum ob $\alpha = 0$,

aequa-

aequatio differentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quaepiam aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae praebebunt eum ipsius x valorem, cui binae radices sunt aequales. Unde viciſſim ſi ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$. Evenit autem hoc, ſi poſtquam quantitas x ope duarum iſtarum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata, perveniatur ad aequationem identicam. Sic ſi proponatur aequatio: $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam additum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ ſeu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius triplum eſt $3xx + 12x - 36 = 0$

ſubtrahatur $3xx - 4x - 4 = 0$

$16x - 32 = 0$

$x - 2 = 0$

Cum ergo prodierit $x = 2$, ſubſtituatur hic valor in una praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio identica $12 - 8 - 4 = 0$, unde colligitur aequationem propoſitam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices aequales; nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quotcunque dimenſionum:

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$

quae duas habeat radices inter ſe aequales, erit quoque

$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \&c. = 0.$

Scilicet illius aequationis radix duplex ſimul erit radix iſtius aequationis. Multiplicetur illa per n, ab eaque haec per x multiplicata ſubtrahatur, prodibitque haec nova aequatio:

$Ax^{n-1}+2Bx^{n-2}+3Cx^{n-3}+4Dx^{n-4}+$ &c. $=0$. Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicatae erit: $ax^n+(a+b)Ax^{n-1}+(a+2b)Bx^{n-2}+(a+3b)Cx^{n-3}+$ &c. $=0$ quae aequatio cum ipsa proposita coniuncta monstrabit radices aequales, si quas habet propositа. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu assumi queant, coefficientes a, $a+b$, $a+2b$, &c. progressionem quamcunque arithmeticam repraesentant. Quamobrem si aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae invenientur, si singuli aequationis propositae termini multiplicentur per terminos cuiusvis progressionis arithmeticae respective; nova enim aequatio hoc modo resultans eam radicem, quae in proposita bis inest, quoque continebit. Sic aequatio:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\text{&c.}=0$$

si eius termini multiplicentur per progressionem arithmeticam hanc: a; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; $a+4b$; &c. prodibit nova aequatio haec:

$ax^n+(a+b)Ax^{n-1}+(a+2b)Bx^{n-2}+(a+3b)Cx^{n-3}+$ &c. $=0$

quae cum illa coniuncta radices aequales ostendet. Haecque est regula satis cognita inveniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247. Si aequatio $y=0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx}=0$, sed etiam erit $\frac{ddy}{dx^2}=0$; si quidem pro x statuatur eius radicis valor, quae in aequatione $y=0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y=0$ tres habere radices huiusmodi x, $x+a$, & $x+b$, quae primum intervallis finitis a & b a se invicem discrepent; & quia y evanescit, si loco x tam $x+a$, quam $x+b$ scribatur, erit: $y=0$

$$y+\frac{ady}{dx}+\frac{a^2ddy}{2dx^2}+\frac{a^3d^3y}{6dx^3}+\frac{a^4d^4y}{24dx^4}+\text{&c.}=0$$

$$y+\frac{bdy}{dx}+\frac{b^2ddy}{2dx^2}+\frac{b^3d^3y}{6dx^3}+\frac{b^4d^4y}{24dx^4}+\text{&c.}=0$$

a qui-

a quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a\,ddy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{a^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{2dx^2} + \frac{b^2 d^3 y}{6dx^3} + \frac{b^3 d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0$$

Subtrahantur quoque hae a se invicem, divisioneque per $a - b$ facta erit:

$$\frac{ddy}{2dx^2} + \frac{(a+b)\,d^3 y}{6dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)\,d^4 y}{24dx^4} + \&c. = 0.$$

Ponatur iam $a = 0$ & $b = 0$, ita ut tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos evanescentes:

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habeat radices aequales puta f, f, f, tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$

tres contineat radices aequales f, f, f, si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusvis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f: quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat aequatio eamdem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combina-

tione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressiones arithmeticae eligantur, quarum vel primus vel ultimus terminus sit $=0$, tum aequatio prodibit uno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilior evadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y=0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f, tum posito $x=f$ non solum fieri $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, & $\frac{ddy}{dx^2}=0$, sed etiam fore $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Scilicet uti aequatio $y=0$ quater continet radicem $x=f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio vero $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, & aequatio $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel complectetur. Hoc quoque facilius perspicietur, si perpendamus functionem y hoc casu huiusmodi formam $(x-f)^4 X$ habere debere, denotante X functionem quamcumque ipsius x. Hac forma assumta erit: $\frac{dy}{dx}=(x-f)^3\left(4X+\frac{(x-f)dX}{dx}\right)$, ideoque per $(x-f)^3$ divisibilis. Similiter porro habebit $\frac{ddy}{dx^2}$ factorum $(x-f)^2$, & $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perspicuum est, si radix $x=f$ in aequatione $y=0$ quater insit, eam in aequatione $\frac{dy}{dx}=0$ ter, in aequatione $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, atque in $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel adhuc inesse debere.

CA-

CAPUT X.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

250.

Si functio ipsius x ita fuerit comparata, ut crescentibus valoribus x ipsa continuo crescat vel decrescat, tum ista functio nullum habebit valorem maximum minimumve. Quicunque enim huius functionis valor consideretur, sequentes erunt maiores, praecedentes vero minores. Huiusmodi functio est $x^3 + x$, cuius valor crescentibus x continuo crescit, decrescentibus vero x, continuo decrescit; maximum ergo haec functio valorem alium induere nequit, nisi ipsi x valor maximus, hoc est infinitus tribuatur; similique modo minimum obtinebit valorem, si ponatur $x = -\infty$. Nisi autem functio ita fuerit comparata, ut crescente x continuo crescat decrescatve, maximum vel minimum alicubi habebit valorem; hoc est eiusmodi valorem, qui sit vel maior vel minor, quam antecedentes & sequentes. Sic ista functio $xx - 2x + 3$ minimum valorem induit, si ponatur $x = 1$, quicunque enim alius valor ipsi x tribuatur, perpetuo functio maiorem adipiscetur valorem.

251. Quo autem natura maximorum ac minimorum clarius perspiciatur, ponamus y eiusmodi esse functionem ipsius x, quae maximum obtineat valorem, si ponatur $x = f$; atque intelligitur, si x ponatur sive maius sive minus quam f, tum valorem ipsius y inde oriundum minorem fore illo, quem induit si ponatur $x = f$. Simili modo, si posito $x = f$, functio y minimum obtineat valorem, necesse est ut, sive x ponatur maius quam f sive minus, semper maior ipsius y valor resultet: haecque est definitio maximorum & minimorum absolutorum. Praeterea autem quoque functio y maxi-

mum valorem recipere dicitur posito verbi gratia $x = f$, dummodo iste valor maior fuerit quam proximi sive sequentes sive antecedentes, qui oriuntur, si x aliquantillum sive maius sive minus quam f statuatur; etiamsi aliis valoribus loco x substituendis functio y maiores forte valores recipiat. Similiter functio y minimum valorem recipere dicitur posito $x = f$, dummodo ille valor minor fuerit iis, quos induit, si loco x valores proxime sive maiores sive minores quam f substituantur. Atque in hac posteriori significatione istis maximorum & minimorum vocabulis utemur.

252. Antequam autem modum ostendamus haec maxima & minima inveniendi, notari convenit hanc investigationem proprie in iis tantum ipsius x functionibus locum habere, quas supra uniformes vocavimus, & quae sunt ita comparatae, ut pro singulis ipsius x valoribus singulos pariter valores recipiant. Biformes autem & multiformes functiones vocavimus, quae pro singulis valoribus ipsius x binos pluresve valores inducunt, cuiusmodi functiones sunt radices aequationum quadraticarum & plurium dimensionum. Si igitur y huiusmodi fuerit functio ipsius x vel biformis vel multiformis, tum proprie dici nequit, eam posito $x = f$ valorem sive maximum sive minimum induere: quoniam enim posito $x = f$ vel duos pluresve valores simul obtinet, atque praecedentes aeque ac sequentes sint numero plures, diiudicatio maximi minimive non tam facile instituitur: nisi forte omnes functionis y valores, qui singulis ipsius x valoribus respondent, sint imaginarii praeter unum; quo casu huiusmodi functiones speciem functionum uniformium mentiuntur. Primum ergo functiones uniformes harumque speciem mentientes contemplabimur, tum vero quomodo iudicium ad multiformes accommodari debeat, indicabimus.

253. Sit igitur y functio ipsius x uniformis, quae propterea, quicunque valor pro x substituatur, semper unum recipiat valorem realem, denotetque x eum valorem, qui fun-

functioni y maximum minimumve valorem inducat. Priori ergo casu, sive loco x substituatur $x+\alpha$ sive $x-\alpha$, valor ipsius y minor erit, quam si $\alpha=0$, posteriori vero casu maior. Cum igitur posito $x+\alpha$ loco x functio y abeat in

$$y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

at posito $x-\alpha$ loco x in

$$y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

necesse est ut casu maximi sit

$$y>y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c. \quad \&$$

$$y>y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

In casu autem, quo valor ipsius y fit minimus erit:

$$y<y+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

$$y<y-\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2}-\frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

254. Quoniam haec evenire debent, si α denotet quantitatem minimam, statuamus α tam parvum, ut eius potestates altiores reiici queant; debebitque tam pro casu maximi quam minimi esse $\frac{\alpha dy}{dx}=0$. Nisi enim $\frac{\alpha dy}{dx}$ esset $=0$, neque valor ipsius y maximus neque minimus esse posset. Hinc tam pro maximis quam pro minimis investigandis haec habetur regula communis, ut differentiale propositae y nihilo aequale ponatur, eritque ille ipsius x valor, qui functionem reddit vel maximam vel minimam, radix istius aequationis. Utrum vero valor hoc modo inventus ipsius y futurus sit maximus an minimus, incertum relinquitur; quin etiam fieri potest, ut y neque maximum neque minimum

sit

fit futurum: tantum enim invenimus utroque casu fore $\frac{dy}{dx}=0$, neque viciſſim affirmavimus, quoties ſit $\frac{dy}{dx}=0$, toties quoque valorem pro y prodire vel maximum vel minimum.

255. Interim tamen ad caſus, quibus valor ipſius vel maximus vel minimus evadat, inveſtigandos haec prima operatio inſtituenda eſt, ut differentiale functionis propoſitae nihilo aequetur, atque ex aequatione $\frac{dy}{dx}=0$ omnes ipſius x valores eliciantur. Quibus inventis deinceps diſpiciendum erit, utrum iis functio y maximum induat valorem, an minimum, an neutrum; oſtendemus enim fieri poſſe, ut neque maximum neque minimum locum habeat, etiamſi ſit $\frac{dy}{dx}=0$. Sit f valor ſeu unus ex valoribus ipſius x, quem obtinet ex aequatione $\frac{dy}{dx}=0$, hicque valor ſubſtituatur in expreſſionibus $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. fiatque hac ſubſtitutione $\frac{ddy}{dx^2}=p$; $\frac{d^3y}{dx^3}=q$; $\frac{d^4y}{dx^4}=r$ &c. Abeat autem functio ipſa y poſito f loco x in F, atque ſi loco x ponatur $f+\alpha$, iſta functio abibit in

$$F+\frac{1}{2}\alpha^2 p+\frac{1}{6}\alpha^3 q+\frac{1}{24}\alpha^4 r+\&c.$$

ſin autem loco x ponatur $f-\alpha$ prodibit

$$F+\frac{1}{2}\alpha^2 p-\frac{1}{6}\alpha^3 q+\frac{1}{24}\alpha^4 r-\&c.$$

unde patet, ſi p fuerit quantitas affirmativa, utrumque valorem maiorem fore quam F, ſaltem ſi α quantitatem valde

parvam

parvam denotet, ac propterea valorem F, quem functio y induit posito $x = f$, fore minimum. Sin autem p sit quantitas negativa, tum valor $x = f$ functioni y inducet valorem maximum.

256. Quodsi autem fuerit $p = 0$, tum spectari debet valor ipsius q, qui si non fuerit $= 0$, valor ipsius y neque maximus erit neque minimus; nam posito $x = f + a$ erit $F + \frac{1}{6} a^3 q > F$ & posito $x = f - a$ erit $F - \frac{1}{6} a^3 q < F$. Sin autem quoque fuerit $q = 0$, ad quantitatem r erit respiciendum, quae si habuerit valorem affirmativum valor functionis F, quem recipit posito $x = f$, erit minimum; sin autem r habeat valorem negativum, erit F maximum. At si quoque r evanescat iudicium ex sequentis litterae s valore erit petendum, quod simile erit illi, quod ex littera q formavimus. Scilicet si s non fuerit $= 0$, functio F neque maximum erit neque minimum; sin autem sit quoque $s = 0$, tum sequens littera t, si habeat valorem affirmativum indicabit minimum, sin autem habeat valorem negativum, indicabit maximum. Verum si & haec littera t evanescat, tum in iudicando ulterius est procedendum eodem prorsus modo, quo in casibus praecedentibus sumus usi. Sicque de qualibet radice aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ indagabitur, utrum functioni y inducat valorem maximum an minimum, an neutrum; atque hoc modo omnia maxima & minima, quae quidem functio y recipere potest, invenientur.

257. Si ergo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat aequales, ita ut factorem habeat quadratum $(x - f)^2$, tum posito $x = f$ simul $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescet, eritque $p = 0$, non autem

tem q. Hoc ergo casu functio y neque maximum neque minimum valorem induet. Sin autem aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ tres radices habeat aequales, seu $\frac{dy}{dx}$ factorem cubicum $(x-f)^3$, tum posito $x = f$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ & $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; non autem $\frac{d^4y}{dx^4}$. Huius ergo termini valor si fuerit affirmativus indicabit minimum, sin negativus, maximum. Iudicium ergo ante explicatum huc redit, ut si expressio $\frac{dy}{dx}$ factorem habuerit $(x-f)^n$, existente n numero impari, functio y, si in ea ponatur $x = f$, valorem sit acceptura vel maximum vel minimum; sin autem exponens n fuerit numerus par, tum substitutio $x = f$ neque maximum neque minimum valorem producat.

258. Deinde inventio maximi ac minimi saepenumero non mediocriter adiuvabitur sequentibus considerationibus. Quibus scilicet casibus functio y fit maximum vel minimum, iisdem casibus fiet quodvis eius multiplum ay, si quidem a fuerit quantitas affirmativa, itemque y^3, y^5, y^7, &c. atque generaliter ay^n, si quidem n fuerit numerus affirmativus impar, pariter maximum vel minimum; quoniam huiusmodi formulae ita sunt comparatae, ut crescente y crescant, & decrescente y, decrescant. Quibus autem casibus fit y maximum vel minimum, iisdem casibus $-y$, $-ay$, $b-ay$, & generaliter $b-ay^n$ existente n numero affirmativo impari, fiet ordine inverso vel minimum vel maximum. Similiter quibus casibus y fit maximum vel minimum, iisdem casibus formulae hae $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$, & generaliter $\frac{a}{y^n} \pm b$, denotante a quantitatem affirmativam & n numerum affirmativum imparem, fient inverso ordine vel minimum vel maximum; sin autem a fuerit quantitas negativa, tum istae formulae maximum impetrabunt valorem, si y fuerit maximum, & minimum, si y sit minimum.

259.

259. Ad potestates autem pares haec non item traduci possunt: quoniam enim, si y valores recipit negativos, eius potestates pares y^2, y^4, &c. valores affirmativos inducunt, fieri potest, ut dum y minimum valorem negativum scilicet recipit, eius potestates pares fiant maxima. Huius igitur conditionis ratione habita affirmare poterimus, si y fuerit maximum vel minimum, existente eius valore affirmativo, tum eius potestates pares y^2, y^4 &c. quoque fore maxima, vel minima. Sin autem valor ipsius y negativus fuerit maximum, tum eius quadratum yy accepturum esse valorem minimum, & contra si valor ipsius y negativus sit minimum, tum y^2, y^4, &c. fore maximum. Quodsi vero exponentes ipsius y pares fuerint negativi, tum contrarium eveniet. Ceterum quae hic de exponentibus paribus & imparibus annotavimus, ea non solum pro numeris integris valent, sed etiam pro fractis, quorum denominatores sunt numeri impares; in hoc enim negotio fractiones $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$, &c. numeris imparibus, at $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, &c. numeris paribus aequivalent.

260. Sin autem denominatores fuerint numeri pares, tum, quoniam si y negativum habet valorem, eius potestates $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; &c. fiunt imaginariae; hoc tantum de iis affirmari poterit, si valor ipsius y affirmativus fuerit maximum vel minimum, tum quoque $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; &c. fore pariter vel maxima vel minima; contra autem $y^{-\frac{1}{2}}$, $y^{-\frac{1}{4}}$, $y^{-\frac{1}{6}}$, &c. minima vel maxima. Quia autem haec irrationalia simul geminos valores habent, alterum affirmativum, alterum negativum, de negativis contrarium erit tenendum, quod hic de affirmativis diximus. Sin autem valor ipsius y negativus

evadat maximum vel minimum, tum quia huiusmodi potestates omnes fiunt imaginariae, neque maximis neque minimis annumerari poterunt. His igitur subsidiis investigatio maximi & minimi saepe admodum reddetur facilis, quae alias futura esset vehementer difficilis.

261. Quoniam haec proprie ad functiones rationales, quippe quae sunt solae uniformes, pertinent, primum functiones integras evolvamus, atque maxima minimaque quae in ipsis occurrunt indagemus. Cum igitur huiusmodi functiones ad hanc formam referantur

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{&c.}$$

primum patet earum valorem maiorem fieri non posse, quam si ponatur $x = \infty$; tum vero si $x = -\infty$ valor huius formulae prodit $= \infty^n$, si n sit numerus par, at $-\infty^n$ si n sit numerus impar, qui propterea valor erit omnium minimus. Dantur autem praeterea saepe alia maxima & minima eo sensu, quem his vocibus attribuimus, quae sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Invenire valores ipsius x, *quibus haec functio* $(x-a)^n$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $(x-a)^n = y$, erit $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, quo posito $= 0$, fiet $x = a$. Cum igitur $\frac{dy}{dx}$ factorem habeat $(x-a)^{n-1}$, ex §. 257. intelligitur y maximum minimumve esse non posse, nisi sit $n-1$ numerus impar, seu n numerus par. Quia autem dum fit

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

hoc est numerus affirmativus, sequitur, valorem ipsius y posito $x = a$ proditurum esse minimum. Quod quidem facile patet; nam posito $x = a$ fit $y = 0$; & si x ponatur vel

maius

maius vel minus quam a, ob n numerum parem, accipiet y valorem positivum hoc est nihilo maiorem; sin autem n fuerit numerus impar, tum functio $y = (x-a)^n$ neque maximum neque minimum admittit. Perspicuum autem porro est hoc idem valere, si n fuerit numerus fractus sive impar sive par. Scilicet $(x-a)^{\frac{\mu}{\nu}}$ fiet posito $x = a$ minimum, si μ fuerit numerus par & ν impar; sin autem uterque fuerit impar, neque maximum dabitur neque minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire casus quibus valor huius formulae $xx + 3x + 2$ *fit maximum vel minimum.*

Ponatur $xx + 3x + 2 = y$, erit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$.

Statuatur ergo $2x + 3 = 0$, fiet $x = -\frac{3}{2}$; qui casus utrum maximum an minimum producat, cognoscetur ex valore $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, qui cum sit affirmativus, quicquid sit x, indicat minimum. Posito autem $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{4}$, & si alii quicumque valores ipsi x tribuantur, valor ipsius y inde orundus perpetuo maior erit quam $-\frac{1}{4}$. Ex natura quoque ipsius formulae $xx + 3x + 2$ perspicitur, eam minimum valorem habere debere; nam cum in infinitum excrescat sive ponatur $x = +\infty$ sive $x = -\infty$, necesse est, ut quispiam valor ipsius x ipsi y omnium minimam quantitatem inducat.

EXEMPLUM III.

Invenire casus, quibus expressio haec $x^3 - axx + bx - c$ *maximum minimumve valorem accipit.*

Posito $y = x^3 - axx + bx - c$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$ & $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Statuatur ergo

$\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b = 0$; erit $x = \frac{a \pm \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$, ex quo intelligitur, nisi sit $aa > 3b$, formulam propositam neque maximum neque minimum esse habituram. Sin autem sit $aa > 3b$, duobus casibus fit maximum vel minimum. Hinc vero oritur $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm\sqrt{(aa - 3b)}$, unde intelligitur nisi fit $aa = 3b$, valorem $x = \frac{a + \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ reddere formulam $y = x^3 - axx + bx - c$ minimam, alterum vero $x = \frac{a - \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ maximam. Quanti autem futuri isti sint ipsius y valores, cum sit $3xx - 2ax + b = 0$ seu $x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3}b = 0$; erit $y = -\frac{1}{3}axx + \frac{2}{3}bx - c$ & ob $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$, fit $y = \frac{2}{3}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(aa - 3b)}{27} \mp \frac{2(aa - 3b)\sqrt{(aa - 3b)}}{27} + \frac{ab}{9} - c$, sive $y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}}$, ubi signum superius valet pro minimo, inferius autem pro maximo. Restat ergo casus quo $aa = 3b$, in quo cum fiat $\frac{ddy}{2dx^2} = 0$, sequens vero terminus $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$, non fit $= 0$, sequitur hoc casu formulam propositam neque maximum neque minimum esse recepturam.

EXEMPLUM IV.

Invenire casus quibus haec functio ipsius x;

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

fit maximum vel minimum.

Posito $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; erit

$\frac{dy}{}$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22$$

Statuatur nunc $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$ seu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, orientur tres valores reales pro x; I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$. Ex primo valore fit $\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, ideoque posito $x = 1$ functio proposita fit minimum. Ex secundo valore $x = 2$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, ideoque functio proposita maximum. Ex tertio valore $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = +4$, ideoque functio proposita iterum minimum.

EXEMPLUM V.

Proposita sit haec functio $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, *quae, quibus casibus fiat maximum minimumve quaeritur.*

Cum fit $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$, formetur aequatio $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$, cuius radices sunt I. & II. $x = 0$; III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Quoniam prima & secunda radices sunt aequales, ex iis neque maximum neque minimum sequitur, fit enim $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, at $\frac{d^3y}{2dx^3}$ non evanescit. Tertia radix autem $x = 1$, ob $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$ praebet $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, hocque ergo casu functio fit maximum. Ex quarta radice $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = 45$, ideoque functio proposita minimum.

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Invenire casus quibus haec formula

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

fit maximum vel minimum.

Erit ergo $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^2 - 60x^1$, & $\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$. Formetur aequatio $x^3 - x^2 + x^1 - x = 0$, quae cum in factores resoluta sit $x^1(x-1)(xx+1) = 0$, duas habet radices aequales $x = 0$, & praeterea radicem $x = 1$, duasque insuper ex $xx + 1 = 0$ imaginarias. Cum igitur binae radices aequales $x = 0$ neque maximum neque minimum exhibeant, tantum consideranda superest radix $x = 1$, ex qua fit $\frac{ddy}{60dx^2} = 2$, cuius valor affirmativus indicat minimum.

262. Determinatio ergo maximorum & minimorum pendet a radicibus aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = 0$, cuius potestas summa, cum sit uno gradu inferior quam in ipsa functione proposita y, si quidem haec fuerit functio rationalis integra: manifestum est si in genere proponatur haec functio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = y$$

eius maxima & minima determinari per radices huius aequationis:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Ponamus huius aequationis radices reales secundum ordinem quantitatis dispositas esse α, β, γ, δ, &c. ita ut α sit maxima $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$, &c. Ac primo quidem si hae radices omnes fuerint inaequales, unaquaeque formulae propositae y inducet valorem maximum vel minimum; totque idcirco functio y habebit maxima vel minima, quo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ha-

habuerit radices reales inaequales. Sin autem duae pluresve radices inter se fuerint aequales, res ita se habebit, ut duae radices aequales neque maximum neque minimum exhibeant; ternae vero radices aequales uni aequivaleant: atque in genere si numerus radicum aequalium fuerit par, nullum inde resultat maximum minimumve; sin autem sit impar, unum inde oritur sive maximum sive minimum.

263. Quaenam autem radices maxima, & quae minima producant, sine subsidio regulae ante traditae ita definiri poterit. Cum functio y posito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipsius x intra limites ∞ & α, ullum producant sive maximum sive minimum; perspicuum est valores functionis y, dum loco x successive valores ab ∞ usque ad α substituantur, continuo decrescere oportere; ideoque valor $x = \alpha + \omega$ functioni y maiorem valorem inducet, quam valor $x = \alpha$: unde cum $x = \alpha$ maximum minimumve producat, necesse est, ut hoc casu functio y fiat minimum. Ulterius ergo x diminuendo seu ponendo $x = \alpha - \omega$, valor ipsius y iterum crescet, donec fiat $x = 6$, quae est secunda aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix maximum minimumve producens: quare haec secunda radix $x = 6$ maximum praebebit, & valor $x = 6 - \omega$ minorem efficiet functionem y, quam $x = 6$, donec perveniatur ad $x = 7$, quae consequenter iterum minimum generabit. Ex quo ratiocinio perspicitur, radices aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ primam, tertiam quintam, &c. minima, secundam autem, quartam, sextam &c. maxima exhibere. Simul autem hinc intelligitur in casu duarum radicum aequalium maximum & minimum coalescere, sicque neutrum locum habere.

264. Si ergo in functione proposita

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

maximus exponens n fuerit numerus par, aequatio

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \&c. = 0;$$

erit gradus imparis, ideoque vel unam habebit radicem realem, vel tres, vel quinque, vel numero impares. Si unica radix fuerit realis, ea dabit minimum; sin tres fuerint reales, maxima praebebit minimum, media maximum, & minima iterum minimum; & si quinque radices fuerint reales, functio y tria habebit minima & duo maxima; sicque porro. At si exponens n fuerit numerus impar, aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad gradum parem pertinebit, ideoque vel nullam habebit radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel sex, &c. Primo casu functio y neque maximum habebit neque minimum: altero casu, quo duae dantur radices, earum maior minimum, minor autem maximum indicabit: quatuor autem radicum prima (quae est maxima) & tertia minimum, secunda vero & quarta maximum producunt. Perpetuo autem quotcunque radices fuerint reales, maxima & minima se mutuo alternatim insequuntur.

265. Progrediamur ad functiones rationales fractas, quibus altera species functionum uniformium constituitur. Sit igitur $y = \frac{P}{Q}$, existentibus P & Q functionibus quibuscunque ipsius x; ac primo quidem apparet, si ipsi x eiusmodi valor tribuatur, ut fiat $Q = 0$, nisi simul P evanescat, functionem y evadere infinitam, quod utique maximum videatur. Nihilo vero minus iste casus pro maximo haberi nequit; cum enim fractio inversa $\frac{Q}{P}$ iisdem casibus fiat minimum, quibus proposita $\frac{P}{Q}$ fit maximum, deberet fractio $\frac{Q}{P}$ fieri minimum, si Q evanescit; hoc autem non semper evenit, propterea quod adhuc minores valores, negativos scilicet

cet, induere posset. Hoc igitur dubio exemto, simul regula ante data confirmatur, quod maxima & minima ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ elici debeant. Fiet ergo casu proposito $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; ideoque $QdP - PdQ = 0$; huiusque aequationis radices efficient functionem y vel maximum vel minimum. Atque si dubium sit, utrum maximum an minimum locum habeat, confugiendum est ad valorem $\frac{ddy}{dx^2}$, qui si fuerit affirmativus minimum indicabit, sin autem sit negativus maximum. Quod si vero & hic valor $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescat, quod evenit, si aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habeat duas pluresve radices aequales; perpetuo tenendum est radices aequales numero pares neque maximum neque minimum producere.

EXEMPLUM I.

Invenire casus, quibus functio $\frac{x}{1+xx}$ *fit maximum vel minimum.*

Primum quidem apparet, hanc functionem in nihilum abire casibus tribus $x = \infty$, $x = 0$ & $x = -\infty$, unde ad minimum duo recipiet sive maxima sive minima. Ad quae invenienda ponatur $y = \frac{x}{1+xx}$; eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x - 2x^3}{(1+xx)^3}$.

Iam statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $1 - xx = 0$, & vel $x = +1$ vel $x = -1$.

Priori casu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$; ideoque y maxim. $= \frac{1}{2}$,

posteriori $x = -1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$; ideoque y minim. $= -\frac{1}{2}$.

Haec quoque facilius inveniuntur, si fractio proposita $\frac{x}{1+xx}$ invertatur, ponendo $y = \frac{1+xx}{x} = x + \frac{1}{x}$, dummodo recordemur tum quae maxima inveniuntur, in minima & viciſſim tranſmutari debere. Erit autem $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$. Statuto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, fit $xx - 1 = 0$, indeque vel $x = +1$ vel $x = -1$ ut ante. Atque caſu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, ideoque y minimum, & formula proposita $\frac{1}{y}$ maximum. Caſu autem $x = -1$, fit $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, unde y maximum & $\frac{1}{y}$ minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire caſus quibus formula $\frac{2-3x+xx}{2+3x+xx}$ *ſit maximum vel minimum.*

Poſito $y = \frac{xx-3x+2}{xx+3x+2}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2-12}{(xx+3x+2)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x^3+72x+72}{(xx+3x+2)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, fiet vel $x = +\sqrt{2}$ vel $x = -\sqrt{2}$. Priori caſu $x = +\sqrt{2}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2}+72}{(4+3\sqrt{2})^3}$, ideoque affirmativum, ob denominatorem affirmativum: hinc erit y minimum $= \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 17 = -0,02943725$. Poſteriori caſu

$x =$

$x = -\sqrt{2}$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{-48\sqrt{2}+72}{(4-3\sqrt{2})^3} = \frac{24(3-2\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})^3}$, cuius valor ob numeratorem affirmativum & denominatorem negativum erit negativus, ideoque y fiet maximum $= \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2}-17 = -33,97056274$. Qui valor etsi minor est quam prior minimus, tamen ideo est maximus, quod maior fit contiguis proximis, qui oriuntur, si loco x vel aliquantillum maiores vel minores valores quam $-\sqrt{2}$ substituantur. Cum igitur $\sqrt{2}$ inter limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$ contineatur, probatio facile instituetur hoc modo:

si $x = \frac{4}{3}$ fit $y = -\frac{2}{70} = -0,0285$

si $x = \sqrt{2}$ fit $y = 12\sqrt{2}-17 = -0,0294$ minimum.

si $x = \frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{35} = -0,0285$

---

si $x = -\frac{4}{3}$ fit $y = -35$

si $x = -\sqrt{2}$ fit $y = -33,970$ maximum

si $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -35$.

EXEMPLUM III.

Invenire casus, quibus formula $\frac{xx-x+1}{xx+x-1}$ *fit maximum vel minimum.*

Ponatur $y = \frac{xx-x+1}{xx+x-1}$, eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{2xx-4x}{(xx+x-1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-4x^3+12xx+4}{(xx+x-1)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit vel $x = 0$

$x = 0$ vel $x = 2$: priori casu fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, ideoque erit y maximum $= -1$. Posteriori casu $x = 2$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, ideoque y minimum $= \frac{3}{5}$, etiamsi illud maximum minus sit quam hoc minimum. Probatio patebit ex his positionibus:

si $x = -\frac{1}{3}$; erit $y = -\frac{15}{11}$

si $x = 0$; . . $y = -1$ maximum

si $x = +\frac{1}{3}$; . . $y = -\frac{7}{5}$

si $x = 2 - \frac{1}{3}$; erit $y = \frac{19}{31}$

si $x = 2$; . . $y = \frac{3}{5}$ minimum

si $x = 2 + \frac{1}{3}$; . . $y = \frac{37}{61}$

Quod autem, si ponatur $x = 1$, fiat $y = 1$, ideoque > -1, causa est, quod inter valores ipsius x, 0 & 1 contineatur unus, quo fit $y = \infty$.

EXEMPLUM IV.

Quaerantur casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$ *fiat maxima vel minima.*

Posito $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^6 - 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 + 18x^7 - 30x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}$. Habebimus ergo hanc aequationem: $x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$, quae resolvitur in has duas: $xx - 1 = 0$ & $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, qua-

quarum illius radices sunt $x = +1$ & $x = -1$; haec vero resoluta dat $xx = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$, ex qua nulla radix realis emergit. Duarum igitur radicum inventarum prior $x = +1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = -14$, ac propterea y maximum $= 2$; altera radix $x = -1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = +14$ ac propterea y minimum $= -2$.

EXEMPLUM V.

Invenire casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - x^2 + 1)^3}$. Facto autem $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, quae divisa per $xx + 1$ dat $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, haecque ulterius resolvitur in $xx - x - 1 = 0$ & $xx + x - 1 = 0$, unde sequentes quatuor oriuntur radices reales:

I. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; II. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

III. $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; IV. $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Quae cum omnes in aequatione $x^4 - 3xx + 1 = 0$ contineantur, posito $x^4 = 3xx - 1$ fiet pro omnibus $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10 - 20xx)}{8x^6} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x^5} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x(3xx - 1)}$ &

$$\& \quad y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx - 1}{2x}.$$

Pro duabus autem prioribus ex aequatione $xx = x + 1$ ortis erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-5(2x+1)}{2x(3x+2)} = \frac{-5(2x+1)}{2(5x+3)}$, & $y = \frac{1}{x}$.

Prima igitur radix $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dat $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-5(2+\sqrt{5})}{11+5\sqrt{5}}$, ideoque est y maximum. Secunda radix $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; dat $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-5(2-\sqrt{5})}{11-5\sqrt{5}} = \frac{-5(\sqrt{5}-2)}{5\sqrt{5}-11}$; ideoque $y = \frac{1}{x}$ erit quoque maximum. Duae reliquae radices dant $y = -\frac{1}{x}$ minimum.

266. In his igitur exemplis exploratio, utrum valor quispiam inventus maximum an minimum producat, facilius instituti poterit: cum enim sit $\frac{dy}{dx} = 0$, valor termini $\frac{ddy}{dx^2}$, eius aequationis ratione habita, simpliciter exprimi poterit. Sit enim proposita fractio $y = \frac{P}{Q}$; cum sit $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$, & $QdP - PdQ = 0$; erit $ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}$. At vero ob $QdP - PdQ = 0$ hic posterior terminus evanescit, eritque $ddy = \frac{d.(QdP - PdQ)}{QQ} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$; Quoniam vero iudicium ex huius termini valore sive affirmativo sive negativo petitur, denominator autem Q^2 perpetuo fit affirma-

affirmativus; ex solo numeratore negotium ita confici poterit, ut quoties $Qddy - Pddx$ seu $\frac{d(Qdy - Pdx)}{dx^2}$ fuerit affirmativum, minimum pronuncietur, sin sit negativum maximum. Sive postquam inventum fuerit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{QQ}$, cuius forma erit huiusmodi $\frac{R}{QQ}$, tantum quaeratur $\frac{dR}{dx}$; & quae radix huic expressioni valorem affirmativum inducit, ex ea proveniet minimum, & contra maximum.

267. Si denominator fractionis propositae fuerit quadratum seu altior potestas quaecunque, ita ut sit $y = \frac{P}{Q^n}$, fiet $dy = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$, & posito $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$; & maxima minimaque determinabuntur ex radicibus aequationis $R = 0$. Cum deinde sit $\frac{ddy}{dx} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$, ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$; cuius valor affirmativus indicabit minimum, negativus autem maximum. Perspicuum autem est, si n fuerit numerus impar, ob Q^{n+1} semper affirmativum, iudicium ex solo $\frac{dR}{dx}$ perfici posse; sin autem n sit numerus par, adhibeatur formula $\frac{QdR}{dx}$. Ponamus autem porro proponi huiusmodi fractionem $\frac{P^m}{Q^n} = y$; erit $dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$; si itaque ponatur

$\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$, aequationis $R = 0$ radices indicabunt casus, quibus functio y fit vel maximum vel minimum. Cum igitur sit $\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$, erit: $\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}}$, & ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}$; quae insuper per quodcunque quadratum $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ dividi potest, ad iudicium absolvendum. Praeterea vero quoque aequatio $P = 0$ dabit maximum vel minimum, si m fuerit numerus par; atque simili modo formulam inversam $\frac{Q^n}{P^m}$ spectando, prodibit maximum vel minimum ponendo $Q = 0$, si n fuerit numerus par, uti supra §. 257. ostendimus: hic autem ad maxima vel minima hinc oriunda non respicimus, sed tantum ad usum methodi explicandum ea indagamus, quae oriuntur ex aequatione $R = 0$.

EXEMPLUM I.

Proponatur fractio $\frac{(\alpha+\delta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, *quae, quo casu fiat maximum vel minimum, quaeritur.*

Posito $y = \frac{(\alpha+\delta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, primo quidem patet fore $y = 0$ si $x = -\frac{\alpha}{\delta}$, & $y = \infty$ si $x = -\frac{\gamma}{\delta}$: quorum casuum ille dabit minimum, hic vero maximum, si m & n fuerint numeri pares. Praeterea vero erit:

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha+\delta x)^{m-1}}{(\gamma+\delta x)^{n+1}}[(m-n)\delta\delta x + m\delta\gamma - n\alpha\delta]$, ideoque

que $R = (m-n)\,\delta\delta x + m\delta\gamma - n\alpha\delta$. Quare posito $R = 0$, erit $x = \frac{n\alpha\delta - m\delta\gamma}{(m-n)\delta\delta}$. Deinde ob $\frac{dR}{dx} = (m-n)\,\delta\delta$, dispiciendum est, utrum

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}\delta^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta-\delta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-1}\frac{dR}{dx}$$

sit quantitas affirmativa an negativa; priori casu formula proposita erit minimum, posteriori maximum. Sic si fuerit $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, fiet $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{9}{8}$, ideoque formula $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ fiet minimum, si ponatur $x = 0$. Sin autem fit $y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, erit $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{n-m+1}(m-n)$, & $x = \frac{n+m}{n-m}$. Cum autem m & n ponantur numeri affirmativi, indicium petendum erit ex formula $(n-m)^{n-m+2}(m-n)$, seu $(n-m)^{n-m}(m-n)$. Si igitur fuerit $n > m$, valor erutus $x = \frac{n+m}{n-m}$ semper dabit maximum; sin autem sit $n < m$, numerus $m-n$ par dabit minimum, at impar, maximum: sic $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ fiet maximum posito $x = -5$; fit enim $y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{4}$.

EXEMPLUM II.

Proponatur formula $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$.

Erit $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(3-4x-xx)$,

$$\& \quad \frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(2x+4),$$

ubi cum $(1+x)^2$ & $(1+xx)^3$ semper habeant valorem affirmativum, iudicium relinquetur formulae $-x-2$, quae si fuerit affirmativa minimum, sin negativa maximum indicat. At vero ex aequatione $3-4x-xx=0$ sequitur vel $x=-2+\sqrt{7}$ vel $x=-2-\sqrt{7}$. Priori casu fit $-x-2=-\sqrt{7}$, ideoque fractio proposita erit maximum, posteriori vero casu minimum ob $-x-2=+\sqrt{7}$. Posito autem $x=-2+\sqrt{7}$, erit $1+x=-1+\sqrt{7}$, & $1+xx=12-4\sqrt{7}$, unde

$$y=\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)^2(\sqrt{7}-1)=\frac{(2+\sqrt{7})^2(\sqrt{7}-1)}{16}=\frac{17+7\sqrt{7}}{16}$$

$$=2,220.$$

Posito autem $x=-2-\sqrt{7}$ fiet $y=\frac{17-7\sqrt{7}}{16}=-0,0950$

268. Dantur etiam functiones irrationales & transcendentes, quae proprietatem functionum uniformium habent, & hancobrem maxima & minima eodem modo inveniri possunt. Radices enim cubicae & omnium imparium potestatum revera sunt uniformes, cum nonnisi unicum valorem realem exhibeant: radices autem quadratae atque omnium potestatum parium, etsi revera, quoties sunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmativum alterum negativum, tamen unusquisque seorsim spectari potest, hocque sensu etiam maxima & minima investigari possunt. Sic si y fuerit functio quaecunque ipsius x, etsi $\sqrt{y}$ geminum habet valorem tamen uterque seorsim tractari poterit. Scilicet $+\sqrt{y}$ maximum vel minimum habebit valorem, si y talem habuerit, dummodo fuerit affirmativus; quia alioquin $\sqrt{y}$ evaderet imaginarium. Vice versa autem $-\sqrt{y}$ fiet minimum vel maximum, iisdem casibus, quibus $+\sqrt{y}$ fit maximum vel minimum. Potestas autem quaecunque $y^{\frac{m}{n}}$, iisdem casibus fiet maximum vel minimum, siquidem n fuerit numerus impar;

par; at si n fuerit numerus par, ii tantum casus valent, quibus y induit valorem affirmativum: hisque casibus ob ancipitem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

269. Quoniam aequatio differentialis, quae ex potestate functionis y^m nascitur, est $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$, cuius radices simul casus, quibus potestas surda $y^{\frac{m}{n}}$ fit maximum vel minimum, indicant, at hoc indagandum duplex habetur aequatio, altera $y^{m-1} = 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, atque tum solum maxima & minima exhibet, si $m - 1$ fuerit numerus impar, seu si m fuerit numerus par, ob rationes §. 257. allegatas. Quare cum n sit numerus impar, si m fuerit numerus par, si numeros pares per 2μ & impares per $2\nu - 1$ indicemus, functio $y^{2\mu:(2\nu-1)}$ evadet maxima vel minima tribuendis ipsi x valoribus, quos tam ex hac aequatione $y = 0$ quam ex hac $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiscitur. Sin autem m fit numerus impar, functio $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$, vel $y^{(2\mu-1):2\nu}$ tum solum fit maxima vel minima, cum loco x substituitur valor ex hac aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac posteriori quidem casu $y^{(2\mu-1):2\nu}$ maxima & minima tantum proveniunt, si y ab inventis ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valoribus, affirmativos recipiat valores.

270. Sic ista formula $x^{\frac{2}{3}}$ fit minimum, ponendo $x = 0$, propterea quod hoc casu x^2 fit minimum. Nisi autem

tem formulam $x^{\frac{2}{1}}$ ad formam x^2 reducamus, methodus ante tradita hoc minimum indicaret; propterea quod casu $x=0$, termini seriei $y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega\omega ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+$ &c. unde iudicium peti debet, praeter primum omnes fiunt infiniti. Facto enim $y=x^{\frac{2}{1}}$ erit:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}};\quad \frac{ddy}{dx^2}=\frac{-2}{9x^{\frac{2}{3}}};\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2\cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}};\quad \text{&c.}$$

Hinc neque aequatio $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=0$ ostendit valorem $x=0$, neque termini sequentes rationem maximi minimive indicant. Cum igitur assumsimus seriem $y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega\omega ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+$ &c. fieri convergentem, si ω statuatur quantitas valde parva; ii casus utique methodum generalem effugiunt, quibus haec series fit divergens, quod evenit exemplo hic allato $y=x^{\frac{2}{1}}$, si ponatur $x=0$. Quamobrem his casibus ea reductione, qua ante usi sumus, erit opus, quo expressio proposita ad aliam formam revocetur, quae huic incommodo non sit subiecta. Hoc autem tantum paucissimis casibus usu venit, qui in formula $y^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic si requirantur maxima minimave formulae $y^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}z$, existente z functione quacunque ipsius x, investigetur forma haec $y^{2\mu}z^{2\nu-1}$, quippe quae iisdem casibus fit maxima vel minima, quibus ipsa proposita.

271. Hoc casu excepto, qui iam facile expeditur, functio-

ctiones, quae continent quantitates irrationales, eodem modo quo rationales tractari, earumque maxima & minima determinari possunt, id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Proposita sit formula $\sqrt{(aa+xx)}-x$, *quae quibus casibus fiat maxima vel minima, quaeritur.*

Posito $y=\sqrt{(aa+xx)}-x$, erit $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}-1$, & $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{aa}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$. Facto ergo $\frac{dy}{dx}=0$, erit $x=\sqrt{(aa+xx)}$, ideoque $x=\infty$, ac fit $\frac{ddy}{dx^2}=0$. Simili vero modo fiunt sequentes termini $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; &c. omnes $=0$; ex quo iudicium incertum relinquitur, utrum sit maximum an minimum, tam si fiat $x=-\infty$, quam $x=+\infty$: Interim ponendo $x=+\infty$, ob $\sqrt{(aa+xx)}=x+\frac{aa}{2x}$, fit $y=0$, qui valor omnium est minimus.

EXEMPLUM II.

Quaerantur casus, quibus haec forma $\sqrt{(aa+2bx+mxx)}-nx$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $y=\sqrt{(aa+2bx+mxx)}-nx$, erit: $\frac{dy}{dx}=\frac{b+mx}{\sqrt{(aa+2bx+mxx)}}-n$, quo facto $=0$, erit: $bb+2mbx+mmxx=nnaa+2nnbx+mnnxx$, seu $xx=\frac{2bx(nn-m)+nnaa-bb}{mm-mnn}$, ideoque $x=\frac{(nn-m)b\pm\sqrt{[mnn(m-nn)aa-nn(m-nn)bb]}}{m(m-nn)}$, sive $x=-\frac{b}{m}\pm\frac{n}{m}\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$: unde fit

$\sqrt{(a$

$\sqrt{(aa+2bx+mxx)} = \frac{b+mx}{n} = \pm\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$.

Cum igitur sit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{(aa+2bx+mxx)^{\frac{3}{2}}}$, erit:

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa-bb}{\pm\left(\frac{maa-bb}{m-nn}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm(m-nn)\sqrt{(m-nn)}}{\sqrt{(maa-bb)}}.$$

Nisi ergo fuerit $\frac{m-nn}{maa-bb}$ quantitas affirmativa, maximum minimumve plane non datur. Sin autem sit quantitas affirmativa, signum superius dabit minimum si $m > nn$, maximum vero si $m < nn$: contrarium evenit, si signum inferius valeat. Si ergo sit $m=2$, $n=1$, & $b=0$, formula $\sqrt{(aa+2xx)}-x$ fit minimum ponendo $x = +\frac{1}{2}\sqrt{2aa} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, at maximum ponendo $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$. Erit ergo minimum $= a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & maximum $= a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

EXEMPLUM III.

Quaerantur casus, quibus haec expressio

$$\sqrt[4]{(1+mx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$$

fiat maximum vel minimum.

Cum sit $\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3}{(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}} - \frac{nx^3}{(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}}$, fiet

$mx^3(1-nx^4)^{\frac{3}{4}} = nx^3(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $m^4(1-nx^4)^3 = n^4(1+mx^4)^3$, seu $x^4 - m^4 + 3mn(n^3+m^3)x^4 + 3m^2n^2(n^2-m^2)x^8 + m^3n^3(n+m)x^{12} = 0$. Nisi ergo haec aequatio radicem positivam habeat pro x^4, maxi-

maximum minimumve prorsus non datur. Quia haec aequatio generaliter commode resolvi nequit, fiet enim

$$x^4 = \frac{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})} \text{ seu } x^4 = \frac{m - \sqrt[3]{m^2 n} + \sqrt[3]{mn^2} - n}{mn}$$

ponamus pro casu speciali $m = 8n$, eritque

$-4095 + 24.513nx^4 - 3.63.64n^2x^8 + 9.512n^3x^{12} = 0$

seu $512n^3x^{12} - 1344n^2x^8 + 1368nx^4 - 455 = 0$

ponatur $8nx^4 = z$, erit $z^3 - 21z^2 + 171z - 455 = 0$

quae divisorem habet $z - 5$, alterque factor erit:

$zz - 16z + 91 = 0$ radices continens imaginarias.

Erit ergo tantum $z = 8nx^4 = 5$, ideoque $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$

qui valor reddet expressionem $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$ maximum vel minimum. Quorum utrum eveniat, quaeratur $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1 + mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1 - nx^4)^{\frac{7}{4}}}$. At ob $m = 8n$, posito $x^4 = \frac{5}{8n}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{(3:8)^{\frac{7}{4}}}\right) xx =$

$-\frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}}$ ideoque negativum, ergo fiet $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$ maximum posito $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$. Erit vero hoc maximum $= \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Si loco nx^4 ponamus u, patet hanc expressionem $\sqrt[4]{(1 + 8u)} + \sqrt[4]{(1 - u)}$ fieri maximam, posito $u = \frac{5}{8}$, hunoque valorem maximum

mum fore $= \frac{\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627$. Quicunque ergo valor praeter $\frac{5}{8}$ pro x scribatur, expressio minorem accipiet valorem.

272. Simili modo maxima ac minima determinabuntur, si quantitates quoque transcendentes in expressione proposita insint. Nisi enim functio proposita fuerit multiformis, atque aliquot eius significatus simul considerari debeant, radices aequationis differentialis ostendent maxima vel minima, nisi affuerint radices aequales, quarum numerus sit par. Hanc ergo investigationem in aliquot exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Invenire numerum, qui ad suum logarithmum minimam teneat rationem.

Dari huiusmodi rationem minimam $\frac{x}{lx}$ inde patet, quod haec ratio tam posito $x = 1$, quam $x = \infty$ fiat infinita. Vicissim ergo habebit fractio $\frac{lx}{x}$ alicubi maximum valorem, eodem scilicet casu, quo $\frac{x}{lx}$ fit minimum. Ad hunc casum indagandum ponatur $y = \frac{lx}{x}$, fietque $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Quo nihilo aequali posito erit $lx = 1$, & quia hic logarithmum hyperbolicum assumsimus, si e ponatur numerus cuius logarithmus hyperbolicus sit $= 1$, erit $x = e$. Cum igitur omnes logarithmi ad hyperbolicos in data sint ratione, erit in quocunque logarithmorum canone $\frac{e}{le}$ minimum, seu $\frac{le}{e}$ maximum. Quoniam in logarithmis tabularibus est

$le = 0,4342944819$, fractio $\frac{lx}{x}$ perpetuo erit minor quam $\frac{4342944819}{2718281828}$, seu proxime quam $\frac{47}{305}$ neque ullus datur numerus, qui ad suum logarithmum minorem teneat rationem quam 305 ad 47. Esse autem hoc casu $\frac{lx}{x}$ maximum inde patet, quod ob $\frac{dy}{dx} = \frac{1-lx}{xx}$ fiat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1-lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, propter $1 - lx = 0$, ideoque negativum.

EXEMPLUM II.

Invenire numerum x, *ut haec potestas* $x^{1:x}$ *fiat maximum.*

Dari huius formulae valorem maximum inde patet, quod numeris loco x substituendis fit

$1^{1:1} = 1,\ 000000$
$2^{1:2} = 1,\ 414213$
$3^{1:3} = 1,\ 442250$
$4^{1:4} = 1,\ 414213$

Ponatur ergo $x^{1:x} = y$, eritque $\frac{dy}{dx} = x^{1:x}\left(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}\right)$. Quo valore nihilo aequali posito, erit $lx = 1$ & $x = e$, existente $e = 2,718281828$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = (1-lx)\frac{x^{1:x}}{xx}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x^{1:x}}{x^3} + (1-lx)\,d.\frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$ ob $1 - lx = 0$.

Quare cum sit $\frac{ddy}{dx^2}$ quantitas negativa, fiet $x^{1:x}$ maximum casu $x = e$. Cum autem sit $e = 2,718281828$, reperitur fore $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667861009764$, qui valor obtinetur facile ex serie $e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} +$ &c.

Hoc exemplum quoque ex praecedenti resolvitur: si enim sit $x^{\frac{1}{x}}$ maximum, quoque eius logarithmus, qui est $\frac{lx}{x}$, debebit esse maximum; quod quo fiat, debet esse $x = e$, uti invenimus.

EXEMPLUM III.

Invenire arcum x, *ut sit eius sinus maximus vel minimus.*

Posito $\sin x = y$ erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$, ideoque $\cos x = 0$, unde prodeunt sequentes valores pro x: $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$ &c. Fit autem $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$. Cum igitur hi valores pro x substituti dent pro $\sin x$ vel $+1$ vel -1, illi erunt maximi, hi vero minimi, uti constat.

EXEMPLUM IV.

Invenire arcum x, *ut rectangulum* x. *sin* x *fiat maximum.*

Dari maximum inde patet, quod posito vel $x = 0$ vel $x = 180°$ utroque casu rectangulum propositum evanescat. Sit igitur $y = x \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$, ideoque $\tang x = -x$. Sit $x = 90° + u$, erit $\tang x = -\cot u$, ergo $\cot u = 90 + u$. Ad quam aequationem modo supra tradito resolvendam ponatur $z = 90 + u - \cot u$, sitque f valor arcus u quaesitus. Cum sit $dz = du + \frac{du}{\sin u^2}$, erit

$$p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin u^2}{1+\sin u^2}; \quad dp = \frac{2\,du \sin u \cos u}{(1+\sin u)^2}; \quad \text{ideoque}$$

$$\frac{dp}{dz} = q = \frac{2\sin u^3 \cos u}{(1+\sin u^2)^2}; \quad dq = \frac{6\,du \sin u^2 \cos u^2 - 2\,du \sin u^4}{(1+\sin u^2)^3} - \frac{12\,du \sin u^4 \cos u^2}{(1+\sin u^2)^4}.$$

Ergo

Ergo $\frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin u^4 \cos u^2 - 2 \sin u^6}{(1 + \sin u^2)^4} - \frac{12 \sin u^6 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^5}$

$= \frac{6 \sin u^4 - 14 \sin u^6 + 4 \sin u^8}{(1 + \sin u^2)^5}$.

Ex quibus erit $f = u - pz + \frac{1}{2} qzz - \frac{1}{6} rz^3 +$ &c. Ponatur, postquam aliquot tentaminibus proximus ipsius f valor est detectus, $u = 26°, 15'$, erit $90 + u = 116°, 15'$, & arcus cotangenti u aequalis ita definiatur:

A $l \cot u = 10,3070250$
subtrahatur $4,6855749$

$5,6214501$

Ergo $\cot u = 418263,7''$
seu $\cot u = 116°, 11', 3\frac{7}{10}''$
unde $z = 3', 56\frac{1}{10}'' = 236,3''$.

Iam ad valorem termini pz inveniendum, iste instituatur calculus:

$l \sin u = 9,6457058$

$l \sin u^2 = 9,2914116$

$1 + \sin u^2 = 1,19561$

$l(1 + \sin u^2) = 0,0775895$

$lp = 9,2138221$
$lz = 2,3734637$

$lpz = 1,5872858$
Ergo $pz = 38,6621$ secundis
seu $pz = 38'', 39''', 43''''$
ab $u = 26°, 15'$

fiet $f = 26°, 14', 21'', 20''', 17''''$
& arcus quaesitus $x = 116, 14, 21, 20, 17$

Tertius vero terminus $\frac{1}{4}qxx = \frac{\sin u^3 \cos u}{(1+\sin u^2)^3} xx$ insuper addi debet.

Cuius valor ut inveniatur, unum x in partibus radii exprimi debet hoc modo:

$l x'' = 2,3734637$
add. $4,6855749$
$7,0590386$
add. $l \frac{\sin u^2}{1+\sin u^2} x = 1,5872858$
$8,6463244$
add. $l \sin u = 9,6457058$
$l \cos u = 9,9527308$
$8,2447600$
subtr. $l (1+\sin u^2)^2 = 0,1551790$
$l \frac{1}{4} q xx = 8,0895810$
Ergo $\frac{1}{4} q xx = 0,012291$
seu $\frac{1}{4} q xx = 44''', 15''''$.

Unde & hoc termino adhibito fiet arcus quaesitus

$x = 116°, 14', 21'', 21''', 0''''$

maioribus autem logarithmis adhibitis reperitur

$x = 116°, 14', 21'', 20''', 35'''', 47''''$.

CAPUT

CAPUT XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM MULTIFORMIUM PLURESQUE VARIABILES COMPLECTENTIUM.

273.

Si y fuerit functio multiformis ipsius x, ita ut pro unoquoque valore ipsius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x plures illi ipsius y valores ita inter se connectentur, ut plures series valorum successivorum repraesentent. Si enim y tanquam applicatam lineae curvae consideremus, x existente abscissa, quot y habuerit valores reales diversos, totidem diversi eiusdem curvae rami eidem abscisae x respondebunt, atque hinc illi ipsius y valores successivi, qui eundem ramum constituunt, cohaerere censendi sunt; valores autem ad diversos ramos relati erunt inter se disiuncti. Tot igitur series valorum cohaerentium ipsius y habebimus, quot diversos valores reales pro quovis ipsius x valore receperit; atque in qualibet serie valores ipsius y, dum x crescens assumitur, vel crescent vel decrescent, vel postquam creverint iterum decrescent, vel vice versa. Ex quo perspicuum est, in unaquaque valorum cohaerentium serie aeque dari maxima minimave, atque in functionibus uniformibus.

274. Ad haec maxima minimave determinanda eadem quoque methodus valebit, quam capite praecedente pro functionibus uniformibus tradidimus. Cum enim, si variabilis x incremento ω augeatur, functio y perpetuo recipiat hanc formam $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6\,dx^3} +$ &c. necesse est ut casu maximi minimive terminus $\frac{\omega dy}{dx}$ evanescat, fiatque $\frac{dy}{dx} = 0$.

Radi-

Radices ergo huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipsius x valores indicabunt, quibus in singulis valorum ipsius y cohaerentium seriebus, maxima minimave respondeant. Neque vero ambiguum erit, in quanam valorum cohaerentium serie detur maximum minimumve. Cum enim in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambae insint variabiles x & y, valores ipsius x definiri nequeunt, nisi ope aequationis, qua relatio functionis y ab x continetur, variabilis y eliminetur; antequam autem hoc fit, pervenitur ad aequationem, qua valor ipsius y per functionem rationalem seu uniformem ipsius x exprimitur. Hinc inventis valoribus ipsius x, cuique respondens valor ipsius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in serie valorum successivorum cohaerentium, ad quam pertinet.

275. Iudicium autem, utrum isti valores ipsius y sint maximi an minimi instituetur eodem modo, quem ante indicavimus. Scilicet quaeratur valor ipsius $\frac{ddy}{dx^2}$ finitis terminis expressus, in eoque loco x substituatur unusquisque ipsius x valor inventus successive, simul autem pro y ponatur valor, qui ipsi pro quolibet ipsius x valore convenit; quo facto dispiciatur, utrum expressio $\frac{ddy}{dx^2}$ adeptura sit valorem affirmativum an negativum, priorique casu minimum, posteriori vero maximum indicabitur. Quodsi vero & $\frac{ddy}{dx^2}$ evanescat, tum procedendum erit ad formulam $\frac{d^3y}{dx^3}$, quae si eodem casu non evanescat, neque maximum habebitur neque minimum: sin autem quoque $\frac{d^3y}{dx^3}$ evanescat, iudicium formari

opor-

oportebit ex formula $\frac{d^4y}{dx^4}$ eodem modo, quo ratione formulae $\frac{ddy}{dx^2}$ praecipimus. Atque si quoque $\frac{d^4y}{dx^4}$ quopiam casu evanescat, ad differentiale quintum ipsius y erit progrediendum: perpetuo autem quousque progredi necesse fuerit, iudicia ex differentialibus ordinum imparium similia sunt illi, quod de formula $\frac{d^3y}{dx^3}$ dedimus. His scilicet casibus in formulis $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. eousque erit pergendum, quoad perveniatur ad talem, quae proposito casu non evanescat; quae si fuerit differentialis ordinis imparis, neque maximum neque minimum indicabitur, sin autem fuerit ordinis paris, eius valor affirmativus minimum, negativus vero maximum inuet.

276. Ponamus functionem y determinari ex x per aequationem quamcunque: quae aequatio si differentietur, induet huiusmodi formam $Pdx + Qdy = 0$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $\frac{P}{Q} = 0$, ideoque vel $P = 0$ vel $Q = \infty$. Posterior quidem aequatio, si relatio inter x & y exprimatur per aequationem rationalem integram, locum habere nequit; quia vel x vel y vel utramque fieri oporteret infinitam. Quare iudicium relinquetur aequationi $P = 0$, cuius radices, seu valores ipsius x, quos adipiscitur, postquam ope aequationis propositae variabilis y penitus fuerit eliminata, indicabunt casus, quibus valores ipsius y fiunt maximi vel minimi. Ad iudicium vero, utrum prodeat maximum an minimum absolvendum, examinetur formula $\frac{ddy}{dx^2}$. Aequatio vero differentialis $Pdx + Qdy = 0$ denuo differentiata, si ponamus

dP

$dP = Rdx + Sdy$ & $dQ = Tdx + Vdy$, dabit (posito dx constante):
$Rdx^2 + Sdxdy + Tdxdy + Vdy^2 + Qddy = 0$.
Cum autem iam sit $\frac{dy}{dx} = 0$, aequatione per dx^2 divisa fiet $R + \frac{Qddy}{dx^2} = 0$, ideoque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Hinc in aequatione differentiali $Pdx + Qdy = 0$, differentietur tantum quantitas P, ponendo y constans, prodibitque Rdx, tum indagetur, valor fractionis $\frac{R}{Q}$, qui si fuerit affirmativus, maximum, sin negativus minimum indicabit.

277. Sit y functio biformis ipsius x, quae determinetur per hanc aequationem $yy + py + q = 0$, denotantibus p & q functiones quascunque ipsius x uniformes. Erit ergo differentiando $2ydy + pdy + ydp + dq = 0$, ideoque $Pdx = ydp + dq$. Posito igitur $P = 0$ erit $ydp + dq = 0$ prodibitque $y = -\frac{dq}{dp}$, sicque y per functionem ipsius x uniformem exprimitur, ita ut, quicunque valor pro x fuerit inventus, ex eo & y valorem determinatum unicum acquirat. Eliminatio vero nunc ipsius y erit facilis; nam si in aequatione proposita $yy + py + q = 0$ loco y valor $-\frac{dq}{dp}$ substituatur, habebitur $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, quae aequatio divisa per dx^2 & resoluta praebebit valores ipsius x omnes, quibus maxima vel minima respondent: quod clarius fiet sequentibus exemplis.

EXEMPLUM I.

Proposita aequatione $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$
definire maxima vel minima functionis y.

Differentiata aequatione habebimus:

$2ydy$

$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$

unde fit $P = my + b + 2nx$, & $Q = 2y + mx$. Posito ergo $P = 0$ fiet $y = \frac{-b-2nx}{m}$; qui valor in ipsa aequatione substitutus dat:

$$\frac{4nn}{mm}xx + \frac{4nb}{mm}x + \frac{bb}{mm}$$
$$- 2nxx - bx + aa = 0$$
$$+ nxx + bx$$

seu $xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn}$; unde fit

$$x = \frac{2nb \pm \sqrt{[mmnbb + mmn(mm-4n)aa]}}{mmn - 4nn}$$

seu $x = \frac{2nb \pm m\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{n(mm-4n)}$

& $y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{mm-4n}$.

Tum posito solo x variabili fit $dP = 2ndx$, ideoque $R = 2n$. At est $Q = 2y + mx = \pm\frac{\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}{n}$, unde $\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2nn}{\sqrt{[nbb + n(mm-4n)aa]}}$, cuius numerator $2nn$ cum sit perpetuo affirmativus, si signum superius valeat, prodibit pro y valor maximus, sin inferius prodibit minimus. Ubi sequentia annotari debent.

I. Si fuerit $m = 0$, ex aequatione $P = 0$ statim sequitur $x = -\frac{b}{2n}$, ut nulla eliminatione opus sit. Huicque valori geminus ipsius y respondet ob $y = \pm\frac{1}{2n}\sqrt{(nbb - 4nnaa)}$ quorum alter affirmativus est maximus, alter negativus minimus.

II. Si sit $n = 0$, fit $y = -\frac{b}{m}$ & x in infinitum excrescit, atque y per spatium infinitum eundem valorem retinet, ita ut neque maximus sit neque minimus.

III. Si sit $mm = 4n$, erit $4nbx + bb + mmaa = 0$ seu $x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}$; fietque $y = \frac{-b - 2nx}{m} = \frac{-2b - mmx}{m} = -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$. Huic ergo valori ipsius $x = \frac{-mmaa - bb}{mmb}$ alter ipsius y valor, qui respondet $\frac{mmaa - bb}{mb}$, erit maximus vel minimus. Quia autem, ut iste ipsius y valor prodeat, in expressione $y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{[nbb + n(mm - 4n)aa]}}{mm - 4n}$ signum inferius valere debet, erit valor ipsius y minimus.

EXEMPLUM II.

Proposita aequatione $yy - xxy + x - x^3 = 0$ *definire valores ipsius* y *maximos vel minimos.*

Differentiata aequatione prodit: $2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3xxdx = 0$. Fitque $P = 1 - 3xx - 2xy$ & $Q = 2y - xx$. Quare posito $P = 0$, erit $y = \frac{1 - 3xx}{2x}$; ideoque hoc valore substituto:

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

seu $1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0$. Cuius una radix est $x = -1$, cui respondet $y = 1$. At posito y constante fit $R = -6x - 2y$, ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$; quod casu $x = -1$ & $y = 1$ abit in -4, ita ut valor ipsius $y = 1$ sit

fit maximus. Ipsi $x = -1$ autem geminus valor ipsius y respondet ex aequatione $yy - y = 0$: alter ergo est $y = 0$, qui neque maximus est neque minimus. Quodsi aequatio illa quinti gradus per $x + 1$ dividatur, prodit aequatio, cuius radices simpliciter exhiberi nequeunt.

EXEMPLUM III.

Sit proposita haec aequatio: $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ *ex qua maximi minimive valores ipsius* y *requirantur.*

Per differentiationem ergo prodibit haec aequatio:

$$2y\,dy + 2x\,dy + 4xy\,dx + 4\,dx = 0$$

Factoque $\frac{dy}{dx} = 0$ erit $xy + 1 = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{x}$, quo valore substituto in ipsa aequatione proposita oritur,

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

cuius radices sunt $x = 1$; $x = 1$; & $x = -\frac{1}{2}$. Quia nunc est $\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy-4}{2y+2xx} = \frac{-2xy-2}{y+xx}$, erit differentiando $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y+xx}$, posito y constanti ob $dy = 0$ & facto $xy + 1 = 0$. Quare isti valores ita se habebunt

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$	
1	-1	∞	
1	-1	∞	
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$	pro maximo.

Quoniam pro radicibus aequalibus fit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, utrum hoc casu maximum an minimum prodeat non determinatur. Quia autem simul fit $y + xx = 0$; nequidem hoc casu erit

$\frac{dy}{dx} = 0$; ob $P = 0$ & $Q = 0$ in fractione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, quare cum primaria proprietas desit, neque maximum nec minimum habet locum. Indicatur autem hoc casu $x = 1$, ambos ipsius y valores inter se fieri aequales. Quam indolem infra fusius summus exposituri, cum ad usum calculi differentialis in doctrina de lineis curvis perveniemus. Etiamsi enim haec materia & huc pertineat; tamen ne eam bis attingere opus sit, eam totam sequenti tractationi reservamus.

278. Datur vero insuper in functionibus multiformibus alia species maximorum ac minimorum; quae methodo hactenus tradita non invenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari potest. Sit enim y functio quaecunque biformis ipsius x, ita ut, quicunque valor ipsi x tribuatur, pro y oriantur bini valores vel ambo reales vel ambo imaginarii. Ponamus hos ipsius y valores fieri imaginarios, si ponatur $x > f$, reales autem esse, si statuatur $x < f$; atque posito $x = f$ ambo ipsius y valores in unum coalescent, qui sit $y = g$. Cum igitur si sumatur $x > f$; functio y nullum habeat valorem realem: si eveniat, ut posito $x < f$ ambo ipsius y valores fiant vel maiores quam g, vel minores quam g: priori casu valor $y = g$ erit minimus, posteriori maximus; quoniam illo casu minor est, quam ambo praecedentes, hoc vero maior. Neque hoc maximum minimumve methodo hactenus tradita reperietur, propterea quod hic non fit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sunt autem quoque haec maxima vel minima generis diversi, cum talia non sint ratione valorum antecedentium & consequentium in serie cohaerentium; sed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum.

279. Evenit hoc si aequatio proposita fuerit huiusmodi $y = p \pm (f - x)^{\vee} (f - x) q$, existentibus p & q functionibus ipsius x per $f - x$ non divisibilibus; obtineatque q valo-

valorem affirmativum, si ponatur vel $x = f$ vel aliquanto maius minusve. Fiat $p = g$ posito $x = f$: & manifestum est, casu $x = f$ ambos ipsius y valores in unum $y = g$ coalescere; posito autem $x > f$ ambo valores ipsius y fient imaginarii. Si igitur ponamus x aliquanto minus quam f, puta $x = f - \omega$, functio p abibit in $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} -$ &c. & q in $q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} -$ &c. unde hoc casu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} -$ &c. $\pm \omega \sqrt{\omega} \left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} -$ &c. $\right)$. Ponamus ω minimum, ut prae ω altiores eius potestates evanescant, eritque $y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega \sqrt{\omega} q$; qui valores ambo ipsius y minores erunt quam g, si $\frac{dp}{dx}$ fuerit affirmativum, maiores autem, si negativum. Unde valor duplex ipsius $y = g$ illo casu erit maximus, hoc vero minimus.

280. Haec igitur maxima atque minima inde ortum suum habent, quod primo posito $x = f$ ambo ipsius y valores fiant aequales: posito autem $x > f$ imaginarii, at posito $x < f$ reales. Deinde quod posito $x = f - \omega$ alterum membrum irrationale praebeat altiores potestates ipsius ω, quam membrum rationale. Hoc ergo evenit quoque si fuerit $y = p \pm (f - x)^n \sqrt{(f - x) q}$, dummodo sit n numerus integer > 0. Cum autem non solum radix quadrata sed etiam quaecunque alia radix potestatis paris eandem ambiguitatem signorum introducat; idem eveniet, si fuerit $y = p \pm (f - x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$, dummodo sit $2n + 1 > 2m$, erit ergo $(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} q^{2m}$ seu $(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} Q$. Quoties ergo functio y per huiusmodi aequationem exprimitur, ita ut sit $2n + 1 > 2m$, toties posito $x = f$, valor ipsius y fiet maximus vel minimus;

mus: prius quidem si fuerit $\frac{dp}{dx}$ quantitas affirmativa, posterius vero si sit $\frac{dp}{dx}$ quantitas negativa posito $x = f$. Sin autem fiat hoc casu $\frac{dp}{dx} = 0$, tum erit $y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} q$. Nisi ergo sit $\frac{2n+1}{2m} > 2$, neque maximum neque minimum locum habebit; at si $\frac{2n+1}{2m} > 2$, tum $y = g$ erit maximum, si $\frac{ddp}{dx^2}$ habuerit valorem negativum, minimum vero, si affirmativum: sicque ulterius si quoque $\frac{ddp}{dx^2}$ evanescat, iudicium erit instituendum.

281. Si igitur y fuerit huiusmodi functio ipsius x, fieri potest, ut praeter maxima & minima, quae prior methodus exhibet, etiam maxima minimave huius alterius speciei adsint, quae modo hic expositio explorari poterunt. Id quod sequentibus exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Determinare maxima ac minima functionis y, *quae definitur hac aequatione:*

$$yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0.$$

Ad maxima minimave primae speciei investiganda differentietur aequatio, eritque

$$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0,$$

positoque $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx$,

qui valor in prima aequatione substitutus dat:

$9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0$, quae resolvitur in

$$9xx - 14x + 5 = 0 \quad \& \quad xx - 2x + 1 = 0.$$

Poste-

Posterior bis dat $x=1$, fitque $y=1$, unde hoc casu in fractione $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-3+4x-3xx}{2y-2x}$ denominator quoque evanescit, ficque maximum minimumve primi generis non datur: prior vero aequatio $9xx-14x+5=0$ dabit $x=1$ & $x=\frac{5}{9}$, quorum valorum ille eodem incommodo laborat, quo praecedentes. Posito autem $x=\frac{5}{9}$, fit $y=\frac{3}{2}-\frac{10}{9}+\frac{25}{54}=\frac{23}{27}$. Et cum sit $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-3+4x-3xx}{2y-2x}$, fiet $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{+4-6x}{2y-2x}=\frac{-3x+2}{y-x}$ ob $dy=0$ & numeratorem $=0$. Erit ergo $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{9}{8}$, unde hic valor $x=\frac{5}{9}$ dat minimum primi generis. Deinde cum sit $(y-x)^2=(1-x)^3$, erit $y=x\pm(1-x)\sqrt{(1-x)}$; ideoque posito $x=1$ prodit maximum secundae speciei: facto enim $x=1-\omega$, erit $y=1-\omega\pm\omega\sqrt{\omega}$, quorum uterque minor est quam unitas, siquidem ω sumatur minimum.

EXEMPLUM II.

Invenire maxima ac minima functionis:

$$y=2x-xx\pm(1-x)^2\sqrt{(1-x)}.$$

Pro primi generis maximis & minimis differentietur aequatio eritque:

$$\frac{dy}{dx}=2-2x\mp\frac{5}{2}(1-x)\sqrt{(1-x)}$$

quo valore posito $=0$ prodit primo $x=1$ & [illegible] fit $\frac{ddy}{dx^2}=-2\pm\frac{15}{4}\sqrt{(1-x)}$, erit y hoc casu maximum primi generis, fitque $y=1$. Aequatione vero $\frac{dy}{dx}=0$ per $1-x$

$1-x$ divisa erit $4 \mp 5\sqrt{(1-x)} = 0$ seu $16 = 25 - 25x$, unde fit $x = \frac{9}{25}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. Quare si signum superius valet, erit $y = \frac{2869}{3125}$ minimum; sin autem signum inferius valeat, erit $y = \frac{821}{3125}$, quod maximum videatur: at vero tantum signum superius locum habere potest, quoniam $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nequit esse $= 0$, nisi sit $\sqrt{(1-x)} = +\frac{4}{5}$. Primi ergo generis invenimus maximum casu $x = 1$ & $y = 1$, atque minimum casu $x = \frac{9}{25}$ & $y = \frac{2869}{3125}$. Ex genere vero altero maximum quoque prodit; si $x = 1$, quo casu fit $y = 1$. Nam posito $x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega\omega \pm \omega^3\sqrt{\omega}$ utroque casu < 1. Hic itaque, si $x = 1$ maxima duo primae & alterius speciei coalescunt, maximumque quasi mixtum constituunt.

282. Ex his exemplis non solum natura huius alterius speciei maximorum & minimorum elucet; sed etiam pro lubitu istiusmodi functiones formari possunt, quae maxima vel minima secundae speciei admittant. Quemadmodum autem, si proposita fuerit functio quaecunque, explorari possit, utrum eiusmodi maximis minimisve sit praedita nec ne, id in sequenti sectione ostendemus: propterea quod natura linearum curvarum hac investigatione maxime illustratur. Ceterum vero facile iuteligitur, si fuerit y eiusmodi functio ipsius x, quae maximum minimumve secundae speciei recipiat, tum quoque vicissim x eiusmodi fore functionem ipsius y. Nam quia ex hac aequatione $(y-x)^3 = (1-x)^3$, facto $x = 1$, obtinet y valorem maximum secundae speciei; si variabiles y & x permutentur, haec aequatio $(x-y)^3 = (1-y)^3$ exhibet pro y quoque eiusmodi functionem ipsius x, quae habeat maxi-

maximum secundae speciei. Facto enim $x = 1$, fiet $(1-y)^2 = (1-y)^3$, hincque erit bis $y = 1$ & semel $y = 0$. Sin autem ponatur $x = 1+\omega$, erit $(1+\omega-y)^2 = (1-y)^3$; unde si statuamus $y = 1+\varphi$ erit $(\omega-\varphi)^2 = (-\varphi)^3 = -\varphi^3$ ideoque φ debet esse negativum. Sit ergo $y = 1-\varphi$ erit $(\omega+\varphi)^2 = \varphi^3$, atque cum sumto φ minimo, φ^3 prae φ^2 evanescat, debebit necessario ω esse negativum: hinc valori $x = 1+\omega$ nulli valores reales ipsius y respondent. At posito $x = 1-\omega$, & $y = 1-\varphi$, ob $(\varphi-\omega)^2 = \varphi^3$, erit $\varphi = \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, ideoque $y = 1-\omega \mp \omega\sqrt{\omega}$, unde uterque valor ipsius y respondens ipsi $x = 1-\omega$ minor est valore $y = 1$, qui respondet valori $x = 1$; eritque consequenter iste ipsius y valor maximus.

283. Hactenus tantum functiones biformes sumus contemplati, quarum maxima vel minima, quia ambo valores facile per resolutionem aequationis quadraticae exprimi possunt, ad examen revocari possunt. Sin autem functio y per aequationem altiorem exprimatur, methodus ante tradita, qua maxima minimaque primae speciei indagavimus, eodem successu adhiberi poterit. Inventionem vero maximorum ac minimorum secundae speciei sequenti sectioni reservamus. Functiones ergo triformes ac multiformes, quemadmodum tractari oporteat, aliquot exemplis ostendamus.

EXEMPLUM I.

Definiatur functio y, *cuius maxima vel minima quaerantur, per hanc aequationem*:

$$y^3 + x^3 = 3axy.$$

Differentiata hac aequatione fit $3y^2dy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, ideoque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$. Maximum ergo vel minimum dabitur, si fuerit $ay = xx$, seu $y = \frac{xx}{a}$, qui valor in aequatione proposita substitutus dat.

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3 \quad \text{seu} \quad x^6 = 2a^3x^3;$$

Erit ergo ter $x = o$, quo casu quoque fit denominator $yy - ax = o$, ob $y = \frac{xx}{a} = o$. Utrum ergo hoc casu maximum minimumve prodeat, patebit si ipsi x valorem tribuamus minime ab o discrepantem. Sit ergo $x = \omega$, & $y = \varphi$, ob $\varphi^3 + \omega^3 = 3a\omega\varphi$, fiet vel $\varphi = \alpha\sqrt{\omega}$ vel $\varphi = \delta\omega^2$. Priori casu erit $\alpha^3\omega\sqrt{\omega} = 3a\alpha\omega\sqrt{\omega}$, ideoque $\alpha = \sqrt{3a}$. Hinc posito $x = \omega$ erit $y = \pm\sqrt{3a\omega}$. Unde etiamsi ω negative accipi nequeat, tamen binorum ipsius y valorum alter maior erit quam o, alter minor; hincque $y = o$ neque maximum erit neque minimum. Sin autem statuatur $\varphi = \delta\omega^2$ erit $\omega^3 = 3a\delta\omega^3$, ideoque $\delta = \frac{1}{3a}$ & $\varphi = \frac{\omega^2}{3a}$: Ergo hoc casu sive x capiatur $= +\omega$ sive $= -\omega$, valor ipsius $y = \varphi$ nihilo erit maior, ideoque hoc casu $y = o$ erit minimum. Restat ergo tertius casus ex aequatione $x^3 = 2a^3$ examinandus, qui dat $x = a\sqrt[3]{2}$, & $y = a\sqrt[3]{4}$. Qui utrum sit maximus an minimus ex aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - xx}{yy - ax}$ quaeratur differentiale secundum, quod ob $dy = o$ & $ay - xx = o$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$, cuius valor praesenti casu est $-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$, qui indicat valorem ipsius y esse maximum.

EXEMPLUM II.

Si functio y definiatur per hanc aequationem:

$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^2 = b^2xy,$$

invenire eius maximos minimosve valores.

Cum

Cum per differentiationem oriatur
$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx$; erit
$\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$, ponique oportet: $b^3 = 3axx + 4x^3$.
Quaestio ergo huc reducitur, ut functionis uniformis $b^3x - ax^3 - x^4$ maxima ac minima indagentur, quae simul erunt maxima seu minima functionis y. Sit $a = 2$ & $b = 3$ seu proponatur haec aequatio $y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$;
erit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$ & $4x^3 + 6xx - 27 = 0$,
quae divisa per $2x - 3 = 0$ dat $2xx + 6x + 9 = 0$, cuius posterioris radices cum sint imaginariae, erit $x = \frac{3}{2}$ &
$y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$, cuius singulae radices erunt vel maximae vel minimae. Cum autem sit
$\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$,
qui posito $x = \frac{3}{2}$, si fuerit affirmativus, indicabit minimum, contra vero maximum.

EXEMPLUM III.

Si fuerit $y^m + ax^n = by^p x^q$; *definire maxima & minima ipsius* y.

Per differentiationem fit $\frac{dy}{dx} = \frac{qby^p x^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1} x^q}$, quo posito $= 0$, erit primo $x = 0$, si quidem n & q fuerint unitate maiores; atque simul $y = 0$. Quo casu an detur maximum vel minimum, valores proximi sunt investigandi, quoniam quoque denominator fit $= 0$; quae investigatio ab exponentibus potissimum pendebit. Praeterea vero aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$

dabit $y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$, qui valor in proposita substitutus ponendo $\frac{na}{qb} = g$ dabit $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n$ seu $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq-np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$, unde fit $x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-np)}$ simulque valor ipsius y innotescit. Deinde dispiciendum est, utrum differentio-differentiale

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

obtineat valorem affirmativum an negativum, ut ex priori minimum, ex posteriori vero maximum pronuncietur.

EXEMPLUM IV.

Si fuerit $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, *maxima & minima functionis* y *assignare.*

Differentiatione instituta fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$, hinque oritur $y = x^3$, erit ergo $x^{12} = 3x^4 - 2$ seu $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, quae aequatio resolvitur in has $x^4 - 1 = 0$ & $x^8 + x^4 - 2 = 0$, posteriorque in $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. Hinc erit bis vel $x = +1$ vel $x = -1$; utroque vero casu & denominator fractionis $\frac{dy}{dx}$ evanescit. Ad investigandum ergo utrum his casibus maximum minimumve locum habeat, ponamus $x = 1 - \omega$ & $y = 1 - \varphi$; erit:

$$\begin{array}{rrrr} 1 - 4\varphi & + 1 - 4\omega = & 4 - 4\omega - 4\varphi & - 2 \\ + 6\varphi^2 & + \quad 6\omega^2 & & + 4\omega \\ - 4\varphi^3 & - \quad 4\omega^3 & & \\ + \varphi^4 & + \quad \varphi^4 & & \end{array}$$

ideoque $4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2 - 4\varphi^3 - 4\omega^3 + \varphi^4 + \omega^4$, & ob ω & φ minima $4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2$. Valor ergo ipsius φ erit imaginarius, sive ω capiatur affirmative sive negative. Seu si y & x

& x designent coordinatas curvae, ea casu $x = 1$ & $y = 1$ habebit punctum coniugatum. Neque ergo hic valor pro maximo neque pro minimo haberi potest, propterea quod antecedentes & consequentes, cum quibus comparari deberet, fiunt imaginarii.

284. Si aequatio, qua relatio inter x & y exprimitur, ita fuerit comparata, ut functio ipsius y aequetur functioni ipsius x, puta $Y = X$; ad maxima minimave invenienda poni debebit $dX = 0$: fiet ergo y maximum vel minimum iisdem casibus, quibus X fit maximum vel minimum. Simili modo si x tanquam functio ipsius y consideretur, fiet x maximum vel minimum si $dY = 0$ hoc est si Y fuerit maximum vel minimum. Neque tamen hinc sequitur y & x simul fieri maxima vel minima. Nam si fuerit $2ay - yy = 2bx - xx$, erit y maximum vel minimum, si fuerit $x = b$; eritque $y = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Contra vero x fit maximum vel minimum, si fuerit $y = a$, fitque $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, neque ergo fiet y maximum vel minimum, si $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$, quo tamen casu x est maximum minimumve. Ceterum hoc casu, si y habeat valores maximos vel minimos, x hac indole prorsus carebit: namque y maximum minimumve fieri nequit, nisi fit $a > b$, quo casu maximum minimumve ipsius x fit imaginarium.

285. Tum vero etiam evenire potest, ut non omnes radices aequationis $dX = 0$ praebeant maximos minimosve valores pro y; si enim illa aequatio duas habuerit radices aequales, exinde neque maximum neque minimum consequitur; hocque idem evenit, si quotcunque radices numero pares fuerint inter se aequales. Sic si proponatur aequatio $b(y-a)^2 = (x-b)^3 + c^3$; quia sumtis differentialibus fit $2bdy(y-a) = 3dx(x-b)^2$, functio y neque maxima fiet neque minima posito $x = b$, propterea quod hic occurrunt duae radices aequales. Sin autem x tanquam functio ipsius y spectetur, ea fiet maxima vel minima, si statuatur $y = a$; eritque $x = b - c$ minimum. Quia denique in huiusmodi aequa-

quationibus $Y = X$ variabiles x & y inter se non permiscentur, si ipsi x tribuitur valor, qui sit radix aequationis $dX = 0$; omnes valores ipsius y, quotcunque fuerint reales, erunt maximi vel minimi; quod non evenit, si in aequatione ambae variabiles fuerint permixtae.

286. Quae praeterea supersunt de natura maximorum ac minimorum exponenda; ea in sequentem sectionem reservamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraesentari atque explicari possunt. Pergamus ergo ad functiones, quae ex pluribus variabilibus sunt compositae, atque investigemus valores, quos singulis variabilibus tribui oportet, ut ipsa functio vel maximum vel minimum valorem obtineat. Ac primo quidem patet, si variabiles non fuerint inter se permixtae, ita ut functio proposita sit huiusmodi $X + Y$, existente X functione ipsius x, & Y ipsius y tantum, tum functionem propositam $X + Y$ fore maximum, si simul X & Y maximum evadat: minimumque, si simul X & Y fiat minimum. Ad maximum ergo inveniendum inquirantur valores ipsius x, quibus X fiat maximum, similique modo valores ipsius y, quibus Y fit maximum: hique valores pro x & y inventi efficient functionem $X + Y$ maximam, quod similiter de minimo erit tenendum. Cavendum ergo est, ne duo valores ipsarum x & y diversae naturae combinentur, quorum ille reddat X maximum, hic vero Y minimum, aut contra. Hoc enim si fieret, functio $X + Y$ neque maximum foret neque minimum. At huiusmodi functio $X - Y$ fiet maxima, si X fuerit maximum simulque Y minimum; contra vero $X - Y$ fiet minimum, si X fuerit minimum & Y maximum. Sin autem utraque functio X & Y statueretur vel maxima vel minima, earum differentia $X - Y$ neque foret maxima, neque minima; quae omnia sunt ex natura maximorum ac minimorum ante exposita clara & perspicua.

287. Si ergo quaerantur maximi minimive valores functionis duarum variabilium; quaestio multo magis cautioni ob-

obnoxia est, quam si unica fuerit variabilis. Non solum enim pro utraque variabili casus, quibus maximum minimumve producitur, diligenter sunt distinguendi; sed etiam ex his bini eiusmodi sunt coniungendi, ut functio proposita fiat maximum vel minimum; id quod ex exemplis clarius patebit.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec duarum variabilium x *&* y *functio*:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

& quaerantur valores pro y *&* x *substituendi, ut haec functio maximum vel minimum obtineat valorem.*

Quoniam haec expressio in duas huiusmodi partes $Y + X$ resolvitur, quarum illa est functio ipsius y, haec vero ipsius x tantum; casus quibus utraque fit maxima vel minima, investigentur. Cum igitur sit

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y, \text{ erit } \frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

qua expressione nihilo aequali posita, fiet per 4 divisa $y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$: cuius radices sunt $y = 2$, & $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Cum ergo sit $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$; casu $y = 2$, prodibit maximum. Pro reliquis binis radicibus $y = 2 \pm \sqrt{3}$, quae oriuntur ex aequatione $yy - 4y + 1 = 0$ fiet $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, unde utraque dat minimum. Erit autem his casibus ut sequitur.

$y = 2$	$Y = 8$ maximum
$y = 2 - \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum
$y = 2 + \sqrt{3}$	$Y = -1$ minimum

Simili modo cum sit $X = x^3 - 3xx - 3x$, erit $\frac{dX}{dx} = 3xx - 6x - 3$, unde oritur haec aequatio $xx = 2x + 1$ & $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Est vero $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm\sqrt{2}$. Ergo radix

dix $x = 1 + \sqrt{2}$ dat minimum, nempe $X = -5 - 4\sqrt{2}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$ dat maximum, nempe $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Quocirca formula proposita $X + Y = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ fiet maxima, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, prodibitque $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Eadem autem formula $X + Y$ fiet minima, si sumatur vel $y = 2 - \sqrt{3}$ vel $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, utroque casu erit $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

EXEMPLUM II.

Si proponatur haec functio duarum variabilium:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

quae quibus casibus fiat maxima vel minima investigetur.

Posito ut in praecedente exemplo habuimus, $Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y$ & $X = x^3 - 3xx - 3x$; formula proposita erit $Y - X$; ideoque fiet maxima, si Y fuerit maximum & X minimum. Cum igitur hos casus iam ante eruerimus, patet $Y - X$ obtinere valorem maximum, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$; fietque $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Minimus vero valor ipsius $Y - X$ evadet, si Y sit minimum, & X maximum, quod evenit ponendo $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, fiet autem $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Ceterum in utroque exemplo patet hos valores, quos invenimus, neque omnium esse maximos neque minimos: nam si utrinque poneretur verbi gratia $y = 100$ & $x = 0$, sine dubio maior prodiret valor eo, quem invenimus: similique modo ponendo $y = 0$ & vel $x = -100$ vel $x = +100$ minor prodiret valor, quam sunt illi, quos pro casu minimi invenimus. Probe ergo tenenda est idea supra exposita, quam de natura maximorum ac minimorum dedimus. Scilicet eum valorem vocari maximum, qui maior sit valoribus tam antecedentibus quam consequentibus contiguis proximis; minimum autem esse eum, qui his valoribus tam antecedentibus quam consequentibus fuerit minor. Sic in hoc exemplo est valor ipsius $Y - X$, qui prodit ponendo $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$ maior est eo, qui resul-

tat

tat si ponatur $y = 2 \pm \omega$ & $x = 1 + \sqrt{2 \pm \varphi}$ sumtis pro ω & φ quantitatibus satis exiguis.

288. His exemplis expeditis facilior erit via ad solutionem generalem indagandam. Denotet V functionem quamcunque duarum variabilium x & y, sintque pro x & y valores inveniendi, qui functioni V inducant maximum vel minimum valorem. Cum igitur ad hoc efficiendum utrique variabili x & y determinatus valor tribui debeat; ponamus alteram y iam habere eum valorem, qui requiritur ad functionem V vel maximam vel minimam reddendam: hocque posito tantum opus erit, ut pro altera x idoneus quoque valor investigetur, quod fiet, dum functio V differentiatur ponenda sola x variabili, differentialeque nihilo aequale statuitur. Simili modo si fingamus variabilem x iam eum habere valorem, qui aptus sit ad functionem V vel maximam vel minimam efficiendam, valor ipsius y reperietur differentiando V posita sola y variabili, hocque differentiale nihilo aequali ponendo. Hinc si differentiale functionis V fuerit $= P dx + Q dy$, oportebit esse & $P = 0$ & $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus valores utriusque variabilis x & y erui poterunt.

289. Quoniam vero hoc pacto sine discrimine reperiuntur valores pro x & y, quibus functio V vel maxima vel minima redditur; casus, quibus vel maximum vel minimum oritur, probe a se invicem sunt distinguendi. Ut enim functio V hat maxima, necesse est ut ambae variabiles ad hoc consipirent; namque si altera maximum exhiberet, altera minimum, ipsa functio neque maxima neque minima evaderet. Quocirca inventis ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ valoribus ipsarum x & y inquirendum est, utrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant; atque tum demum, cum compertum fuerit utriusque variabilis valorem hinc erutum pro maximo valere, affirmare poterimus functionem hoc casu maximum valorem induere. Quod idem de minimo erit tenendum, ita ut functio V minimum valorem

adipisci nequeat, nisi simul ambae variabiles x & y minimum producant. Hinc ergo omnes illi casus reiici debebunt, quibus altera variabilis maximum, altera vero minimum indicare deprehendetur. Interdum vero etiam evenit, ut alterius vel etiam utriusque variabilis valores ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ oriundi neque maximum neque minimum exhibeant, qui casus proinde pariter tanquam prorsus inepti erunt reiiciendi.

290. Utrum autem valores pro x & y reperti valeant pro maximo an minimo, de utroque seorsim simili modo investigabitur, quo supra, cum unica adesset variabilis, sumus usi. Ad iudicium scilicet de variabili x instituendum consideretur altera y tanquam constans, & cum sit $dV = P dx$ seu $\frac{dV}{dx} = P$, differentietur P denuo posito y constante, ut prodeat $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$, ac dispiciatur, utrum valor ipsius $\frac{dP}{dx}$, postquam loco x & y valores ante inventi fuerint substituti, fiat affirmativus an negativus; priori enim casu indicabitur minimum posteriori vero maximum. Simili modo cum posito x constante sit $dV = Q dy$ seu $\frac{dV}{dy} = Q$, differentietur Q denuo posita sola y variabili, & examinetur valor $\frac{dQ}{dy}$, substitutis loco x & y valoribus, qui ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ sunt inventi; qui si fuerit affirmativus, declarabit minimum, contra vero maximum. Hinc ergo colligitur, si ex valoribus pro x & y inventis formulae $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ induant valores diversis signis affectos altera scilicet affirmativum, altera negativum, tum functionem V neque maximam neque minimam effici; sin autem utraque formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiat affirmativa, minimum resultabit: contraque, si utraque fiat negativa, maximum.

291.

291. Quodsi vero altera formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$, vel etiam utraque, si pro x & y valores inventi substituantur, evanescat, tum progrediendum erit ad differentialia sequentia $\frac{ddP}{dx^2}$ & $\frac{ddQ}{dy^2}$, quae nisi pariter evanescant, neque maximum neque minimum habebit locum; sin autem evanescant, iudicium ex formulis differentialibus sequentibus $\frac{d^3P}{dx^3}$ & $\frac{d^3Q}{dy^3}$ erit petendum, similique modo instituendum, quo pro formulis $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ est factum. Quo autem, quibus casibus hoc usu veniat, clarius exponamus, prodierit valor $x = \alpha$, qui si formulam $\frac{dP}{dx}$ reddat evanescentem, necesse est ut $\frac{dP}{dx}$ factorem habeat $x - \alpha$; qui factor si fuerit solitarius, neque simul alium sibi habeat aequalem socium, neque maximum neque minimum indicabitur, quod idem evenit si $\frac{dP}{dx}$ factorem habuerit $(x-\alpha)^2$, vel $(x-\alpha)^5$, &c. Sin autem factor fuerit $(x-\alpha)^2$, vel $(x-\alpha)^4$, &c. tum quidem maximum vel minimum indicabitur; at insuper videndum erit, utrum cum casu per y indicato consentiat.

292. Labor autem his casibus ad differentialia ulteriora progrediendi mirifice sublevari poterit: si enim ponamus, ut rem generalius complectamur, inventum esse $ax + \delta = 0$, atque formulam $\frac{dP}{dx}$ factorem habere $(ax + \delta)^2$, ita ut sit $\frac{dP}{dx} = (ax + \delta)^2 T$, quia est $ax + \delta = 0$, fiet $\frac{d^3P}{dx^3} = 2a^2 T$, hincque ob $2a^2$ affirmativum, ex ipsa quantitate T iudicium absolvi poterit; quae si induet valorem affirmativum, pro minimo, contra vero pro maximo pronunciabit. Hocque idem

subsidium in maximorum minimorumque investigatione, si unica insit variabilis adhiberi poterit, ita ut nunquam opus sit ad altiora differentialia ascendere. Quin etiam nequidem ad differentialia secunda procedere opus erit: si enim ex aequatione $P = 0$, fiat $\alpha x + \varepsilon = 0$, necesse est ut P factorem habeat $\alpha x + \varepsilon$; sit $P = (\alpha x + \varepsilon) T$, & cum sit $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \varepsilon)\frac{dT}{dx}$, ob $\alpha x + \varepsilon = 0$, erit $\frac{dP}{dx} = \alpha T$, hincque iam ipse alter factor T, prout valor ipsius αT fuerit vel affirmativus vel negativus, statim vel minimum vel maximum indicabit.

293. His igitur traditis praeceptis haud difficile erit, si functio quaecunque duas variabiles involvens fuerit proposita, casus investigare, quibus haec functio fiat vel maxima vel minima. Si quae insuper notanda fuerint, ea ipsa exemplorum evolutio suggeret, quamobrem aliquot exemplis regulas datas illustrari expediet.

EXEMPLUM 1.

Sit proposita ista functio duarum variabilium

$V = xx + xy + yy - ax - by$, *quae quibus casibus fiat vel maxima vel minima inquiratur.*

Cum sit $dV = 2x\,dx + y\,dx + x\,dy + 2y\,dy - a\,dx - b\,dy$, si comparetur cum formula generali $dV = P\,dx + Q\,dy$ erit $P = 2x + y - a$ & $Q = 2y + x - b$: unde formabuntur istae aequationes $2x + y - a = 0$ & $2y + x - b = 0$, quibus coniunctis eliminando y fiet $x - b = 4x - 2a$, ideoque $x = \frac{2a - b}{3}$, & $y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$. Cum igitur sit $\frac{dP}{dx} = 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 2$, utraque ostendit minimum; ex quo concludimus formulam $xx + xy + yy - ax - by$ fieri minimam, si ponatur

ponatur $x = \frac{2a-b}{3}$ & $y = \frac{2b-a}{3}$, prodibitque hoc modo $V = \frac{-3aa+3ab-3bb}{9} = \frac{-aa+ab-bb}{3}$, qui cum sit unicus, omnium erit minimus. Unico ergo modo fieri potest $xx+xy+yy-ax-by = \frac{-aa+ab-bb}{3}$, & quia minor fieri nequit, erit haec aequatio $xx+xy+yy-ax-by = \frac{-aa+ab-bb}{3} - cc$ impossibilis.

EXEMPLUM II.

Si proponatur formula $V = x^3+y^3-3axy$, *quaerantur casus, quibus* V *adipiscatur valorem maximum vel minimum.*

Ob $dV = 3xxdx+3yydy-3aydx-3axdy$ erit $P = 3xx-3ay$ & $Q = 3yy-3ax$, unde fit $ay = xx$ & $ax = yy$. Cum ergo sit $yy = x^4 : aa = ax$ erit $x^4-a^3x = 0$; ideoque vel $x = 0$ vel $x = a$. Priori casu fit $y = 0$, posteriori vero $y = a$. Quoniam ergo est $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$, & $\frac{dQ}{dy} = 6y$ atque $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$; priori ergo casu, quo $x = 0$ & $y = 0$, neque maximum neque minimum resultat. Posteriori vero casu quo & $x = a$ & $y = a$ minimum prodit, si quidem a fuerit quantitas affirmativa, fietque $V = -a^3$, qui autem valor tantum minor est proximis antecedentibus & consequentibus: nam sine dubio V multo minorem induere potest valorem, si utrique variabili x & y valores negativi tribuantur.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec functio $V = x^3+ayy-bxy+cx$, *cuius valores maximi seu minimi inquirantur.*

Quia est $dV = 3xxdx+2aydy-bydx-bxdy+cdx$ erit

P =

$P = 3xx - by + c$ & $Q = 2ay - bx$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis erit $y = \frac{bx}{2a}$, ideoque $3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0$ seu $xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$ unde fit $x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}$,

Nisi ergo sit $b^4 - 48aac > 0$, neque maximum neque minimum habet locum. Ponamus ergo esse $b^4 - 48aac = bbff$, ut sit $c = \frac{bb(bb - ff)}{48aa}$; erit $x = \frac{bb \pm bf}{12a}$ & $y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}$. Quoniam porro est $\frac{dP}{dx} = 6x$ & $\frac{dQ}{dy} = 2a$, fiet $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2a}$.

Nisi ergo $2a$ & $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ sint quantitates eiusdem signi, neque maximum neque minimum habet locum. At si sint ambae vel affirmativae vel ambae negativae, quod evenit, si earum productum $b(b \pm f)$ fuerit affirmativum; tum functio V evadet minimum, si a sit quantitas affirmativa, contra vero maximum, si a sit quantitas negativa. Hinc si fuerit $f = 0$ seu $c = \frac{b^4}{48aa}$, ob bb quantitatem affirmativam, functio V evadet minima si a sit quantitas positiva, ponaturque $x = \frac{bb}{12a}$ & $y = \frac{b^3}{24aa}$; contra vero si a sit negativum, istae substitutiones producent maximum. Si sit $f < b$, duobus casibus oritur vel maximum vel minimum: at si $f > b$, tum casus tantum $x = \frac{b(b+f)}{12a}$ & $y = \frac{bb(b+f)}{24aa}$ praebebit maximum minimumve prout a fuerit vel negativum vel affirmativum. Sit $a = 1$, $b = 3$ & $f = 1$, ut habeatur haec formula V $= x^3 + yy - 3xy + \frac{1}{4}x$ haec fiet minima ob a affirmativum, si ponatur vel $x = 1$ & $y = \frac{1}{2}$ vel $x = \frac{1}{3}$ & $y = \frac{1}{4}$. Prio-

ri

ri casu oritur $V = \frac{1}{4}$, posteriori vero $V = \frac{1}{12}$. Interim tamen patet loco x numeris negativis ponendis multo minores valores pro V oriri posse. Ita ergo intelligi debet valor ipsius $V = \frac{1}{4}$ minor esse, quam si ponatur $x = 2 + \omega$ & $y = 3 + \varphi$; dummodo sint ω & φ numeri parvi, sive affirmativi sive negativi; limes autem quem ω transgredi non debet est $-\frac{11}{4}$; nam si $\omega < -\frac{11}{4}$ fieri poterit ut V fiat minor quam $\frac{1}{4}$.

EXEMPLUM IV.

Invenire maxima vel minima huius functionis:

$$V = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy.$$

Sumto differentiali erit $P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx$ & $Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis, si a se invicem subtrahantur erit: $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$, quae cum sit divisibilis per $x - y$, erit primo $y = x$, atque $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$, quae dat $x = 0$ & $4xx = 3ax - 2cc$ seu $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$.

Si sumamus $x = 0$, erit quoque $y = 0$; & ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2ay + 2cc$, atque $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$, fiet functio V minima $= 0$. Sin statuamus $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, si quidem fuerit $9aa > 32cc$, ob $4xx = 3ax - 2cc$, erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc = \frac{21aa - 32cc \pm 7a\sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, qui valor cum sit semper affirmativus ob $32cc < 9aa$, valor V hoc quoque casu fit minimus, eritque $V = \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$. Dividamus autem aequationem $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$ per $x - y$ fietque $4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0$. At ex aequatione $P = 0$, erit $yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$,

quo valore in illa substituto fit

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8cex + 2ace}{4ex - aa}.$$

Verum illa dat $y = -x \pm \sqrt{\frac{4x^3 + axx + 2cex}{a}}$, unde efficitur:

$$16x^3 + 8axx + 4cex + 2ace = (4x - a)\sqrt{(4ax^3 + aaxx + 2acex)},$$

quae ad rationalitatem perducta dat

$$256x^6 + 192ax^5 + 80aax^4 + 4a^3x^3 - a^4x^2 - 2a^3cex + 4a^2c^2 = e + 128ce + 96ace + 48aacc + 16ac^4 + 16c^4$$

cuius radices, si quas habet, reales indicabunt maxima vel minima functionis V, si quidem $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiant quantitates eodem signo affectae.

EXEMPLUM V.

Invenire maxima & minima huius expressionis:

$$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = V.$$

Facta differentiatione erit:

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$
$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0$$

quae aequationes invicem vel subtractae vel additae dant:

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$
$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

quae divisae per $x - y$ & $x + y$, & denuo vel additae vel subtractae dant:

$$4xx + 4yy + 2aa = 0 \quad \& \quad 4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Ex quarum posteriori fit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, prior autem reales valores non admittit. Tres igitur habemus casus:

I. Sit $y = x$, eritque $4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$, unde fit vel $x = 0$ vel $2(2+m)xx + (2+n)aa = 0$. Sit $x = 0$, erit quoque $y = 0$, atque ob $\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa$

&

& $\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$, hoc casu fiet $V = o$ minimum, si quidem coefficiens aa fuerit affirmativus. Alter casus dat $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, quae realis esse nequit nisi sit $\frac{n+2}{m+2}$ numerus negativus. Sit $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$, seu $n = -2kkm - 4kk - 2$, erit $x = \pm ka$ & $y = \pm ka$. At $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$, quae cum sint aequales, erit V vel minimum vel maximum, prout istae quantitates fuerint vel affirmativae vel negativae.

II. Sit $y = -x$, eritque $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$ ergo vel $x = o$ vel $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Prior radix $x = o$ recidit in praecedentem. Posterior vero erit realis si $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ fuerit quantitas affirmativa: & cum fiat $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ prodibit vel maximum vel minimum.

III. Sit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, erit $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = o$ seu $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = o$, cuius aequationis nulla radix est realis, nisi sit aa quantitas negativa.

EXEMPLUM VI.

Proposita sit haec functio determinata:

$$V = x^4 + y^4 - xx + xy - yy,$$

cuius valores maximi vel minimi investigentur.

Cum hinc fiat $P = 4x^3 - 2x + y = o$ & $Q = 4y^3 - 2y + x = o$ erit ex priori $y = 2x - 4x^3$, qui in altera substitutus dat $256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = o$. Cuius una radix

dix est $x = 0$, unde fit quoque $y = 0$. Ergo hoc casu ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$ prodit maximum $V = 0$. Divisa autem aequatione inventa per x erit:

$$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40xx + 3 = 0,$$

quae factorem habet $4xx - 1$, unde fit $4xx = 1$ & $x = \pm\frac{1}{2}$; atque $y = \pm\frac{1}{2}$, tum vero erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$, utroque ergo casu oritur minimum $V = -\frac{1}{8}$.

Dividatur illa aequatio per $4xx - 1$, atque obtinebitur:

$$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0,$$

quae denuo bis continet $4xx - 1 = 0$; ita ut praecedens casus oriatur. Praeterea vero inde fit $4xx - 3 = 0$, & $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$; cui respondet $y = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Erit igitur quoque $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, ideoque fiet V minimum $= -\frac{9}{8}$; qui est valor omnium minimus, quos quidem functio V recipere potest: & hanc ob rem ista aequatio $V = -\frac{9}{8} - cc$ semper est impossibilis. Hinc autem patet via determinandi maxima & minima functionum, quae tres pluresve variabiles involvunt.

CA-

CAPUT XII.

DE USU DIFFERENTIALIUM IN INVESTIGANDIS RADICIBUS REALIBUS AEQUATIONUM.

294.

Natura maximorum ac minimorum viam nobis patefacit ad indolem radicum aequationum, utrum sint reales an imaginariae, cognoscendam. Sit enim proposita aequatio cuiuscunque ordinis:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

cuius radices ponamus esse p, q, r, s, t, &c. ita ut p sit minima, q ea quae ratione magnitudinis sequitur, sicque & reliquae radices secundum ordinem quantitatis sint dispositae: scilicet sit $q > p$; $r > q$; $s > r$; $t > s$ &c. Assumamus autem omnes radices aequationis esse reales, eritque exponens maximus n simul numerus radicum p, q, r, &c. Consideremus quoque has radices omnes tanquam inter se inaequales; hinc tamen aequales radices non excluduntur, propterea quod radices inaequales, si earum differentia abeat in infinite parvam, fiant aequales.

295. Quoniam proposita expressio $x^n - Ax^{n-1} + \&c.$ tum solum fit nihilo aequalis, cum loco x aliquis valor ex p, q, r, &c. substituitur, reliquis vero casibus omnibus non evanescit, ponamus generatim:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = z$$

ita ut z spectari possit tanquam functio ipsius x. Fingamus nunc pro x successive substitui valores determinatos, incipiendo a minimo $x = -\infty$, atque continuo maiores in locum ipsius x collocari; perspicuumque est z nacturum hinc esse valores vel nihilo maiores vel nihilo minores, neque prius esse evaniturum, quam ponatur $x = p$; quo casu fiet $z = 0$.

Augeantur valores ipsius x ultra p, atque valores ipsius z vel affirmativi vel negativi fient, donec perveniatur ad valorem $x = q$; quo casu iterum erit $z = 0$. Necesse ergo est, ut cum valores ipsius z ab 0 iterum ad 0 accesserint, interea z habuerit valorem vel maximum vel minimum; maximum scilicet si valores ipsius z, dum x intra limites p & q versabatur, fuerint affirmativi, minimum, si fuerint negativi. Simili modo dum x ultra q ad r usque augetur, functio z maximum vel minimum attinget: maximum nimirum si ante fuerit minimum, & contra. Supra enim vidimus maxima & minima se mutuo alternatim excipere.

296. Quare cum inter binas quasvis radices ipsius x existat casus, quo functio z fit maximum vel minimum; erit numerus maximorum & minimorum, quae in functione z implicantur, unitate minor, quam numerus radicum realium; atque ita quidem alternatim se excipient, ut maximi ipsius z valores sint affirmativi, minimi negativi. Quod si vicissim functio z habeat maximum vel saltem valorem affirmativum casu $x = f$, atque minimum seu saltem negativum casu $x = g$; quoniam dum valores ipsius x ab f ad g transeunt, functio z ab affirmativo abit in negativum, necesse est ut interea per 0 transierit, & hancobrem dabitur radix ipsius x intra limites f & g contenta. Nisi autem haec conditio adsit, ut valores maximi minimique ipsius z fiant alternatim affirmativi & negativi, illa conclusio non sequitur. Si enim dentur functionis z minima, quae quoque sint affirmativa, fieri potest ut valor ipsius z a maximo ad sequens minimum transeat, cum tamen interea non evanescat. Ceterum ex dictis intelligitur, etiamsi aequationis propositae non omnes radices fuerint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum; etiamsi propositio conversa generatim non valeat, ut inter bina quaevis maxima seu minima radix realis contineatur: valet autem adiecta conditione, si alter valor ipsius z fuerit affirmativus, alter negativus.

297. Quoniam ergo supra vidimus, valores ipsius x, quibus functio:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c.$$

fit maximum vel minimum, esse radices aequationis differentialis huius:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

manifestum est, si aequationis $z = 0$ omnes radices, quarum numerus est $= n$ fuerint reales, tum quoque omnes radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fore reales. Cum enim functio z tot habeat maxima vel minima, quot numerus $n - 1$ continet unitates, necesse est ut aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ totidem habeat radices reales; ideoque omnes eius radices erunt reales. Ex quo simul perspicitur, functionem z plura maxima minimave habere non posse, quam $n - 1$. Habemus ergo hanc regulam latissime patentem, si aequationis $z = 0$ omnes radices fuerint reales, tum quoque aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices habebit reales. Unde viciſſim sequitur, si aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ non omnes radices fuerint reales, tum quoque non omnes aequationis $z = 0$ radices reales fore.

298. Quia inter binas quasvis aequationis $z = 0$ radices reales datur unus casus, quo functio z fit maximum vel minimum; sequitur si aequatio $z = 0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx} = 0$ necessario unam radicem habituram esse realem. Pariter si aequatio $z = 0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ certo duas habebit radices rea-

reales. Atque generatim si aequatio $z = 0$ habeat m radices reales, necesse est ut aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ ad minimum sint $m - 1$ radices reales. Quare si aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ pauciores habeat radices reales quam $m - 1$, tum vicissim aequatio $z = 0$ certo pauciores quam m habebit radices reales. Cavendum autem est, ne propositio conversa pro vera habeatur; etiamsi enim aequatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ aliquot vel adeo omnes radices suas habeat reales, tamen non sequitur, aequationem $z = 0$ ullam habituram esse radicem realem. Fieri enim potest, ut aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices sint reales, cum tamen aequationis $z = 0$ omnes radices sint imaginariae.

299. Interim tamen, si conditio supra memorata adiiciatur, propositio conversa ita proponi poterit, ut ex radicibus realibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, numerus radicum realium aequationis $z = 0$ certo cognosci possit. Ponamus enim $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$, &c. esse radices reales aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, inter quas α sit maxima, reliquae vero ordine magnitudinis se invicem sequantur. His igitur valoribus loco x substitutis functio z obtinebit vel maximos vel minimos valores alternatim. Cum autem functio z fiat $= \infty$, si ponatur $x = \infty$, patet eius valores continuo decrescere debere, dum valores ipsius x ab ∞ usque ad α diminuuntur; ex quo, casu $x = \alpha$, fiet z minimum. Quodsi ergo hoc casu $x = \alpha$ functio z valorem iuduat negativum, necesse est ut ante alicubi fuerit $= 0$, sicque aequationis $z = 0$ radix dabitur realis $x > \alpha$; sin autem posito $x = \alpha$ functio z adhuc retineat valorem affirmativum,

tivum, ante nusquam potuit esse minor, alias enim quoque daretur minimum antequam x ad α usque diminueretur, quod esset contra hypothesin; hinc aequatio $z = 0$ nullam habere poterit radicem realem maiorem quam α. Si ergo ponamus posito $x = \alpha$ fieri $z = \mathfrak{A}$, hoc modo iudicari poterit: si fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas affirmativa, tum aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem α maiorem; sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negativa, tum aequatio $z = 0$ unam perpetuo habebit radicem realem α maiorem, neque plures.

300. Ad hoc iudicium ulterius persequendum

si ponatur			fiat		
x	$=$	α	z	$=$	$\mathfrak{A}$
x	$=$	β	z	$=$	$\mathfrak{B}$
x	$=$	γ	z	$=$	$\mathfrak{C}$
x	$=$	δ	z	$=$	$\mathfrak{D}$
x	$=$	ε	z	$=$	$\mathfrak{E}$
&c.			&c.		

Quia ergo $\mathfrak{A}$ fuit minimum, erit $\mathfrak{B}$ maximum, & quidem si $\mathfrak{A}$ fuerit affirmativum, erit quoque $\mathfrak{B}$ affirmativum, neque ergo inter limites α & β dabitur radix realis aequationis $z = 0$. Quare si haec aequatio nullam habeat radicem realem α maiorem, neque ullam habebit; quae esset maior quam β. Sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negativa, quo casu una datur aequationis radix $x > \alpha$; dispiciatur utrum valor ipsius $\mathfrak{B}$ sit affirmativus an negativus, priori casu dabitur radix $x > \beta$, posteriori vero nulla dabitur radix intra limites α & β contenta. Simili modo cum $\mathfrak{B}$ fuerit maximum, erit $\mathfrak{C}$ minimum; quare si $\mathfrak{B}$ habuerit valorem negativum, multo magis $\mathfrak{C}$ erit negativum, nullaque hoc casu dabitur radix intra limites β & γ contenta. Ad si $\mathfrak{B}$ fuerit affirmativum, radix dabitur realis inter limites β & γ, si $\mathfrak{C}$ fiat negativum: sin autem $\mathfrak{C}$ quoque sit affirmativum tum nulla dabitur radix inter limites β & γ contenta similique modo iudicium ulterius erit instituendum.

301.

301. Quo haec iudicia facilius intelligantur, ea in sequenti tabella complexus sum:

Aequatio $z = 0$ unam habebit radicem realem, quae continetur intra limites			Si fuerit	
$x = \infty$	&	$x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$	
$x = \alpha$	&	$x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$	
$x = \beta$	&	$x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$	
$x = \gamma$	&	$x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$	
$x = \delta$	&	$x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$	
&c.			&c.	

Harumque propositionum conversae & in negantes transmutatae pariter in omni rigore locum obtinent. Scilicet

Aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem, quae contineatur inter limites:			Si non fuerit	
$x = \infty$	&	$x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$	
$x = \alpha$	&	$x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$	
$x = \beta$	&	$x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$	
$x = \gamma$	&	$x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$	
$x = \delta$	&	$x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$	
&c.			&c.	

Ope harum ergo regularum ex radicibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, si eae fuerint cognitae, non solum numerus radicum realium aequationis $z = 0$ colligitur, sed etiam limites innotescunt, intra quos singulae istae radices contineantur.

EXEMPLUM.

Sit proposita ista aequatio: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ *quae an habeat radices reales & quot quaeritur.*

Aequatio differentialis erit $4x^3 - 28x + 24 = 0$, seu $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuius radices sunt 1, 2, & -3, quae secundum ordinem magnitudinis dispositae dabunt

$\alpha =$

unde erit

$\alpha = 2$	$\mathfrak{A} = -4$
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = -1$
$\gamma = -3$	$\mathfrak{C} = -129$

Ob $\mathfrak{A}$ negativum ergo aequatio proposita habebit radicem realem > 2, at ob $\mathfrak{B}$ negativum, neque inter limites 2 & 1, neque inter limites 1 & -3 radicem habebit realem. Cum autem posito $x = -3$ fiat $z = \mathfrak{C} = -129$, ac si statuatur $x = -\infty$, fiat $z = +\infty$ necesse est, ut radix detur realis inter limites -3 & $-\infty$ contenta. Habebit ergo aequatio proposita duas radices reales, alteram $x > 2$, alteram $x < -3$; ex quo duae radices erunt imaginariae. Simili modo ergo ex ultimo aequationis propositae maximo vel minimo iudicari debet, quo ex primo solo. Scilicet si aequatio proposita fuerit ordinis paris, ultimum sive maximum sive minimum (erit autem hoc casu minimum), si fuerit negativum radicem realem, sin affirmativum radicem imaginariam indicat. At pro aequationibus imparium graduum, quia posito $x = -\infty$ fit $z = -\infty$, si ultimum maximum fuerit affirmativum, radix realis, sin negativum, imaginaria indicatur.

302. Regula ergo pro cognoscendis radicibus realibus & imaginariis hoc modo commode exprimi poterit. Proposita aequatione quacunque $z = 0$, consideretur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$, cuius radices reales secundum ordinem quantitatis dispositae sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. tum posito

$$x = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \text{ &c.}$$

fiat $z = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, &c.

Iam si signa sint: $- + - + - +$ &c.

tot aequatio $z = 0$ habebit radices reales, quot habentur litterae α, β, γ, &c. & insuper unam. Sin autem una ex his litteris maiusculis non habeat signum infrascriptum, tum binae radices imaginariae indicabuntur. Ita si $\mathfrak{A}$ haberet signum

+, tum nulla daretur radix intra limites ∞ & ϵ contenta. Si $\mathfrak{B}$ habeat signum —, nulla dabitur radix inter limites α & γ; & si $\mathfrak{C}$ habeat signum +, nulla erit radix inter limites ϵ & δ, & ita porro. Generatim autem praeter radices imaginarias hoc modo indicatas, aequatio $z = 0$ insuper tot habebit imaginarias, quot aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$.

303. Si eveniat, ut valorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. aliquis evanescat, tum eo loco aequatio $z = 0$ duas habebit radices aequales. Scilicet si fuerit $\mathfrak{A} = 0$, tum habebit duas radices ipsi α aequales; sin fit $\mathfrak{B} = 0$, duae erunt radices $= \beta$. Hoc enim casu aequatio $z = 0$ unam habebit radicem communem cum aequatione differentiali $\frac{dz}{dx} = 0$; supra autem demonstravimus, hoc esse indicium duarum radicum aequalium. Sin autem aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ duas pluresve radices habeat aequales, tum si earum numerus fuerit par, neque maximum neque minimum indicabitur: unde pro praesenti instituto radices aequales numero pares negligi poterunt. Sin autem numerus radicum aequalium aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fuerit impar, tum omnes praeter unam in formatione iudicii reiiciendae sunt; nisi forte hoc casu ipsa quoque functio z evanescat. Si enim hoc eveniat aequatio $z = 0$ quoque habebit radices aequales & quidem una plures, quam aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$. Sic si fuerit $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, ita ut haec aequatio habeat n radices aequales ipsi ζ, si posito $x = \zeta$ quoque evanescat z, tum aequatio $z = 0$ habebit $n + 1$ radices aequales ipsi ζ.

304. Applicemus haec praecepta ad aequationes simpliciores, ac primo quidem a quadratica incipiamus. Sit igitur propo-

propofita haec aequatio: $z = x^3 - Ax + B = 0$: erit eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 2x - A$, qua facta $= 0$, erit $x = \frac{1}{2}A$, feu $x = \frac{1}{2}A$. Subftituatur hic valor loco x, fietque $z = -\frac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A}$; unde colligimus, fi iſte valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit negativus, hoc eſt fi fit $AA > 4B$, aequationem $xx - Ax + B = 0$ habituram eſſe duas radices reales, alteram maiorem quam $\frac{1}{2}A$ alteram minorem. Sin autem valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit affirmativus ſeu $AA < 4B$, tum ambae aequationis propoſitae radices erunt imaginariae. At ſi fuerit $\mathfrak{A} = 0$ ſeu $AA = 4B$, tum aequatio propoſita habebit duas radices aequales, utramque ſcilicet $= \frac{1}{2}A$. Quae cum ex natura aequationum quadraticarum ſint notiſſimae, veritas horum principiorum non mediocriter illuſtratur, ſimulque eorum utilitas in hoc negotio perſpicitur.

305. Progrediamur ergo ad aequationes cubicas ſimili modo inquirendas. Sit ergo propoſita aequatio $x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = 0$: cuius differentialis cum ſit $3xx - 2Ax + B = \frac{dz}{dx}$, ſi haec ponatur $= 0$, fiet

$xx = \frac{2Ax - B}{3}$, cuius aequationis vel ambae radices ſunt imaginariae, vel aequales, vel reales inaequales. Cum igitur hinc ſit $x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$, ambae radices erunt imaginariae, ſi fuerit $AA < 3B$: hoc ergo caſu aequatio cubica propoſita unicam habebit radicem realem, cuius alii limites non patent praeter $+\infty$ & $-\infty$. Sint iam ambae radices inter ſe aequales, ſeu $AA = 3B$, erit $x = \frac{A}{3}$. Niſi ergo ſimul fiat $z = 0$, hae duae radices pro nullis reputari debebunt, habebitque aequatio ut ante unicam radicem realem;

fin autem casu $x = \frac{A}{3}$ simul fiat $z = 0$, quod evenit, si fuerit $-\frac{2}{9}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = 0$, seu $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$; hoc est si fuerit $B = \frac{1}{3}A^2$ & $C = \frac{1}{27}A^3$, aequatio habebit tres radices aequales, singulas scilicet $= \frac{1}{3}A$. Evolvamus nunc tertium casum, quo ambae radices aequationis differentialis sunt reales & inter se inaequales, quod evenit si $AA > 3B$. Sit ergo $AA = 3B + ff$, seu $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, erunt ambae illae radices $x = \frac{A \pm f}{3}$. Fiet ergo $\alpha = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Quaerantur ergo valores ipsius z his respondentes $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$; & cum ambae radices contineantur in hac aequatione $xx = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, fiet $z = -\frac{1}{3}Axx + \frac{1}{3}Bx - C = -\frac{1}{9}AAx + \frac{1}{9}AB + \frac{1}{3}Bx - C$. Hinc itaque oritur:

$\mathfrak{A} = -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}AB - \frac{2}{27}A^3 f + \frac{1}{9}Bf - C = \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{27}f^3 - C$

$\mathfrak{B} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{9}AB + \frac{2}{27}A^3 f - \frac{1}{9}Bf - C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{27}f^3 - C$

ob $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Si igitur fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas negativa, quod evenit, si fuerit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{27}f^3$, aequatio $z = 0$ unam habebit radicem realem $> \alpha$, hoc est maiorem quam $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Ponamus ergo esse $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{27}f^3$ seu esse $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{27}f^3 + gg$; atque ut vidimus, aequatio proposita cubica habebit radicem realem $> \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Quales autem futurae sint reliquae radices, ex valore $\mathfrak{B}$ intelligetur: erit autem $\mathfrak{B} = \frac{1}{27}f^3 - gg$; qui si fuerit affirmativus, aequatio insuper duas habebit radices reales, priorem intra limites α & β, hoc est intra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ contentam, alteram vero minorem quam $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Sin autem fuerit $gg > \frac{1}{27}f^3$, seu $\mathfrak{B}$ negativum, tum aequatio habebit duas radices imaginarias. At si fuerit $\mathfrak{B} = 0$ seu $\frac{1}{27}f^3 = gg$ tum duae radices evadent aequales, utraque $= \delta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Denique si sit valor ipsius $\mathfrak{A}$ affirmativus seu $C < \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, tum aequatio duas habebit radices imaginarias, tertiaque erit realis & $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Atque si fit valor ipsius $\mathfrak{A} = 0$, duae erunt radices aequales $= \alpha$, manente tertia $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306.

306. Quo igitur aequationis cubicae $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ omnes tres radices sint reales, requiruntur tres conditiones. Primo ut sit $B < \frac{1}{3}AA$: sit ergo $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Secundo ut sit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$. Tertio ut sit $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{27}f^3$. Quae duae posteriores conditiones eo redeunt, ut C contineatur intra hos limites $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{27}f^3$ seu intra hos limites $\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f)$ & $\frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$. Quod si ergo harum conditionum unica desit aequatio duas habebit radices imaginarias. Sic si fuerit $A = 3$, $B = 2$, erit $\frac{1}{3}ff = \frac{1}{3}AA - B = 1$ & $ff = 3$; unde ista aequatio: $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ omnes radices reales habere nequit, nisi C contineatur intra limites $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ & $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Quare si fuerit vel $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C < -0,3849$, vel $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C > 0,3849$ aut coniunctim $CC > \frac{4}{27}$, aequatio unicam habebit radicem realem.

307. Quoniam in omni aequatione secundus terminus tolli potest, ponamus esse $A = 0$, ita ut habeamus hanc aequationem cubicam $x^3 + Bx - C = 0$. Ut igitur huius aequationis omnes tres radices sint reales, necesse est ut primo sit $B < 0$, seu B debet esse quantitas negativa. Sit ergo $B = -kk$, erit $ff = 3kk$, atque insuper requiritur, ut quantitas C contineatur intra hos limites $-\frac{1}{27}f^3$ & $+\frac{1}{27}f^3$; hoc est inter hos $-\frac{1}{9}kk\sqrt{3kk}$ & $+\frac{1}{9}kk\sqrt{3kk}$. Erit ergo $CC < \frac{1}{27}k^6$, seu $CC < -\frac{1}{27}B^3$. Unica ergo conditione natura aequationum cubicarum, quae omnes tres radices habeant reales comprehendi poterit, dum dicimus esse oportere $4B^3 + 27CC$ quantitatem negativam. Sic enim iam postulatur, ut sit B quantitas negativa, quia alioquin $4B^3 + 27CC$ negativum fieri non posset. Quocirca generatim affirmamus, aequationem $x^3 + Bx \pm C = 0$ omnes tres radices habituram esse reales, si fuerit $4B^3 + 27CC$ quantitas negativa. Sin autem haec quantitas fuerit affirmativa, tum unicam fore realem, reliquas binas imaginarias; at si

fiat

fiat $4B^3 + 27CC = 0$, tum omnes quidem radices futuras esse reales, at binas inter se aequales.

308. Progrediamur ad aequationes biquadratas, in quibus etiam secundum terminum deesse ponamus. Sit ergo $x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$. Statuamus $x = \frac{1}{u}$, eritque $1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$, cujus aequatio differentialis est $2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0$, quae unam habet radicem $u = 0$, tum vero erit $uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$ & $u = \frac{3C \pm \sqrt{(9CC - 32BD)}}{8D}$. Ut igitur omnes quatuor radices sint reales, primo requiritur, ut sit $9CC > 32BD$. Ponamus ergo esse $9CC = 32BD + 9ff$, erit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Hic C semper pro quantitate affirmativa sumere poterimus, nisi enim talis fuerit, ponendo $u = -v$ talis evadet. Mox autem demonstrabimus omnes radices reales esse non posse, nisi sit B quantitas negativa. Sit ergo $B = -gg$, eritque $9CC = 9ff - 32ggD$, & $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Atque duo casus erunt perpendendi, prout D sit quantitas affirmativa vel negativa.

I. Sit D quantitas affirmativa, eritque $f > C$, ac tres ipsius u radices secundum quantitatis ordinem dispositae erunt 1°; $u = \frac{3C + 3f}{8D}$, 2°; $u = 0$, 3°; $u = \frac{3C - 3f}{8D}$. Aequatio autem $u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$, his valoribus loco u substitutis dabit sequentes tres valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}; \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{D};$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

quo-

quorum primus ac tertius debet esse negativus: uterque quidem ob C affirmativum & $C < f$ fit minor quam $\frac{1}{D}$: oportet itaque esse $\frac{1}{D} < \frac{27(C+f)^3(3f-C)}{4096D^4}$ & $\frac{1}{D} < \frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096D^4}$, seu $4096D^3 < 27(f+C)^3(3f-C)$ & $4096D^3 < 27(f-C)^3(C+3f)$. At prior quantitas semper longe maior est posteriori; unde sufficit, si fuerit $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, existente $B = \frac{9CC-9ff}{32D}$ & $f > C$, atque $D > 0$. Si igitur fuerit D quantitas affirmativa, C affirmativa, B negativa, ut sit $f > C$, atque $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, hoc est $D < \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, tum aequatio omnes radices habebit reales. Sin autem fuerit $D > \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, attamen $D < \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$; tum duae radices erunt reales & duae imaginariae. At si adeo fuerit $D > \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{(3f-C)}$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

II. Sit D quantitas negativa puta $= -F$, manente C affirmativa ac B negativa, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32D} = \frac{9ff-9CC}{32F}$, erit $C > f$. Cum igitur sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = \frac{-3C \mp 3f}{8F}$ tres valores ipsius u secundum ordinem magnitudinis dispositi erunt 1°, $u = 0$; 2°, $u = \frac{-3C+3f}{8F}$. 3°, $u = \frac{-3C-3f}{8F}$, qui dabunt sequen-

quentes valores $\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

Cum igitur $\mathfrak{A}$ sit quantitas negativa, aequatio iam certo unam, ac propterea quoque duas habebit radices reales. Ut autem omnes radices sint reales, oportet ut $\mathfrak{B}$ sit quantitas affirmativa, ideoque $27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$: rum vero necesse est, ut sit $\mathfrak{C}$ quantitas negativa seu $27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$. Quocirca ut omnes radices fiant reales, requiritur ut F^3 contineatur intra hos limites $\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f)$ & $\frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$ seu ut F contineatur intra limites $\frac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{(C-3f)}$ & $\frac{3}{16}(C-f)\sqrt[3]{(C+3f)}$; & nisi F contineatur intra hos limites, duae radices erunt imaginariae.

III. Ponamus iam B esse quantitatem affirmativam, & D pariter affirmativam, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32D}$, erit $C > f$, & cum fit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$, radices ordine magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \frac{3(C+f)}{8D}$; 2°, $u = \frac{3(C-f)}{8D}$ & 3°, $u = 0$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D};$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}; \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{D};$$

ubi

ubi cum $\mathfrak{C}$ sit quantitas affirmativa, certo duae radices erunt imaginariae. Sin autem fuerit $\mathfrak{A}$ negativum quod evenit, si $4096\,D^3 < 27\,(C+f)^3\,(3f-C)$, duae radices erunt reales: sin fuerit $4096\,D^3 > 27\,(C+f)^3\,(3f-C)$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

IV. Maneat B affirmativum, sit autem D negativum $= -F$, ob $B = \frac{9ff-9CC}{32F}$, erit $f > C$ & ob $u = \frac{-3C\mp 3f}{8F}$, tres ipsius u radices secundum ordinem magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \frac{3(f-C)}{8F}$; 2°, $u = 0$; & 3°, $u = \frac{-3(C+f)}{8F}$, unde isti valores nascuntur.

$$\mathfrak{A} = \frac{-27(f-C)^3\,(C+3f)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-27(C+f)^3\,(3f-C)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

ubi ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negativa aequatio certo duas habet radices reales, at ob $\mathfrak{B}$ negativum, duae radices erunt imaginariae.

309. Si igitur ponamus litteras B, C, D quantitates affirmativas denotare, sequentes oriuntur casus diversi diiudicandi, qui ob $f = \sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)}$ huc redeunt.

I. Si aequatio fit $x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Omnes radices erunt reales, si fuerit

$$D < \tfrac{1}{16}\left[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)} - C\right] \sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)} + C\right]}.$$

Duae radices erunt reales, duaeque imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{1}{16}\left[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)} - C\right] \sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)} + C\right]}$$

at $D < \tfrac{1}{16}\left[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)} + C\right] \sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}CD)} - C\right]}$

Omnes autem radices erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{4}{27}\left[\sqrt{(CC+\tfrac{27}{9}BD)}+C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC+\tfrac{27}{9}BD)}-C\right]}.$$

II. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Duae radices semper sunt reales, reliquae binae quoque erunt reales, si quantitas D contineatur intra hos limites.

$$D > \tfrac{4}{27}\left[\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}+C\right]\sqrt[3]{\left[C-3\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}\right]}$$

$$D < \tfrac{4}{27}\left[C-\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}\right]\sqrt[3]{\left[C+3\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}\right]}$$

nisi autem D contineatur intra hos limites, duae reliquae radices erunt imaginariae.

III. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Duae radices semper erunt imaginariae. Reliquae vero duae erunt reales, si fuerit

$$D < \tfrac{4}{27}\left[\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}+C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}-C\right]}$$

Reliquae vero duae quoque erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{4}{27}\left[\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}+C\right]\sqrt[3]{\left[3\sqrt{(CC-\tfrac{27}{9}BD)}-C\right]}$$

IV. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Huius aequationis duae radices semper erunt reales, duae reliquae vero semper imaginariae.

EXEMPLUM I.

Si proponatur haec aequatio $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$ *quaeratur natura radicum, utrum sint reales an imaginariae.*

Quia hoc exemplum ad casum primum pertinet, est $B = +2$; $C = 3$ & $D = 4$; unde $CC + \frac{32}{9}BD = 9 + \frac{32.8}{9} = \frac{337}{9}$ & $\sqrt{(CC+\frac{32}{9}BD)} = \frac{\sqrt{337}}{3}$ unde conditiones ut omnes radices sint reales, sunt

$$4 < \tfrac{3}{16}\left(3+\tfrac{\sqrt{337}}{3}\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337}-3)} = \tfrac{1}{16}(9+\sqrt{337})\sqrt[3]{(\sqrt{337}-3)}$$

$$4 < \tfrac{3}{16}\left(\tfrac{\sqrt{337}}{3}-3\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337}+3)} = \tfrac{1}{16}(\sqrt{337}-9)\sqrt[3]{(\sqrt{337}+3)}$$

Adhi-

Adhibitis, approximationibus examinari debet ergo, utrum sit $4 < \frac{69}{16}$ & $4 < \frac{24}{16}$; quare cum prior tantum conditio locum habeat, aequatio habebit duas radices reales, & duas imaginarias.

EXEMPLUM II.

Proposita sit haec aequatio: $x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0$.

Quae cum pertineat ad casum secundum, duas habebit radices reales. Ad reliquarum naturam investigandam, ob $B = 9$, $C = 12$ & $D = 4$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(144 - 32.4)} = 4$. Ideoque videndum est, utrum sit

$4 > \frac{3}{16}.16\sqrt[3]{0}$ hoc est $4 > 0$

& $4 < \frac{3}{16}.8\sqrt[3]{24}$ hoc est $4 < 5\sqrt[3]{3}$

quorum utrumque cum eveniat, aequatio proposita quatuor habebit radices reales.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec aequatio: $x^4 + xx - 2x + 6 = 0$.

Quae cum pertineat ad casum tertium, duae radices certo erunt imaginariae. Tum vero est $B = 1$; $C = 2$ & $D = 6$, ideoque $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{\left(4 - \frac{64}{3}\right)}$, quae quantitas cum sit imaginaria, & duae reliquae radices certo erunt imaginariae.

EXEMPLUM IV.

Sit proposita aequatio haec: $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0$.

Eliminetur primo secundus terminus, substituendo $x = y + 1$ fiet

$$\begin{array}{rrrrrrr} x^4 & = & y^4 & + 4y^3 & + 6yy & + 4y & + 1 \\ -4x^3 & = & & -4y^3 & -12yy & -12y & -4 \\ +8x^2 & = & & & +8yy & +16y & +8 \\ -16x & = & & & & -16y & -16 \\ +20 & = & & & & & +20 \end{array}$$

Ergo $y^4 + 2yy - 8y + 9 = 0$

quae cum pertineat ad casum tertium, duas radices habebit imaginarias. Tum vero ob $B = 2$, $C = 8$, $D = 9$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}.BD)} = \sqrt{(64 - 64)} = 0$. Comparetur ergo $D = 9$ cum $\frac{3}{16}.8\sqrt[3]{-8} = -3$. Cum ergo sit $D = 9 > -3$, etiam duae reliquae radices erunt imaginariae.

EXEMPLUM V.

Sit proposita haec aequatio: $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$
cuius radices constant esse $1, 2, 4$ & -3.

Quod si autem regulas applicemus, sublato secundo termino ponendo $x = y + 1$ fiet: $y^4 - 13yy + 12y + 0 = 0$ quae cum casu secundo comparata dat $B = 13$, $C = 12$; $D = 0$.

Debet ergo esse $D > \frac{1}{16}.24.\sqrt[3]{-24}$; seu $0 > -9\sqrt[3]{3}$ & $D < 0$; cum igitur D non sit maius quam 0, aequatio quatuor radices reales habere indicatur. Si enim sit $D = 0$, altera aequatio abit in $D < \frac{1}{16}\left(\frac{16\,BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$ ideoque $1 < \frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$, seu $27\,CC < 4B^3$: est vero $27.144 < 4.13^3$ seu $36.27 < 13^3$.

310. Opus foret maxime difficile, si simile iudicium ad aequationes altiorum graduum transferre vellemus, propterea quod aequationum differentialium radices plerumque exhiberi non possunt; quoties autem has radices assignare licet, ex traditis principiis facile colligitur, quot aequatio proposita habeat radices reales & imaginarias. Hinc omnis aequationis, quae tantum ex tribus terminis constat, radices, utrum

trum sint reales an imaginariae, definiri poterunt. Sit enim proposita haec aequatio generalis:

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0 = z$$

Sumatur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$, qua nihilo aequali posita, erit primo $x^{n-1} = 0$; unde si n fuerit impar numerus, nulla radix maximum minimumve exhibens oritur: sin autem sit n numerus par, una radix in computum ducenda erit $x = 0$. Tum vero erit $(m+n)x^m + nA = 0$; quae aequatio, si m sit numerus par, & A affirmativa quantitas, nullam habet radicem realem. Hinc sequentes casus erunt expendendi.

I. Sit m numerus par & n numerus impar, & radix $x = 0$ non valebit. Si igitur fuerit A quantitas affirmativa, nulla prorsus habebitur radix maximum minimumve exhibens; unde ob $m+n$ numerum imparem aequatio proposita unicam habebit radicem realem. Sin autem fuerit A quantitas negativa; puta $A = -E$, erit $x = \pm\sqrt[n]{\frac{nE}{m+n}}$: unde $\alpha = +\sqrt[n]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = -\sqrt[n]{\frac{nE}{m+n}}$. Ex quibus valoribus fit:

$$\mathfrak{A} = (x^m - E)x^n + B = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} + B \text{ atque}$$

$$\mathfrak{B} = +\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} + B. \text{ Si igitur fuerit } \mathfrak{A} \text{ quantitas negativa, seu } \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} > B, \text{ aequatio unam habebit radicem realem } > \alpha.$$

Si insuper fuerit $B > -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}}$, hoc est ambas conditiones in unam complectendo, si fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$, tum aequatio tres habebit.

bit radices reales: &, nisi haec conditio locum habeat, aequationis unica radix erit realis. Valent haec de aequatione $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, si fuerit m numerus impar: ubi si E fuerit numerus negativus, aequatio semper unicam radicem habebit realem.

II. Sint ambo numeri m & n impares, ut sit $m+n$ numerus par, nullaque radix $x = 0$ in computum veniat. Quia est $(m+n)x^m + nA = 0$, erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$, quae unica radix si sit $= \alpha$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{mA}{m+n}\alpha^n + B = -\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Qui valor si fuerit negativus, aequatio proposita duas habebit radices reales, contra nullam. Aequatio ergo proposita $x^{m+n} + Ax^n + B = 0$ duas habebit radices reales, si fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$; sin fuerit $m^m n^n A^{m+n} < (m+n)^{m+n} B^m$, nulla prorsus radix erit realis.

III. Sint ambo numeri m & n pares, erit $m+n$ pariter numerus par: unaque radix $x = 0$ maximum minimumve praebebit: quae erit unica, si A fuerit quantitas affirmativa, unde facto $\alpha = 0$, erit $\mathfrak{A} = B$. Quare si fuerit B quoque quantitas affirmativa, aequatio nullam habebit radicem realem; sin autem B fit quantitas negativa, duae habebuntur radices reales, neque plures, si quidem A fuerit quantitas affirmativa. At ponamus esse A quantitatem negativam seu $A = -E$, erit $x = \pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; habebimusque tria maxima vel minima: nempe $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; $\beta = 0$; $\gamma = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$. Quibus ipsius $x = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$ respondent valores

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B;$$

$$\mathfrak{B} = B;$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B.$$

Si

Si igitur B sit quantitas negativa, ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negativas, aequatio duas tantum habebit radices reales, propterea quod quoque $\mathfrak{B} = B$ sit negativum. At si B fuerit quantitas affirmativa, aequatio quatuor habebit radices reales, si sit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$. Nullam autem habebit radicem realem, si fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$.

IV. Sit m numerus impar & n numerus par: atque radix $x = 0$ dabit maximum vel minimum. Praeterea vero erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Si ergo A sit numerus affirmativus, fiet $x = 0$ & $6 = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$; hincque $\mathfrak{A} = B$, & $\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Quare si sit B quantitas negativa, puta $B = -F$, atque insuper fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} F^m$, aequatio tres habebit radices reales; contra unica tantum erit realis. Sin autem sit A quantitas negativa puta $A = -E$, fiet $x = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $6 = 0$, quibus respondent $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$ & $\mathfrak{B} = B$. Quare aequatio tres habebit radices reales; si fuerit B quantitas affirmativa, & $m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$, quae proprietas nisi locum inveniat, aequatio unicam habebit radicem realem.

311. Sint omnes coefficientes $= 1$, atque denotantibus μ & ν numeros integros, aequationes sequentes ita diiudicabuntur:

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ unicam habebit radicem realem:

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$, tres habebit radices reales, si fuerit $(2\mu+2\nu-1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu-1)^{2\nu-1}$, quod cum nunquam fieri possit, aequatio semper unicam radicem realem habebit:

$x^{2\mu}+x^{2\nu}\pm x^{2\nu-1}-1=0$ duas habet radices reales.
$x^{2\mu}+x^{2\nu}\pm x^{2\nu-1}+1=0$ nullam habet radicem realem.
$x^{2\mu}+x^{2\nu}\pm x^{2\nu}+1=0$ nullam habet radicem realem.
$x^{2\mu}+x^{2\nu}\pm x^{2\nu}-1=0$ duas habet radices reales.
$x^{2\mu}+x^{2\nu+1}+x^{2\nu}\pm 1=0$ unicam habet radicem realem.
$x^{2\mu}+x^{2\nu+1}-x^{2\nu}\pm 1=0$ unicam habet radicem realem.

Ceterum quia in casu tertio ambo exponentes sunt pares: is ponendo $xx=y$ ad formam simpliciorem reduci potest, ideoque hic casus praetermitti posset. Quo facto affirmari poterit, nullam aequationem tribus terminis constantem plures tribus habere posse radices reales.

EXEMPLUM.

Quaerantur casus, quibus aequatio haec $x^5\pm Ax^3\pm B=0$ *tres habeat radices reales.*

Quia haec aequatio pertinet ad casum quartum, patet quantitates A & B, esse debere signis contrariis affectas. Quare nisi huiusmodi habeat formam, unicam habebit radicem realem: sin autem aequatio proposita fuerit huiusmodi $x^5\pm Ax^3\mp B=0$, quo ea habeat tres radices reales, necesse est ut sit $3^3 2^3 A^5 > 5^5 B^3$ seu $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$. Quod si ergo fuerit $B=1$, oportet esse, $A^5 > \frac{3125}{108}$, seu $A > 1{,}960132$. Si ergo sit $A=2$ ista aequatio $x^5-2x^3+1=0$ tres habet radices reales, quarum cum una sit $x=1$; sequitur hanc aequationem biquadratam $x^4+x^3+x^2-x-1=0$ duas habere radices reales. Quod quidem tum ex his datis praeceptis intelligi potest, tum ex iis, quae in libro superiori sunt demonstrata, manifestum est, ubi ostendimus, quamvis aequationem paris gradus, cuius terminus absolutus sit numerus negativus, habere semper duas radices reales.

312. Ex his principiis quoque aequationes, quae constant quatuor terminis, diiudicari poterunt, dummodo aequationis

tionis differentialis radices commode exhiberi queant, quod evenit, si exponentes ipsius x vel in tribus anterioribus, vel in tribus posterioribus terminis sint in arithmetica progressione. Cum autem haec diiudicatio in genere suscepta ad plures perducatur casus, eam in nonnullis exemplis absolvamus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Facto $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, erit $\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3xx$, quo valore nihilo aequali posito fiet primo $xx = 0$, qui duplex valor pro nullo reputandus. Tum vero erit $7x^4 = 10x^2 - 3$, unde fit $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$; & quatuor valores pro x emergent, qui secundum magnitudinem ordinati sequentes pro x praebebunt valores:

$\alpha = 1$	$\mathfrak{A} = -a$
$\beta = +\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{1}{7}} - a$
$\gamma = -\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{1}{7}} - a$
$\delta = -1$	$\mathfrak{D} = -a$.

Si ergo sit a numerus affirmativus, erit vel $a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{1}{7}}$, vel $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{1}{7}}$, priori casu ob $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, omnes negativas, aequatio proposita unicam habebit radicem realem $x > 1$. Posteriori casu si $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{1}{7}}$ aequatio tres habebit radices reales, primam > 1, secundam contentam inter limites 1 & $\sqrt{\frac{1}{7}}$, & tertiam intra limites $+\sqrt{\frac{1}{7}}$ & $-\sqrt{\frac{1}{7}}$.

Sin a sit quantitas negativa ponendo $x = -y$, aequatio perducetur ad formam priorem. Quo ergo aequatio pro-

posita tres habeat radices reales, necesse est ut sit $a < 0,0916134$ vel $a < \frac{1}{11}$.

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec aequatio: $ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0$. Quia hic exponentes trium posteriorum terminorum sunt in arithmetica progressione, ponatur $x = \frac{1}{y}$ atque aequatio transmutabitur in hanc:

$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0$, ponatur ergo
$z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$, eritque differentiando
$\frac{dz}{dy} = 96y^7 - 30y^4 + 6y = 0$, ex qua aequatione primo fit $y = 0$; tum vero erit $y^6 = \frac{30y^3 - 6}{96}$ & $y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$, ideoque vel $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ vel $y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$. His ergo tribus radicibus secundum magnitudinem dispositis, respondentes ipsius z valores ita se habebunt:

$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$
$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a$.

Quodsi ergo fuerit $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, aequatio proposita duas habebit radices reales, alteram $> \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, alteram < 0: at praeter has insuper habebit duas radices reales, si simul fuerit $\mathfrak{B}$ quantitas affirmativa, hoc est, si fuerit $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Quamobrem

obrem aequatio propoſita quatuor habebit radices reales, ſi quantitas a contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ & $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; qui limites proxime ſunt: 0,48075 & 0,50674. Poſito ergo $a=\frac{1}{2}$, haec aequatio $x^8-6x^6+20x^3-24=0$ quatuor habet radices reales intra limites ∞; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$; 0; $-\infty$; ergo tres erunt affirmativae & una negativa.



CAPUT XIII.

DE CRITERIIS RADICUM IMAGINARIARUM.

313.

In Capite praecedenti modum exhibuimus naturam radicum cuiusque aequationis explorandi, ita ut eius beneficio, si proponatur aequatio quaecunque, inveniri possit, quot ea radices habeat reales, & quot imaginarias. Plerumque quidem haec investigatio difficillime instituitur, cum aequatio differentialis ita est comparata, ut eius radices exhiberi nequeant. Quanquam autem his casibus eadem operatio ad aequationem differentialem ipsam accommodari, eiusque radicum natura ex ipsius differentiali indagari, hincque illius radices proxime assignari possent; tamen labor nimium saepissime fieret molestus. Quamobrem in hoc negotio saepenumero sufficit eiusmodi criteria nosse, ex quorum praesentia tuto concludi possit, inesse in aequatione proposita radices imaginarias; etiamsi ex eorum absentia vicissim inferri nequeat, omnes prorsus radices esse reales. Quae cognitio etsi est imperfecta, tamen frequenter usu non destituitur; quocirca his criteriis explicandis praesens caput destinavimus.

314. In capite igitur praecedenti vidimus, si aequatio quaecunque:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum etiam eius differentialem

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

omnes suas radices habituram esse reales. Simul vero ostendimus, etiamsi aequatio differentialis omnes habeat radices reales; tamen inde non sequi, ipsius aequationis propositae omnes

radi-

radices futuras esse reales. Interim tamen, si aequatio differentialis habeat radices imaginarias, tum semper recte concludimus, aequationem ipsam propositam ad minimum totidem habere debere radices imaginarias. Ad minimum dico: fieri enim potest, ut ipsa aequatio plures habeat radices imaginarias. Hoc ergo modo ex aequatione differentiali plus concludi non potest, quam, si ea habeat radices imaginarias, ipsam propositam aequationem eiusmodi radices quoque habere debere, & quidem ad minimum totidem.

315. Si aequatio proposita multiplicetur per potestatem quamcumque x^m, denotante m numerum integrum affirmativum; tum quia haec nova aequatio omnes radices habebit reales, si quidem propositae radices omnes fuerint reales: tum quoque eius differentialis, postquam per x^{m-1} fuerit divisa, radices erunt reales omnes. Hinc si haec aequatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque ista aequatio

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

omnes radices habebit reales. Ob eandem rationem, si haec multiplicetur per x^k & denuo differentietur aequatio resultans

$$(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

omnes adhuc radices habebit reales: sicque quousque libuerit, ulterius progredi licet. Sin autem huiusmodi aequatio radices imaginarias habere deprehendatur, tum simul certum erit, ipsam aequationem propositam saltem totidem radices imaginarias esse habituram.

316. Si aequatio proposita antequam differentietur, per nullam potestatem ipsius x multiplicetur, tum iudicium ad aequationem uno gradu inferiorem deducitur. Ita si aequatio proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque eius differentiales omnium ordinum omnes radices habebunt reales. Quare & sequentium aequationum omnium radices erunt reales:

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\&c.=0$$
$$n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}-\&c.=0$$
$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+\&c.=0$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5}+\&c.=0 \quad \&c.$$

quae aequationes ad sequentes formas revocantur:

$$x^{n-1}-\frac{n-1}{n}Ax^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}Bx^{n-3}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-4}+\&c.=0$$
$$x^{n-2}-\frac{n-2}{n}Ax^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}Bx^{n-4}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-5}+\&c.=0$$
$$x^{n-3}-\frac{n-3}{n}Ax^{n-4}+\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}Bx^{n-5}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-6}+\&c.=0$$
$$x^{n-4}-\frac{n-4}{n}Ax^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}Bx^{n-6}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-7}+\&c.=0$$

&c.

317. Hoc igitur modo iudicium ad aequationem dati gradus inferioris, quam est ipsa proposita, reduci potest. Sic si m fuerit numerus quicunque minor quam n, tum si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque huius aequationis gradus m omnes radices erunt reales:

$$x^m-\frac{m}{n}Ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{n(n-1)}Bx^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{m-3}+\&c.=0.$$

Quare si ponatur $m=2$, prodibit ista aequatio:

$$x^2-\frac{2}{n}Ax+\frac{2.1}{n(n-1)}B=0,$$

cuius radices debebunt esse reales, si quidem aequatio proposita $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\&c.=0$, omnes habeat radices reales. Cum autem ista aequatio quadratica radices reales habere nequeat, nisi fit $\frac{AA}{nn}>\frac{2.1}{n(n-1)}B$, sequitur, aequationis propositae radices omnes reales esse non posse, nisi fit $AA>\frac{2n}{n-1}B$. Quamobrem si fuerit $AA<\frac{2n}{n-1}B$, hoc

certum erit signum, aequationis propositae ad minimum duas radices fore imaginarias.

318. Hinc ergo assecuti sumus affectionem necessariam, qua coefficientes trium primorum terminorum affecti esse debent, si quidem aequationis propositae omnes radices fuerint reales. Hocque est eiusmodi criterium, uti initio meminimus: scilicet etiamsi casu $AA > \frac{2n}{n-1} B$, nihil pro realitate radicum sequatur, at si sit $AA < \frac{2n}{n-1} B$, hoc tamen certum sit signum duarum saltem radicum imaginariarum. Sic ut omnes radices sint reales, successive pro n numero 2, 3, 4, 5, &c. substituendo requiritur, ut sequitur:

$x^2 - Ax + B = 0 \ldots\ldots\ldots A^2 > 4B$
$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \ldots\ldots A^2 > \frac{6}{2} B$
$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \ldots A^2 > \frac{8}{3} B$
$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0 \ldots A^2 > \frac{10}{4} B$

Hinc si terminus secundus desit, tertiique coefficiens B sit affirmativus, ut aequatio sit huiusmodi:

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0,$$

haec omnes radices reales habere nequit, sed ad minimum duae erunt imaginariae.

319. Huiusmodi vero criteria pro coefficientibus sequentium terminorum erui possunt, si perpendamus aequationem hanc:

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$$

totidem habere radices tam reales quam imaginarias, quot ipsa aequatio proposita contineat. Haec enim aequatio ex illa oritur, si ponatur $x = \frac{1}{y}$, ita ut ex radicibus huius aequationis simul radices illius habeantur. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque reciproce istius differentialis, scilicet huius

— A

$$-A+2By-3Cy^2+4Dy^3-\&c.=0$$

radices omnes erunt reales. Substitutatur in hac iterum x pro $\frac{1}{y}$, atque emerget ista aequatio:

$$Ax^{n-1}-2Bx^{n-2}+3Cx^{n-3}-4Dx^{n-4}+\&c.=0,$$

cuius radices propterea omnes erunt reales, si radices aequationis propositae fuerint tales. Hinc iam patet, si fuerit $n=3$, necesse esse ut sit $BB>3AC$.

320. Differentietur autem ista aequatio ulterius atque prodibunt

$$Ax^{n-2}-\frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3}+\frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4}-\&c.=0$$

$$Ax^{n-3}-\frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4}+\frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5}-\&c.=0$$

$$Ax^{n-4}-\frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5}+\frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6}-\&c.=0$$

$$\&c.$$

Generaliter ergo, si m sit numerus minor quam n, erit:

$$Ax^m-\frac{2m}{n-1}Bx^{m-1}+\frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2}-\&c.=0.$$

Si iam ponatur $m=2$, habebitur ista aequatio:

$$Ax^2-\frac{4}{n-1}Bx+\frac{6}{(n-1)(n-2)}C=0,$$

cuius radices ut sint reales, oportet esse $\frac{4BB}{(n-1)^2}>\frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$. Quare si aequatio proposita omnes habeat radices reales erit $BB>\frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$. Atque si fuerit $BB<\frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, hoc certum est signum, aequationem propositam ad minimum duas habere radices imaginarias. Si igitur sit $n=3$, criterium erit $BB>3AC$; si sit $n=4$; erit $BB>\frac{3\cdot3}{2\cdot2}AC$; si

$n=5$,

$n = 5$, erit $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} AC$, & ita porro.

321. Ut haec criteria ad sequentes coefficientes transferamus, resumamus aequationem differentialem in y inventam $-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \&c. = 0$ hancque denuo differentiemus, ut habeamus:

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \&c. = 0$$

quae restituto $\frac{1}{x}$ loco y dabit:

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

ex cuius ulteriori differentiatione sequuntur hae aequationes:

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2} Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)} Dx^{n-5} - \&c. = 0$$

& generaliter

$$Bx^m - \frac{3m}{n-2} Cx^{m+1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)} Dx^{m+2} - \&c. = 0$$

Quodsi igitur ponamus $m = 2$ prodibit aequatio quadrata:

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2} Cx + \frac{6 \cdot 2}{(n-2)(n-3)} D = 0$$

cuius radices erunt reales, si fuerit $\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6 \cdot 2BD}{(n-2)(n-3)}$ seu $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, erit $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, atque si haec conditio deficiat, aequatio certo duas ad minimum habebit radices imaginarias.

322. Si aequationem superiorem $2B - 6Cy + 12Dy^2 - \&c. = 0$ denuo differentiemus, prodibit:

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \&c. = 0, \text{ sive}$$
$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \&c. = 0,$$

quae restituto x loco $\frac{1}{y}$ abibit in hanc:

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

ex cuius ulteriori differentiatione sequuntur:

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{n-3}Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \&c. = 0$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)}{n-3}Dx^{n-6} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-7} - \&c.$$

& generaliter

$$Cx^m - \frac{4m}{n-3}Dx^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{m-2} - \&c. = 0.$$

Ponamus $m = 2$, eritque $Cx^2 - \frac{2.4}{n-3}Dx + \frac{2.10}{(n-3)(n-4)}E = 0$

ex qua si eius radices sint reales sequitur fore:

$$\frac{4.4}{(n-3)^2}DD > \frac{2.10}{(n-3)(n-4)}CE \text{ seu } DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE.$$

323. Ex his iam satis perspicitur relatio omnium coefficientium. Generatim ergo si aequatio haec:

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$

omnes radices habeat reales; erit

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DF$$

&c.

Qua-

Quarum conditionum si una desit, aequatio ad minimum duas habebit radices imaginarias. Atque si ista criteria a se invicem non pendeant, facile perspicitur, quotquot eorum non conveniant, totidem dari paria radicum imaginariarum. Quamvis autem hae conditiones omnes in quapiam aequatione locum habeant, tamen inde non sequitur, nullas dari radices imaginarias; quin potius evenire potest, ut hoc non obstante omnes radices sint imaginariae. Cavendum ergo est, ne his criteriis plus tribuatur, quam ipsis vi principiorum, unde sunt deducta, tribui potest.

324. Facile autem apparet non singula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare posse; in aequatione enim n dimensionum, quia habentur $n+1$ termini, atque ex singulis praeter primum & ultimum criterium desumi potest, omnino criteria habebuntur $n-1$; neque tamen si singula deficiant, aequatio $2n-2$ radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices. Unum autem criterium semper duas radices imaginarias patefacit, & quia fieri potest, ut duo criteria huiusmodi radicum non plures ostendant, videndum est utrum haec duo criteria sint contigua nec ne: priori casu numerus radicum imaginariarum non augebitur, posteriori vero, quia criteria litteras prorsus diversas involvunt, unumquodque binas radices imaginarias monstrabit. Ita etiamsi fuerit

$AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AB$, tamen hinc non necessario quatuor radices imaginariae indicantur, sed utrumque fortasse eaedem binas indicat. Quodsi vero fuerit

$AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, existente

$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, quatuor radices imaginariae indicabuntur.

325. Ex criteriis ergo radicum imaginariarum se immediate

insequentibus plus non sequitur quam ex uno; sin autem ea ordine interrupto procedant, ut inter bina quaeque criterium unum vel plura contraria interiaceant, tum ex unoquoque binae radices imaginariae concludi poterunt. Quae consideratio sequentem regulam suppeditat. Aequationis propositae singulis terminis, praeter primum & ultimum, inscribantur coefficientes criteriorum ante inventi, hoc modo:

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2n}{1(n-1)} & \frac{3(n-1)}{2(n-2)} & \frac{4(n-2)}{3(n-3)} & \frac{5(n-3)}{4(n-4)} & \&c. \\ x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0 \\ + \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad \&c. \end{array}$$

Tum examinetur quadratum cuiusque coefficientis, utrum sit maius an minus, quam fractio inscripta per productum adiacentium coefficientium multiplicata, priori casu termino subscribatur signum +, posteriori signum —; primo vero termino & ultimo perpetuo signum + subscribatur. Quo facto, quot signorum horum subscriptorum variationes occurrunt, totidem radices imaginarias aequatio ad minimum habere censenda erit.

326. Haec est regula a *Neutono* inventa ad radices imaginarias cuiusque aequationis explorandas; de qua autem probe tenendum est, quod iam annotavimus, saepenumero fieri posse, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam hac methodo deteguntur. Hinc alii operam dederunt, ut similes regulas alias invenirent, quae numerum radicum imaginariarum exactius praeberent, ita ut verus istiusmodi radicum numerus minus saepe eum, quem regula ostendat, excederet. In hoc genere imprimis praestat regula *Campbelli* Arithmeticae *Neutoni* universali subiuncta, quam propterea hic explicari conveniet, etiamsi non sit perfecta. Nititur autem hoc lemmate: Si fuerint $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. quantitates; earumque numerus sit m, ponatur summa harum quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c. = S$, summa quadratorum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \&c. = V$, erit utique $V > \frac{S^2}{m}$.

Sed

Sed cum sit productum ex binis $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ &c. $= \frac{SS - V}{2}$; erit $(m-1)\,V > SS - V$ seu $mV > SS$.

Nam si differentiarum inter binas quantitates quadrata sumantur, erit eorum summa
$= (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 +$ &c.
$= (m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ &c.$) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma +$ &c.$)$
$= (m-1)\,V - 2\,\frac{SS - V}{2} = mV - SS$. Cum igitur summa quadratorum realium sit semper affirmativa, erit $mV - SS > 0$ ideoque $mV > SS$.

327. Hoc lemmate praemisso si habeatur haec aequatio: $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} -$ &c. $= 0$, eiusque omnes radices fuerint reales numero n, quae sint α, β, γ, δ, ε, &c. erit uti constat ex natura

aequationum:	numerus termin.
$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c.	n
$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ &c.	$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$
$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta +$ &c.	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$
$D = \alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta\varepsilon +$ &c.	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
&c.	

Sumantur iam singulorum harum serierum terminorum quadrata, ac ponatur:
$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ &c.
$Q = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 +$ &c.
$R = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2\delta^2 + \alpha^2\beta^2\varepsilon^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 +$ &c.
$S = \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2\varepsilon^2 + \alpha^2\beta^2\delta^2\varepsilon^2 +$ &c. &c.
erit ex natura combinationum:

$P = A^2 - 2B$
$Q = B^2 - 2AC + 2D$ $R =$

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H \quad \&c.$$

328. Vi igitur lemmatis praemissi habebimus:

$$n\,P > AA$$
$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}\,Q > BB$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\,R > CC$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\,S > DD \quad \&c.$$

Quodsi ergo loco P, Q, R, &c. valores ante inventi substituantur, obtinebimus sequentes radicum realium proprietates:

$$nAA - 2nB > AA \text{ seu } AA > \frac{2n}{n-1}B$$

$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}BB - \frac{2n(n-1)}{1.\,2}AC + \frac{2n(n-1)}{1.\,2}D > BB, \text{ sive}$$

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1.\,2}}{\frac{n(n-1)}{1.\,2.} - 1}(AC - D)$$

similique modo aequationes sequentes praebent:

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} - 1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4} - 1}(CE - BF + AG - H)$$

Hinc ergo cuiusque coefficientis quadratum non solum cum pro-

producto proxime adiacentium comparatur, sed etiam cum rectangulis binorum quorumque utrinque aeque distantium; ita tamen ut horum rectangulorum signa alternatim mutentur.

329. Singulis igitur aequationis terminis praeter primum & ultimum inscribi debent fractiones, quarum numeratores sint unciae binomii ad similem dignitatem elevati duplicatae, denominatores vero eaedem unciae unitate minutae. Ita considerando aequationes quadratas, cubicas, biquadratas &c. si earum radices omnes fuerint reales, erit:

$$x^2 - \tfrac{4}{1}Ax + B = 0 \quad ; \quad A^2 > 4B$$

Pro aequatione cubica:

$$x^3 - \tfrac{6}{2}Ax^2 + \tfrac{6}{2}Bx - C = 0$$

erit $A^2 > 3B$ & $B^2 > 3AC$.

Pro aequatione biquadrata:

$$x^4 - \tfrac{8}{3}Ax^3 + \tfrac{12}{5}Bx^2 - \tfrac{8}{3}Cx + D = 0$$

erit $A^2 > \frac{3}{2}B$; $B^2 > \frac{12}{5}(AC - D)$; $C^2 > \frac{3}{4}BD$

Pro aequatione potestatis quintae:

$$x^5 - \tfrac{10}{4}Ax^4 + \tfrac{20}{9}Bx^3 - \tfrac{20}{9}Cx^2 + \tfrac{10}{4}Dx - E = 0$$

erit $AA > \frac{10}{4}B$; $B^2 > \frac{10}{3}(AC - D)$; $C^2 > \frac{10}{3}(BD - AE)$ & $D^2 > \frac{10}{3}CE$.

Pro aequatione potestatis sextae:

$$x^6 - \tfrac{12}{5}Ax^5 + \tfrac{30}{14}Bx^4 - \tfrac{40}{19}Cx^3 + \tfrac{30}{14}Dx^2 - \tfrac{12}{5}Ex + F = 0$$

erit $A^2 > \frac{12}{5}B$; $B^2 > \frac{30}{14}(AC - D)$; $C^2 > \frac{40}{18}(BD - AE + F)$; $D^2 > \frac{30}{14}(CE - BF)$; $E^2 > \frac{12}{5}DF$; &c.

330. Si igitur quodpiam criterium fallat, id erit indicium duas ad minimum inesse radices imaginarias in aequatione proposita. Cum autem si singula fallant, aequatio ideo

non

non duplo plures habere queat radices imaginarias, simili modo iudicium his casibus erit absolvendum, quem ante pro Neutoniana regula indicavimus. Scilicet si cuiusque termini quadratum maius fuerit quam fractio inscripta per producta terminorum adiacentium & utrinque aequidistantium multiplicata, tum isti termino subscribatur signum +, contra vero signum —; primo vero & ultimo termino constanter subscribatur signum +. Quo facto inspiciatur ordo signorum horum subscriptorum, & quoties occurrit variatio, toties radix imaginaria indicabitur. Quoties ergo haec regula plures radices imaginarias iudicat, quam Neutoniana, toties quoque ad veritatem magis accedit. Interim tamen fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam per utramque regulam indicantur.

331. Falleremur ergo, si his criteriis tanquam perfectis signis radicum realium & imaginariarum uti vellemus, propterea quod fieri potest, ut aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant: error autem eo maior esse posset, quo altioris gradus fuerit aequatio proposita. Nam in aequatione quadrata haec criteria ita veritati sunt consentanea, ut si nullas radices imaginarias indicent, etiam aequatio nullas sit habitura. Aequatio autem cubica duas radices imaginarias habere potest, etiamsi neutro regula, (ambae autem hoc casu adhuc conveniant) eas exhibeat. Hos igitur casus investigaturi, sit proposita haec aequatio cubica generalis:

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

in qua si fuerit $AA > 3B$ & $BB > 3AC$ neutra regula radices imaginarias indicat. Supra autem (306) vidimus ad id, ut nullae radices imaginariae adsint requiri primo ut sit $B > \frac{1}{3}AA$, quam conditionem quoque ambae regulae requirunt. Sit igitur $B = \frac{1}{3}AA - ff$, atque necesse est ut C contineatur intra hos limites: $\frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff - \frac{2}{3}f^3$ & $\frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff + \frac{2}{3}f^3$. Utraque autem regula tantum postulat,

ut

ut sit $C < \frac{BB}{3A}$, hoc est $C < \frac{1}{12}A^3 - \frac{1}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$. Quae conditio locum habere potest, etiamsi C non intra dictos limites contineatur.

332. Sit enim $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$: atque regulae nullas radices imaginarias indicabunt. Interim tamen inerunt duae radices imaginariae, si fuerit vel

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{1}{27}f^3 \text{ vel}$$

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{1}{27}f^3$$

Si igitur fuerit vel $gg > \frac{(ff+Af)^2}{27A}$ vel $gg < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$, aequatio cubica duas habebit radices imaginarias, etiamsi neutra regula eas indicet. Sumimus autem hic esse A quantitatem affirmativam, si enim esset negativa, ponendo $x = -y$ aequatio in eiusmodi formam transmutaretur, in qua A esset affirmativa. Hinc infinitae aequationes cubicae formari possunt, quae habeant duas radices imaginarias, etiamsi per regulam non indicentur. Sit enim $gg = \frac{(ff+Af)^2}{27A} + bb$, erit

$$C = \frac{(AA-ff)^2}{27A} - gg = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{1}{27}f^3 - bb, \text{ \& } B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff.$$

Vel sit $gg = \frac{(Af-ff)^2}{27A} - bb$ existente $bb < \frac{(Af-ff)^2}{27A}$; erit $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{27}f^3 + bb$ & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Utroque casu prodibit aequatio duas habens radices imaginarias, neutra regula indicandas. Ponamus verbi gratia $A = 4, f = 1$, erit $B = 5$; & ob $gg = \frac{25}{108} + bb$; erit $C = \frac{125}{108} - \frac{21}{108} - bb = \frac{10}{27} - bb$. Quare si sit $C < \frac{10}{27}$; aequatio $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ semper habebit duas radices imaginarias. At sumto $gg = \frac{1}{27} - bb$

debebit esse $bb < \frac{1}{4}$, fietque $C = \frac{31}{16} - \frac{1}{16} + bb = 2 + bb$. Sit $bb = \frac{1}{16}$; atque aequatio $x^3 - 4xx + 5x - \frac{31}{16} = 0$ duas habebit radices imaginarias, etiamsi nulla regulis prodatur:

333. Quin etiam eiusmodi aequationes generales formari possunt, in quibus neutra regula radices imaginarias exhibeat, etiamsi tamen saepissime duae pluresve insint. Evenit hoc si perpetuo duo signa similia se mutuo excipiant, uti: $x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$ vel $x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \&c. = 0$, hic utraque regula nullam unquam radicem imaginariam prodit. Quod autem saepissime huiusmodi radices continere queant, vel ex aequatione cubica elucet $x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$, quae posito $ff = AA + 3B$ semper habeat duas radices imaginarias, si fuerit vel $-C < \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff - \frac{2}{27}f^3$ vel $-C > \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Interim tamen & hos casus ex regulis elicere licet, si aequatio ope substitutionis in aliam formam transformetur. Ponatur $x = y + k$, fietque:

$$\begin{array}{l} y^3 + 3ky^2 + 3kky + k^3 \\ \quad - Ayy - 2Aky - Akk \\ \qquad - By - Bk \\ \qquad\quad + C \end{array} = 0$$

quae iecundum regulas examinata dabit primo quidem sponte $(3k - A)^2 > 3(3kk - 2Ak - B)$; at quo sit $(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^2 - Akk - Bk + C)$, quod est alterum criterium, necesse est ut sit:

$$BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0,$$

quicunque valor ipsi k tribuatur. Sumatur ergo k ita, ut haec expressio minimum valorem adipiscatur, quod fiet ponendo $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$ & si ista expressio adhuc fuerit > 0, probabile erit aequationem propositam nullas habere radices imaginarias. Fiet autem $BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0$

seu

seu $BB + 3AC > \frac{(AB-9C)^2}{4(AA+3B)}$. Cum ergo sit $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$, erit $4ff(\frac{1}{3}f^4 - \frac{1}{3}AAff + \frac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\frac{1}{3}Aff - \frac{1}{3}A^3 - 9C)^2$ seu $4f^6 - 8A^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff > A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$ vel $4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$

unde factoribus sumtis esse debebit:

$(2f^3 + A^3 - 3Aff + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Aff - 27C) > 0$.

Hincque regulae radices imaginarias ostendent, si fuerit vel $C > -\frac{1}{10}A^3 + \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{10}f^3$ & $C > -\frac{1}{10}A^3 + \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{10}f^3$ vel $C < -\frac{1}{10}A^3 + \frac{1}{9}Aff - \frac{1}{10}f^3$ & $C < -\frac{1}{10}A^3 + \frac{1}{9}Aff + \frac{1}{10}f^3$. Quae sunt eaedem conditiones, quas supra invenimus. Patet ergo idonea aequationis propositae transmutatione regulas hoc capite traditas ita perfici posse, ut a veritate non dissideant, etiamsi convertantur.

334. Ex his principiis quoque regula *Harriotti*, qua quaelibet aequatio tot radices affirmativas habere praedicatur, quot dentur signorum variationes, tot vero negativas, quot dentur eiusdem signi successiones, demonstrari potest, quae quidem regula pro radicibus tantum realibus valet. Ponamus ergo aequationem $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$ omnes radices habere reales atque affirmativas, atque eius differentialis $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c. = 0$ non solum omnes suas radices quoque habebit reales & affirmativas, sed etiam huius radices constituent limites radicum illius aequationis. Praeterea vero posito $x = \frac{1}{y}$ haec aequatio $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$ omnes quoque radices habebit reales affirmativas, sed reciprocas illius, ita ut quae radices in illa aequatione sint maximae, hae in ista fiant minimae. His positis si illa aequatio proposita continuo differentietur, donec ad aequationem primi ordinis perveniatur, quae erit $x - \frac{1}{n}A = 0$, (317) huius radix adhuc

erit affirmativa, ideoque coefficiens secundi termini habebit signum — uti assumsimus. Sin autem iste coefficiens haberet signum +, tum certo sequeretur, aequationem propositam non omnes radices habere affirmativas, sed unam ad minimum fore negativam, & quidem eam, quae limitibus hucusque perductis respondeat.

335. Si aequatio proposita in sui reciprocam convertatur & differentietur, tum vero iterum x restituatur atque differentiationes continuentur, donec perveniatur ad aequationem simplicem, quae ex §. 320. erit huiusmodi $Ax - \frac{2}{n-1} B = 0$, cuius propterea radix quoque debet esse affirmativa, si quidem proposita omnes suas radices habeat reales affirmativas, hincque secundus & tertius terminus diversa signa habebunt. Quodsi ergo hi duo termini similia habeant signa, ad minimum una radix negativa indicabitur, respondens limiti hac aequatione signato, qui diversus erit a limite praecedente aequatione indicato, propterea quod hic radices semel sunt in suas reciprocas conversae: unde concluditur, si tres termini aequationis initiales paria habuerint signa, tum duas radices negativas indicari.

336. Simili modo si conversiones & differentiationes secundum §. 321. instituantur, atque eousque continuentur, donec ad aequationem simplicem $Bx - \frac{3}{n-2} C = 0$ perveniatur, & huius aequationis radix esse debet affirmativa, si quidem propositae aequationis omnes radices fuerint tales; unde si termini tertius & quartus paria habeant signa, indicabitur una radix negativa. Sicque perpetuo, si duo quicunque termini contigui aequalibus signis fuerint affecti, una radix negativa proditur; ideoque quotcunque fuerint eiusdem signi successiones, totidem ad minimum aequatio proposita habebit radices negativas, quoniam haec singula criteria ad diversos limites referuntur. Quod si autem aequatio proposita omnes radi-

ces

ces negativas habere ponatur, tum quia radices omnium aequationum differentialium ex ea deductarum debent esse pariter negativae, omnes termini aequalibus signis affecti esse debebunt. Quare si duo termini contigui diversa habeant signa, ex iis una ad minimum radix affirmativa concludetur. Atque simili modo, quotcunque in aequatione occurrant binorum terminorum variationes signorum, totidem ad minimum radices affirmativae inesse dicendae sunt. Cum igitur aequatio omnis tot habeat radices, quot dantur duorum signorum contiguorum combinationes, neque plures, sequitur quamvis aequationem, cuius omnes radices sint reales, tot habere radices affirmativas, quot fuerint signorum contiguorum variationes, tot vero negativas, quot fuerint eiusdem signi successiones.



CA-

CAPUT XIV.

DE DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM IN CERTIS TANTUM CASIBUS.

337.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x, atque haec quantitas variabilis x augeatur incremento ω, ut x abeat in $x+\omega$, tum functio y induet hunc valorem:

$$y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

ideoque capiet hoc incrementum:

$$\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

uti supra demonstravimus. Quare si fiat $\omega = dx$, ita ut x suo differentiali dx crescat, tum functio y incrementum accipet $= dy+\frac{1}{2}ddy+\frac{1}{6}d^3y+\frac{1}{24}d^4y+\&c.$ quod erit verum differentiale ipsius y. Quoniam vero huius seriei quilibet terminus ad sequentes habet rationem infinitam, prae primo omnes evanescunt, ita ut dy more consueto sumtum praebeat verum differentiale ipsius y. Simili modo vera differentialia secunda, tertia, quarta, &c. ipsius y ita se habebunt:

$$dd.y = ddy+\frac{3}{3}d^3y+\frac{7}{3\cdot4}d^4y+\frac{15}{3\cdot4\cdot5}d^5y+\frac{31}{3\cdot4\cdot5\cdot6}d^6y+\&c.$$

$$d^3.y = d^3y+\frac{6}{4}d^4y+\frac{25}{4\cdot5}d^5y+\frac{90}{4\cdot5\cdot6}d^6y+\frac{301}{4\cdot5\cdot6\cdot7}d^7y+\&c.$$

$$d^4.y = d^4y+\frac{10}{5}d^5y+\frac{65}{5\cdot6}d^6y+\frac{350}{5\cdot6\cdot7}d^7y+\&c.$$

$$d^5.y = d^5y+\frac{15}{6}d^6y+\frac{140}{6\cdot7}d^7y+\&c.$$

$$d^6.y = d^6y+\frac{21}{7}d^7y+\&c.$$

quae

quae sequuntur ex §. 56. si loco ω ponatur dx. Erunt ergo haec differentialia ipsius y completa, quippe in quibus ne ii quidem termini, qui respectu primi evanescunt, negliguntur. Inveniuntur autem singuli isti termini, si functio y continuo differentietur, ponendo dx constans. Sic posito $y = ax - xx$ ob $dy = adx - 2xdx$ & $ddy = -2dx^2$; erunt ipsius y differentialia completa: $dy = adx - 2xdx - dx^2$; $ddy = -2dx^2$; sequentia autem sunt nulla

338. Quanquam autem generatim in his expressionibus differentialium sequentes termini prae primis pro nihilo reputantur; tamen in casibus specialibus, quibus ipse terminus primus evanescit, haec ratio cessat, neque terminus secundus amplius negligi poterit. Sic in exemplo praecedente etiamsi formulae $y = ax - xx$ differentiale in genere est $= (a - 2x)dx$ reiecto termino $-dx^2$, quippe qui est infinities minor quam primus $(a - 2x)dx$: hic tamen ista conditio manifesto subintelligitur, nisi primus terminus per se evanescat. Quocirca si ipsius $y = ax - xx$ quaeratur differentiale, casu quo $x = \frac{1}{2}a$, tum id dicendum erit esse $= -dx^2$; scilicet si variabilis x differentiali dx crescat, tum functionis y casu $x = \frac{1}{2}a$ decrementum erit dx^2. Hoc autem solo casu excepto perpetuo functionis y differentiale erit $= (a - 2x)dx$; nisi enim fit $x = \frac{1}{2}a$, terminus secundus $-dx^2$ prae primo semper recte negligitur. Neque vero neglectio termini dx^2 etiam in casu $x = \frac{1}{2}a$ in errorem inducere potest: comparari enim differentialia prima inter se solent; unde quia $dy = -dx^2$ casu $x = \frac{1}{2}a$, prae differentialibus primis dx evanescit, perinde est sive hoc casu habeamus $dy = 0$ sive $dy = -dx^2$.

339. Denotante y functionem quamcunque ipsius x, sit differentialibus continuis sumtis:

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.

Hinc ergo differentialia completa, in quibus nihil negligatur, ipsius y erunt:

$d.y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{3}rdx^3 + \frac{1}{4}sdx^4 + \&c.$
$d^2.y = qdx^2 + rdx^3 + \frac{1}{2}sdx^4 + \frac{1}{5}tdx^5 + \&c.$
$d^3.y = rdx^3 + \frac{1}{2}sdx^4 + \frac{1}{4}tdx^5 + \&c.$
$d^4.y = sdx^4 + 2tdx^5 + \&c.$
$d^5.y = tdx^5 + \&c.$

Nisi ergo primi termini harum expressionum evanescant, ii soli differentialia ipsius y exhibebunt; sin autem quopiam casu primus terminus fiat $= 0$, tum sequens differentiale quaesitum exprimet. Atque si etiam secundus terminus evanescat, tum tertius terminus valorem differentialis quaesiti praebebit, sin autem & hic evanescat, quartus & ita deinceps. Unde intelligitur nullius functionis ipsius x differentiale primum unquam penitus evanescere; etiamsi enim fiat $p = 0$, quo casu vulgo dy evanescere censetur, tum hoc differentiale per altiorem ipsius dx potestatem exprimetur. Uti vel per $\frac{1}{2}qdx^2$, vel si etiam sit $q = 0$, per $\frac{1}{3}rdx^3$; & ita porro.

340. Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saepenumero eius veram expressionem nosse iuvat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat maximum vel minimum. Si enim fuerit:

$$d.y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{3}rdx^3 + \&c.$$

quo y nanciscatur maximum minimumve valorem, necesse est ut sit $p = 0$; erit ergo hoc casu $dy = \frac{1}{2}qdx^2$, & functio y, si loco x ponatur $x \pm dx$, abit in $y + \frac{1}{2}qdx^2$, eritque propterea minima, si q habeat valorem affirmativum, at maxima si q habeat valorem negativum. At si simul fiat $q = 0$, erit $dy = \frac{1}{3}rdx^3$, & functio y ponendo $x \pm dx$ loco x abibit in $y \pm \frac{1}{3}rdx^3$, neque hoc casu maximum neque minimum prodit; sin autem fiat & $r = 0$, tum posito $x \pm dx$ loco x functio y evadet $= y + \frac{1}{4}sdx^4$, quae maximum exhibet, si s fuerit quantitas negativa, minimum vero, si s sit quantitas affirmativa. Aliae occasiones, quibus differentia-

lium

lium completa expressio usum habet, infra occurrent.

341. Ponamus p evanescere casu $x = a$, quod evenit si fuerit $p = (x-a)P$. Talis autem valor prodit, si fuerit $y = (x-a)^2 P + C$, denotante C quantitatem constantem quamcunque. Cum enim sit $pdx = (x-a)^2 dP + 2(x-a)Pdx$, erit utique $p = 0$, posito $x = a$. Tum ergo ob $dpdx = qdx^2 = (x-a)^2 ddP + 4(x-a)dPdx + 2Pdx^2$, posito $x = a$, fiet $qdx^2 = 2Pdx^2$, atque differentiale completum hoc casu $x = a$, erit $d.y = Pdx^2$, nisi forte & P evanescat posito $x = a$, quos casus postea contemplabor. Praesens autem casus generalius hoc modo exhiberi potest. Sit $z = (x-a)^2 P + C$, atque y sit functio quaecunque ipsius z, ita ut fiat $dy = Zdz$, denotante Z functionem quamcunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$. Erit ergo $dz = (x-a)^2 dP + 2(x-a)Pdx$, & $pdz = Z(x-a)^2 dP + 2Z(x-a)Pdx$, quod membrum fit $= 0$ si $x = a$; eodemque casu neglectis terminis, qui continent factorem $x-a$, erit $qdx^2 = 2PZdx^2$, ideoque casu $x = a$, fiet $dy = PZdx^2$; postquam in PZ ubique loco x positum fuerit a. Quare si fuerit y functio quaecunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$, ita ut sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^2$. Fiet ergo haec functio y maxima casu $x = a$, si eodem casu fiat PZ quantitas negativa, minima vero, si PZ fiat quantitas affirmativa.

342. Si fuerit $p = (x-a)^2 P$, casu $x = a$ quoque q evanescit, talis autem expressio pro p oritur, si fuerit $y = (x-a)^3 P + C$. Erit ergo $pdx = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 Pdx$; $qdx^2 = (x-a)^3 ddP + 6(x-a)^2 dPdx + 6(x-a)Pdx^2$, quorum utrumque membrum casu $x = a$ evanescit; at vero sequens utrumque membrum casu $x = a$ evanescit; at vero sequens erit $rdx^3 = (x-a)^3 d^3 P + 9(x-a)^2 ddPdx + 18(x-a)dPdx^2 + 6Pdx^3 = 6Pdx^3$, posito $x = a$. Quare cum & p & q casu $x = a$ evanescat, fiet $dy = \frac{1}{6} rdx^3 = Pdx^3$. Simili modo si ponatur $z = (x-a)^3 P + C$, fueritque y functio quaecunque ipsius z; ita ut sit $dy = Zdz$, ob $dz = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 Pdx$, fiet quoque $p = 0$ & $q = 0$, eritque $rdx^3 = 6PZdx^3$; unde

casu $x = a$, erit $dy = PZdx^n$. Quare ista functio y, etiamsi casu $x = a$, fiat $p = 0$, tamen neque maximum neque minimum valorem recipit.

343. Haec differentialia facilius inveniri possunt ex ipsa differentialium natura. Cum enim differentiale ipsius y oriatur, si y a statu sequenti proximo subtrahatur, qui prodit, si loco x ponatur $x + dx$; ponamus casu primo, quo erat $y = (x - a)^n P + C$, $x + dx$ loco x, eritque $y' = (x - a + dx)^n P' + C$, unde fiet $dy = (x - a + dx)^n P' - (x - a)^n P$. Casu igitur quo $x = a$, erit $dy = P' dx^n$, & cum P' ad P rationem aequalitatis habeat, erit $dy = Pdx^n$. Simili modo si fuerit $z = (x - a)^n P + C$; erit $dz = Pdx^n$; quare si sit y functio quaecunque ipsius z, ita ut sit $dy = Zdz$, erit $dy = PZdx^n$ casu, quo ponitur $x = a$. Deinde si sit $z = (x - a)^n P + C$, erit $z' = (x - a + dx)^n P' + C$, & propterea casu $x = a$, fiet $z' - z = dz = Pdx^n$. Hinc si fuerit y functio quaecunque ipsius z, atque $dy = Zdz$, erit quoque casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^n$, si quidem in functionibus P & Z loco x ubique substituatur a. Quoniam vero hoc casu fit $z = C$, atque Z est functio ipsius z, evadet Z quantitas constans, talis scilicet functio ipsius C, qualis ante erat ipsius z.

344. Si igitur generaliter fuerit $y = (x - a)^n P + C$, quia est $y' = (x - a + dx)^n P' + C$, casu $x = a$, fiet $dy = Pdx^n$; unde si fuerit $n > 1$, hoc differentiale respectu aliorum differentialium primorum, quae ipsi dx sunt homogenea, evanescet. Ex praecedentibus ergo manifestum est, functionem y fieri casu $x = a$, vel maximam vel minimam, si fuerit n numerus par: tum enim si posito $x = a$ fiat P quantitas affirmativa, fiet y minimum, sin autem P sit quantitas negativa, fiet y maximum. Hocque ergo modo ratio maximorum & minimorum multo facilius invenitur, quam methodo supra exposita quia non opus est ad differentialia altiora progredi. Quod si vero sit $z = (x - a)^n P + C$, atque y fuerit functio quaecunque ipsius z, ut sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$ diffe-

differentiale $dy = PZdx^n$. Notandum autem est, hic n sumi pro numero affirmativo seu o maiore, si enim n esset numerus negativus, tum posito $x = a$, non evaneſceret $(x-a)^n$, uti assumsimus, sed adeo fieret infinite magnum.

345. Iam vidimus hoc pacto differentiale multo expeditius inveniri, quam ope seriei, qua ante differentiale completum expressimus; si enim sit n numerus integer, tot seriei illius termini perlustrari deberent, quot n contineat unitates. Verum si n sit numerus fractus, tum series ista nequidem verum differentiale unquam exhibebit. Ponamus enim esse $y = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, si seriem

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{3}rdx^3 + \tfrac{1}{4}sdx^4 + \text{&c.}$$

spectemus, fiet $p = \frac{3}{2}\sqrt{(x-a)}$, $q = \dfrac{3}{4\sqrt{(x-a)}}$,

$$r = \frac{-3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}}, \quad s = \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}}, \text{ &c.}$$

Quare si ponatur $x = a$ fiet quidem $p = 0$, at sequentes termini omnes q, r, s, &c. evadent infiniti; unde valor differentialis dy hoc casu omnino definiri non potest. At vero methodus ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium relinquit. Cum enim sit $y = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, posito $x+dx$ loco x fiet $y' = (x-a+dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, eritque, si $x = a$ ponatur, $dy = dx\sqrt{dx}$. Evaneſcit ergo hoc differentiale prae dx, at vero differentialia secunda cum dx^2 homogenea prae eo evaneſcent.

346. Evolvamus hos casus, quibus exponens n est numerus fractus aliquanto accuratius, fitque $y = P\sqrt{(x-a)} + C$, ob $y' = P'\sqrt{(x-a+dx)} + C$, fiet $dy = P\sqrt{dx}$ casu $x = a$; unde hoc differentiale ad dx, & ad differentialia cum dx homogenea rationem tenebit infinitam. Hinc etiam patet, quid hoc casu de ratione maximi ac minimi sit tenendum. Cum enim

posito $x+dx$ loco x, abeat y in $P\sqrt{(x-a)}+C+P\sqrt{dx}$, ob $\sqrt{dx}$ ambiguum, functio y geminum induet valorem, alterum maiorem quam C, quem recipit posito $x=a$, alterum minorem; unde casu $x=a$ neque maximum neque minimum fiet. Praeterea si dx capiatur negative tum valor ipsius y adeo fiet imaginarius. Idem tenendum est si sit $z=P\sqrt{(x-a)}+C$, & y functio quaecunque ipsius z, ut sit $dy=Zdz$, tum enim erit $dy=PZ\sqrt{dx}$ casu $x=a$.

347. Si proposita fuerit ista functio $y=(x-a)^{\frac{m}{n}}P+C$, cuius differentiale quaeritur casu $x=a$, erit uti ex antecedentibus colligitur $dy=Pdx^{\frac{m}{n}}$. Quocirca si fuerit $m>n$ hoc differentiale prae dx evanescet; sin autem sit $m<n$, ratio $\frac{dy}{dx}$ erit infinita magna. Praeterea vero si n sit numerus par, differentiale dy geminum habebit valorem, alterum affirmativum, alterum negativum; sicque functio y, quae casu $x=a$ fit $=C$, si ponatur $x=a+dx$ binos habebit valores alterum maiorem quam C alterum vero minorem; sin autem poneretur $x=a-dx$, tum y adeo fieret imaginarium; unde hoc casu y neque maximum sit neque minimum. Ponamus nunc denominatorem n esse numerum imparem, erit numerator m vel par vel impar. Sit primo m numerus par; quia dy eundem valorem retinet, sive dx sumatur affirmative sive negative, perspicuum est, functionem y casu $x=a$ fieri sive maximam sive minimam, prout hoc casu fuerit P vel quantitas negativa vel affirmativa. Sin autem uterque numerus m & n fuerit impar, differentiale dy in sui negativum abibit, posito dx negativo; hocque ergo casu functio y neque maximum erit neque minimum, si ponatur $x=a$.

348. Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis, quorum singuli sint divisibiles per $x-a$, constet, ita ut sit $y=(x-a)^m P+(x-a)^n Q+C$, tum eius differentiale casu $x=a$ erit $dy=Pdx^m+Qdx^n$; in qua expressione,

si

si fuerit $n > m$, terminus secundus prae primo evanescit, ita ut tantum prodeat $dy = P dx^m$. Sin autem n sit fractio denominatorem habens parem, tum etiamsi $Q dx^n$ prae $P dx^m$ evanescat, tamen omnino negligi non potest. Ex eo enim apparet, si capiatur dx negative, valorem ipsius dy fieri imaginarium, quod ex solo termino primo $P dx^m$ non patet. Cum ergo si n sit fractio denominatorem habens parem, dx negative accipi nequeat, sin autem affirmative capiatur, terminus $Q dx^n$ geminum praebeat valorem: functio $y = (x-a)^m P + (x-a)^n Q + C$ quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$, erit $y = C + P dx^m \pm Q dx^n$, quorum valorum uterque cum vel maior sit vel minor quam C, prout P fuerit quantitas vel affirmativa vel negativa, erit functio y casu $x = a$ vel minimum vel maximum secundae speciei.

349. His igitur casibus differentialia functionum vera non per regulas differentiationis consuetas inveniri possunt; quippe quae tantum valent, quamdiu differentiale functionis est homogeneum cum dx. Sin autem casu quopiam singulari differentiale functionis exprimatur per eius potestatem dx^n, tum regula praebet pro hoc differentiali 0, si n fuerit numerus unitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, si n sit exponens unitate minor. Sic si ipsius $y = \sqrt{(a-x)}$ differentiale quaeratur casu $x = a$, quia est $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, facto $x = a$ prodit $dy = -\frac{dx}{0}$. Atque si differentialia sequentia in subsidium vocare velimus, omnia pariter ob denominatores $= 0$ in infinitum excrescunt, ita ut inde nihil concludi possit. At vero hoc casu vidimus esse $dy = \sqrt{-dx}$, atque adeo imaginarium. Sin autem loco x ponatur $x - dx$, erit $dy = \sqrt{dx}$, atque adeo erit infinities maius quam dx, ita ut dx prae dy evanescat. Quare regula consueta etiam hoc casu in errorem non inducit, cum valorem ipsius dy infinitum exhibeat.

350.

350. A regula ergo consueta differentiationis recedendum est, quoties in serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{3}rdx^3 +$ &c. qua differentiale completum functionis y exprimitur, primus terminus p vel fit $= 0$ vel in infinitum excrescit, eoque casu differentiale ex primis principiis derivari debet. Quoties ergo functionis y differentiale quaeritur dato ipsius x valori respondens, quo littera p vel infinite parva evadit vel infinite magna, toties recurrendum est ad ipsa prima differentiationis principia. Omnibus vero reliquis casibus, quibus fit neque $p = 0$ neque $p = \infty$, consueta regula veros differentialis valores praebebit. Interim tamen casus ante (348) memoratus non est negligendus, si functio y contineat huiusmodi membrum $(x-a)^n Q$ existente n fractione denominatorem parem habente; etiamsi enim adsint differentialia inferiora quam Qdx^n, prae quibus hoc evanescat; tamen quoniam Qdx^n si fit dx negativum, fit imaginarium, hoc membrum Qdx^n reliqua omnia, prae quibus evanescit, quoque transmutat in imaginaria: cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda. Huiusmodi ergo casus particulares, quibus verum differentiale communi regula non indicatur, in adiunctis exemplis explicabo.

EXEMPLUM I.

Quaeratur differentiale functionis

$$y = a + x - \sqrt{[xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)}]}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Differentiale istius functionis casu $x = a$ per regulam receptam non reperiri, ex differentiatione patet, fit enim:

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2}adx + \frac{1}{2}dx\sqrt{(2ax - xx)} + (axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{[xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)}]}}$$

posito enim $x = a$ erit $dy = dx - \frac{adx}{a} = 0$. Ordiamur ergo a principiis differentiationis, ac primo quidem posito $x + dx$ loco x fiet:

$$y' = a + x + dx - \sqrt{[xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx - (x + dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)}]}$$

Posi-

Posito autem $x = a$ erit:

$y' = 2a + dx - \sqrt{[2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)\sqrt{(aa - dx^2)}]}$

iam cum sit $\sqrt{(aa - dx^2)} = a - \frac{dx^2}{2a}$, sequentes enim termini tuto negligi poterunt, quia non omnes, qui sunt infinities maiores, destruentur, ut mox patebit:

erit $y' = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \frac{1}{4}dx^2)}$, porroque radicem extrahendo fiet $y = 2a + dx - \left(a + dx + \frac{dx^2}{4a}\right) = a - \frac{dx^2}{4a}$.

At casu $x = a$, erit $y = a$; unde cum sit $y' = y + dy$ obtinebitur $dy = -\frac{dx^2}{4a}$: ex quo simul perspicitur functionem propositam y fieri maximum, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale huius functionis:

$$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$$

casu, quo ponitur $x = a$.

Facta differentiatione more consueto fit $dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, quod posito $x = a$ in infinitum abit, neque ergo hoc modo indicatur. Differentialia vero sequentium ordinum pariter omnia fient infinita, ita ut ex iis nequidem ex serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. verus valor differentialis inveniri queat. Ponamus ergo $x + dx$ loco x, atque habebimus $y' = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2 + a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2)}$ & posito $x = a$ erit: $y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(-2adx - dx^2)}$ At eodem casu fit $y = aa$; unde erit $dy = -dx^2 + a\sqrt{-2adx}$, & cum dx^2 prae $\sqrt{-2adx}$ evanescat, erit $dy = a\sqrt{-2adx}$. Quare si differentiale dx affirmative capiatur, erit dy imaginarium; sin autem pro x scribatur $x - dx$, erit $dy = a\sqrt{2adx}$, cuius cum duplex sit valor alter affirmativus, alter negativus, functio y casu $x = a$ neque maxima fiet neque minima.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Invenire differentiale functionis:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a-x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Quoniam haec functio in istam formam transformatur $y = a^3 - (a-x)^3 + (a-x)^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, posito $x = a + dx$ fit $y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, eodemque casu est $y = a^3$. Erit ergo $dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, & cum dx^3 evanescat prae $dx^{\frac{7}{3}}$, erit $dy = -dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$. Casu ergo $x = a$ functio y neque maximum fit neque minimum

EXEMPLUM IV.

Invenire differentiale functionis:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x} \quad \textit{casu } x = 0.$$

Quoniam casus $x = 0$ proponitur, eoque fit $y = 0$, loco x tantum dx scribatur, & habebitur $dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$, seu $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$; unde primum patet dx negative accipi non posse. Tum vero etiamsi alias $\sqrt{dx}$ geminum valorem prae se ferat, alterum affirmativum alterum negativum, tamen hoc casu, quia eius radix $\sqrt[4]{dx}$ occurrit, non nisi affirmative accipi potest. At vero $\sqrt[4]{dx}$ utrumque significatum recipit, eritque $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$ & $y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, ob $y = 0$. Cum igitur uterque ipsius y' valor maior sit, quam ipsius y, sequitur casu $x = 0$ fieri y minimum. Quod autem functio $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ non complectatur hanc $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$, utramque ad rationalitatem perducendo patebit. Prior enim fusa in hanc formam $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, &

qua-

quadrata dat, $y^4 - 2yV x + x = xV x$ seu $y^4 + x = (x+2y)V x$, quae denuo quadrata praebet $y^8 - 2y^4 x - 4xxy + xx - x^3 = 0$.

Altera vero $y + V x = \sqrt[4]{x^3}$ dabit $y^4 + x = (x-2y)V x$ & porro $y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$ quae ab illa est diversa. At vero alterum membrum $\sqrt[4]{x^3}$ ambiguitatem signi retinet. Quamobrem ista circumstantia probe est notanda, quod etiamsi communiter radices potestatum parium utrumque signum + & − includant, tamen haec ambiguitas cessat, si in eadem expressione earumdem radicum ulteriores radices potestatum parium occurrant; quippe quae fierent imaginariae, si radices priores negative acciperentur. Atque ex hoc fonte maxima & minima secundae speciei sequuntur, quando talia non locum habere videantur.

EXEMPLUM V.

Invenire differentiale functionis:

$$y = a + V(x-f) + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

casu quo ponitur $x = f$.

Ponamus $x - f = t$, & cum sit $y = a + Vt + t\sqrt[4]{t} + tt\sqrt[8]{t}$ huius differentiale quaeritur casu $t = 0$, quo fit $y = a$. Posito ergo $t + dt$ seu $0 + dt$ loco t fiet $y' = y + dy = a + V dt + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$, ideoque habebitur $dy = V dt + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$. Ubi primo patet differentiale dt negative accipi non posse, quin dy fiat imaginarium. Tum verum non solum $V dt$, sed nequidem $\sqrt[4]{dt}$ negative accipi potest; fieret enim $\sqrt[8]{dt}$ imaginarium: unde differentiale dy geminum tantum habet valorem, $dy = V dt + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$, quorum cum uterque maior sit nihilo, sequitur functionem y fieri minimum secundae speciei posito $t = 0$ seu $x = f$. Quam

quam ergo his casibus termini $dt\sqrt[4]{dt}$ & $dt^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{dt}$ prae primo $\sqrt{dt}$ evanescant; tamen eorum ratio est habenda, si multiplicitas valorum spectetur, ut imaginaria evitentur.

EXEMPLUM VI.

Invenire differentiale functionis:

$$y = ax + bxx + (x-f)^n + (x-f)^{m+\frac{1}{2}n}$$

casu $x = f$.

Si ponatur $x = f$ fiet $y = af + bff$, & si loco x ponatur $x + dx$ seu $f + dx$, prodibit valor proximus $y' = af + bff + adx + 2bf\,dx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$, ita ut sit $dy = adx + 2bf\,dx + bdx^2 + dx^n + dx^m\sqrt{dx^n}$. Nisi ergo sit n numerus par, differentiale dx negative sumi nequit. Ultimus autem terminus $dx^m\sqrt{dx^n}$ signum habet ambiguum; unde valor ipsius y' erit duplex uterque maior quam ipsius y, si quidem $a + 2bf$ fuerit quantitas affirmativa, atque exponentes n & $m + \frac{1}{2}n$ unitate fuerint maiores. Fiet ergo valor functionis y casu $x = f$ minimus: hocque evenit sive n sit numerus integer sive fractus, dummodo numerator hoc casu, & ipse numerus illo casu non fuerit par.

351. Imprimis autem haec methodus differentialia ex ipsis principiis deducendi usum habet in functionibus transcendentibus, cum quibusdam casibus differentiale more consueto inventum vel evanescit, vel in infinitum excrescere videtur. Occurrunt autem hic eiusmodi infinitorum & infinite parvorum species, quae in algebraicis nunquam inveniuntur. Cum enim si i denotet numerum infinitum, $\frac{1}{i}$ sit quoque infinitus quidem, sed tamen ad ipsum numerum i, eiusque adeo potestatem quamcunque i^n, quamtumvis exiguus statuatur exponens n rationem tenens infinite parvam, erit fractio $\frac{1}{i^n}$ infinite parva, neque ante finita esse poterit, quam exponens n fiat infinite parvus. Erit ergo $\frac{1}{i}$ homogeneum cum i^n, si exponens n fuerit infinite parvus. Ponamus nunc $i = \frac{1}{\omega}$, exi-

existente ω quantitate infinite parva, erit $-l\omega$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^0}$, si exponens n sit infinite parvus, ideoque $-\frac{1}{l\omega}$ homogeneum erit cum ω^n; hincque $-\frac{1}{ldx}$, erit infinite parvum comparandum cum dx^n, existente n fractione infinite parva. Ita si fuerit $y = -\frac{1}{lx}$ differentiale ipsius y casu $x = 0$, erit $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcunque ipsius dx potestatem tenebit rationem infinitam: atque prae $-\frac{1}{ldx}$ evanescunt omnes omnino potestates ipsius dx, quantumvis exigui fuerint earum exponentes.

352. Deinde quoque vidimus, si a fuerit numerus unitate maior, & i infinitus, tum a^i fore infinitum tam excelsi gradus, ut prae eo non solum i, sed etiam quaevis ipsius i potestas evanescat; neque i^n ante homogeneum cum a^i evadet, quam exponens n in infinitum fuerit auctus. Sit nunc $i = \frac{1}{\omega}$, ita ut ω infinite parvum denotet, erit $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, existente n numero infinite magno: ideoque $a^{-\frac{2}{\omega}}$ seu $\frac{1}{a^{\frac{2}{\omega}}}$, erit infinite parvum comparandum cum ω^n. Hinc $\frac{1}{a^{\frac{1}{dx}}}$, erit infinite parvum, quod autem prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescit; cum homogeneum sit cum potestate dx^n existente n numero infinite magno. Quare si quaeratur differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{\frac{1}{x}}}$ casu $x = 0$; quoniam fit $y = 0$, erit $dy = \frac{1}{a^{\frac{1}{dx}}}$, ideoque infinities minus est quam potestas quantumvis alta ipsius dx. 353.

353. Sin autem a fit numerus unitate minor, tum quia $\frac{1}{a}$ fit unitate maior, quaestio ad casum praecedentem reducitur. Scilicet si habeatur expressio $a^{\frac{1}{\omega}}$, ea ponendo $a = 1 : b$ transmutabitur in $b^{-\frac{1}{\omega}}$, seu $\frac{1}{b^{1:\omega}}$, quae homogenea erit ob $b > 1$ cum ω^n, existente n numero infinite magno. His igitur praemissis sequentia exempla resolvere poterimus.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale functionis: $y = xx - \frac{1}{lx}$, *casu* $x = 0$.

Quoniam posito $x = 0$ fit $y = 0$, si ponamus $x + dx$, seu $0 + dx$ loco x, fiet $y' = dy = dx^2 - \frac{1}{ldx}$. Cum autem $-\frac{1}{ldx}$ homogeneum sit cum dx^n, denotante n numerum infinite parvum, prae eo dx^2 evanescet, eritque $dy = -\frac{1}{ldx} = dx^n$. At vero quia logarithmi numerorum negativorum sunt imaginarii, dx negative accipi non poterit; eritque adeo casu $x = 0$ functio y minimum, sed neque ad primam neque ad secundam speciem pertinens. Ad primam scilicet speciem non pertinet, quia y nullos habet valores antecedentes proximos, sed tantum minus est valoribus sequentibus, si x nihilo maius statuatur. Ad secundam autem speciem ideo non pertinet, quia valores sequentes, quibuscum comparatur, non sunt gemini: sic itaque prodit tertia species maximorum minimorumve, quae in functionibus logarithmicis & transcendentibus tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam occurrit; de qua in sequente parte de lineis curvis fusius agetur.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale functionis: $y=(a-x)^n-x^n(la-lx)^n$ *casu quo* $x=a$.

Differentiale hoc si n sit numerus integer, ex formula generali $dy=pdx+\frac{1}{2}qdx^2+\frac{1}{6}rdx^3+$ &c. inveniri potest, erit enim:

$$pdx=-n(a-x)^{n-1}dx-nx^{n-1}dx(la-lx)^n+nx^{n-1}(la-lx)^{n-1}dx$$

qui valor posito $x=a$ utique evanescit: nam etiamsi sit $n=1$, erit $pdx=-dx+dx=0$. Si igitur ulterius progrediamur, erit: $\frac{1}{2}qdx^2=$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a-x)^{n-2}dx^2-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n+\frac{n^2}{2}x^{n-1}dx^2(la-lx)^{n-1}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}$$

Hinc ergo si fuerit $n=1$, erit $\frac{1}{2}qdx^2=\frac{dx^2}{2a}$ posito $x=a$.

Simili modo si sit $n=2$, ad terminum tertium $\frac{1}{6}rdx^3$ effet pergendum, & ita porro. Facilius ergo utemur ipsis differentiationis principiis, & cum posito $x=a$ fiat $y=0$, si ponamus $x+dx$ seu $a+dx$ loco x, erit

$$y'=(-dx)^n-(a+dx)^n[la-l(a+dx)]^n=y+dy=dy \text{ ob } y=0.$$

Est vero $l(a+dx)=la+\frac{dx}{a}-\frac{dx^2}{2a^2}+\frac{dx^3}{3a^3}-$ &c. unde fit

$$dy=(-dx)^n-\left(a^n+na^{n-1}dx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}dx^2\right)\times$$

$$\left(-\frac{dx}{a}+\frac{dx^2}{2a^2}-\frac{dx^3}{3a^3}\right)^n=\frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}$$

Casu igitur $x=a$ erit formulae propositae differentiale quaesitum dy, ut sequitur:

si $n = 1$	$dy \equiv \frac{dx^2}{2a}$ ut ante invenimus
si $n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
si $n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
si $n = 4$	$dy = -\frac{4dx^5}{2a}$
&c.	&c.

Si ergo n fuerit numerus impar, functio y casu $x = a$ fit minimum, sin autem n sit numerus par, neque maximum neque minimum: quod idem valet, si n fuerit fractio denominatorem habens imparem. Sin autem n fuerit fractio denominatorem habens parem, tum dx negative accipi debet, ne in imaginaria incidamus; & ob ambiguitatem significationis functio quoque neque maxima neque minima evadet.

EXEMPLUM III.

Invenire differentiale functionis: $y = x^x$ *casu* $x = \frac{1}{e}$ *denotante* e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$.

Quia fit in genere $dy = x^x dx(lx + 1)$, hoc differentiale casu $x = \frac{1}{e}$ seu $lx = -1$ evanescit. Comparetur ergo hoc differentiale cum forma generali $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 +$ &c. erit $p = x^x(lx + 1)$ & $q = x^x(lx + 1)^2 + x^{x-1}$, & posito $lx = -1$ seu $x = \frac{1}{e}$, erit $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Quare differentiale quaesitum erit $dy = \frac{1}{2}e^{(e-1):e}dx^2$, evaditque ergo functio $y = x^x$ minimum casu $x = \frac{1}{e}$.

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Invenire differentiale functionis huius: $y = x^x + e^{-1:x}$ *casu quo* $x = 0$.

Quia facto $x = 0$ fit $y = 0$, si ponatur $x = 0 + dx$, erit $y' = dy = dx^{dx} + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Vidimus autem $\frac{1}{e^{1:dx}}$ homogeneum esse cum potestate ipsius dx infinita, seu cum dx^{∞}, ideoque prae dx^{dx} evanescet; ita ut sit $dy = dx^{dx}$.

354. Quod in differentialibus primis certis casibus usu venit, ut consueta differentiationis regula non prodeant, idem quoque in differentialibus secundi ac tertii superiorumque ordinum evenit, iis casibus, quibus in forma differentiali completa:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \text{&c.}$$

quantitatum q, r, s, &c. nonnullae vel evanescunt, vel in infinitum abeunt. Scilicet cum fit:

$$dd.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{1}{12}sdx^4 + \text{&c.}$$

si quo casu fiat $q = 0$, tum erit $ddy = rdx^3$; sin autem eodem casu & r evanescat, tum erit $ddy = \frac{1}{12}sdx^4$, & ita porro. Sin autem vel q vel r vel s &c. fiat infinitum, tum ex ista serie differentiale secundum prorsus inveniri nequit, sed confugiendum erit ad principia differentialium: scilicet ponendo $x + dx$ loco x quaeratur valor y', & ponendo $x + 2dx$ loco x valor ipsius y'', quo facto erit verus valor differentialis secundi $ddy = d.y' - dy = y'' - 2y' + y$. Simili modo si de differentiali tertio quaestio proponatur, tum praeterea in y loco x scribatur $x + 3dx$, inventoque valore y''', erit $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$, sicque deinceps. Quos casus sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale secundum functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$

casu quo ponitur $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Quaerendo differentiale completum ipsius y, ex forma $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 +$ &c. prodibunt pro p, q, r, s &c. sequentes valores: $p = -\frac{4aax}{(aa+xx)^2}$; $q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa+xx)^3}$; atque $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$.

Cum nunc sit $ddy = qdx^2 + rdx^3 + \frac{1}{12}sdx^4 +$ &c. ob $q = 0$ casu $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eodemque casu sit $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$, fiet differentiale secundum quaesitum $ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$.

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale tertium functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$

casu $x = a$.

Quaerendo ut ante differentiale completum $dy = \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 +$ &c. quia est differentiale tertium $d^3y = rdx^3 + \frac{1}{2}sdx^4$, ob $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$, fiet $r = 0$ casu $x = a$; quare ad valorem s est progrediendum, qui erit: $s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa+xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa+xx)^5}$

facto ergo $x = a$, erit $s = -\frac{96a^4}{2^4a^4} = -\frac{6}{a^4}$; unde hoc casu erit $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Invenire differentialia cuiusque gradus functionis
$y = ax^m + bx^n$ *casu* $x = 0$.

Ponendo successive $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; &c. loco x valores sequentes functionis y erunt:

$$y' = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$
$$y'' = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$
$$y''' = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n$$
&c.

Posito ergo $x = 0$, erit $y = 0$, eiusque differentialia erunt:

$$dy = adx^m + bdx^n$$
$$ddy = (2^m - 2)adx^m + (2^n - 2)bdx^n$$
$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)adx^m + (3^n - 3.2^n + 3)bdx^n$$
$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)adx^m + (4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4)bdx^n$$
&c.

Si igitur exponens n fuerit maior quam m, termini secundi in his expressionibus evanescunt prae primis. Interim tamen eorum ratio erit habenda, si n fuerit numerus fractus, ut casus, quibus haec differentialia vel fiunt imaginaria, vel ambigua, diiudicari queant. Ulteriorem vero horum casuum evolutionem in doctrinam de lineis curvis reservari convenit.

CAPUT XV.

DE VALORIBUS FUNCTIONUM, QUI CERTIS CASIBUS VIDENTUR INDETERMINATI.

355.

Si functio ipsius x quaecunque y fuerit fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator posito loco x certo quodam valore simul evanescant; tum isto casu fractio $\frac{P}{Q}$ valorem functionis y exprimens evadet $= \frac{0}{0}$, quae expressio cum cuique quantitati sive finitae sive infinitae sive infinite parvae possit esse aequalis, ex ea prorsus valor ipsius y hoc casu colligi nequit, atque ideo videtur indeterminatus. Interim tamen facile perspicitur, quia praeter hunc casum functio y perpetuo valorem determinatum recipit, quicquid pro x substituatur, etiam hoc casu valorem ipsius y indeterminatum esse non posse. Manifestum hoc fiet vel ex hoc exemplo, si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, quo facto $x = a$ fit utique $y = \frac{0}{0}$. Cum autem numeratore per denominatorem diviso fiat $y = a + x$, evidens est si ponatur $x = a$ fore $y = 2a$, ita ut hoc casu fractio illa $\frac{0}{0}$ aequivaleat quantitati $2a$.

356. Quoniam ergo supra ostendimus, inter cyphras rationem quamcunque intercedere posse, in huiusmodi exemplis ratio determinata, quam numerator ad denominatorem teneat, investigari debet. Cum autem in cyphris absolutis ista diversitas perspici nequeat, earum loco quantitates infinite parvae intro-

introduci debent, quae etsi ratione significationis a cyphra non differunt, tamen ex diversis earum functionibus, quae numeratorem & denominatorem constituunt, valor fractionis sponte elucet. Sic si habeatur ista fractio $\frac{a\,dx}{b\,dx}$, etiamsi revera numerator & denominator sit $=0$, tamen patet valorem huius fractionis esse determinatum nempe $=\frac{a}{b}$. Sin autem habeatur haec fractio $\frac{a\,dx^2}{b\,dx}$, huius valor erit nullus, quemadmodum huius valor $\frac{a\,dx}{b\,dx^2}$ est infinite magnus. Si igitur loco nihilorum, quae saepenumero in calculum ingrediuntur, infinite parva introducamus, hunc inde fructum percipiemus, ut rationem, quam illa nihila inter se tenent, mox cognoscamus, nullumque amplius dubium circa significationem huiusmodi expressionum superfit.

357. Quo haec planiora reddantur, ponamus fractionis $y=\frac{P}{Q}$ tam numeratorem quam denominatorem evanescere, si statuatur $x=a$. Ad haec autem nihila, quae inter se comparari non possunt, evitanda, ponamus $x=a+dx$, quae positio revera in priorem $x=a$ recidit ob $dx=0$. Cum vero, si loco x ponatur $x+dx$, functiones P & Q abeant in $P+dP$ & $Q+dQ$; positioni $x=a+dx$ satisfiet, si in his valoribus ubique statuatur $x=a$, quo quidem casu P & Q evanescere assumuntur. Hinc si loco x ponatur $a+dx$, fractio $\frac{P}{Q}$ trasmutabitur in hanc $\frac{dP}{dQ}$, quae propterea valorem functionis $y=\frac{P}{Q}$ exprimit casu $x=a$. Haecque expressio indeterminata amplius esse non poterit, si quidem functionum P & Q differentialia vera sumantur, uti in capite praecedente do-

docuimus. Hoc enim pacto differentialia dP & dQ nunquam in nihilum absolutum abeunt, sed nisi per differentiale dx ipsum exprimantur, saltem per eius potestates exhibebuntur. Quodsi igitur reperiatur $dP = Rdx^m$ & $dQ = Sdx^n$, erit functionis $y = \frac{P}{Q}$ casu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui propterea erit finitus & $= \frac{R}{S}$, si fuerit $m = n$; sin autem sit $m > n$, tum valor fractionis propositae revera erit $= 0$: at si sit $m < n$, iste valor in infinitum excrescit.

358. Quoties ergo huiusmodi fractio occurrit $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator certo casu puta $x = a$ simul evanescant, valor istius fractionis hoc casu $x = a$ per sequentem regulam invenietur:

Quaerantur quantitatum P *&* Q *differentialia casu* $x = a$, *eaque loco ipsarum* P *&* Q *substituantur, quo facto fractio* $\frac{dP}{dQ}$ *exhibebit valorem fractionis* $\frac{P}{Q}$ *quaesitum.*

Si differentialia dP & dQ methodo consueta inventa neque infinita fiant neque evanescant casu $x = a$, tum ea retineri poterunt; sin autem ambo vel $= 0$ fiant vel $= \infty$, tum modo in praecedente Capite exposito haec differentialia completa casu $x = a$ investigari debent. Plerumque etiam calculus mirifice contrahitur, si antea ponatur $x - a = t$ seu $x = a - t$, quo prodeat fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator evanescunt casu $t = 0$; tum enim differentialia dP & dQ habebuntur, si ubique dt loco t substituatur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor fractionis huius $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ *casu* $t = 0$.

Quoniam hoc casu $t = 0$ & numerator & denominator evanescit,

nescit, loco t tantum scribatur dt, atque valor quaesitus exprimetur hac fractione $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$. Cum vero sit $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$, ista fractio abit in hanc $\frac{dt^2}{2bdt^2} = \frac{1}{2b}$. Hinc fractio proposita $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ casu $t = 0$ recipit hunc valorem $\frac{1}{2b}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{\sqrt{(aa + ax + xx)} - \sqrt{(aa - ax + xx)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}} \quad \text{casu } x = 0.$$

Hic iterum statim dx loco x substitui potest; quo facto cum sit:

$$\sqrt{(aa + adx + dx^2)} = a + \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a};$$

$$\sqrt{(aa - adx + dx^2)} = a - \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a};$$

atque $\sqrt{(a + dx)} = \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$; $\sqrt{(a - dx)} = \sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$

fiet numerator $= dx$ & denominator $= \frac{dx}{\sqrt{a}}$, ex quo fractionis propositae valor quaesitus erit $= \sqrt{a}$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - aa)}}{xx - 2ax - aa + 2a\sqrt{(2ax - xx)}} \quad \text{casu } x = a.$$

Si more consueto differentialia sumantur & in loca numeratoris ac denominatoris substituantur, habebitur:

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^2 : \sqrt{(2ax - aa)}}{2x - 2a + 2a(a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}},$$ cuius fractionis numerator

merator ac denominator denuo evanescunt, si ponatur $x = a$. Quare ob eandem rationem eorum loco denuo ipsorum differentialia substituantur, prodibitque: $\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{1}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{1}{2}}}$ cuius numerator ac denominator iterum casu $x = a$ evanescunt. Pergamus ergo eorum loco ipsorum differentialia substituere: $\frac{6 - 6a^5 : (2ax - aa)^{\frac{1}{2}}}{6a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - aa)^{\frac{1}{2}}}{a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{1}{2}}}$. Verum & hic posito $x = a$ denuo tam numerator quam denominator evanescunt. Porro igitur differentialibus ipsorum loco substitutis, orietur: $\frac{5a^5 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{-(5a^3 - 8a^4 x + 4a^3 xx) : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$. Nunc denique loco x ponatur a, prodibitque haec fractio determinata $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, qui est valor quaesitus fractionis propositae:

Quodsi autem antequam haec investigatio suscipiatur, ponatur $x = a + t$, fractio proposita transmutabitur in hanc: $\frac{2a^3 + 2a^2 t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$ quae cum recipiat formam $\frac{0}{0}$, si ponatur $t = 0$, ponatur dt loco t, & erit: $\frac{2a^3 + 3a^2 dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2adt)}}{-2aa + dt^2 + 2a\sqrt{(aa - dt^2)}}$. Convertantur iam formulae irrationales in series, quae eousque continuentur, quoad termini a membro rationali non amplius destruantur: $\sqrt{(aa + 2adt)} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$

$\sqrt{(aa - dt^2)} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$, qui-

quibus valoribus substitutis prodibit fractio haec:

$$\frac{5dz^4 : 4a}{-dz^4 : 4aa} = -5a,$$

qui est valor fractionis propositae iam ante inventus.

EXEMPLUM IV.

Invenire valorem huius fractionis:

$$\frac{a+\sqrt{(2aa-2ax)}-\sqrt{(2ax-xx)}}{a-x+\sqrt{(aa-xx)}} \quad \text{casu } x = a.$$

Substitutis in loca numeratoris & denominatoris eorum differentialibus prodibit haec fractio, quae casu $x = a$ ipsi propositae erit aequalis: $\frac{-a:\sqrt{(2aa-2ax)}-(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}}{-1-x:\sqrt{(aa-xx)}}$ cuius numerator ac denominator casu $x = a$ fiunt infiniti. Verum si uterque per $-\sqrt{(a-x)}$ multiplicetur, habebitur $\frac{a:\sqrt{2a}+(a-x)^{\frac{1}{2}}:\sqrt{(2ax-xx)}}{\sqrt{(a-x)}+x:\sqrt{(a+x)}}$ quae posito $x = a$ dabit hunc valorem determinatum $\frac{a:\sqrt{2a}}{a:\sqrt{2a}} = 1$, qui propterea aequalis est fractioni propositae casu $x = a$.

359. Si igitur habeatur fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator casu $x = a$ evanescat, eius valor per consuetas differentiandi regulas assignari poterit, neque opus erit ad differentialia, quae capite praecedente tractavimus, recurrere. Sumtis enim differentialibus fractio proposita $\frac{P}{Q}$ casu $x = a$ aequalis erit fractioni $\frac{dP}{dQ}$; cuius si numerator & denominator posito $x = a$ induant valores finitos, cognoscetur valor fractionis propositae; sin autem alter fiat $= 0$, manente altero finito, tum fractio erit vel $= 0$ vel $= \infty$, prout vel numerator

merator evaneſcat vel denominator. At ſi alteruter vel uterque fiat $= \infty$, quod evenit, ſi dividantur per quantitates caſu $x = a$ evaneſcentes, tum multiplicando utrumque per hos diviſores, iſtud incommodum tolletur, uti in exemplo poſtremo evenit. Quodſi vero tam numerator quam denominator caſu $x = a$ denuo evaneſcat, tum iterum, uti initio factum eſt, differentialia erunt capienda, ita ut haec fractio $\frac{ddP}{ddQ}$ prodeat, quae caſu $x = a$ propoſitae adhuc erit aequalis, &, ſi idem rurſus in hac fractione uſu veniat, ut fiat $= \frac{0}{0}$, tum in eius locum ſurrogetur haec $\frac{d^3P}{d^3Q}$, atque ita porro, donec ad fractionem perveniatur, quae valorem determinatum exhibeat, ſive finitum ſive infinite magnum ſive infinite parvum. Sic in exemplo tertio oportebat ad fractionem $\frac{d^4P}{d^4Q}$ progredi, antequam valorem fractionis propoſitae $\frac{P}{Q}$ aſſignari licuerit.

360. Uſus huius inveſtigationis elucet in definiendis ſummis ſerierum, quas ſupra Capite II. §. 22. eruimus, ſi ponatur $x = 1$. Ex iis enim, quae ibi tradita ſunt, ſequitur fore:

$$1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} = \frac{1 - x^{2n}}{1 - xx}$$

$$1 + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2} = \frac{1 + x^{2n} - (2n+1)x^{2n} + (2n-1)x^{2n+2}}{(1-xx)^2}$$

$$1 + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{1 + x^n - (n+1)^2x^n + (2nn+2n-1)x^{n+1} - nnx^{n+2}}{(1-x)^3}$$

&c.

Quod

Quod si nunc harum serierum summae desiderentur casu quo $x = 1$, in expressionibus istis tam numerator quam denominator evanescunt. Valores ergo harum summarum casu $x = 1$ methodo hic exposita definiri poterunt. Quoniam vero eaedem summae aliunde constant, ex consensu veritas huius methodi magis elucebit.

EXEMPLUM I.

Definire valorem huius fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Quoniam casu $x = 1$ numerator ac denominator evanescit, substituantur differentialia in eorum locum, habebiturque $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$, quae posito $x = 1$ dat n pro summa seriei quaesita.

EXEMPLUM II.

Definire valorem fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - xx}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Sumtis differentialibus fractio proposita transmutatur in hanc: $\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2x}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= n$.

EXEMPLUM III.

Invenire valorem huius fractionis: $\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ *casu* $x = 1$, *qui exprimet summam seriei* $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, *quam constat esse* $= \frac{nn+n}{2}$.

Sumtis differentialibus pervenietur ad hanc fractionem $\frac{1 -}{}$

$\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$, cuius adhuc tam numerator quam denominator casu $x=1$ evanescit. Hinc denuo differentialia sumantur, ut prodeat haec fractio:

$\frac{-n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, quae posito $x=1$ abit in $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$ summam seriei propositae.

EXEMPLUM IV.

Invenire valorem huius fractionis:

$\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$ *casu* $x=1$,

qui exprimet summam seriei $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ *quam constat esse* $=nn$.

Substitutis differentialibus in loca numeratoris & denominatoris provenit haec fractio:

$\frac{1+3xx-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$

quae cum adhuc idem incommodum habeat, ut posito $x=1$ abeat in $\frac{0}{0}$, denuo differentialia sumantur,

$\frac{6x-2n(2n+1)^2x^{2n-1}+(2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4+12xx}$

quae posito $x=1$ abit in:

$\frac{6-2n(2n+1)^2+(2n-1)(2n+2)(2n+3)}{8}=nn.$

EXEMPLUM V.

Invenire valorem huius fractionis:

$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$

casu $x=1$, *qui dabit summam seriei* $1+4+9+\ldots+n^2$, *quam constat esse* $=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

Sumtis numeratoris ac denominatoris differentialibus, fiet

$$\frac{1+2x-(n+1)^2x^n+(n+2)(2nn+2n-1)x^{n+1}-nn(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}$$

in qua cum numerator ac denominator posito $x=1$ denuo evanescat, differentialia secunda sumantur:

$$\frac{2-n(n+1)^2x^{n-1}+(n+1)(n+2)(2nn+3n-1)x^n-n^2(n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}$$

eodem vero adhuc subsistente incommodo, ad differentialia tertia procedatur, ut prodeat haec fractio:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^2x^{n-2}+n(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n-1}-n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6}$$

quae tandem posito $x=1$ abit in hanc formam determinatam:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^2+n(n+1)(n+2)(nn-n-1)}{-6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n;$$ qui est ille ipse valor, quo seriem memoratam exprimi invenimus.

EXEMPLUM VI.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^m-x^{m+n}}{1-x^{2p}}$, *cuius valorem casu* $x=1$ *assignari oporteat.*

Quoniam haec fractio est productum ex his duabus: $\frac{x^m}{1+x^p}\cdot\frac{1-x^n}{1-x^p}$, prioris autem factoris casu $x=1$ valor est $=\frac{1}{2}$, tantum opus est ut alterius factoris $\frac{1-x^n}{1-x^p}$ valor eodem casu quaeratur, qui sumtis differentialibus erit $=\frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}}=\frac{n}{p}$: unde fractionis propositae valor casu $x=1$, erit $=\frac{n}{2p}$. Idem valor prodit, si immediate differentialia in fractione proposita capiantur: fiet enim $\frac{mx^{m-1}-(m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$, cuius va-

lor posito $x = 1$, erit $= \frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, ut ante:

361. Eadem methodo erit utendum, si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ vel numerator vel denominator vel uterque fuerit quantitas transcendens. Quae operationes, quo clarius explicentur, sequentia exempla adiicere visum est.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{a^x - x^a}{la - lx}$, *cuius valor quaeratur casu* $x = a$.

Sumtis differentialibus statim pervenitur ad hanc fractionem $-\frac{nx^{n-1}}{-1:x} = nx^n$, cuius valor posito $x = a$, erit na^n.

EXEMPLUM II.

Sit proposita ista fractio $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$, *cuius valor quaeritur casu* $x = 1$.

Sumtis differentialibus numeratoris & denominatoris prodit $\frac{1:x}{-1:2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$, cuius valor posito $x = 1$, cum fit $= 0$, sequitur fractionem $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ casu $x = 1$ evanescere.

EXEMPLUM III.

Sit proposita ista fractio $\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$, *cuius valor quaeratur posito* $x = a$, *quo casu numerator & denominator evanescunt.*

Differentiatis secundum regulam numeratore ac denominatore erit $\frac{-1 + a:x}{-(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$: ubi etsi numera-

merator ac denominator casu $x = a$ adhuc evanescit, tamen quia uterque divisibilis est per $a - x$, habebitur ista fractio $-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, cuius valor casu $x = a$ est determinatus atque $= -1$; abitque igitur fractio proposita in -1, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM IV.

Sit proposita ista fractio $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1+x)}$, *cuius valor quaeritur posito* $x = 0$.

Sumtis differentialibus habebitur ista functio $\frac{e^x + e^{-x}}{1:(1+x)}$, quae posito $x = 0$ dat 2 pro valore quaesito.

EXEMPLUM V.

Invenire valorem huius fractionis $\frac{e^x - 1 - l(1+x)}{xx}$, *casu quo ponitur* $x = 0$.

Si loco numeratoris ac denominatoris eorum differentialia substituantur, orietur haec fractio $\frac{e^x - 1:(1+x)}{2x}$, quae cum adhuc abeat in $\frac{0}{0}$, si ponatur $x = 0$, denuo differentialia sumantur, ut habeatur $\frac{e^x + 1:(1+x)^2}{2}$, quae posito $x = 0$ praebet $\frac{1+1}{2} = 1$. Quod idem patet si loco x statim $0 + dx$ substituatur: cum enim sit $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ & $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$, $\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1$.

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{lx}$, *casu quo ponitur* $x = \infty$.

Quo ista fractio ad formam, quae hoc casu transeat in $\frac{0}{0}$ reducatur, ita repraesentetur $\frac{1:lx}{1:x^n}$, sic enim casu $x = \infty$, tam numerator quam denominator evanescet. Ponatur vero porro $x = \frac{1}{y}$, ita ut casu $x = \infty$, fiat $y = 0$, atque proponetur ista fractio $-\frac{1:ly}{y^n}$, cuius valor casu $y = 0$ investigari debet. Sumtis autem differentialibus erit $\frac{1:y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$, quae posito $y = 0$, cum abeat in $\frac{0}{0}$, sumantur denuo differentialia, eritque $\frac{-2:(ly)^3}{n^2y^n}$; ubi quia idem incommodum adest, si porro differentialia sumantur prodibit $\frac{6:(ly)^4}{n^3y^n}$, sicque quousque procedamus, perpetuo idem incommodum occurret. Quamobrem ut hoc non obstante valorem quaesitum eruamus, sit s valor fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ casu, quo ponitur $y = 0$, & cum eodem casu sit quoque $s = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$; erit ex illa aequatione $ss = \frac{1:(ly)^2}{y^{2n}}$, quae per istam divisa dabit $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$, ex qua perspicitur casu $y = 0$ fieri s infinitum. Fit ergo fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ valor casu $y = 0$ infinitus, ideoque posito $y = dx$, habebit $\frac{1}{ldx}$ ad dx^n rationem infinitam, uti iam supra innuimus.

EXEM-

EXEMPLUM VII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ *casu* $x = 0$, *quo tam numerator quam denominator evanescit.*

Sit hoc casu $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, erit sumtis differentialibus quoque $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x} : xx} = \frac{nx^{n+1}}{e^{-1:x}}$, & quia hic idem incommodum occurrit, perpetuoque recurrit, quousque differentiationes continuentur, remedio ante adhibito utamur. Prior aequatio dat $x^n = e^{-1:x} s$ & $x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x} s^{n+1}$ altera aequatio dat $x^{n+1} = e^{-1:x} s : n$, unde fit $x^{n(n+1)} = e^{-n:x} s^n : n^n$, qui valor illi aequatus dabit $e^{-1:x} s n^n = 1$ ideoque $s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$, si $x = 0$. Quare posito x infinite parvo habebit dx^n ad $e^{-1:dx}$ rationem infinite magnam, quicunque numerus finitus pro n statuatur: unde sequitur $e^{-1:dx}$ esse infinite parvum homogeneum cum dx^m, si m fuerit numerus infinite magnus.

EXEMPLUM VIII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ *casu*, *quo ponitur* $x = \frac{\pi}{2}$ *seu arcui* 90 *graduum.*

Sumtis differentialibus obtinebitur haec fractio $\frac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$ quae posito $x = \frac{\pi}{2}$ ob $\sin x = 1$ & $\cos x = 0$ abit in 1: ita ut unitas sit valor quaesitus fractionis propositae. Quod idem patet sine differentiatione: cum enim sit

$$\cos x = \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

fractio

fractio proposita abit in hanc $\frac{\sqrt{(1-\sin x)}+\sqrt{(1+\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)}-\sqrt{(1-\sin x)}}$, quae fit evidenter $=1$, si fiat $\sin x=1$.

EXEMPLUM IX.

Invenire valorem huius expressionis $\frac{x^x-x}{1-x+lx}$ *casu quo ponitur* $x=1$.

Loco numeratoris & denominatoris eorum differentialibus substitutis prodibit ista fractio : $\frac{x^x(1+lx)-1}{-1+1:x}$, quae cum etiam nunc fiat $=\frac{0}{0}$ posito $x=1$, sumantur denuo differentialia, ut prodeat $\frac{x^x(1+lx)^2+x^x:x}{-1:xx}$, quae posito $x=1$ abit in -2, qui est valor fractionis propositae casu $x=1$.

362. Quoniam hic omnes expressiones, quae quibusdam casibus indeterminatos valores recipere videntur, pertractare constituimus, huc non solum pertinent eae fractiones $\frac{P}{Q}$, quarum numerator ac denominator certo casu evanescunt; sed etiam eiusmodi fractiones, quarum numerator ac denominator certo casu fiunt infiniti, huc sunt referendae: propterea quod earum valores aeque indeterminati videntur. Si scilicet P & Q eiusmodi fuerint functiones ipsius x, ut casu quopiam $x=a$, ambae fiant infinitae, fractioque $\frac{P}{Q}$ induat hanc formam $\frac{\infty}{\infty}$; quoniam infinita aeque ac cyphrae inter se rationem quamcunque tenere possunt, hinc valor verus minime cognosci potest. Hic quidem casus ad praecedentem revocari potest, fractionem $\frac{P}{Q}$ in hanc formam $\frac{1:Q}{1:P}$ transmutando, cuius fra-

fractionis nunc numerator ac denominator casu $x = a$ evanescunt; ideoque eius valor modo ante tradito inveniri potest. At vero quoque sine hac transformatione valor invenietur, si loco x non a, sed $a + dx$ substituatur, quo facto non eiusmodi infinita absoluta ∞ provenient; sed ita erunt expressa $\frac{1}{dx}$ vel $\frac{A}{dx^n}$; quae expressiones etsi sunt aeque infinitae ac ∞, tamen comparatione inter dx eiusve potestates instituta, valor quaesitus facile colligetur.

363. Ad eandem classem quoque pertinent producta ex duobus factoribus constantia, quorum alter certo casu $x = a$ evanescit, alter vero in infinitum abit: cum enim quaevis quantitas per huiusmodi productum $0.\infty$ repraesentari possit, eius valor indefinitus videtur. Sit PQ huiusmodi productum, in quo, si ponatur $x = a$, fiat $P = 0$ & $Q = \infty$, eius valor per praecepta ante tradita invenietur, si ponatur $Q = \frac{1}{R}$, tum enim productum PQ transmutabitur in fractionem $\frac{P}{R}$: cuius numerator ac denominator ante casu $x = a$ evanescunt, ideoque eius valor methodo ante exposita investigari poterit. Sic si quaeratur valor huius producti $(1 - x)\,\text{tang}\,\frac{\pi x}{2}$ casu $x = 1$, quo fit $1 - x = 0$ & $\text{tang}\,\frac{\pi x}{2} = \infty$, convertatur id in hanc fractionem $\frac{1 - x}{\cot \frac{1}{2}\pi x}$, cuius numerator ac denominator casu $x = 1$ evanescunt. Cum igitur sit differentiale numeratoris $1 - x = -dx$, & differentiale denominatoris $\cot\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi\, dx : 2}{(\text{sin}\,\frac{1}{2}\pi x)^2}$, casu $x = 1$ valor fractionis propositae erit $= \frac{2}{\pi}.\,\text{sin}\,\frac{\pi x}{2}.\,\text{sin}\,\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$, ob $\text{sin}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

364. Imprimis autem huc sunt referendae eiusmodi expressiones, quae dum ipsi x certus quidam valor tribuitur, abeunt in huiusmodi formam $\infty - \infty$: quoniam enim duo infinita quavis quantitate finita inter se discrepare possunt, manifestum est hoc casu valorem expressionis non determinari, nisi differentia inter illa duo infinita assignari possit. Iste ergo casus occurrit, si proponatur huiusmodi functio $P - Q$, in qua posito $x = a$ fiat tam $P = \infty$ quam $Q = \infty$, quo casu ope regulae ante traditae valor quaesitus non tam facile assignari potest. Etsi enim posito hoc casu fieri $P - Q = f$, statuatur $e^{P-Q} = e^f$, ita ut sit $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, ubi casu $x = a$ tam numerator e^{-Q} quam denominator e^{-P} evanescit; tamen si regula ante tradita huc transferatur, fiet $e^f = \frac{e^{-Q} dQ}{e^{-P} dP}$, unde ob $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, fieret $1 = \frac{dQ}{dP}$, ideoque valor quaesitus ipsius f hinc non innotescit. Quoties quidem P & Q sunt quantitates algebraicae, quoniam hae infinitae fieri nequeunt, nisi sint fractiones, quarum denominatores evanescunt; tum $P - Q$ in unicam fractionem colligi poterit, cuius denominator pariter evanescet. Quo facto si etiam numerator evanescat, valor modo supra explicato definietur: sin autem numerator non evanescat, tum eius valor revera erit infinitus. Sic si huius expressionis $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ valor desideretur casu $x = 1$, quia ea abit in $\frac{x-1}{1-xx} = \frac{-1}{1+x}$, patet valorem quaesitum esse $= -\frac{1}{2}$.

365. Verum si functiones P & Q fuerint transcendentes, tum plerumque haec transformatio ad calculum molestissimum perduceret. Expediet ergo his casibus methodo directa

cla uti, atque loco $x = a$, quo ambae quantitates P & Q in infinitum abeunt, ponī $x = a + \omega$, existente ω quantitate infinite parva, pro qua dx accipi poterit. Quo facto si fiat $P = \frac{A}{\omega} + B$ & $Q = \frac{A}{\omega} + C$ manifestum est functionem $P - Q$ abituram esse in $B - C$, qui erit valor finitus. Rationem igitur huiusmodi functionum valores investigandi sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ *casu, quo ponitur* $x = 1$.

Quoniam tam $\frac{x}{x-1}$ quam $\frac{1}{lx}$ fit infinitum posito $x = 1$, statuatur $x = 1 + \omega$, atque expressio proposita transformabitur in $\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$. Cum igitur sit $l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \&c. = \omega\left(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.\right)$ habebitur

$$\frac{(1+\omega)\left(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.\right) - 1}{\omega\left(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.\right)} = \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \&c.}{\omega\left(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega + \&c.}{1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.}$$

Posito nunc ω infinite parvo seu $\omega = 0$, manifestum est valorem quaesitum esse $= \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM II.

Denotantibus e numerum cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, *& π semicircumferentiam circuli, cuius radius est* $= 1$, *investigare valorem huius expressionis:*

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x\left(e^{\pi x} - 1\right)}, \text{ casu } x = 0.$$

Expressio ista proposita exhibet summam huius seriei:

$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{4+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{16+xx}+\frac{1}{25+xx}+$ &c. unde si ponatur $x=0$, prodire debet summa seriei huius $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ &c. quam constat esse $=\frac{\pi\pi}{6}$. Facto autem $x=0$ expressionis propositae $\frac{\pi x-1}{2xx}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ valor maxime videtur indeterminatus, ob omnes terminos infinitos. Ponatur ergo $x=\omega$, existente ω quantitate infinite parva, atque membrum prius $\frac{\pi x-1}{2xx}$ abit in $-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{\pi}{2\omega}$. Cum deinde sit $e^{2\pi\omega}-1=2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+$ &c. alterum membrum $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ abit in

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\text{&c.})}=\frac{1}{2\pi^2(1+\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2+\text{&c.})}$$

At est $\frac{1}{1+\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2+\text{&c.}}=1-\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2-$ &c.

unde posterius membrum fit $=\frac{1}{2\omega^2}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{1}{6}\pi^2-$ &c. ad quod si prius addatur prodit $\frac{1}{6}\pi^2$, qui est valor quaesitus expressionis propositae casu $x=0$.

Idem quoque per methodum fractionum, quarum numerator ac denominator certo casu evanescunt, praestari potest: expressio enim proposita in hanc fractionem transmutatur:

$$\frac{\pi x e^{2\pi x}-e^{2\pi x}+\pi x+1}{2xxe^{2\pi x}-2xx},$$

cuius numerator ac denominator casu $x=0$ evanescunt. Sumtis ergo differentialibus oritur:

$$\frac{\pi e^{2\pi x}+2\pi\pi x e^{2\pi x}-2\pi e^{2\pi x}+\pi}{4xe^{2\pi x}+4\pi xxe^{2\pi x}-4x}$$

sive

sive haec $\frac{\pi - \pi x e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4\pi x e^{2\pi x} + 4\pi\pi x e^{2\pi x} - 4x}$

cuius, si ponatur $x = 0$, adhuc numerator ac denominator evanescunt. Quare sumtis denuo differentialibus habebitur:

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x x e^{2\pi x} - 4}$$

seu $\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$

seu $\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$

cuius numerator ac denominator adhuc evanescunt casu $x = 0$. Quocirca iterum differentialia sumantur

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

quae fractio posito $x = 0$ abit in $\frac{\pi^2}{6}$, ut ante.

EXEMPLUM III.

Retinentibus e *&* π *eosdem valores, quaeratur valor expressionis huius* $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ *casu* $x = 0$

Expressio haec transmutatur in hanc: $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$ cuius numerator ac denominator casu $x = 0$ evanescunt. Ponatur ergo $x = \omega$, & cum sit

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$$

formula proposita transmutatur in hanc:

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \&c.}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \&c.}$$

quae posito ω infinite parvo statim dat $\frac{1}{8}\pi^2$, qui est valor quaesitus expressionis propositae casu $x = 0$. At vero expressio

sio proposita $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$, exhibet summam huius seriei

$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{25+xx} + \frac{1}{49+xx}$ + &c. cuius summa posito $x = 0$ utique fit $= \frac{1}{4}\pi^2$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur valor huius expressionis $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \operatorname{tang} \pi x}$ *casu* $x = 0$.

Formula haec proposita $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \operatorname{tang} \pi x}$ exprimit summam huius seriei infinitae $\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx}$ + &c.

Si igitur ponatur $x = 0$, prodire debet summa seriei

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + &c. quae est $= \frac{1}{6}\pi\pi$.

Quoniam est $\operatorname{tang} \pi x = \frac{\operatorname{sin} \pi x}{\operatorname{cos} \pi x}$, expressio proposita induet hanc formam: $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi \operatorname{cos} \pi x}{2x \operatorname{sin} \pi x} = \frac{\operatorname{sin} \pi x - \pi x \operatorname{cos} \pi x}{2xx \operatorname{sin} \pi x}$ cuius numerator ac denominator evanescit posito $x = 0$. Ponatur ergo $x = \omega$ & cum sit

$\operatorname{sin} \pi x = \pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3$ + &c.

$\operatorname{cos} \pi x = 1 - \frac{1}{2}\pi^2\omega^2$ + &c. expressio proposita fiet:

$$\frac{\pi\omega - \frac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c. - \pi\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\omega^3 - \frac{1}{2}\pi^3\omega^5 + \&c.} = \frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3 - \&c.}{2\pi\omega^3 - \&c.}$$

quae ob ω infinite parvum dat $\frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM V.

Cum sit summa huius seriei infinitae

$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \mathcal{C}c. = \frac{\pi \operatorname{sin} \frac{1}{2}\pi x}{4x \operatorname{cos} \frac{1}{2}\pi x}$

invenire eius summam, si fuerit $x = 0$.

Quia est $\operatorname{sin} \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{48}\pi^3 x^3$ + &c.

& $\operatorname{cos} \frac{1}{2}\pi x = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 x^2$ + &c. erit expressio proposita

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi^3 x - \frac{1}{48}\pi^4 x^3 + \&c.}{4x - \frac{1}{2}\pi^2 x^3 + \&c.} = \frac{\frac{1}{2}\pi^3 - \frac{1}{48}\pi^4 x^2 + \&c.}{4 - \frac{1}{2}\pi^2 x^2 + \&c.}$$

in qua si fiat $x = 0$, valor erit manifesto $= \frac{1}{8}\pi^2$, quam esse summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ supra pluribus modis est demonstratum. Sin autem pro x sumatur numerus par quicunque, summa seriei propositae semper est $= 0$.

366. In his seriebus, quas binis ultimis exemplis tractavimus, aliisque litteram variabilem x continentibus, ipsi x eiusmodi valores tribui possunt, ut quidam termini in infinitum excrescant, quibus quidem casibus summa totius seriei fiet infinita. Sic series:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

si pro x ponatur numerus quicunque integer, unus perpetuo terminus ob denominatorem evanescentem fit infinitus; hancque ob causam ipsa seriei summa infinita evadet. Quodsi autem iste terminus infinitus ex serie tollatur, tum summa reliqua sine dubio erit infinita, exprimeturque summa priori infinita termino isto infinito mulctata, hoc modo $\infty - \infty$: quemnam ergo habitura sit valorem determinatum modo hic exposito inveniri poterit; id quod clarius ex subiunctis exemplis perspicietur.

EXEMPLUM I.

Invenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu $x = 1$, *& demto termino primo, qui hoc casu in infinitum augetur.*

Quia in genere summa est $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \tang \pi x}$, erit summa quaesita $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \tang \pi x} - \frac{1}{1-xx}$ posito $x = 1$.

Sit $x = 1 + \omega$, & habebitur pro summa quaesita

$\frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega)\tang(\pi+\omega\pi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}$. At est $\tang(\pi+\omega\pi) = \tang\omega\pi = \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^3\omega^3 +$ &c. Unde cum primus terminus $\frac{1}{2xx}$ posito $x = 1$ determinatum habeat valorem $\frac{1}{2}$, duo reliqui tantum termini sunt spectandi, qui erunt $\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega)(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^3)} = \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2)}$. Si quidem ω sit infinite parvum, quo casu etiam terminus $\frac{1}{3}\pi^2\omega^2$ negligi poterit. Proveniet autem $\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$, posito $\omega = 0$, estque ergo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ summa serici: $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{19} +$ &c. uti aliunde constat.

EXEMPLUM II.

Invenire summam serici

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{&c.}$$

casu quo pro x *ponitur numerus quicunque integer* n *& demto ex serie termino illo* $\frac{1}{nn-xx}$, *qui fit infinitus*

Summa ergo haec, quae quaeritur, ita erit expressa $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\tang\pi x} - \frac{1}{nn-xx}$, si quidem statuatur $x = n$, quo quidem casu primus terminus $\frac{1}{2xx}$ abit in $\frac{1}{2nn}$, bini vero reliqui ambo fiunt infiniti. Ponatur ergo $x = n+\omega$, & cum sit $\tang(\pi n+\pi\omega) = \tang\pi\omega = \pi\omega$, posito ω infinite parvo, habebimus pro summa quaesita: $\frac{1}{2nn} - \frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega} + \frac{1}{2n\omega+\omega\omega}$ seu $\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n+2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n+\omega)} = \frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$

unde

unde si fiat $\omega = 0$, prodibit summa quaesita $= \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}$. Quo circa erit

$$\frac{3}{4nn} = \frac{1}{1-nn} + \frac{1}{4-nn} + \frac{1}{9-nn} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2-nn} + \frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \text{&c.}$$

in infinitum, sive erit istius seriei infinitae summa:

$$\frac{1}{(n+1)^2-nn} + \frac{1}{(n+2)^2-nn} + \frac{1}{(n+3)^2-nn} + \text{&c.} = \frac{3}{4nn} + \frac{1}{nn-1} + \frac{1}{nn-4} + \frac{1}{nn-9} + \ldots + \frac{1}{nn-(n-1)^2}.$$

EXEMPLUM III.

Invenire summam huius seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \text{&c.}$$

si ponatur $x = 1$, *atque terminus primus* $\frac{1}{1-xx}$,

qui hoc casu fit infinitus, auferatur.

Cum huius seriei summa sit in genere $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x \cos \frac{1}{2}\pi x}$ erit summa quaesita $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4\pi x \cos \frac{1}{2}\pi x} - \frac{1}{1-xx}$, si ponatur $x = 1$. Quia vero uterque terminus fit infinitus, ponatur $x = 1-\omega$, & cum sit $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \cos\frac{1}{2}\pi\omega = 1 - \frac{1}{8}\pi^2\omega^2$, & $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \sin\frac{1}{2}\pi\omega = \frac{1}{2}\pi\omega$ ob ω infinite parvum, habebitur ista expressio: $\frac{\pi\left(1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2\right)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega} - \frac{1}{2\omega-\omega\omega} = \frac{1}{\omega(2-2\omega)} - \frac{1}{\omega(2-\omega)}$ quae fit $= \frac{1}{4}$ posito $\omega = 0$, estque propterea

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \text{&c.}$$

EXEMPLUM IV.

Invenire summam seriei huius:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{ &c.}$$

si pro n *ponatur numerus quicunque integer impar* $2n-1$ *isque terminus* $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ *qui hoc casu fit infinitus, e medio tollatur.*

Erit ergo summa, quae quaeritur, $= \frac{\pi \sin \frac{1}{2}\pi x}{4x\cos \frac{1}{2}\pi x} - \frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ posito $x = 2n-1$. Statuamus ergo $x = 2n-1-\omega$, existente ω infinite parvo, fietque $\sin \frac{1}{2}\pi x = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \pm \cos \frac{1}{2}\pi\omega$, ubi signum superius valet, si fit n numerus impar, inferius vero si sit par. Simili modo erit $\cos \frac{1}{2}\pi x = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\omega\right) = \pm \sin \frac{1}{2}\pi\omega$; ideoque sive n sit par sive impar, erit $\frac{\sin \frac{1}{2}\pi x}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{1}{\tang \frac{1}{2}\pi\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi\omega}$. Hinc summa quaesita ita exprimetur: $\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)} - \frac{1}{\omega[2(2n-1)-\omega]}$, eritque propterea $= \frac{1}{4(2n-1)^2}$. Sic si fit $n=2$, erit

$$\frac{1}{36} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{40}+\frac{1}{72}+\frac{1}{112}+\text{ &c.}$$

cuius summationis veritas aliunde constat.

CA-

CAPUT XVI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM INEXPLICABILIUM.

367.

Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita ut non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}$, quae utique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio $1.2.3.4\ldots x$, erit functio inexplicabilis ipsius x, quoniam si x fit numerus quicunque eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per ullum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus derivari potest. Sit enim proposita series quaecunque

$$A + {}^{1}B + {}^{2}C + {}^{3}D + \ldots + {}^{x}X$$

cuius summa si formula finita exprimi nequeat, praebebit functionem inexplicabilem ipsius x, nempe

$$S = A + B + C + D + \ldots + X.$$

Similiter continua producta ex terminis serierum uti

$$P = A\,B\,C\,D\ldots X$$

exhibebunt functiones inexplicabiles ipsius x, quae autem ope logarithmorum ad formam priorem revocari possunt, erit enim:

$$lP = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

368. Hoc igitur capite methodum explicare constitui, huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia investigandi.

di. Quod argumentum, quamvis ad primam huius operis partem, ubi praecepta calculi differentialis sunt tradita, pertinere videatur; tamen quoniam uberiorem doctrinae serierum cognitionem postulat, ad quam in hac altera parte pervenire licuit, ordinem naturalem relinquere coacti hoc loco attingamus. Cum autem haec investigatio prorsus sit nova, neque a quoquam adhuc tractata, tantum abest ut hanc calculi differentialis partem absolvere queamus, ut potius prima tantum eius elementa adumbrare conemur. Praeterea vero nonnullas quaestiones proponam, quarum enodatio differentiationem huiusmodi functionum inexplicabilium requirat, quo simul usus huius tractationis, qui autem in posterum sine dubio multo amplior erit, clarius perspiciatur.

369. Ad huiusmodi functiones inexplicabiles differentiandas ante omnia necesse est, ut earum valores investigemus, quos induunt, si pro x ponatur $x + \omega$. Sit igitur

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque ponatur Σ valor ipsius S, quem recipit, si pro x ponatur $x + \omega$, sitque Z terminus seriei respondens indicii $x + \omega$. Iam igitur termini, qui respondent indicibus $x+1$, $x+2$, $x+3$, &c. indicentur per X', X'', X''', X^{IV}, &c. atque is, qui convenit indici infinito $x + \infty$ per $X^{[\infty]}$. Similique modo termini competentes indicibus $x+\omega+1$, $x+\omega+2$, $x+\omega+3$ &c. indicentur per Z', Z'', Z''', &c. & sit $Z^{[\infty]}$ terminus respondens indici $x + \omega + \infty$. Quibus positis erit

$$\begin{aligned} \Sigma' &= S + X' \\ \Sigma'' &= S + X' + X'' \\ \Sigma''' &= S + X' + X'' + X''' \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

$\Sigma^{[\infty]} = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{[\infty]}$. Simili modo cum etiam Σ successive terminis Z', Z'' &c. augeatur, erit

Σ'

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.
$$\Sigma^{|\omega|} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\omega|}$$

370. Nunc natura seriei S, S', S'', S''', &c. est perpendenda, qualis futura sit, si in infinitum continuetur; quae si in infinito cum progressione arithmetica confundatur; quod fit si termini seriei X, X', X'', X''', &c. in infinito ad aequalitatem convergant, ita ut differentiae seriei S,S',S'', &c. tandem fiant aequales: hoc casu quantitates $S^{|\omega|}$, $S^{|\omega+1|}$, $S^{|\omega+2|}$ &c. erunt in arithmetica progressione, & cum sit $\Sigma^{|\omega|} = S^{|\omega+\omega|}$ ob $S^{|\omega+\omega|} = S^{|\omega|} + \omega(S^{|\omega+1|} - S^{|\omega|}) = \omega S^{|\omega+1|} + (1-\omega)S^{|\omega|}$ erit $\Sigma^{|\omega|} = \omega S^{|\omega+1|} + (1-\omega)S^{|\omega|}$. At est $S^{|\omega+1|} = S^{|\omega|} + X^{|\omega+1|}$, unde fit $\Sigma^{|\omega|} = S^{|\omega|} + \omega X^{|\omega+1|}$, ex quo obtinebitur haec aequatio

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\omega|} = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\omega|} + \omega X^{|\omega+1|}$$

ex qua definitur valor quaesitus Σ, quem induit functio S, dum in ea $x + \omega$ loco x substituitur; eritque

$$\Sigma = S + \omega X^{|\omega+1|} + X' + X'' + X''' + \text{ &c. in infinitum}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \text{ &c. in infinitum}$$

Quare si seriei A, B, C, D, &c. termini infinitesimi evanescant, terminus $\omega X^{|\omega+1|}$ evanescit, & omitti potest.

371. Exprimitur ergo valor ipsius Σ per novam seriem infinitam, quae exhiberi potest, si seriei A + B + C + &c. habeatur terminus generalis, ex quo valores terminorum Z', Z'', Z''', &c. definiri queant. Posito ergo ω infinite parvo, cum sit $\Sigma - S$ differentiale functionis S, hoc differentiale dS per seriem infinitam exprimetur. Atque si nequidem altiores potestates ipsius ω negligantur, habebitur differentiale completum functionis huius inexplicabilis S, cuius natura, quo clarius ob oculos ponatur, sequentibus exemplis hoc negotium illustrabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale huius functionis inexplicabilis

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

Quoniam huius seriei terminus generalis X est $= \frac{1}{x}$ ac propterea

$X' = \frac{1}{x+1}$	$Z' = \frac{1}{x+1+\omega}$
$X'' = \frac{1}{x+2}$	$Z'' = \frac{1}{x+2+\omega}$
$X''' = \frac{1}{x+3}$	$Z''' = \frac{1}{x+3+\omega}$
&c.	&c.

ob $X^{|\omega+1|} = \frac{1}{x+\omega+1} = 0$, si loco x ponatur $x+\omega$ functio S abibit in Σ, ut sit

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ &c.}$$
$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \text{ &c.}$$

sive binis his terminis in singulos colligendis, erit $\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{ &c.}$

seu cum sit

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \text{ &c.}$$
$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \text{ &c.}$$
&c.

erit seriebus secundum potestates ipsius ω dispositis

$\Sigma =$

$$\Sigma = S + \omega\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\text{&c.}\right)$$
$$-\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+\text{&c.}\right)$$
$$+\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+\text{&c.}\right)$$
$$-\omega^4\left(\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\frac{1}{(x+3)^5}+\frac{1}{(x+4)^5}+\text{&c.}\right)\ \text{&c.}$$

Posito ergo dx pro ω obtinebimus functionis propositae S differentiale completum

$$dS = dx\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\text{&c.}\right)$$
$$-dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+\text{&c.}\right)$$
$$+dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+\text{&c.}\right)$$
$$-dx^4\left(\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\frac{1}{(x+3)^5}+\frac{1}{(x+4)^5}+\text{&c.}\right)\ \text{&c.}$$

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale huius functionis inexplicabilis ipsius S

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x-1}.$$

Quia huius seriei terminus generalis est $X = \frac{1}{2x-1}$; erit:

$X' = \frac{1}{2x+1}$	$Z' = \frac{1}{2x+1+2\omega}$
$X'' = \frac{1}{2x+3}$	$Z'' = \frac{1}{2x+3+2\omega}$
$X''' = \frac{1}{2x+5}$	$Z''' = \frac{1}{2x+5+2\omega}$
&c.	&c.

ob

ob terminos huius seriei infinitesimos evanescentes & aequales, prodibit valor ipsius S, si loco x ponatur $x+1$:

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c.$$
$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+5+2\omega} - \&c.$$

seu

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)} + \&c.$$

Verum si singuli termini in series secundum dimensiones ipsius ω resolvantur, erit:

$$\Sigma = S + 2\omega\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$
$$- 4\omega^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$
$$+ 8\omega^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$
$$- 16\omega^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

Ponatur nunc dx pro ω, atque prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis S propositae:

$$dS = 2dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$
$$- 4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$
$$+ 8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$
$$- 16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

EXEM-

EXEMPLUM III.

Invenire differentiale completum functionis huius inexplicabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x^n}.$$

Cum huius seriei terminus generalis sit $= \frac{1}{x^n}$, erunt termini infinitesimi evanescentes & inter se aequales. Hinc que ob

$$X' = \frac{1}{(x+1)^n} \qquad Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$$
$$X'' = \frac{1}{(x+2)^n} \qquad Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$$
$$X''' = \frac{1}{(x+3)^n} \qquad Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$$
&c. &c.

erit:

$$X' - Z' = \frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \&c.$$
$$X'' - Z'' = \frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \&c.$$
&c.

ex quibus invenitur:

$$\Sigma - S = n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c.\right)$$
$$- \frac{n(n+1)}{1.\,2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c.\right)$$
&c.

Quare posito $\omega = dx$ prodibit differentiale completum functionis S quaesitum:

$$dS = + n\,dx\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c.\right)$$
$$- \frac{n(n+1)}{1.\,2}\,dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3}\,dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

372. Ex his quoque summae istarum serierum interpolari, seu valores terminorum summatoriorum exhiberi possunt, quando numerus terminorum non est numerus integer. Si enim ponatur $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque Σ exprimet summam tot terminorum, quot numerus ω continet unitates, etiamsi iste numerus ω non sit integer. Ita in exemplo primo si ponatur

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\omega}$$

erit:

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

sive

$$\Sigma = \omega\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.\right)$$
$$- \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

In exemplo vero tertio erit:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{\omega^n},$$

Valorque ipsius Σ, sive ω sit numerus integer sive fractus, per series sequenti modo exhibitur:

$$\Sigma =$$

$$\Sigma = n\omega\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+\text{&c.}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\omega^2\left(1+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{4^{n+2}}+\text{&c.}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\omega^3\left(1+\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{3^{n+3}}+\frac{1}{4^{n+3}}+\text{&c.}\right)$$
$$\text{&c.}$$

373. Haec eadem quoque ad seriem generalem accommodari possunt, cum enim sit

$$S = \overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\overset{4}{D}+\ldots+\overset{x}{X}$$

atque posito $x+\omega$ loco x, abeat X in Z, & S in Σ, erit:

$$Z = X+\frac{\omega dX}{dx}+\frac{\omega^2 ddX}{1.2\,dx^2}+\frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\,dx^3}+\text{&c.}$$

& quia simili modo Z', Z'', Z''', &c. per X', X'', X''', &c. exprimuntur, erit:

$$\Sigma = S+\omega X|^{\omega+1}|-\frac{\omega}{dx}d.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$-\frac{\omega^2}{1.2\,dx^2}dd.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$-\frac{\omega^3}{1.2.3\,dx^3}d^3.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$\text{&c.}$$

& nisi $X|^{\omega+1}|$ fit $=0$, hoc modo exprimi poterit, ut considerationem infiniti tollatur:

$$X|^{\omega+1}| = X'+(X''-X')+(X'''-X'')+(X''''-X''')+\text{&c.}$$

eritque ergo:

$$\Sigma = S+\omega X'+\omega[(X''-X')+(X'''-X'')+(X''''-X''')+\text{&c.}]$$
$$-\frac{\omega}{dx}d.[X'+X''+X'''+X''''+X'''''+\text{&c.}]$$
$$-\frac{\omega^2}{2dx^2}dd.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$-\frac{\omega^3}{6dx^3}d^3.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}] \quad \text{&c.}$$

Si ergo ponatur $\omega = dx$, orietur differentiale completum ipsius $S = A+B+C+ \ldots + X$, ita expressum:

$$dS = X'dx + d.[(X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \text{&c.}]$$
$$- d.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$- \tfrac{1}{2}dd.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}]$$
$$- \tfrac{1}{6}d^3.[X'+X''+X'''+X''''+\text{&c.}] \quad \text{&c.}$$

374. Ponamus esse $x = o$, fiet $X' = A$, $X'' = B$, &c. ideoque $X'+X''+X'''+$ &c. erit series infinita cuius terminus generalis est $= X$. Formentur deinde series ex his terminis generalibus:

$$\frac{dX}{dx}; \quad \frac{ddX}{2dx^2}; \quad \frac{d^3X}{6dx^3}; \quad \frac{d^4X}{24dx^4}; \quad \text{&c.}$$

quarum serierum in infinitum continuatarum summae sint:

$$\int X = \mathfrak{A}$$
$$\int \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}$$
$$\int \frac{ddX}{2dx^2} = \mathfrak{C}$$
$$\int \frac{d^3X}{6dx^3} = \mathfrak{D} \qquad \text{&c.}$$

& quia posito $x = o$, fit quoque $S = o$, & Σ erit summa seriei $A+B+C+D+ \ldots +Z$ continentis ω terminos; est enim Z terminus indicis ω, sive ω sit numerus integer sive fractus. Quare habebitur

$$\Sigma = \omega A + \omega[(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{&c.}]$$
$$- \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \text{&c.}$$

ubi prima series praetermitti potest, si seriei propositae termini tandem evanescant.

375. Scribamus nunc x loco ω, abibitque Σ in S ita ut sit

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque idem ipsius S valor iam per seriem infinitam exprimetur hoc modo:

$S =$

$$S = Ax + x[(B-A)+(C-B)+(D-C)+\&c.]$$
$$-\mathfrak{B}x-\mathfrak{C}x^2-\mathfrak{D}x^3-\mathfrak{E}x^4-\mathfrak{F}x^5-\&c.$$

cuius valor cum aeque distincte exprimatur, sive x sit numerus integer sive fractus, differentialia ipsius S cuiusque ordinis hinc facile exhiberi possunt:

$$\frac{dS}{dx} = A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\&c.$$
$$-\mathfrak{B}-2\mathfrak{C}x-3\mathfrak{D}x^2-4\mathfrak{E}x^3-\&c.$$
$$\frac{ddS}{2dx^2} = -\mathfrak{C}-3\mathfrak{D}x-6\mathfrak{E}x^2-10\mathfrak{F}x^3-\&c.$$
$$\frac{d^3S}{6dx^3} = -\mathfrak{D}-4\mathfrak{E}x-10\mathfrak{F}x^2-20\mathfrak{G}x^3-\&c.$$
$$\frac{d^4S}{24dx^4} = -\mathfrak{E}-5\mathfrak{F}x-15\mathfrak{G}x^2-\&c.$$

quare cum differentiale completum sit

$$= dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + \&c.$$

erit functionis propositae S differentiale completum:

$$dS = A\,dx + (B-A)\,dx + (C-B)\,dx + (D-C)\,dx + \&c.$$
$$-\mathfrak{B}\,dx - \mathfrak{C}(2x\,dx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3)$$
$$-\mathfrak{E}(4x^3\,dx + 6x^2\,dx^2 + 4x\,dx^3 + dx^4) - \&c.$$

376. Hoc ergo modo functionis cuiusque inexplicabilis S differentiale assignari potest, si seriei $A+B+C+\&c.$ termini infinitesimi vel evanescant vel inter se sint aequales. Quodsi enim huius termini infinitesimi non fuerint $=0$, tum summa seriei $\mathfrak{B}$, quae ex termino generali $\frac{dX}{dx}$ formatur, fiet infinita; at vero cum serie $A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\&c.$ coniuncta summam finitam constituet. At fieri potest, ut termini seriei $A+B+C+D+\&c.$ ita in infinitum augeantur, ut non solum seriei $\mathfrak{B}$, sed etiam seriei $\mathfrak{C}$ summa fiat

fiat infinite magna, quo casu non sufficit seriem $A+(B-A)+(C-B)+$ &c. adieciſſe: ſed quoniam hoc casu valores infinitesimi §. 370. considerati, nempe $S|^{\omega}|$, $S|^{\omega+1}|$, $S|^{\omega+2}|$, non amplius in arithmetica sunt progressione, uti assumseramus, huius progressionis ratio erit habenda. Quemadmodum ergo assumsimus, horum terminorum differentias primas esse aequales; ita methodum amplius extendemus, si horum valorum differentias demum secundas, vel tertias, vel ulteriores constantes statuamus.

377. Retento ergo eodem ratiocinio, quo §. 369. sumus usi, ponamus memoratorum valorum differentias demum secundas esse constantes:

$$S|^{\omega}|,\quad S|^{\omega+1}|,\quad S|^{\omega+2}|;$$

DIFF. I. $\quad X|^{\omega+1}|,\quad X|^{\omega+2}|$

DIFF. II. $\quad X|^{\omega+2}|-X|^{\omega+1}|$

Hinc erit $\Sigma|^{\omega}| = S|^{\omega+\omega}| = S|^{\omega}| + \omega X|^{\omega+1}| + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}$

$$(X|^{\omega+2}|-X|^{\omega+1}|) = S|^{\omega}| - \frac{\omega(\omega-3)}{1.2}X|^{\omega+1}| + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X|^{\omega+2}$$

Quamobrem habebimus hanc aequationem:

$$\Sigma+Z'+Z''+Z'''+\ldots+Z|^{\omega}| = S+X'+X''+X'''+\ldots+X|^{\omega}| - \frac{\omega(\omega-3)}{1.2}X|^{\omega+1}| + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X|^{\omega+2}|,$$

ex qua elicitur:

$$\Sigma = S+X'+X''+X'''+X''''+\text{&c. in infinitum} - Z'-Z''-Z'''-Z''''-\text{&c. in infinitum} + \omega X|^{\omega+1}| + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X|^{\omega+1}| - X|^{\omega+1}|).$$

Termini autem isti infinitesimi ita repraesentari poterunt, ut sit

$$\Sigma =$$

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c.$$
$$+ \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \&c. \end{array} \right.$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X'' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c. \end{array} \right.$$
$$- \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X' \qquad \left\{ \begin{array}{l} + X' + X'' + X''' + \&c. \end{array} \right.$$

unde simul lex patet, qua haec expressio erit comparata, si differentiae demum tertiae vel quartae vel ulteriores fuerint constantes.

378. Cum igitur sit, ut supra demonstravimus:

$$Z = X + \frac{\omega dX}{1dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

si loco Z', Z'', Z''', &c. valores hinc oriundos substituamus, erit valor ipsius S, si loco x scribatur $x + \omega$, sequens:

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{array} \right.$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X'' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^{V} - \&c. \end{array} \right.$$
$$- \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} X' \qquad \left\{ \begin{array}{l} + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{array} \right.$$
$$- \frac{\omega}{dx} d.(X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.)$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} d^2.(X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.)$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.(X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.)$$

&c.

Si ergo loco ω ponatur dx, prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis propositae S; scilicet

dS

$$dS = X'dx + dx\left\{\begin{matrix}+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\&c.\\-X'-X''-X'''-X^{IV}-\&c.\end{matrix}\right.$$

$$-X''\frac{dx(1-dx)}{1.\ 2}-\frac{dx(1-dx)}{1.\ 2}\left\{\begin{matrix}+X'''+X^{IV}+X^{V}+X^{VI}+\&c.\\-2X''-2X'''-2X^{IV}-2X^{V}-\&c.\\+X'+X''+X'''+X^{IV}+\&c.\end{matrix}\right.$$

$$+X'''\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3}\left\{\begin{matrix}+X^{IV}+X^{V}+\&c.\\-3X'''-3X^{IV}-\&c.\\+3X''+3X'''+\&c.\\-X'-X''-\&c.\end{matrix}\right.$$

$$-2X''\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3}+\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+X'\frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3}$$

&c.

$$-d.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{2}dd.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{6}d^3.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{24}d^4.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\&c.)$$

&c.

quae expreſſio latiſſime patet, & quotcunque demum differentiae fuerint conſtantes, differentiale quaeſitum exhibet. Accommodata enim eſt haec formula ad differentias conſtantes, & ſimul lex patet, ſi forte ulterius progredi neceſſe ſit.

379. Quod ſi ſeries $A+B+C+D+\&c.$ ex qua formatur functio inexplicabilis

$$S = A + \overset{1}{B} + \overset{2}{C} + \overset{3}{D} + \overset{4}{\ldots} + \overset{n}{X}$$

ita fuerit comparata, ut eius termini infinitesimi evaneſcant, tum uti iam notavimus erit:

$$dS = -d.(X'+X''+X'''+X^{IV}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{2}dd.(X'+X''+X'''+X^{IV}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{6}d^3.(X'+X''+X'''+X^{IV}+\&c.)$$
$$-\tfrac{1}{24}d^4.(X'+X''+X'''+X^{IV}+\&c.)$$

&c.

Sin

Sin autem illius seriei termini infinitesimi non sint $=0$, sed tamen differentias habeant evanescentes, tum ad istam expressionem insuper addi debet

$$d\alpha \left\{ \begin{matrix} X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{matrix} \right\}$$

Verum si terminorum infinitesimorum huius seriei $A + B + C + D +$ &c. differentiae demum secundae evanescant, tum praeterea adiici oportet:

$$\frac{d\alpha(d\alpha-1)}{1.\ 2} \left\{ \begin{matrix} +X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ -X' - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c. \\ +X' + X'' + X''' + \&c. \end{matrix} \right\}$$

Atque si memoratorum terminorum infinitesimorum differentiae demum tertiae fuerint evanescentes, tum praeter has iam exhibitas expressiones insuper addi debet.

$$\frac{d\alpha(d\alpha-1)(d\alpha-2)}{1.\ 2.\ 3} \left\{ \begin{matrix} X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X''' - 3X''' - 3X^{IV} - 3X^{V} - \&c. \\ +X' + 3X'' + 3X''' + 3X^{IV} + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - \&c. \end{matrix} \right\}$$

Sicque porro expressiones insuper addendae erunt comparatae, si ulteriores demum differentiae terminorum infinitesimorum seriei $A + B + C + D +$ &c. evanescant. Hincque adeo quaecunque series assumatur, dummodo eius termini infinitesimi tandem ad differentias evanescentes perducantur, functionis inexplicabilis ex ea formatae differentiale definiri poterit.

380. Si ponatur $\alpha = 0$, fiet $X' = A, X'' = B, X''' = C$ &c. Quare uti $A + B + C + D +$ &c. est series, cuius terminus generalis est X, si ex terminis generalibus $\frac{dX}{dx}$; $\frac{ddX}{2dx^2}$; $\frac{d^3X}{6dx^3}$; $\frac{d^4X}{24dx^4}$; &c. simili modo formentur series infinitae, earumque summae denotentur per litteras: $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{E}$; &c. respective. Summa ω terminorum seriei $A + B + C + D +$ &c. ita exprimetur, ut perinde sit, sive ω sit numerus integer sive secus. Scribamus ergo α pro ω, ut sit:

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} \ldots + \overset{x}{X}$$

atque si huius seriei termini infinitesimi evanescant, erit

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{&c.}$$

At si termini infinitesimi differentias saltem primas habeant constantes, tum ad hunc valorem insuper addi debet hic:

$$x\left\{\begin{matrix} A + B + C + D + E + \text{&c.} \\ -A - B - C - D - \text{&c.} \end{matrix}\right\}$$

sin autem illorum terminorum infinitesimorum differentiae demum secundae evanescant, tum praeterea addi debet:

$$\frac{x(x-1)}{1.\ 2}\left\{\begin{matrix} +B & +C & +D & +E & +F & +\text{&c.} \\ -A & -2B & -2C & -2D & -2E & -\text{&c.} \\ & +A & +B & +C & +D & +\text{&c.} \end{matrix}\right\}$$

Si differentiae demum tertiae fuerint evanescentes, tum insuper adiici debet haec series infinita:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\left\{\begin{matrix} +C & +D & +E & +F & +G & +\text{&c.} \\ -2B & -3C & -3D & -3E & -3F & -\text{&c.} \\ +A & +3B & +3C & +3D & +3E & +\text{&c.} \\ & -A & -B & -C & -D & -\text{&c.} \end{matrix}\right\}$$

&c.

381. Accommodemus haec quoque ad alterum functionum inexplicabilium genus, quae constant continuo producto terminorum aliquot seriei popositae $A + B + C + D + \text{&c.}$ sitque

$$S = \overset{1}{A}\ \overset{2}{B}\ \overset{3}{C}\ \overset{4}{D} \ldots\ \overset{x}{X}$$

& quaeratur primo valor Σ, in quem S transmutatur, si loco x scribatur $x + \omega$; ponamus autem ut ante esse Z terminum seriei $A + B + C + D + \text{&c.}$ cuius index sit $= x + \omega$, uti X respondet indici x. Quo ergo hunc casum ad praecedentem reducamus sumamus logarithmos, eritque

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

Quod si iam huius seriei termini infinitesimi evanescant, erit eandem methodum, qua ante usi sumus, adhibendo

$l\Sigma$

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

hincque ad numeros regrediendo erit

$$\Sigma = S.\frac{X'}{Z'}\cdot\frac{X''}{Z''}\cdot\frac{X'''}{Z'''}\cdot\frac{X''''}{Z''''},\ \&c.$$

quae ergo expreſſio valet, ſi ſeriei A, B, C, D, &c. termini infinitesimi unitati aequentur. Sin autem logarithmi terminorum infinitesimorum huius seriei non evaneſcant, at tamen differentias habeant evaneſcentes; tum ad illam seriem, quam pro $l\Sigma$ invenimus, inſuper addi debet haec series

$$\omega lX' + \omega\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \&c.\right)$$

ſicque numeris ſumendis habebitur

$$\Sigma = SX^{1\omega}.\frac{X^{II\omega}.X^{I(1-\omega)}}{Z'}.\frac{X^{III\omega}.X^{II(1-\omega)}}{Z''}.\frac{X^{IV\omega}.X^{III(1-\omega)}}{Z'''}.\ \&c.$$

382. Quodſi ergo ponamus $x = 0$, quo caſu ſit $S = 1$ & $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, &c. Σ denotabit productum ω terminorum huius seriei A, B, C, D, &c. Si igitur pro ω ſcribamus x, ut Σ obtineat valorem, quem ante ipſi S tribueramus, ita ut ſit

$$S = \overset{1}{A}.\overset{2}{B}.\overset{3}{C}.\overset{4}{D}.\ \ldots\ \overset{x}{X}$$

quia nunc Z', Z'', Z''', &c. abeunt in X', X'', X''' &c. ſi logarithmi terminorum infinitesimorum iſtius seriei A, B, C, D, E, &c. evaneſcant, exprimetur S hoc modo

$$S = \frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\frac{D}{X^{IV}}\cdot\frac{E}{X^{V}},\ \&c.$$

Sin autem differentiae demum logarithmorum terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. evaneſcant, tum iſta functio S sequenti modo exprimetur, ut ſit:

$$S = A^x.\frac{B^xA^{1-x}}{X'}.\frac{C^xB^{1-x}}{X''}.\frac{D^xC^{1-x}}{X'''}.\frac{E^xD^{1-x}}{X^{IV}}.\ \&c.$$

si illorum logarithmorum differentiae secundae demum sint evanescentes, ex praecedentibus facile colligitur, cuiusmodi factores insuper addi debeant; quem casum, cum vix occurrere soleat, hic praetermittamus. Ceterum usum harum expressionum in interpolationis negotio capite sequente ostendam.

383. Hic igitur cum differentiatio huiusmodi functionum inexplicabilium potissimum sit proposita: investigemus differentiale huius functionis

$$S = A.B.C.D.\ldots.X$$

Ad hoc resumamus aequationem ante inventam

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \&c. - lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

& cum lZ oriatur ex lX, si loco x ponatur $x+\omega$, erit

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx}d.lX + \frac{\omega^2}{2dx^2}dd.lX + \frac{\omega^3}{6dx^3}d^3.lX + \&c.$$

quibus valoribus pro lZ', lZ'', lZ''', &c. substitutis habebitur

$$l\Sigma = lS - \frac{\omega}{dx}d.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) - \frac{\omega^2}{2dx^2}dd.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) - \frac{\omega^3}{6dx^3}d^3.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) \quad \&c.$$

Ponatur nunc $\omega = dx$, fietque $l\Sigma = lS + d.lS$, ideoque erit

$$\frac{dS}{S} = -d.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) - \tfrac{1}{2}dd.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) - \tfrac{1}{6}d^3.(lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.) \quad \&c.$$

quae formula valet, si logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. evanescant; sin autem ipsi non evanescant, attamen differentias habeant evanescentes, tum ad praecedentem differentialis completi expressionem insuper addi debet haec series:

dx

$$dx\,lX' + dx\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \&c.\right)$$

ut obtineatur differentiale completum.

384. Idem adhuc alio modo praestari potest. Ponatur $x = 0$, quo casu abit lS in 0. Tum formentur series, quarum termini generales sint:

$$lX;\ \frac{d.lX}{dx};\ \frac{dd.lX}{2dx^2};\ \frac{d^3.lX}{6dx^3};\ \&c.$$

harumque serierum infinitarum summae sint respective: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. Scribatur x pro ω, ut sit $\Sigma = S$, eritque

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

si quidem logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. cuius terminus generalis est X, evanescant: at si horum logarithmorum differentiae demum evanescant erit:

$$lS = xlA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

Hinque adeo differentiale ipsius lS erit:

$$\frac{dS}{S} = dxlA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}xdx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \&c.$$

At si differentiale completum desideretur, erit id:

$$\frac{dS}{S} = dxlA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3xxdx + 3xdx^2 + dx^3) - \&c.$$

Ad quarum formularum usum ostendendum sequentia exempla adiicimus, quae utroque modo resolvemus.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\ \ldots\ .\frac{2x-1}{2x}.$$

Hic ante omnia notandum est, terminos infinitesimos horum

rum factorum abire in unitates, ideoque eorum logarithmos evanescere. Cum igitur sit $X = \frac{2x-1}{2x}$, erit

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2}; \quad X'' = \frac{2x+3}{2x+4}; \quad X''' = \frac{2x+5}{2x+6}; \text{ &c.}$$

& generaliter $X^{|n|} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n}$; unde erit:

$$lX^{|n|} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n)$$

$$d.lX^{|n|} = \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n}$$

$$dd.lX^{|n|} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3.lX^{|n|} = +\frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n)^3}$$

$$d^4.lX^{|n|} = -\frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n)^4}$$

&c.

unde erit differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \left\{ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \text{&c.} \right\} \left\{ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \text{&c.} \right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}dx^2 \left\{ \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{&c.} \right\} \left\{ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \text{&c.} \right\}$$

$$-\tfrac{1}{3}dx^3 \left\{ \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{&c.} \right\} \left\{ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \text{&c.} \right\}$$

&c.

Quod

Quod si autem tantum differentiale primum quaeratur erit id:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \text{ in}$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \&c.\right)$$

quod idem altera methodo §. 384. tradita ita investigatur.

Cum sit $lX = l\frac{2x-1}{2x}$, erit $\frac{d.lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$;

$$\frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}; \quad \frac{d^3.lX}{6dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3} \&c.$$

ideoque fiet

$$\mathfrak{A} = l\frac{1}{2} + l\frac{3}{4} + l\frac{5}{6} + l\frac{7}{8} + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{matrix} +\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \&c. \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \&c. \end{matrix}\right\} = 2l2$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \\ -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \&c. \end{matrix}\right\}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8}{3}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \&c. \end{matrix}\right\} \&c.$$

sive erit:

$$\mathfrak{B} = +\frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$

$\mathfrak{D} =$

$$\mathfrak{D} = +\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Quibus valoribus inventis substitutis erit:

$$\frac{dS}{S} = -2\,dx\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$
$$+4xdx\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$
$$-8x^2dx\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$
$$+16x^3dx\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Si igitur sit $x = 0$, quo casu fit $lS = o$ & $S = 1$, erit $dS = -2\,dx\,l2$.

EXEMPLUM II.

Invenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ x$$

Huius seriei 1, 2, 3, 4, &c. termini in infinitum ita crescunt, ut logarithmorum differentiae evanescant: est enim $l(\infty+1) - l\infty = l\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} = o$. Cum igitur sit $X = x$ erit $X' = x+1$; $X'' = x+2$; $X''' = x+3$; &c. porro autem ob $lX = lx$ fiet $d.lX = \frac{dx}{x}$; $dd.lX = -\frac{dx^2}{x^2}$; $d^3.lX = \frac{2dx^3}{x^3}$; $d^4.lX = -\frac{2.3dx^4}{x^4}$; &c. unde si logarithmi ultimi evanescerent, foret

dS

$$\frac{dS}{S} = -dx\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \&c.\right)$$
$$+\frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)$$
$$-\frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

At cum differentiae demum logarithmorum evanescant, insuper addi debet haec expressio:

$$dx\,l(x+1) + dx\left(l\frac{x+2}{x+1} + l\frac{x+3}{x+2} + l\frac{x+4}{x+3} + l\frac{x+5}{x+4} + \&c.\right)$$

Quia vero est:

$$l\frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.$$
$$l\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \&c.$$
$$\&c.$$

erit verum differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = dx\,l(x+1)$$
$$-\tfrac{1}{2}(dx-dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \&c.\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}(dx-dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \&c.\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}(dx-dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \&c.\right)$$
$$+\tfrac{1}{5}(dx-dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

Sin autem altero modo differentiale hoc exprimere velimus, quia est

$$IX = lx;\ \frac{d.IX}{dx} = \frac{1}{x};\ \frac{dd.IX}{2dx^2} = -\frac{1}{2x^2};$$
$$\frac{d^3.IX}{6dx^3} = \frac{1}{3x^3};\ \frac{d^4.IX}{24dx^4} = -\frac{1}{4x^4};\ \text{&c.}$$

habebuntur sequentes series:

$$\mathfrak{A} = l\,1 + l\,2 + l\,3 + l\,4 + l\,5 + \text{&c.}$$
$$\mathfrak{B} = 1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{&c.}\right)$$
$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{&c.}\right)$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{&c.}\right)$$
$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{&c.}\right)$$

&c.

Hinc ob $lA = l\,1 = 0$, fiet ex §. 384:

$$IS = x\left(l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \text{&c.}\right)$$
$$- x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{&c.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{&c.}\right)$$

&c.

Binae autem primae series, per quas x est multiplicatum, etiamsi utraque habeat summam infinitam, tamen ambae simul summam habent finitam. Si enim utriusque n termini capiantur, prodibit:

$l(n$

$$l(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}.$$

At supra §. 142. invenimus esse

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \text{Const.} + l\,n + \frac{1}{2n} - \frac{\mathfrak{A}}{2n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4n^4} - \text{&c.}$$

haecque constans prodit $= 0,577215664901532\,5$. Quodsi ergo ponatur $n = \infty$, erit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = \text{Const.} + l\infty,$$ unde binarum illarum serierum in infinitum continuatarum valor erit $= l(\infty+1) - \text{Const.} - l\infty = -\text{Const.}$ Ex quo erit:

$$lS = -x.\,0,577215664901532\,5 + \tfrac{1}{2}xx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{&c.}\right) - \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{&c.}\right) + \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{&c.}\right) \text{ &c.}$$

unde differentialia cuiusque ordinis facile reperiuntur. Erit enim:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\,0,577215664901532\,5 + x\,dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{&c.}\right) - x^2dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{&c.}\right) + x^3dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{&c.}\right) \text{ &c.}$$

At

At si hae series in unam colligantur erit:

$$\frac{dS}{S} = -dx.0,577215664901532\,5 + \frac{x\,dx}{1(1+x)} + \frac{x\,dx}{2(2+x)} + \frac{x\,dx}{3(3+x)} + \frac{x\,dx}{4(4+x)} + \&c.$$

Quare si sit $x = 0$, fiet:

$$\frac{dS}{S} = -dx.0,577215664901532\,5$$

Ex priori vero expressione hoc casu erit:

$$\frac{dS}{S} = -\tfrac{1}{1}dx\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.\right) + \tfrac{1}{1}dx\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.\right) - \tfrac{1}{1}dx\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.\right) + \tfrac{1}{1}dx\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\&c.\right)$$

&c.

385. Hinc ergo etiam huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia quovis casu speciali exhiberi possunt, propterea quod hic differentialia completa eruimus. Quamobrem si tales functiones ingrediantur in expressiones, quae indeterminatae videntur, cuiusmodi capite praecedente tractavimus; valores eadem methodo definiri poterunt, uti ex adiunctis exemplis intelligetur.

EXEMPLUM I.

Determinare valorem huius expressionis:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$$

eo casu, quando ponitur $x = 1$.

Ponamus $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x} = S$, erit ex §. 372.

$S =$

$$S = x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{&c.}\right)$$
$$- x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{&c.}\right)$$
$$+ x^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{&c.}\right)$$
$$\text{&c.}$$

seu cum sit quoque $S = + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{&c.}$
$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} - \text{&c.}$$

si quivis terminus superioris seriei cum praecedente inferioris combinetur, prodibit:

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \text{&c.}$$

quae expressio, quoniam poni debet $x = 1$ est commodior. Sit ergo $x = 1 + \omega$, fietque

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{&c.}$$

sive $S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{&c.}\right) = 1 + \mathfrak{B}\omega$
$$- \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{&c.}\right) \quad - \mathfrak{C}\omega^2$$
$$+ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{&c.}\right) \quad + \mathfrak{D}\omega^3$$
$$\text{&c.} \qquad\qquad \text{&c.}$$

Tota ergo expressio posito $x = 1 + \omega$ abibit in hanc:

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{&c.}}{\omega(1+\omega)} - \frac{1}{\omega(1+2\omega)} \quad \text{seu}$$

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2 - \text{&c.}}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \text{&c.}}{(1+\omega)(1+2\omega)}$$

Ponatur nunc $\omega = 0$, atque expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{&c.}$ quae series cum sit $= \frac{1}{6}\pi^2$, sequitur valorem quaesitum esse $= \frac{7}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM II.

Invenire valorem huius expressionis:

$$\frac{2x - xx}{(x-1)^3} + \frac{\pi\pi x}{6(x-1)} - \frac{(2x-1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}\right)}{x(x-1)^2}$$

casu quo ponitur $x = 1$.

Ponatur $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = S$, statuaturque $x = 1 + \omega$, fiet ut in exemplo praecedente invenimus: $S = 1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{&c.}$ existente

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{&c.} = \frac{1}{6}\pi\pi - 1$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{&c.}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{&c.}$$

&c.

Posito ergo $x = 1 + \omega$ expressio proposita induet hanc formam:

$$\frac{1 - \omega\omega}{\omega\omega} + \frac{(1+\mathfrak{B})(1+\omega)}{\omega} - \frac{(1+2\omega)(1+\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{&c.})}{(1+\omega)\omega^2}$$

quae ad eandem denominationem $\omega^2(1+\omega)$ perducta fit:

$$\frac{1 + \omega - \omega^2 - \omega^3 + \omega + 2\omega^2 + \omega^3 + \mathfrak{B}\omega(1 + 2\omega + \omega\omega) - 1 - \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{D}\omega^3 - 2\omega - 2\mathfrak{B}\omega^2 + 2\mathfrak{C}\omega^3 \text{ &c.}}{\omega^2(1+\omega)}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^3 + \mathfrak{B}\omega^3 + 2\mathfrak{C}\omega^3 - \mathfrak{D}\omega^3 \text{ &c.}}{\omega^2(1+\omega)}$$

Fiat nunc $\omega = 0$, atque prodibit $1 + \mathfrak{C}$. Quocirca expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= 1 + \mathfrak{C}$, ideoque per

hanc seriem exprimetur: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+$ &c.
cuius summa cum neque per logarithmos, neque per peripheriam circuli π exhiberi possit, valor quaesitus etiamnum alio modo finite assignari non potest. Ex his ergo duobus exemplis usus, quem differentiatio functionum inexplicabilium in doctrina serierum habere potest, satis luculenter perspicitur.

386. In methodo hic tradita functiones inexplicabiles differentiandi assumsimus seriei A, B, C, D, E, &c. terminos infinitesimos vel esse $=0$, vel differentias tandem evanescentes habere; quorum si neutrum contingat, ista methodo uti non licebit. Hancobrem aliam exponam methodum huic conditioni non adstrictam, quam summatio generalis serierum ex termino generali petita & supra fusius explicata suppeditat. Denotent igitur litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. numeros Bernoullianos §. 122. exhibitos, sitque functio inexplicabilis proposita haec: $S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$
& quia supra (130.) ostendimus fore:

$$S=\int X dx+\tfrac{1}{2}X+\frac{\mathfrak{A}dX}{1.2dx}-\frac{\mathfrak{B}d^3X}{1.2.3.4\,dx^3}+\frac{\mathfrak{C}d^5X}{1.2.3.4.5.6\,dx^5}-\text{&c.}$$

hinc facile erit istius functionis S differentiale exhibere erit enim:

$$dS=Xdx+\tfrac{1}{2}dX+\frac{\mathfrak{A}ddX}{1.2\,dx}-\frac{\mathfrak{B}d^4X}{1.2.3.4\,dx^3}+\frac{\mathfrak{C}d^6X}{1.2.3.4.5.6\,dx^5}-\text{&c.}$$

387. Sin autem progressio proposita coniuncta sit cum geometrica, quo casu termini eius infinitesimi nunquam ad differentias constantes reducuntur, ac propterea methodus prior locum invenit nullum; tum methodus §. 174. tradita medelam afferet. Si enim proposita sit haec functio:
$S=Ap+Bp^2+Cp^3+Dp^4+\ldots+Xp^x$,
quaerantur valores litterarum α, β, γ, δ, &c. ut sit

$$\frac{p-1}{p-e^u}=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\text{&c.}$$

quibus inventis, uti eos §. 170. exhibuimus, erit:

$$S = \frac{p}{p-1}.p^x\left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} - \&c.\right)$$

$\pm$ Constante, quae summam reddat $= 0$, si ponatur $x = 0$, seu quae cuiquam alii casui satisfaciat. Sumto ergo differentiali haec constans ex computo abibit, eritque:

$$dS = \frac{p}{p-1}.p^x dx lp\left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \&c\right)$$

$$+ \frac{p}{p-1}.p^x\left(dX - \frac{\alpha ddX}{dx} + \frac{\beta d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^3} + \&c.\right) \text{ sive}$$

$$dS = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(Xdxlp - (\alpha lp - 1)dX + (\beta lp - \alpha)\frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \beta)\frac{d^3X}{dx^2} + \&c.\right)$$

quod est differentiale quaesitum functionis propositae S.

388. Sin autem functio inexplicabilis proposita ex factoribus constet, eorumque logarithmi infinitesimi differentias habeant constantes sive minus; tum hac quoque methodo differentiale functionis perpetuo exhiberi poterit. Sit enim

$$S = \overset{1}{A}.\overset{2}{B}.\overset{3}{C}.\overset{4}{D}.\ldots.\overset{x}{X}.$$

Quia hinc fit $lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$ methodo superiori, numeros Bernoullianos in subsidium vocando erit:

$$lS = \int dx lX + \tfrac{1}{2}lX + \frac{\mathfrak{A}d.lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3.lX}{1.2.3.4dx^3} + \&c.$$

qua expressione differentiata fit:

$$\frac{dS}{S} = dx lX + \tfrac{1}{2}d.lX + \frac{\mathfrak{A}ddd.lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^4.lX}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^6.lX}{1.2.3.4.5.6\,dx^5} - \frac{\mathfrak{D}d^8.lX}{1.2.3\ldots8\,dx^7} + \&c.$$

Hinc si fuerit $X = x$, ut sit:

$$S = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots.\ x$$

fiet applicatione facta

$$\frac{dS}{S} = dx lx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B}dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}dx}{6x^6} + \&c.$$

quae forma, si x sit numerus valde magnus, commodius usurpatur, quam eae, quas ante invenimus. CA-

CAPUT XVII.

DE INTERPOLATIONE SERIERUM.

389.

Series interpolari dicitur, dum eius termini assignantur, qui respondent indicibus fractis, vel etiam surdis. Si igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum quicunque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio praebeat terminum respondentem. Verum si series ita fuerit comparata, ut eius terminus generalis nullo modo exhiberi queat; tum interpolatio huiusmodi serierum plerumque est maxime difficilis, neque maximam partem termini indicibus non integris respondentes aliter nisi per series infinitas definiri possunt. Quoniam ergo in Capite praecedente huiusmodi expressionum, quae more consueto finite exprimi non possunt, valores quibuscunque indicibus respondentes determinavimus; ea tractatio maximam afferet utilitatem ad interpolationes perficiendas. Quam ob causam usum, qui ex superiori Capite in hoc negotium redundat, hic diligentius prosequemur.

390. Sit ergo proposita series quaecunque

$$A^{1} + B^{2} + C^{3} + D^{4} + \ldots . X^{x}$$

cuius terminus generalis X sit cognitus, summatorius autem S lateat. Hinc formetur alia series, cuius terminus generalis aequetur illius seriei termino summatorio, eritque ista nova series:

$$A^{1};\ (A+B)^{2};\ (A+B+C)^{3};\ (A+B+C+D)^{4};\ (A+B+C+D+E)^{5};\ \&c.$$

eiusque terminus generalis seu indici indefinito x respondens

erit $= A + B + C + D + \ldots + X = S$, qui cum explicite non ſit cognitus, interpolatio huius novae ſeriei iiſdem difficultatibus erit obnoxia, quas ante meminimus. Ad hanc ergo ſeriem interpolandam inveſtigari oportet valores ipſius S, quos recipit, ſi loco x numeri quicunque non integri ſubſtituantur. Si enim x eſſet numerus integer, tum conveniens ipſius S valor ſine difficultate reperiretur, additione ſcilicet tot terminorum ſeriei $A + B + C + D +$ &c. quot x contineat unitates.

391. Quo igitur ea, quae in Capite praecedente ſunt tradita, in uſum vocari poſſint, ponamus x eſſe numerum integrum, ita ut valor ei reſpondens $S = A + B + C + \ldots + X$ ſit cognitus, & quaeramus valorem Σ, in quem S tranſmutetur, ſi loco x ſcribatur $x + \omega$, exiſtente ω fractione quacunque; eritque Σ terminus ſeriei propoſitae interpolandae, qui reſpondet indici $x + \omega$; quo ergo inventō, interpolatio huius ſeriei erit in promtu. Sit Z terminus ſeriei A, B, C, D, E, &c. qui reſpondet indici $x + \omega$, ſintque Z', Z'', Z''', &c. termini eius conſecutivi indices habentes $x + \omega + 1$; $x + \omega + 2$: $x + \omega + 3$; &c. Ac primo quidem ponamus ſeriei A, B, C, D, &c. terminos infinitesimos evaneſcere. His ergo poſitis ſeries

$$\overset{1}{A}; \quad \overset{2}{(A+B)}; \quad \overset{3}{(A+B+C)}; \quad \overset{4}{(A+B+C+D)}; \quad \text{&c.}$$

cuius terminus indici x reſpondens eſt

$$S = A + B + C + \ldots + X$$

interpolabitur quaerendo eius terminum Σ, qui indici facto $x + \omega$ reſpondeat, erit autem uti invenimus:

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{&c.}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{&c.}$$

ſicque habebitur ſeries infinita iſti termino quaeſito Σ aequalis, quae ob

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{&c.}$$

in

in hanc formam transmutatur, ut sit:

$$\Sigma = S - \frac{\omega}{dx} d.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{&c.})$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{&c.})$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{&c.})$$
$$\text{&c.}$$

quarum formularum ea, quae quovis casu commodior videatur, adhiberi poterit.

392. Sumamus pro A, B, C, D &c. seriem harmonicam quamcunque $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \text{&c.}$ cuius terminus generalis seu indici x respondens est $= \frac{1}{a+(x-1)b} = X$.

Hinc formata sit ista series:

$$\overset{1}{\frac{1}{a}}; \overset{2}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right)}; \overset{3}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right)}; \overset{4}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b}\right)} \text{&c.}$$

cuius propterea terminus indici x respondens erit:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots + \frac{1}{a+(x-1)b}.$$

Si iam Σ denotet terminum istius seriei indici $x + \omega$ respondentem, ob $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$, erit

$$X' = \frac{1}{a+bx}; \quad Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$$
$$X'' = \frac{1}{a+b+bx}; \quad Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$
$$X''' = \frac{1}{a+2b+bx}; \quad Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$
$$\text{&c.} \qquad\qquad \text{&c.}$$

hinc-

hincque orietur:

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx} + \&c.$$
$$- \frac{1}{a+bx+b\omega} - \frac{1}{a+b+bx+b\omega} - \frac{1}{a+2b+bx+b\omega} - \&c.$$

altera expressio autem erit huiusmodi:

$$\Sigma = +b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a+b+bx)^2} + \frac{1}{(a+2b+bx)^2} + \&c.\right)$$
$$-b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a+b+bx)^3} + \frac{1}{(a+2b+bx)^3} + \&c.\right)$$
$$+b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a+b+bx)^4} + \frac{1}{(a+2b+bx)^4} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$

EXEMPLUM I.

Proposita sit ista series

$$1^{\frac{1}{1}};\ (1+\tfrac{1}{1})^{\frac{2}{1}};\ (1+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{1})^{\frac{3}{1}};\ (1+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{1})^{\frac{4}{1}};\ \&c.$$

cuius terminos, qui indicibus fractis respondent, inveniri oporteat.

Erit ergo $a = 1$ & $b = 1$; unde si terminus indici integro x respondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x};$$

terminusque indici fracto $x+\omega$ respondens vocetur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \frac{1}{5+x+\omega} - \&c.$$

Notandum autem est, si inventus fuerit terminus respondens indici fracto ω, quem ponamus $= T$, ex eo terminum indicis

dicis $x+\omega$ facile inveniri posse; erit enim si T', T'', T''', &c. denotent terminos indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes:

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$T''' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega} \quad ; \quad \&c.$$

unde sufficit eos tantum terminos, qui respondent indicibus ω unitate minoribus, investigasse. Quem in finem ponamus $x=0$, erit quoque $S=0$, atque terminus seriei T indici fracto ω respondens ita exprimetur:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \&c.$$

vel his fractionibus in series infinitas conversis prodibit altera expressio:

$$T = +\omega\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.\right)$$
$$-\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\&c.\right)$$
$$+\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.\right)$$
$$-\omega^4\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

quae ad valorem ipsius T proxime inveniendum perquam est apta.

Quaeratur ergo propositae seriei terminus respondens indici $\frac{1}{2}$, qui si ponatur $= T$, erit: $T =$

$$T = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \&c.$$

seu $T = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.)$

cuius seriei valor est $= 2 - 2/2$, sicque terminus indicis $= \frac{1}{2}$ finite exprimi potest. Erunt ergo termini sequentes, quorum indices sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ita expressi:

Ind. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Term. $2 - 2/2$; $2\frac{1}{3} - 2/2$; $2\frac{1}{3}\frac{1}{5} - 2/2$; $2\frac{1}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{7} - 2/2$; &c.

EXEMPLUM II.

Proposita sit ista series:

1^{1}; $(1 + \frac{1}{3})^{2}$; $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})^{3}$; $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})^{4}$; &c.

cuius terminos indicibus fractis respondentes exprimere oporteat:

Erit ergo $a = 1$, $b = 2$, unde si terminus indici integro x respondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x-1}$$

terminusque indici fracto $x + \omega$ vocetur $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5+2x} + \frac{1}{7+2x} + \&c.$$

$$- \frac{1}{1\frac{1}{2}(x+\omega)} - \frac{1}{3\frac{1}{2}(x+\omega)} - \frac{1}{5\frac{1}{2}(x+\omega)} - \frac{1}{7\frac{1}{2}(x+\omega)} - \&c.$$

Cum igitur sufficiat terminos indicibus unitate minoribus assignasse, sit $x = 0$, & $S = 0$: quocirca si terminus indici ω conveniens ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c.$$

$$- \frac{1}{1\frac{1}{2}\omega} - \frac{1}{3\frac{1}{2}\omega} - \frac{1}{5\frac{1}{2}\omega} - \frac{1}{7\frac{1}{2}\omega} - \frac{1}{9\frac{1}{2}\omega} - \&c.$$

& si ω numerum quemcunque denotare ponatur, quoniam T est terminus indici ω respondens, erit T terminus generalis seriei propositae, qui etiam hoc modo exprimetur:

$$T = \frac{2\omega}{1(1\frac{1}{2}\omega)} + \frac{2\omega}{3(3\frac{1}{2}\omega)} + \frac{2\omega}{5(5\frac{1}{2}\omega)} + \frac{2\omega}{7(7\frac{1}{2}\omega)} + \&c.$$ vel ita

$T =$

$$T = 2\omega\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\&c.\right)$$
$$-4\omega^3\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\&c.\right)$$
$$+8\omega^5\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\&c.\right)$$
$$-16\omega^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

Ponamus esse $\omega = \frac{1}{4}$, erit terminus huic indici respondens $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. = l2$, eruntque

Ind. $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{9}{4}$

Term. $l2$; $\frac{1}{3} + l2$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + l2$; $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + l2$; &c.

Si sit $\omega = \frac{1}{6}$; erit

$$T = +1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c.$$
$$- \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \&c.$$

sive $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. = \frac{\pi}{4}$

393. Quod si ergo huius seriei generalis:

$$\frac{1}{a} ; \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right) ; \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right) ; \&c.$$

quaeratur terminus respondens indici $= \frac{1}{2}$, ponatur in expressionibus §. praeced. $x = 0$, & $\omega = \frac{1}{2}$; fietque $S = 0$, & terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens quaesitus erit

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \&c.$$

sive terminis ad maiorem uniformitatem perductis erit

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \&c.$$

in qua serie cum signa + & — alternentur, sumendis continuis differentiis per methodum supra expositam valor ipsius $\frac{1}{2}\Sigma$ per seriem magis convergentem exprimetur. Erunt autem differentiarum series:

$$\frac{b}{2a(2a+b)};\ \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)};\ \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

$$\frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)};\ \frac{2bb}{(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

$$\frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \&c.$$

&c.

Ex quibus concluditur fore:

$$\tfrac{1}{2}M = \frac{1}{4a} + \frac{1b}{8a(2a+b)} + \frac{1.2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)} + \frac{1.2.3b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

Hincque ergo habebitur:

$$M = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}.b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}bb}{2a(2a+b)(2a+2b)} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

quae series maxime convergit, atque valorem termini Σ facili labore proxime exhibet.

394. Quod si autem in genere seriei A, B, C, D, E, &c. termini infinitesimi evanescant, terminusque indici ω respondens fuerit $=Z$, eiusque sequentes, qui indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. respondeant, sint Z', Z'', Z''', Z^{IV}, &c. Si in superioribus (391) ponatur $x=0$, ut sit $S=0$ & $X'=A$, $X^b=B$, $X'''=C$, &c. sequetur, si formetur huiusmodi series:

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{(A+B)},\ \overset{3}{(A+B+C)},\ \overset{4}{(A+B+C+D)},\ \&c.$$

eiusque terminus indici ω respondens ponatur $=\Sigma$, fore

$$\Sigma = (A-Z') + (B-Z'') + (C-Z''') + (D-Z^{IV}) + \&c.$$

ex qua expressione termini quicunque intermedii definiri poterunt. Sufficiet autem ad interpolationem perficiendam eos terminos investigasse, qui respondeant indicibus ω unitate minori-

noribus. Si enim terminus Σ indici huiusmodi cuicunque ω respondens fuerit repertus, iique qui conveniant indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. ponantur Σ', Σ'', Σ''' Σ^{IV} &c. erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.

EXEMPLUM I.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{1};\overset{2}{(1+\tfrac{1}{4})};\overset{3}{(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9})};\overset{4}{(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16})};$$
&c.

Sit Σ huius seriei terminus respondens indici ω, & cum haec series formata sit ex summatione huius:

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\text{&c.}$$

cuius terminus indici ω respondens est $=\frac{1}{\omega^2}$ erit

$$\Sigma = +1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{&c.}$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \text{&c.}$$

Quod si ergo seriei propositae quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, poni debebit $\omega=\frac{1}{2}$, fietque:

$$\Sigma = 1 - \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{25} - \tfrac{4}{49} + \text{&c. sive}$$
$$\Sigma = 4\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{49} + \text{&c.}\right)$$

Cum igitur sit $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{&c.} = \frac{\pi^2}{12}$, erit

$\Sigma = 4\left(1 - \frac{\pi\pi}{12}\right) = 4 - \frac{1}{3}\pi^2$, qui est terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens. Hinc ergo respondebunt

Indicibus $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ &c.
Termini $4-\frac{1}{3}\pi^2$; $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\pi^2$; $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}-\frac{1}{3}\pi^2$; &c.

EXEMPLUM II.

Interpolare hanc seriem:

$$1^{\frac{1}{1}};(1+\tfrac{1}{2})^{\frac{2}{1}};(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6})^{\frac{3}{1}};(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{24})^{\frac{4}{1}}\ \&c.$$

Sit M terminus respondens indici cuicunque ω, & cum haec series formata fit ex summatione huius:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{42}+\&c.$$

ex qua fit terminus indici ω respondens $Z=\frac{1}{(2\omega-1)^2}$

erit $Z'=\frac{1}{(2\omega+1)^2}$; $Z''=\frac{1}{(2\omega+3)^2}$; $Z'''=\frac{1}{(2\omega+5)^2}$

&c.

Quamobrem habebitur:

$$M=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\&c.$$
$$-\frac{1}{(1+2\omega)^2}-\frac{1}{(3+2\omega)^2}-\frac{1}{(5+2\omega)^2}-\frac{1}{(7+2\omega)^2}-\&c.$$

Ponamus $\omega=\frac{1}{2}$, ut inveniamus terminum seriei propositae respondentem indici $=\frac{1}{2}$, qui erit:

$$M=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\&c.=\frac{\pi\pi}{12},$$

ex quo termini, qui medium interiacent inter binos quosvis datos, sequenti modo exprimentur. Respondebunt

Ind. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; &c.

Term. $\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{\pi\pi}{12}$; &c.

EXEMPLUM III.

Interpolare hanc seriem:

$$1^{\frac{1}{1}};\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{2}{1}};\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{3}{1}};\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)^{\frac{4}{1}};\ \&c.$$

Sit ut ante M terminus indici ω respondens, erit

$Z=$

$Z=\frac{1}{\omega^n}$; & $Z'=\frac{1}{(1+\omega)^n}$; $Z''=\frac{1}{(2+\omega)^n}$; $Z'''=\frac{1}{(3+\omega)^n}$; &c.

hincque habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \&c.$$

Si igitur desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens: erit is

$$= 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \&c.$$

seu $= 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \&c.\right)$

Quare si ponatur:

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$$

erit seriei propositae terminus qui indici $\frac{1}{2}$ respondet $= 2^n(1-\mathfrak{N})$; hincque respondebunt

Indic. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; &c.

Term. $2^n - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n\mathfrak{N}$; &c.

EXEMPLUM IV.

Interpolare hanc seriem:

1 2 3 4

$1; \left(1+\frac{1}{3^n}\right); \left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right); \left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}\right)$; &c.

Sit Σ terminus qui indici cuicunque ω respondeat, & cum sit $Z=\frac{1}{(2\omega-1)^n}$, erit:

$Z'=\frac{1}{(2\omega+1)^n}$; $Z''=\frac{1}{(2\omega+3)^n}$; $Z'''=\frac{1}{(2\omega+5)^n}$; &c.

atque $\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$
$- \frac{1}{(1+2\omega)^n} - \frac{1}{(3+2\omega)^n} - \frac{1}{(5+2\omega)^n} - \frac{1}{(7+2\omega)^n} - \&c.$

Ponatur $\omega = \frac{1}{2}$, & prodibit terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c. = \mathfrak{N}$$

ex quo porro erunt reliqui termini inter binos datos medii

Indices: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; &c.

Termini: $\mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{N}$; &c.

395. Ponamus nunc seriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius summatione series interpolanda formatur, terminos infinitesimos non evanescere, sed ita esse comparatos, ut eorum differentiae evanescant; sitque X huius seriei terminus respondens indici x, & Z terminus respondens exponenti $x+\omega$, tum vero sint X', X'', X''', X'''', &c. termini ipsum X sequentes, & Z', Z'', Z''', &c. termini ipsum Z sequentes. Quibus positis proponatur haec series interpolanda:

$$A^1; (A+B)^2; (A+B+C)^3; (A+B+C+D)^4; \&c.$$

cuius terminus indici x respondens sit $= S$, at terminus indici $x+\omega$ respondens fit $= \Sigma$; eritque ex iis, quae Capite praecedente sunt tradita: $\Sigma = S + X' + X'' + X''' + \&c.$
$- Z' - Z'' - Z''' - \&c.$
$+ \omega X' + \omega\{X'' + X''' + X'''' + \&c.\}$
$\{-X' - X'' - X''' - \&c.\}$

Quia autem ut ante sufficit terminos indicibus unitate minoribus respondentes investigasse, ponamus $x = 0$, ut sit $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, &c. eritque terminus indici ω respondens:

$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') \&c.$
$+ \omega A + \omega[(B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \&c.]$

Vel si differentias has more supra recepto exprimere velimus quo est $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$; &c. habebitur:

$$\Sigma = (A-Z') + (B-Z'') + (C-Z''') + (D-Z'''') + \&c. + \omega(A+\Delta A+\Delta B+\Delta C+\Delta D+\&c.)$$

396. Sin autem seriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius summatione series interpolanda formatur, termini infinitesimi neque ipsi evanescant, neque differentias primas habeant evanescentes; tum plures series ad valorem ipsius Σ exprimendum adiici debebunt, quoad scilicet ad differentias terminorum infinitesimorum evanescentes perveniatur. Sit enim ut ante seriei A, B, C, D, E, &c. terminus indici x respondens $= X$, eumque sequentes X', X'', X''', &c. indici autem $x+\omega$ respondeat terminus Z, quem sequantur Z', Z'', &c. atque proponatur haec series:

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \&c.$$

cuius terminus indici x respondens sit

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

indici vero $x+\omega$ respondeat terminus Σ; ita ut

indicibus	respondeant termini
$x+\omega+1$	$\Sigma' = M + Z'$
$x+\omega+2$	$\Sigma'' = M' + Z' + Z''$
$x+\omega+3$	$\Sigma''' = M'' + Z' + Z'' + Z'''$
&c.	&c.

Si iam differentiae terminorum ita exprimantur, ut sit

$\Delta X' = X'' - X'$; $\Delta X'' = X''' - X''$; $\Delta X''' = X'''' - X'''$; &c.

$\Delta^2 X' = \Delta X'' - \Delta X'$; $\Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X''$; $\Delta^2 X''' = \Delta X'''' - \Delta X'''$; &c.

$\Delta^3 X' = \Delta^2 X'' - \Delta^2 X'$; $\Delta^3 X'' = \Delta^3 X''' - \Delta^3 X''$; &c.

ex §. 377. terminus Σ sequenti modo exprimetur:

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c.$$
$$+ \omega[X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \Delta X'''' + \&c.]$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}[\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \Delta^2 X'''' + \&c.]$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}[\Delta^3 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \Delta^3 X'''' + \&c.]$$

397. Sufficit, uti iam notavimus, tot huiusmodi series adieciſſe, donec ad terminorum infinitesimorum differentias evaneſcentes perveniatur: ſi enim has ipſas ſeries quoque in infinitum continuare velimus, vel eo uſque ſaltem, donec terminorum finitorum differentiae evaneſcant; tum ob

$$Z' = X' + \omega \Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} \Delta^3 X' + \&c.$$

tota expreſſio inventa contrahetur in hanc:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} \Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} \Delta^2 X' + \&c.$$

quae terminum ſummatorium ſeriei $A + B + C + D +$ &c. involvit; qui autem ſi eſſet cognitus, interpolatio nullam haberet difficultatem. Interim tamen & hac formula uti licebit, quippe quae, quoties abrumpitur, quemvis terminum interpolandum finite & algebraice expreſſum exhibet: ſin autem in infinitum progrediatur, plerumque praeſtat priorem formulam adhibere, in qua ratio terminorum infinitesimorum habetur. Haec vero, ſi ponatur $x = 0$, ut Σ denotet terminum indici ω reſpondentem, ob $S = 0$ hanc formam induet:

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & + A + B + C + D + \&c. \\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ & + \omega [A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} [\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} [\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \&c.] \\ & \qquad \&c.\end{aligned}$$

Vel ſi ponatur brevitatis gratia:

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega-1)}{1.2} = \beta; \quad \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3} = \gamma; \ \&c.$$

erit

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \alpha A + \beta \Delta A + \gamma \Delta^2 A + \delta \Delta^3 A + \&c. \\ & + A + \alpha \Delta A + \beta \Delta^2 A + \gamma \Delta^3 A + \&c. - Z' \\ & + B + \alpha \Delta B + \beta \Delta^2 B + \gamma \Delta^3 B + \&c. - Z'' \\ & + C + \alpha \Delta C + \beta \Delta^2 C + \gamma \Delta^3 C + \&c. - Z''' \\ & \qquad \&c.\end{aligned}$$

qua-

quarum ſerierum horizontalium numerus in infinitum quidem progreditur, at quaelibet finito terminorum numero conſtat.

EXEMPLUM.

Interpolare hanc ſeriem:

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{1}+\frac{2}{1};\ \frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{3};\ \frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{4};\ \text{&c.}$$

Sit huius ſeriei terminus indici ω reſpondens $= M$, & cum ea oriatur ex ſummatione huius ſeriei:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \text{&c.} \quad \text{erit } Z = \frac{\omega}{\omega+1};$$

& quia termini infinitesimi differentias ſuas primas iam habent evaneſcentes, differentiae tantum primae ſunt accipiendae, quae erunt:

$$\text{ob } A = \frac{1}{2};\ B = \frac{2}{3};\ C = \frac{3}{4};\ D = \frac{4}{5};\ \text{&c.}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2\cdot 3};\ \Delta B = \frac{1}{3\cdot 4};\ \Delta C = \frac{1}{4\cdot 5};\ \text{&c.}$$

Hinc ergo habebitur:

$$M = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \frac{\omega}{5\cdot 6} + \text{&c.}$$
$$- \frac{\omega+1}{\omega+2} - \frac{\omega+2}{\omega+3} - \frac{\omega+3}{\omega+4} - \frac{\omega+4}{\omega+5} - \text{&c.}$$

seu ob $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \text{&c.} = \omega$; erit

$$M = \omega + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{&c.}$$
$$- \frac{\omega+1}{\omega+2} - \frac{\omega+2}{\omega+3} - \frac{\omega+3}{\omega+4} - \frac{\omega+4}{\omega+5} - \text{&c.}$$

Si ergo quaeratur terminus indici $\frac{1}{1}$ reſpondens, erit is

$M =$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \&c.$$

$$\text{seu } \mathfrak{M} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{5.11} - \frac{1}{6.13} - \&c.$$

$$\text{ideoque } \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \frac{1}{8.9} - \frac{1}{10.11} - \frac{1}{12.13} - \&c.$$

$$\text{seu } \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \&c.$$
$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c.$$

Quare cum sit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c. = l2$

erit $\frac{1}{2}\mathfrak{M} = l2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = l2 - \frac{7}{12}$,

ideoque $\mathfrak{M} = 2l2 - \frac{7}{6}$.

398. Pergamus nunc ad series interpolandas, quarum termini ex factoribus sunt conflati, sitque proposita haec series generalissima:

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{AB};\ \overset{3}{ABC};\ \overset{4}{ABCD};\ \overset{5}{ABCDE};\ \&c.$$

cuius terminus indici ω respondens sit $= \mathfrak{M}$. Erit ergo $l\mathfrak{M}$ terminus respondens indici ω in hac serie:

$$\overset{1}{lA};\ \overset{2}{(lA+lB)};\ \overset{3}{(lA+lB+lC)};\ \overset{4}{(lA+lB+lC+lD)};\ \&c.$$

Quodsi ergo ponamus huius seriei terminos infinitesimos evanescere; atque seriei A, B, C, D, E, &c. terminum indici ω respondentem esse Z, eiusque sequentes indicibus $\omega+1, \omega+2, \omega+3$, &c. respondentes esse Z', Z'', Z''', Z'''', &c. erit ex supra demonstratis: $l\mathfrak{M} = +lA + lB + lC + lD + \&c.$
$$-lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c.$$

Hinc

Hinc igitur ad numeros progrediendo habebitur:

$$\Sigma = \frac{A}{Z'} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \&c.$$

399. Quodsi autem terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. logarithmi non evanescant, sed habeant differentias evanescentes, erit uti vidimus:

$$l\Sigma = +lA + lB + lC + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$
$$+\omega lA + \omega\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \&c.\right)$$

hincque ad numeros a logarithmis procedendo fiet

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} \cdot \&c.$$

At si illorum logarithmorum infinitesimorum differentiae demum secundae evanescant, erit:

$$l\Sigma = lA + lB + lC + lD + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c.$$
$$+\omega\left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$+\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DE}{E^2} + \&c.\right)$$

Ex his itaque obtinebitur:

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1.2}} \cdot B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}} \cdot \frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} B^{\frac{\omega(2-\omega)}{1.2}} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} C^{\frac{\omega(2-\omega)}{1.2}} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z''} \&c.$$

quae si $\omega < 1$ commodius ita exprimetur:

$$\Sigma = \frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1.2}} \cdot A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} B^{\frac{\omega(2-\omega)}{1.2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} C^{\frac{\omega(2-\omega)}{1.2}}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z''} \cdot \&c.$$

400. Accommodemus hanc interpolationem ad istam seriem:

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}};\ \text{&c.}$$

cuius factores desumti sunt ex hac serie:

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}};\ \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}};\ \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}};\ \text{&c.}$$

cuius terminorum infinitesimorum logarithmi sunt $=0$.

Erit ergo $Z=\frac{a-c+c\omega}{b-c+c\omega}$; $Z'=\frac{a+c\omega}{b+c\omega}$; &c.

Hinc si illius seriei terminus indici ω respondens ponatur $=\Sigma$, erit ex §. 398:

$$\Sigma=\frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)}\cdot\frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)}\cdot\frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)}\cdot\text{&c.}$$

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega=\frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma=\frac{a(2b+c)}{b(2a+c)}\cdot\frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)}\cdot\frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)}\cdot\text{&c.}$$

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\ \overset{2}{\frac{1\cdot3}{2\cdot4}};\ \overset{3}{\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}};\ \overset{4}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}};\ \overset{5}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}};\ \text{&c.}$$

Cum hic sit $a=1$, $b=2$, & $c=2$; sit terminus indici cuicunque ω respondens $=\Sigma$, erit

$$\Sigma=\frac{1(1+2\omega)}{2(1+2\omega)}\cdot\frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)}\cdot\frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)}\cdot\frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)}\cdot\text{&c.}$$

Hinc si termini, qui indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. respondent, ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c. erit:

$\Sigma'=$

$$M' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot M$$

$$M'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot M$$

$$M''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega} \cdot M \quad \&c.$$

Si itaque desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit: $M = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10} \cdot$ &c.

Verum posito $\pi =$ semicircumferentiae circuli, cuius radius est $= 1$, supra ostendimus esse:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \quad \&c.$$

Hancobrem termini intermedii indicibus $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. per peripheriam circuli exprimi poterunt, hoc modo:

Indices: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

Termini: $\frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}$; $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\pi}$; $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2}{\pi}$; &c.

Quam eandem interpolationem *Wallisius* in arithmetica infinitorum invenit:

401. Consideremus nunc istam seriem:

$$a^1; a^2(a+b); a^3(a+b)(a+2b); a^4(a+b)(a+2b)(a+3b); \text{ &c.}$$

cuius factores hanc progressionem arithmeticam constituunt:

$$a, (a+b), (a+2b), (a+3b), (a+4b), \text{ &c.}$$

huiusque termini infinitesimi ita sunt comparati, ut eorum logarithmorum differentiae evanescant. Cum igitur sit $Z = a - b + b\omega$, & $Z' = a + b\omega$; $Z'' = a + b + b\omega$; $Z''' = a + 2b + b\omega$; &c. si M denotet terminum seriei propositae, cuius index est $= \omega$, erit:

$$M = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega} \cdot \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega} \cdot \quad \&c.$$

Hocque valore invento, si ω denotet numerum quemvis fractum unitate minorem, termini sequentes indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ita determinabuntur, ut sit

$$\begin{aligned} M M' &= (a+b\omega)\, M \\ M M'' &= (a+b\omega)\,(a+b+b\omega)\, M \\ M M''' &= (a+b\omega)\,(a+b+b\omega)\,(a+2b+b\omega)\, M \end{aligned}$$

&c.

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$M = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \text{&c.}$$

ideoque sumtis quadratis:

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \text{&c.}$$

402. Ponatur in serie quam supra tractavimus:

$$\overset{1}{\frac{f}{g}}, \overset{2}{\frac{f(f+b)}{g(g+b)}}, \overset{3}{\frac{f(f+b)(f+2b)}{g(g+b)(g+2b)}}, \overset{4}{\frac{f(f+b)(f+2b)(f+3b)}{g(g+b)(g+2b)(g+3b)}}; \text{ &c.}$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $= \Theta$, erit:

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}b)}{g(f+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(f+b)(g+\frac{1}{2}b)}{(g+b)(f+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(f+2b)(g+\frac{1}{2}b)}{(g+2b)(f+\frac{1}{2}b)} \cdot \text{ &c.}$$

statuatur nunc: $f = a$; $g = a+\frac{1}{2}b$; & $b = b$; erit

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \text{ &c.}$$

ideoque fiet $\Sigma^2 = a\Theta$, & $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Quocirca si huius seriei:

$$\overset{1}{a}; \overset{2}{a(a+b)}; \overset{3}{a(a+b)(a+2b)}; \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}; \text{ &c.}$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens statuatur $= \Sigma$; atque huius seriei:

$$\frac{1}{a}; \frac{2}{a(a+b)}; \frac{3}{a(a+b)(a+2b)}; \text{ &c.}$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Theta$; erit $\mathfrak{M} = \sqrt{a\Theta}$.

Cum igitur hic seriei solorum numeratorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens sit $= \mathfrak{M}$, si in serie denominatorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Lambda$; erit $\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\Lambda}$; at est $\Theta = \frac{\mathfrak{M}^2}{a}$, unde fiet $\mathfrak{M} = \frac{a}{\Lambda}$, seu $\mathfrak{M}\Lambda = a$, quibus theorematibus interpolatio huiusmodi serierum non mediocriter illustratur.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec series interpolanda:

$$1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, \text{ &c.}$$

Quia hic est $a = 1$, & $b = 1$, si terminus indici ω respondens ponatur $= \mathfrak{M}$, erit:

$$\mathfrak{M} = \frac{1^{1-\omega}2^{\omega}}{1+\omega} \cdot \frac{2^{1-\omega}3^{\omega}}{2+\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega}4^{\omega}}{3+\omega} \cdot \frac{4^{1-\omega}5^{\omega}}{4+\omega} \text{ &c.}$$

Hic pro ω semper fractio unitate minor accipi potest nihilominus enim interpolatio per totam seriem extendetur. Nam si termini indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ponantur $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, &c. erit:

$$\mathfrak{M}' = (1+\omega)\mathfrak{M}$$
$$\mathfrak{M}'' = (1+\omega)(2+\omega)\mathfrak{M}$$
$$\mathfrak{M}''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\mathfrak{M}$$
$$\text{&c.}$$

Seriei ergo propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit:

$$\mathfrak{M} = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1^{\frac{1}{2}}}; \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}; \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}; \text{ &c. sive}$$

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \text{ &c.}$$

Un-

Unde cum sit $\pi = 2 \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7}$ &c.

erit $\Sigma^2 = \frac{\pi}{4}$ & $\Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: hincque respondebunt

Indicibus : $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Termini : $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3.5}{2.2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3.5.7}{2.2.2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; &c.

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec series interpolanda :

1 ; 1 . 3 ; 1 . 3 . 5 ; 1 . 3 . 5 . 7 ; &c.

Quia hic est $a = 1$; $b = 2$; si terminus indici ω respondens ponatur $= M$ erit :

$$M = \frac{1^{1-\omega} 3^{\omega}}{1+2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} 5^{\omega}}{3+2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} 7^{\omega}}{5+2\omega} \cdot \text{&c.}$$

terminique ordine sequentes ita erunt comparati :

$$M' = (1+2\omega) M$$
$$M'' = (1+2\omega)(3+2\omega) M$$
$$M''' = (1+2\omega)(3+2\omega)(5+2\omega) M$$
&c.

Si igitur seriei propositae desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, isque vocetur $= \Sigma$, erit :

$$\Sigma = \frac{\sqrt{1.3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3.5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5.7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{7.9}}{8} \cdot \text{&c.}$$ ergo

$$\Sigma^2 = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \text{&c.} = \frac{2}{\pi},$$

ideoque habebitur $\Sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. At respondebunt

Indicibus : $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ &c.

Termini : $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4.6 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; &c.

Quodsi ergo prior series & haec invicem multiplicentur ut habeatur haec series : 1

$$\overset{1}{1^1}\ ;\ \overset{3}{1^1.2.3}\ ;\ \overset{2}{1^2.2.3^2.5}\ ;\ \overset{4}{1^2.2.3^3.4.5.7}\ ;\ \overset{5}{1^2.2.3^3.4.5^3.7.9}\ ;$$
&c.

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

quod facile perspicitur, si isti seriei haec forma tribuatur:

$$\frac{\overset{1}{1.2}}{2}\ ;\ \frac{\overset{2}{1.2.3.4}}{2^2}\ ;\ \frac{\overset{3}{1.2.3.4.5.6}}{2^3}\ ;\ \frac{\overset{4}{1.2.3.4.5.6.7.8}}{2^4}\ ;\ \text{&c.}$$

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens manifesto est $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXEMPLUM III.

Sit ista series proposita interpolanda:

$$\frac{\overset{1}{n}}{1}\ ;\ \frac{\overset{2}{n(n-1)}}{1.2}\ ;\ \frac{\overset{3}{n(n-1)(n-2)}}{1.2.3}\ ;\ \frac{\overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{1.2.3.4}\ ;\ \text{&c.}$$

Considerentur huius seriei numeratores ac denominatores seorsim, & cum numeratores sint:

$\overset{1}{n}$; $\overset{2}{n(n-1)}$; $\overset{3}{n(n-1)(n-2)}$; $\overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$; &c. fiet applicatione facta, $a = n$, & $b = -1$, unde huius seriei terminus indici ω respondens erit $=$

$$n^{\omega} \cdot \frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega} \cdot \frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega} \cdot \frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega} \cdot \text{&c.}$$

quae autem expressio ob factores in negativos abeuntes nihil certi monstrat. Transformetur ergo series proposita, ponendo brevitatis gratia $1.2.3\ldots n = \mathfrak{N}$, in hanc:

$$\mathfrak{N}\left(\frac{\overset{1}{1}}{1.1.2.3\ldots(n-1)}\ ;\ \frac{\overset{2}{1}}{1.2.1.2.3\ldots(n-2)}\ ;\ \frac{\overset{3}{1}}{1.2.3.1.2.3\ldots(n-3)}\ ;\ \text{&c.}\right)$$

cuius denominatores cum constent duobus factoribus, alteri constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\ ;\ \overset{2}{1.2.3\ldots(n-2)}\ ;\ \overset{3}{1.2.3\ldots(n-3)}\ ;\ \text{&c.}$$

cuius

cuius terminus indici ω respondens, convenit cum termino huius seriei:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{1\cdot 2};\ \overset{3}{1\cdot 2\cdot 3};\ \overset{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ \overset{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\ \&c.$$

indici $n-\omega$ respondente: qui est

$$\frac{1^{1-n+\omega}2^{n-\omega}}{1+n-\omega}\cdot\frac{2^{1-n+\omega}3^{n-\omega}}{2+n-\omega}\cdot\frac{3^{1-n+\omega}4^{n-\omega}}{3+n-\omega}\cdot\&c.$$

Sit autem huius seriei terminus indici $1-\omega$ respondens $=\Theta$; erit: $\Theta=\frac{1^{\omega}\cdot 2^{1-\omega}}{2-\omega}\cdot\frac{2^{\omega}\cdot 3^{1-\omega}}{3-\omega}\cdot\frac{3^{\omega}\cdot 4^{1-\omega}}{4-\omega}\cdot\&c.$

atque cum respondeant:

Indicibus: $1-\omega;\quad 2-\omega;\quad 3-\omega$

Termini: $\Theta;\quad (2-\omega)\Theta;\quad (2-\omega)(3-\omega)\Theta;\quad \&c.$

indici $n-\omega$ respondebit hic terminus:

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)\Theta.$$

Deinde illorum denominatorum alteri factores constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{1\cdot 2};\ \overset{3}{1\cdot 2\cdot 3};\ \overset{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ \overset{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\ \&c.$$

si terminus indici ω respondens ponatur $=\Lambda$, erit:

$$\Lambda=\frac{1^{1-\omega}2^{\omega}}{1+\omega}\cdot\frac{2^{1-\omega}3^{\omega}}{2+\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}4^{\omega}}{3+\omega}\cdot\&c.$$

Quibus inventis si ipsius seriei propositae:

$$\frac{\overset{1}{n}}{1},\ \frac{\overset{2}{n(n-1)}}{1\cdot 2},\ \frac{\overset{3}{n(n-1)(n-2)}}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{\overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \&c.$$

terminus indici ω respondens ponatur $=\Sigma$, erit:

$$\Sigma=\frac{N}{\Lambda\cdot(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)\Theta}.$$

At vero est:

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)}=$$

$$\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n}{n-\omega};$$

atque

$$\Lambda\Theta=\frac{1\cdot 2}{(1+\omega)(2-\omega)}\cdot\frac{2\cdot 3}{(2+\omega)(3-\omega)}\cdot\frac{3\cdot 4}{(3+\omega)(4-\omega)}\cdot\text{ &c.}$$

Ex quibus terminus indici ω respondens quaesitus erit:

$$M=\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\frac{5}{5-\omega}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n}{n-\omega}\cdot\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ 3}\cdot\frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3.\ 4}\cdot\text{&c. in infinitum.}$$

Indici ergo $\frac{1}{2}$ respondebit iste terminus.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\text{&c.}$$

qui reducitur ad $\frac{4.6.8.10\ldots\ldots 2n}{3.5.7.9\ldots\ldots(2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}$, seu

$$\text{erit}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8.10\ldots\ldots 2n}{1.3.5.7.9\ldots\ldots(2n-1)}$$

Si fuerit $n=2$, prodibit ista series interpolanda:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.
1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, &c.

cuius propterea terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens est $=\frac{16}{3\pi}$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur terminus respondens indici $=\frac{1}{2}$ *in hac serie:*

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}+\frac{1.1.3}{2.4.6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}+\text{&c.}$$

(0 1 2 3 4)

Oritur haec series ex praecedente si ponatur $n=\frac{1}{2}$, eritque propterea terminus quaesitus, qui sit $=\Sigma$:

$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.4.6.8 \ldots 2n}{1.3.5.7 \ldots (2n-1)}$ posito $n = \frac{1}{2}$.

Ponatur $\frac{2.4.6.8 \ldots 2n}{1.3.5.7 \ldots (2n-1)} = \Theta$ si sit $n = \frac{1}{2}$, eritque Θ terminus respondens indici $\frac{1}{2}$ in hac serie:

$$\frac{2}{1}; \frac{2.4}{1.3}; \frac{2.4.6}{1.3.5}; \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}; \text{ &c.}$$

qui ex superioribus prodit $= \frac{\pi}{2}$. Quocirca seriei propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, qui quaeritur, erit $= 1$. Quoniam autem in ista serie, si terminus indici cuicunque ω respondens ponatur $= \Sigma$, sequens eum erit $\Sigma' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Sigma$; series proposita ita mediis terminis interiiciendis interpolabitur:

Indices: $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$

Termini: $1; 1; \frac{1}{2}; 0; \frac{-1.1}{2.4}; 0; \frac{1.1.3}{2.4.6}; 0;$ &c.

EXEMPLUM V.

Si n *fuerit numerus quicunque fractus, invenire terminum indici* ω *respondentem in serie:*

$$1; \frac{n}{1}; \frac{n(n-1)}{1.2}; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}; \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

&c.

Si expressionem $\frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \ldots \ldots \frac{n}{n-\omega}$ cum §. 400. comparemus, fiat $a = 1$, $c = 1$, $b = 1-\omega$, ibique loco ω posito n, erit:

$$\frac{1}{1-\omega} \cdot \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \ldots \frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)} \cdot \frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)} \cdot \text{ &c.}$$

unde

unde terminus quaesitus indici ω respondens si ponatur $= M$, erit:

$$M = \frac{(1-\omega+n)2}{(1+n)(2-\omega)} \cdot \frac{(2-\omega+n)3}{(2+n)(3-\omega)} \cdot \&c. \cdot \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ 3} \cdot \&c.$$

ideoque

$$M = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1(1+n)} \cdot \frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2(2+n)} \cdot \frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3(3+n)} \cdot \&c.$$

quoties ergo $n - \omega$ fuerit numerus integer valor ipsius M rationaliter exprimi potest.

Sic si sit $n = \omega$ erit $M = 1$

si $n = 1 + \omega$ erit $M = n$

si $n = 2 + \omega$ erit $M = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

si $n = 3 + \omega$ erit $M = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

&c.

At si fuerit $\omega - n$ numerus integer affirmativus, erit semper $M = 0$.

CAPUT XVIII.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN RESOLUTIONE FRACTIONUM.

403.

Methodus fractionem quamvis propositam in fractiones simplices resolvendi, quam in Introductione exposuimus, etsi per se satis est facilis; tamen ope calculi differentialis ita perfici potest, ut saepenumero multo minori negotio in usum vocari possit. Praecipue vero si denominator fractionis resolvendae fuerit indefiniti gradus, methodus ante exposita plerumque non mediocriter impeditur, dum loco quantitatis incognitae substitutio valoris, quem ex quopiam factore induit, fieri debet. Imprimis autem his casibus divisio denominatoris per factorem iam inventum nimis fit molesta. Quae operatio, si calculus differentialis in subsidium vocetur, evitari poterit, ita ut non opus sit alterum denominatoris factorem, qui oritur, si denominator per factorem iam cognitum dividatur, nosse. Hunc autem usum praestat methodus determinandi valorem fractionis, cuius numerator ac denominator certo casu ambo evanescunt, cuius beneficio, quemadmodum resolutio fractionum iam supra tradita commodior & tractabilior reddi queat, hoc Capite doceamus, simulque finem huic libro, in quo usum calculi differentialis in Analysi exposuimus, imponamus.

404. Si igitur proposita fuerit fractio quaecunque $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator sint functiones variabilis quantitatis x, rationales & integrae; primum videndum est, utrum x in numeratore P tot pluresve dimensiones habeat, quam in deno-

denominatore Q. Quodsi eveniat, complectetur fractio $\frac{P}{Q}$ in se partem integram huius formae $A + Bx + Cx^2 +$ &c. quae divisionis ope inde erui poterit: pars reliqua erit fractio eundem denominatorem Q habens, sed cuius numerator erit functio puta R pauciores ipsius x dimensiones continens, quam denominator Q, ita ut ulterior resolutio instituenda sit in fractione $\frac{R}{Q}$. Interim tamen non opus est nosse hunc novum numeratorem R, sed eaedem fractiones simplices, quas fractio $\frac{R}{Q}$ suppeditatura esset, elici possunt immediate ex fractione proposita $\frac{P}{Q}$; prouti iam supra notavimus.

405. Praeter partem integram igitur, si quam continet fractio $\frac{P}{Q}$, erui debent fractiones simplices, quarum denominatores sint vel binomiales huius formae $f+gx$, vel trinomiales huiusmodi $f+2x\cos\varphi.\sqrt{fg}+gxx$, vel eiusmodi formularum quadrata, cubive seu altiores potestates. Hique denominatores omnes erunt factores denominatoris Q, ita ut quilibet denominatoris ipsius Q factor praebeat fractionem simplicem. Scilicet si denominator Q factorem habeat $f+gx$, ex eo nascetur fractio simplex huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$; sin autem factor fuerit $(f+gx)^2$, binae fractiones $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Atque ex denominatoris Q factore cubico $(f+gx)^3$ orientur tres fractiones simplices huius formae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$; & ita porro. Quodsi autem denominator Q factorem habuerit trinomialem huiusmodi

iusmodi $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$, ex eo orietur fractio simplex talis formae $\frac{\mathfrak{A} + ax}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx}$; &, si duo huiusmodi factores fuerint aequales uti $(ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx)^2$, hinc prodibunt duae fractiones

$$\frac{\mathfrak{A} + ax}{(ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx)^2} + \frac{\mathfrak{B} + bx}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx}.$$

Huiusmodi autem factor cubicus $(ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx)^3$ dabit tres fractiones simplices, biquadratus quatuor, & ita porro.

406. Resolutio ergo fractionis cuiuscunque $\frac{P}{Q}$ ita instituatur. Quaerantur primo omnes factores tam simplices seu binomiales, quam trinomiales denominatoris Q, & si qui fuerint inter se aequales, ii probe notentur, & instar unius habeantur. Tum ex singulis his denominatoris factoribus eliciantur fractiones simplices, vel modo iam supra ostenso, vel eo, quem hic sumus tradituri, & qui pro lubitu in locum prioris substitui poterit. Quo facto aggregatum omnium istarum fractionum simplicium una cum parte integra, si quam continet fractio proposita $\frac{P}{Q}$, huius valorem exhaurient. Inventionem quidem factorum denominatoris Q hic tanquam cognitam assumimus, cum pendeat a resolutione aequationis $Q = 0$; methodumque hic trademus per calculum differentialem pro dato quovis denominatoris factore fractionem simplicem inde ortam definiendi. Quod, cum istarum fractionum simplicium denominatores iam habeantur, praestabitur, si numeratorem cuiusque fractionis investigare doceamus.

407. Ponamus ergo fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere $f + gx$, ita ut sit $Q = (f + gx)S$ neque vero hic alter factor S insuper eundem factorem $f + gx$ contineat.

Sit

Sit fractio simplex ex isto factore orta $= \frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$; & complementum huiusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ita ut sit $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$. Erit ergo $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{f+gx} = \frac{P-\mathfrak{A}S}{(f+gx)S}$; ideoque $V = \frac{P-\mathfrak{A}S}{f+gx}$. Cum igitur V sit functio integra ipsius x, necesse est ut $P - \mathfrak{A}S$ sit divisibile per $f+gx$; ac propterea si ponatur $f+gx=0$ seu $x=\frac{-f}{g}$, expressio $P - \mathfrak{A}S$ evanescet. Fiat ergo $x=\frac{-f}{g}$, & cum sit $P - \mathfrak{A}S = 0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, uti iam supra invenimus. Cum autem sit $S = \frac{Q}{f+gx}$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)P}{Q}$, si ubique ponatur $f+gx=0$, seu $x=\frac{-f}{g}$. Quoniam vero hoc casu tam numerator $(f+gx)P$, quam denominator Q evanescit; per ea, quae de valore huiusmodi fractionum investigando exposuimus, erit $\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)dP + Pg\,dx}{dQ}$, si quidem ponatur $x=\frac{-f}{g}$. Hoc autem casu ob $(f+gx)dP=0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$; sicque per differentiationem valor numeratoris $\mathfrak{A}$ expedite reperitur.

408. Si igitur fractionis propositae $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat simplicem $f+gx$, ex eo orietur fractio sim-

simplex $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, existente $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$, postquam hic ubique loco x valor $\frac{-f}{g}$ ex aequatione $f+gx=0$ oriundus fuerit substitutus. Hoc ergo modo non necesse est, ut ante quaeratur alter denominatoris Q factor S, qui oritur, si Q per $f+gx$ dividatur. Hinc si Q non in factoribus exprimatur, hanc divisionem saepe non parum molestam, praecipue si x in denominatore Q habeat exponentes indefinitos omittere poterimus, cum valor ipsius $\mathfrak{A}$ ex formula $\frac{gP\,dx}{dQ}$ obtineatur. Sin autem denominator Q iam in factoribus fuerit expressus, ita ut inde valor ipsius S sponte pateat, tum praeferenda erit altera expressio, qua invenimus $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, ponendo pariter ubique $x = \frac{-f}{g}$. Sicque pro inveniendo valore ipsius $\mathfrak{A}$ quovis casu ea formula adhiberi poterit, quae commodior & expeditior videatur. Usum autem novae formulae aliquot exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^9}{1+x^{17}}$, *cuius fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1+x$ *oriundam definiri oporteat.*

Quoniam hic est $Q = 1+x^{17}$, cuius etsi factor $1+x$ constat, tamen si, uti prima methodus postulat per eum dividere velimus, prodiret

$$S = 1 - x + xx - x^3 + \ldots\ldots + x^{16}.$$

Commodius igitur utemur nova formula $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$; quia itaque est $f=1$, $g=1$, & $P=x^9$, ob $dQ = 17x^{16}dx$, fiet

fiet $\mathfrak{A} = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}$, posito $x = -1$, unde fit $\mathfrak{A} = -\frac{1}{17}$, & fractio simplex ex denominatoris factore $1+x$ oriunda erit $\frac{-1}{17(1+x)}$.

EXEMPLUM II.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-x^{2n}}$ *fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam investigare.*

Ob factorem propositum $1-x$, erit $f=1$, & $g=-1$. Tum vero denominator $Q = 1-x^{2n}$ dat $dQ = -2nx^{2n-1}dx$; unde propter $P = x^m$ obtinebitur $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Positoque ex aequatione $1-x=0$, $x=1$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{1}{2n}$; ita ut fractio simplex futura sit haec $\frac{1}{2n(1-x)}$.

EXEMPLUM III.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^k+3x^n}$, *eius fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam determinare.*

Hic ergo fit $f=1$; $g=-1$; $P=x^m$; $Q = 1-4x^k+3x^n$ & $\frac{dQ}{dx} = -4kx^{k-1}+3nx^{n-1}$; unde fit $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}}$ & posito $x=1$, erit $\mathfrak{A} = \frac{1}{4k-3n}$. Fractio ergo simplex ex isto denominatoris factore simplici $1-x$ oriunda erit $= \frac{1}{(4k-3n)(1-x)}$.

409. Ponamus nunc fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere quadratum $(f+gx)^2$, & fractiones simplices hinc oriundas esse $= \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Sit $Q = (f+gx)^2 S$ & complementum $= \frac{V}{S}$; ita ut sit $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} - \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$; & $V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}(f+gx)S}{(f+gx)^2}$. Quia nunc V est functio integra, necesse est ut sit $P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f+gx)$ divisibile per $(f+gx)^2$; & cum S factorem $f+gx$ amplius non contineat, quoque haec expressio $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx)$ divisibilis erit per $(f+gx)^2$; ideoque facto $f+gx = 0$, seu $x = \frac{-f}{g}$ non solum ipsa, sed etiam eius differentiale $d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}g dx$ evanescet. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, eritque ex priori aequatione $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$; ex posteriori vero erit $\mathfrak{B} = \frac{1}{g dx} d.\frac{P}{S}$; quibus valoribus inventis habebuntur fractiones quaesitae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$.

EXEMPLUM.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1 - 4x^3 + 3x^4}$ *cuius denominator factorem habet* $(1-x)^2$, *invenire fractiones simplices hinc oriundas.*

Cum hic sit $f = 1$, $g = -1$, $P = x^m$ & $Q = 1 - 4x^3 + 3x^4$, erit $S = 1 + 2x + 3xx$; $\frac{P}{S} = \frac{x^m}{1 + 2x + 3xx}$; &

d.

$d.\ \frac{P}{S} = \frac{mx^{m-1}dx + 2(m-1)x^m dx + 3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}$.

Hinc posito $x = 1$, erit:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \text{ \& } \mathfrak{B} = -1.\ \frac{6m-8}{36} = \frac{4-3m}{18};$$

unde fractiones quaesitae erunt: $\frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{4-3m}{18(1-x)}$.

410. Habeat fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q tres factores simplices aequales, seu sit $Q = (f+gx)^3 S$, sintque fractiones simplices ex hoc factore cubico $(f+gx)^3$ oriundae hae:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{f+gx};$$

complementum vero harum fractionum ad fractionem propositam $\frac{P}{Q}$ constituendam sit $\frac{V}{S}$, eritque $V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f+gx) - \mathfrak{C}S(f+gx)^2}{(f+gx)^3}$. Quare haec expressio $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx) - \mathfrak{C}(f+gx)^2$ divisibilis erit per $(f+gx)^3$; unde posito $f+gx = 0$ seu $x = \frac{-f}{g}$, non solum ipsa haec expressio, sed etiam eius differentiale primum & secundum evadet $= 0$. Erit scilicet ponendo $x = \frac{-f}{g}$:

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx) - \mathfrak{C}(f+gx)^2 = 0$$

$$d.\ \frac{P}{S} - \mathfrak{B}g\,dx - 2\mathfrak{C}g\,dx(f+gx) = 0$$

$$dd.\ \frac{P}{S} - 2\mathfrak{C}g^2 dx^2 = 0.$$

Ex prima aequatione ergo erit $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$

Ex secunda vero erit $\mathfrak{B} = \frac{1}{g\,dx}\,d.\frac{P}{S}$

Ex tertia denique definitur $\mathfrak{C} = \frac{1}{2g^2\,dx^2}\,dd.\frac{P}{S}$

411. Generaliter ergo si fractionis $\frac{P}{S}$ denominator Q factorem habeat $(f+gx)^n$, ita ut sit $Q = (f+gx)^n S$; positis fractionibus simplicibus ex hoc factore $(f+gx)^n$ oriundis his:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}} + \frac{\mathfrak{E}}{(f+gx)^{n-4}} + \&c.$$

quoad ad ultimam, cuius denominator est $f+gx$, perveniatur, si ratiocinium ut ante instituatur, reperietur haec expressio:

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx) - \mathfrak{C}(f+gx)^2 - \mathfrak{D}(f+gx)^3 - \mathfrak{E}(f+gx)^4 - \&c.$$

divisibilis esse debere per $(f+gx)^n$, hinc tam ipsa, quam singula eius differentialia usque ad gradum $n-1$, casu $x = \frac{-f}{g}$ evanescere debebunt. Ex quibus aequationibus concludetur fore ponendo ubique $x = \frac{-f}{g}$

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{1\,g\,dx}\,d.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{1.2\,g^2\,dx^2}\,dd.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{1.2.3\,g^3\,dx^3}\,d^3.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{1.2.3.4\,g^4\,dx^4}\,d^4.\frac{P}{S} \quad \&c.$$

Ubi

Ubi quidem notandum est, differentialia ista ipsius $\frac{P}{S}$ ante capi oportere, quam loco x ponatur $\frac{-f}{g}$, alias enim variabilitas ipsius x tolleretur.

412. Facilius ergo hoc modo isti numeratores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. exprimuntur, quam eo modo, qui in Introductione est traditus, & saepenumero quoque hac nova ratione eorum valores expeditius reperiuntur. Quae comparatio quo facilius instituí queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. priori modo definiamus:

Posito $x = \frac{-f}{g}$	Statuatur relicto x variabili.
$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$	$\frac{P - \mathfrak{A}S}{f+gx} = \mathfrak{P}$ erit
$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{S}$	$\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}S}{f+gx} = \mathfrak{Q}$ erit
$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}}{S}$	$\frac{\mathfrak{Q} - \mathfrak{C}S}{f+gx} = \mathfrak{R}$ erit
$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}}{S}$	$\frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{D}S}{f+gx} = \mathfrak{S}$ erit
$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{S}}{S}$	& ita porro.

413. Quodsi autem fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q non omnes factores simplices habeat reales, tum bini imaginariorum iunctim sumantur, quorum productum erit reale. Sit ergo denominatoris Q factor $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$, qui positus $= 0$ dat hunc duplicem valorem imaginarium:

$$x = \frac{f}{g}\cos\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi; \quad \text{ex quo erit}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin n\varphi.$$

Pona-

Ponamus esse $Q = (ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx)S$, atque S praeterea per $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$ non esse divisibile. Sit fractio ex isto factore denominatoris oriunda:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx}$$

& complementum ad propositam $\frac{P}{Q}$ sit $= \frac{V}{S}$, erit

$$V = \frac{P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx};$$ unde $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$

ac propterea quoque $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ divisibile erit per $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$. Evanescet ergo $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ si ponatur $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx = 0$, hoc est si ponatur

$$\text{vel} \quad x = \frac{f}{g}\cos\varphi + \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi$$

$$\text{vel} \quad x = \frac{f}{g}\cos\varphi - \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi.$$

414. Quoniam P & S sunt functiones integrae ipsius x, fiat in utroque seorsim utraque substitutio; & quia pro quavis potestate ipsius x, puta x^n binomium hoc $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin n\varphi$ substitui debet. Ponamus primo ubique $\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & S in $\mathfrak{S}$. Deinde ponatur ubique $\frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{p}$ & S in $\mathfrak{s}$; ubi notandum est ante has substitutiones utramque functionem P & S penitus debere evolvi, ita ut, si forte factoribus sint implicatae, ii per actualem multiplicationem tollantur. His valoribus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$, inventis, manifestum erit, si ponatur:

$x =$

$$x = \frac{f}{g}\cos\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi$$

functionem P abituram esse in $\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}$, & functionem S abituram esse in $\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$. Hinc cum $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ seu $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$ utroque casu evanescere debeat, erit:

$$\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}} = \left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\cos\varphi \pm \frac{\mathfrak{a}f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi\right)\left(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right)$$

unde ob signa ambigua hae duae aequationes oriuntur:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\cos\varphi - \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\sin\varphi$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\cos\varphi + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\sin\varphi$$

ex quibus eliminando $\mathfrak{A}$ eruitur:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{a}f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\sin\varphi\,;$$ ideoque erit

$$\mathfrak{a} = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\varphi}.$$

Deinde eliminando $\sin\varphi$ erit:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\cos\varphi\right).$$ Ergo

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\cos\varphi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\varphi}.$$

415. Cum iam sit $S = \frac{Q}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx}$; quia posito $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx = 0$ tam numerator quam denominator evanescent, erit hoc casu $S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg\cos\varphi}$. Ponamus nunc si ubique substituatur $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$, functio-

ctionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q}$; sin autem statuatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\varphi$, eam abire in $\mathfrak{q}$; atque manifestum est si ponatur

$$x = \frac{f}{g} \cos\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin\varphi$$

functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}}$. Ex quo functio S abibit in $\frac{\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{q} : \sqrt{-1}}{\pm 2fg \sin\varphi : \sqrt{-1}}$. Cum ergo sit $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$ eodem valore pro x posito, habebitur,

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}} \sin\varphi - 2fg\mathfrak{s}\sin\varphi.$$

Erit ergo $\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg\sin\varphi}$ & $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{q}}{2fg\sin\varphi}$.

Hisque valoribus substitutis, fiet $\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$

& $\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})\cos\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$.

416. Hinc ergo idonea obtinetur ratio ex quovis factore secundae potestatis fractionem simplicem formandi, hicque cum ipse fractionis propositae denominator in computo retineatur, divisionem, qua valor litterae S definiri deberet, & quae saepe non parum est molesta, evitamus. Si igitur fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat talem $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$, sequenti modo fractio simplex ex hoc factore oriunda, quam fingamus $= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx}$, definietur. Ponatur $x = \frac{f}{g}\cos\varphi$, & pro quavis ipsius x potestate

x^n

x^n scribatur $\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$; quo facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & functio $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$. Deinde ibidem ponatur $x = \frac{f}{g}\sin\varphi$, & potestas eius quaevis $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$; abeatque P in $\mathfrak{p}$, & $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{q}$. Inventisque hoc modo valoribus litterarum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{p}$ & $\mathfrak{q}$ quantitates $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{a}$ ita definientur, ut sit

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cos\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

Fractio ergo ex denominatoris Q factore $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$ oriunda erit:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx - f\cos\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)(ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx)}$$

EXEMPLUM I

Si proposita fuerit haec fractio $\frac{x^m}{a + bx^n}$, *cuius denominator* $a + bx^n$ *factorem habeat hunc:* $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$ *invenire fractionem simplicem huic factori convenientem.*

Quoniam hic est $P = x^m$ & $Q = a + bx^n$, erit $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1}$, unde fiet:

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\varphi \quad ; \quad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\varphi$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\varphi \; ; \; \mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\varphi.$$

Ex his erit: $\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}$;

$$\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \sin(n-m-1)\Phi;$$

atque $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}} \cos(n-m-1)\Phi$.

Quamobrem erit fractio simplex quaesita:

$$\frac{2g^{n-m}[f\sin\Phi.\sin(n-m-1)\Phi + gx\cos(n-m-1)\Phi - f\cos\Phi.\cos(n-m-1)\Phi]}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\Phi+ggxx)}$$

seu

$$\frac{2g^{n-m}[gx\cos(n-m-1)\Phi - f\cos(n-m)\Phi]}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\cos\Phi+ggxx)}.$$

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec fractio $\frac{1}{x^m(a+bx^n)}$, *cuius denominator factorem habeat* $ff-2fgx\cos\Phi+ggxx$, *invenire fractionem simplicem inde ortundam.*

Cum sit $P=1$, & $Q = ax^m + bx^{m+n}$,

erit $\frac{dQ}{dx} = max^{m-1} + (m+n)bx^{m+n-1}$, ideoque posito

$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\Phi$ ob $P = x^0$ & $\mathfrak{P}=1$.

$$\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\Phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\Phi$$

& $p=0$; atque

$$q = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\Phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\Phi$$

Ergo

$$\mathfrak{Q}^2+q^2 = \frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} + \frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos n\Phi + \frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Quodsi

Quodsi vero est $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$ divisor ipsius $\alpha + bx^n$, erit $\alpha + \frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi = 0$ & $\frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi = 0$,

unde $\alpha\alpha = \frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}$. Erit ergo:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{(m+n)^2 bbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}} - \frac{m(2n+m)aaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}$$
$$= \frac{mmaaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} = \frac{nnbbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Deinde vero erit:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - p\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi$$
$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[(m+n)\sin(m+n-1)\varphi - m\cos n\varphi.\sin(m-1)\varphi]$$
$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[n\cos n\varphi\sin(m-1)\varphi + (m+n)\sin n\varphi\cos(m-1)\varphi]$$

& $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + p\mathfrak{q} =$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[(m+n)\cos(m+n-1)\varphi - m\cos n\varphi.\cos(m-1)\varphi]$$

Vel cum $ff - 2fg\cos\varphi + ggxx$ sit quoque divisor ipsius $\alpha x^{m-1} + bx^{m+n-1}$, erit:

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\varphi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\varphi = 0$$

& $$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi = 0,$$

unde erit:

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\varphi \;\&\; \mathfrak{q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi$$

seu

$$\mathfrak{Q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\varphi \;\&\; \mathfrak{q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi.$$

Ex quibus resultabit fractio quaesita:

$$+\frac{2g^m\left[f\cos m\varphi - gx\cos(m-1)\varphi\right]}{naf^{n-1}(ff-2fgx\cos\varphi+ggxx)}.$$

Quae formula ex priori exemplo sequitur, si ponatur m negativum, unde non opus fuisset hunc casum peculiarem constituisse.

EXEMPLUM III.

Si huius fractionis $\frac{x^m}{a+bx^n+cx^{2n}}$ *denominator habuerit factorem* $ff-2fgx\cos\varphi+ggxx$, *fractionem simplicem investigare ex hoc factore oriundam.*

Si $ff-2fgx\cos\varphi+ggxx$ est factor denominatoris $a+bx^n+cx^{2n}$, erit ut supra ostendimus:

$$a+\frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\cos 2n\varphi=0$$

$$\&\quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi+\frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\sin 2n\varphi=0.$$

Cum igitur sit $P=x^m$ & $Q=a+bx^n+cx^{2n}$, erit $\frac{dQ}{dx}=nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1}$; unde efficitur:

$$\mathfrak{P}=\frac{f^m}{g^m}\cos m\varphi \quad \& \quad \mathfrak{p}=\frac{f^m}{g^m}\sin m\varphi:$$

$$\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\varphi+\frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\cos(2n-1)\varphi$$

$$\mathfrak{q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\varphi+\frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\sin(2n-1)\varphi.$$

Quamobrem habebimus:

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(bb+\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

At ex duabus prioribus aequationibus est:

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(bb+\frac{2bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)=aa;$$

ideo-

ideoque

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi = \frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}} - 2bb - \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

quo valore ibi substituto erit:

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2 = \frac{n^2f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2aag^{2n}}{f^{2n}} - bb + \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

seu

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2 = \frac{n^2(2aag^{4n} - bbf^{2n}g^{2n} + 2ccf^{4n})}{ff\,g^{4n-2}}$$

Deinde erit: $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - p\mathfrak{Q} =$

$$\frac{nbf^{n+n-1}}{g^{n+n-1}}\sin(n-m-1)\varphi + \frac{2mcf^{n+2n-1}}{g^{n+2n-1}}\sin(2n-m-1)\varphi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + p\mathfrak{q} =$$

$$\frac{nbf^{n+n-1}}{g^{n+n-1}}\cos(n-m-1)\varphi + \frac{2mcf^{n+2n-1}}{g^{n+2n-1}}\cos(2n-m-1)\varphi.$$

Quibus valoribus inventis erit fractio simplex quaesita:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - p\mathfrak{Q})\sin\varphi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + p\mathfrak{q})(gz - f\cos\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2)(ff - 2fgz\cos\varphi + ggzz)}$$

417. Hae autem fractiones facilius exprimentur, si ipsos denominatorum factores determinemus. Sit igitur denominator fractionis propositae $z^n + bz^n$ cuius factor trinomialis si ponatur: $ff - 2fgz\cos\varphi + ggzz$ erit uti in Introductione ostendimus:

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi = 0 \quad \& \quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi = 0,$$

cum igitur sit $\sin n\varphi = 0$, erit vel $n\varphi = (2k-1)\pi$, vel $n\varphi = 2k\pi$, priori casu erit $\cos n\varphi = -1$, posteriori $\cos n\varphi = +1$. Si ergo a & b sint quantitates affirmativae, prior casus solus locum habebit, quo fit $a = \frac{bf^n}{g^n}$; ac propterea: $f = a^{\frac{1}{n}}$ & $g = b^{\frac{1}{n}}$ reti-

retineamus autem loco harum quantitatum irrationalium litteras f & g, seu ponamus potius $a = f^n$ & $b = g^n$, ita ut factores investigari debeant huius functionis $f^n + g^n x^n$. Cum igitur sit $\varphi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, ubi k numerum quemcunque affirmativum integrum designare potest; at vero maiores numeri pro k non sunt sumendi, quam qui reddant $\frac{2k-1}{n}$ unitate minorem; hinc functionis propositae $f^n + g^n x^n$ factores erunt sequentes:

$$ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx$$

&c.

ubi notandum est si n sit numerus impar, unum factorem haberi binomium hunc: $f + gx$; sin autem n sit numerus par nullus factor aderit binomius.

EXEMPLUM I.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ *in suas fractiones simplices.*

Cum denominatoris unusquisque factor trinomialis continetur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$, erit in §. praecedente Exempl. I. $a = f^n$, $b = g^n$, & $\varphi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, unde erit:

$\sin(n-m-1)\varphi = \sin(m+1)\varphi = \sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$ &

cos

$$\cos(n-m-1)\Phi = -\cos(m+1)\Phi = -\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}.$$

Hinc ex isto factore oritur fractio simplex haec:

$$\frac{2f\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx\right)}.$$

Quamobrem fractio proposita resolvetur in has simplices:

$$\frac{2f\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin\frac{3\pi}{n}\cdot\sin\frac{3(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{3(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin\frac{5\pi}{n}\cdot\sin\frac{5(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{5(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Si ergo n fuerit numerus par, hoc modo omnes oriuntur fractiones simplices; sin autem n sit numerus impar, ob factorem binomium $f+gx$, ad fractiones hoc modo resultantes insuper addi debet haec:

$$\frac{\pm 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}$$

ubi signum $+$ valet, si m fuerit numerus par, contra signum $-$. Si m fuerit numerus maior quam n, tum ad has fractiones accedent insuper partes integrae huiusmodi

Ax

$Ax^{n-\alpha} + Bx^{n-\beta} + Cx^{n-\gamma} + Dx^{n-\delta} +$ &c.

quamdiu exponentes manent affirmativi, eritque

$$Ag^n = 1 \; ; \text{ Ergo } A = \frac{1}{g^n}$$

$$Af^\alpha + Bg^\beta = 0 \; . \; . \; B = -\frac{f^\alpha}{g^\beta}$$

$$Bf^\beta + Cg^\gamma = 0 \; . \; . \; C = +\frac{f^{2\beta}}{g^{2\gamma}}$$

$$Cf^\gamma + Dg^\delta = 0 \; . \; . \; D = -\frac{f^{3\gamma}}{g^{3\delta}}$$

&c. &c.

EXEMPLUM II.

Resolvere hanc fractionem $\frac{1}{x^n(f^n + g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices.*

Quod ad factores ipsius $f + g^n x^n$ attinet, ex iis oriuntur eaedem fractiones, quas Exemplo praecedente eruimus, dummodo ibi sumatur m negative: superest igitur tantum, ut fractiones simplices ex denominatoris altero factore x^m definiamus, quod hoc modo commodissime fit: statuatur fractio proposita $= \frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{R}x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}$, eritque

$$\mathfrak{A}f^n = 1 \; ; \text{ Ergo } \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{R} = 0 \; . \; . \; \mathfrak{R} = -\frac{g^n}{f^n}.$$

Si $n-m$ adhuc fuerit numerus negativus, simili modo erit operandum, ita ut, si m fuerit numerus quantumvis magnus, resultent huiusmodi fractiones simplices

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-\alpha}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2\alpha}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3\alpha}} + \text{ &c.}$$

cuius

cuius seriei tot termini sunt sumendi, quot habentur ipsius n exponentes affirmativi in denominatore. Eritque

$$\mathfrak{A}f^n = 1 \quad ; \qquad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{C} = +\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fractio ergo proposita omnino in has fractiones simplices resolvetur:

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} - \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c.$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{3\pi}{n}.\sin\frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{5\pi}{n}.\sin\frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Quibus formulis si n fuerit numerus impar, ob $f + gx$ fa-

ctorem denominatoris, insuper adiici debet:

$$\frac{\pm\ g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

ubi signorum ambiguorum $\pm$ superius valet, si m fuerit numerus par, inferius vero si m impar.

418. Consideremus nunc quoque formulam $a+bx^n$, si b sit numerus negativus, sitque proposita haec functio:

$$f^n - g^n x^n$$

cuius primo semper erit factor $f-gx$; atque si n sit numerus par, quoque $f+gx$ eius erit factor. Reliqui vero erunt trinomiales, quorum forma generalis si ponatur

$$ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$$

erit $f^n - f^n\cos n\varphi = 0$ & $f^n \sin n\varphi = 0$ sive $\sin n\varphi = 0$ & $\cos n\varphi = 1$. Quibus ut satisfiat, oportet esse $n\varphi = 2k\pi$ existente k numero quocunque integro, atque propterea erit $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$. Factor ergo generalis erit:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

sumendo ergo pro $2k$ omnes numeros pares exponente n minores, prodibunt factores trinomiales omnes:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx$$

&c.

EXEMPLUM I.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ *in suas fractiones simplices.*

Quoniam denominatoris factor est $f-gx$, inde oritur fra-

fractio huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f-gx}$, ad cuius numeratorem inveniendum, ponatur $x^m = P$ & $f^n - g^n x^n = Q$, erit $\frac{dQ}{dx} = -ng^n x^{n-1}$, fietque $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$, posito $x = \frac{f}{g}$. Ergo erit $\mathfrak{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$, hincque fractio simplex ex factore $f-gx$ orta erit:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}.$$

Si n sit numerus par, quia tum denominatoris factor quoque est $f+gx$, ponatur fractio simplex inde oriunda $= \frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, erit $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{ng^n x^{n-1}} = \frac{-x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$, posito $x = \frac{-f}{g}$. Fiet ergo ob $n-1$ numerum imparem $g^{n-1}x^{n-1} = -f^{n-1}$: at erit $x^m = \frac{\pm f^m}{g^m}$, ubi signum superius valet, si m fuerit numerus par, inferius si m sit numerus impar. Quare cum sit $\mathfrak{A} = \frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m}$, erit fractio simplex ex factore $f+gx$ oriunda haec:

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}.$$

Deinde cum factorum trinomialium forma generalis sit:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx,$$

si comparatio cum Exemplo I. §. 416. instituatur, erit $a = f^n$, $b = -g^n$ & $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$; unde sin $n\varphi = 0$ & $\cos n\varphi = 1$;

atque $\sin(n-m-1)\varphi = -\sin(m+1)\varphi = -\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}$,

& $\cos(n-m-1)\varphi = \cos(m+1)\varphi = \cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}$.

Ex quibus erit fractio simplex hinc oriunda:

$$\frac{2f\sin\frac{2k\pi}{n}\cdot\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx\right)}$$

Hancobrem fractiones simplices quaesitae erunt:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{2(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{4\pi}{n}\cdot\sin\frac{4(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{6\pi}{n}\cdot\sin\frac{6(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio:

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}$$

cu-

cuius signum superius — est sumendum, si m fuerit numerus par, inferius si impar. Praeterea vero si m sit numerus non minor quam n, adiiciendae sunt partes integrae:

$$A x^{m-n} + B x^{m-2n} + C x^{m-3n} + D x^{m-4n} + \&c.$$

quamdiu exponentes non fuerint negativi, eritque:

$$-Ag^n = 1 \quad \text{seu} \quad A = -\frac{1}{g^n}$$

$$Af^n - Bg^n = 0 \quad \therefore \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n - Cg^n = 0 \quad \therefore \quad C = -\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n - Dg^n = 0 \quad \therefore \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c. &c.

EXEMPLUM II.

Resolvere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices*

Fractiones quae ex denominatoris factore $f^n - g^n x^n$ oriuntur, eaedem erunt quae ante, dummodo in illis formulis m negative accipiatur. Quare ad alterum factorem x^m est respiciendum, ex quo si ponamus has fractiones resultare:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \&c.$$

quae series eousque est continuanda, donec exponentes ipsius x fiant negativi. Erit vero

$$\mathfrak{A} f^n = 1 \quad ; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{B} f^n - \mathfrak{A} g^n = 0 \quad \therefore \quad \mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{C} f^n - \mathfrak{B} g^n = 0 \quad \therefore \quad \mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{D} f^n - \mathfrak{C} g^n = 0 \quad \therefore \quad \mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fra-

Fractio ergo propofita refolvetur in has fractiones fimplices:

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{g^m}{nf^{n+m-1}(f-gx)}$$

$$- 2fg^m \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx\right)$$

$$- 2fg^m \sin\frac{4\pi}{n}\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{4\pi}{n}\right)$$
$$nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + ggxx\right)$$

$$- 2fg^m \sin\frac{6\pi}{n}\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{6\pi}{n}\right)$$
$$nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx\right)$$

&c.

quibus fi n fuerit numerus par, infuper addi debet haec fractio:

$$\frac{\mp g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

quae autem praetermittitur, fi n fuerit numerus impar. Signorum ambiguorum vero fuperius $-$ valet, fi m fit numerus par, inferius vero $+$, fi m fit numerus impar.

419. Hoc ergo modo omnes fractiones, quarum denominator ex duobus conftat membris huiufmodi $a + bx^n$, in fractiones fimplices refolvuntur. At fi denominator conftet tribus huiufmodi membris $a + bx^n + cx^{2n}$, tum primum videndum eft, utrum is in duos factores reales prioris formae refolvi poffit. Hoc enim fi eveniat, refolutio in fractiones fimpli-

plices modo ante expositio institui poterit. Si enim proponatur huiusmodi fractio

$$\frac{x^m}{(f^n+g^n x^n)(f^n+b^n x^n)}$$

ea primum in duas fractiones transformabitur huiusmodi:

$$\frac{\alpha x^m}{f^n+g^n x^n} + \frac{\beta x^m}{f^n+b^n x^n}$$

eritque $\alpha f^n + \beta f^n = 1$ & $\alpha b^n + \beta g^n = 0$, unde fit

$$\alpha = \frac{1}{f^n} - \beta = -\frac{\beta g^n}{b^n}; \text{ ideoque habebitur}$$

$$\beta = \frac{b^n}{f^n(b^n-g^n)} \text{ & } \alpha = \frac{g^n}{f^n(g^n-b^n)}.$$

Si exponens m fuerit maior quam n, transmutatio in sequentes fractiones erit commodior:

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n+g^n x^n} + \frac{\beta x^{m-n}}{f^n+b^n x^n}$$

qua fit $\alpha + \beta = 0$ & $\alpha b^n + \beta g^n = 1$, ideoque $\alpha = \frac{1}{b^n-g^n}$ & $\beta = \frac{1}{g^n-b^n}$. Utra autem transformatio adhibeatur, utraque fractio hoc modo oriunda methodo ante exposita resolvetur in suas fractiones simplices, quae iunctim sumtae fractioni propositae erunt aequales.

420. Simili modo methodus hactenus tradita sufficiet, si denominator ex pluribus membris constet huiusmodi $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + ex^{4n} +$ &c. dummodo is in factores formae $f^n \pm g^n x^n$ resolvi queat. Ponamus enim occurrere hanc fractionem in suas fractiones simplices resolvendam: $\frac{x^m}{}$

$$\frac{x^m}{(a-x^n)(b-x^n)(c-x^n)(d-x^n)}$$

Haec primum resolvetur in has:

$$\frac{Ax^m}{a-x^n}+\frac{Bx^m}{b-x^n}+\frac{Cx^m}{c-x^n}+\frac{Dx^m}{d-x^n}$$

quarum numeratores sequenti modo determinabuntur, ut sit

$$A=\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

$$B=\frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$C=\frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)} \quad \&c.$$

Hac ergo praeparatione facta, singulae istae fractiones methodo ante exposita in suas fractiones simplices resolventur; quae cunctae in unam summam erunt colligendae.

421. Quodsi vero huiusmodi denominator $a+bx^n+cx^{2n}+dx^{3n}+$ &c. non omnes factores formae $f^n+g^nx^n$ habeant reales, bini imaginarii erunt coniungendi. Ponamus ergo huiusmodi binorum factorum productum esse:

$$f^{2n}-2f^ng^nx^n\cos\omega+g^{2n}x^{2n}$$

& cum haec expressio nullos habeat factores simplices reales, ponamus factores trinomiales in hac forma generali contineri:

$$ff-2fgx\cos\varphi+ggxx$$

quorum numerus erit $=n$. Posito ergo $x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$; orietur haec aequatio:

$$1-2\cos\omega.\cos n\varphi+\cos 2n\varphi=0.$$

Deinde posito $x^n=\frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$; erit quoque:

$$-2\cos\omega.\sin n\varphi+\sin 2n\varphi=0$$

quae divisa per $\sin n\varphi$ dat $\cos n\varphi=\cos\omega$, sicque simul prio-

ri

ri aequationi satisfit. Erit ergo $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$ denotante k numerum quemvis integrum, ideoque erit $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, & factores omnes continebuntur in hac forma: $ff - 2fgx \cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$ unde sequentes habebuntur factores: $ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi-\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi+\omega}{n} + ggxx \text{ &c.}$$

quorum tot sunt sumendi, donec eorum numerus fiat $= n$.

422. Si igitur proponatur ista fractio in suas fractiones simplices resolvenda:

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n}x^{2n}}$$

quoniam denominatoris factor trinomialis quicunque continetur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$ existente $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, consideretur ista fractio:

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

illi aequalis, ac ponatur numerator $x^m = P$ ac denominator $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q$: erit

$\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1) f^n g^n x^n \cos\omega + (2n+1) g^{2n} x^{2n}$.

Hinc ponendo $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\varphi$; erit: $\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m} \cos m\varphi$

seu $\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m} \cos \frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$ &

$Q = f^{2n} [1 - 2(n+1) \cos\omega \cos n\varphi + (2n+1) \cos 2n\varphi]$. Cum autem sit $\cos n\varphi = \cos\omega$, erit $\cos 2n\varphi = 2\cos\omega^2 - 1$; ideoque $Q = f^{2n} (-2n + 2n \cos\omega^2) = -2n f^{2n} \sin\omega^2$.

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\varphi$, fiet:

$$\mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m} \sin m\varphi = \frac{f^m}{g^m} \sin \frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n} \quad \&$$

$$\mathfrak{q} = -f^{2n} [2(n+1) \cos\omega \sin n\varphi - (2n+1) \sin 2n\varphi]$$

ob $\sin 2n\varphi = 2 \sin n\varphi \cos n\varphi = 2 \cos\omega \sin n\varphi$; erit $\mathfrak{q} = 2n f^{2n} \cos\omega \sin n\varphi$. Cum autem sit $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$, erit $\sin n\varphi = \pm \sin\omega$ & $\mathfrak{q} = \pm 2n f^{2n} \sin\omega . \cos\omega$. His inventis erit: $Q^2 + \mathfrak{q}^2 = 4n^2 f^{4n} \sin\omega^2$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}Q = \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} (\pm \cos m\varphi . \sin\omega . \cos\omega \pm \sin m\varphi . \sin\omega^2)$$

sive $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}Q = \pm \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \cos(m\varphi \mp \omega)$ seu

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}Q = \pm \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \cos \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{P}Q + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} (-\cos m\varphi \sin\omega^2 \pm \sin m\varphi . \sin\omega \cos\omega)$$

$$\mathfrak{P}Q + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \sin(m\varphi \mp \omega) \quad \text{seu}$$

$$\mathfrak{P}Q + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2n f^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \sin \frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} .$$

Hinc

Hinc ex denominatoris factore: $ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n} + ggxx$ nascitur ista fractio simplex:

$$\frac{\pm f\sin\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\cos\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n} \pm \sin\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n} + ggxx\right)}$$

seu

$$\frac{\pm gx\sin\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n} \mp f\sin\frac{2k(m-1)\pi\pm(m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi\pm\omega}{n} + ggxx\right)}$$

EXEMPLUM.

Resolvere hanc fractionem $\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n}x^{2n}}$ *in suas fractiones simplices.*

Istae fractiones simplices quaesitae ergo erunt:

$$\frac{+f\sin\frac{\omega}{n}\cos\frac{(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\sin\frac{2\pi-\omega}{n}\cos\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n} - \sin\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{\mp f\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\cos\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$-f\sin\frac{4\pi-\omega}{n}\cos\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi-\omega}{n}\right)$$

$$nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi-\omega}{n}+ggxx\right)$$

$$+f\sin\frac{4\pi+\omega}{n}\cos\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\right)$$

$$nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi+\omega}{n}+ggxx\right)$$

&c.

ficque eousque erit progrediendum, quoad harum fractionum numerus fuerit n. Si m fuerit numerus vel maior quam $2n-1$ vel numerus negativus, priori casu partes integrae, posteriori vero fractiones insuper sunt adiiciendae, quae modo ante expositio facile inveniuntur.

FINIS.

SUPPLEMENTUM

EDITORIS MONITUM.

AD exitum iam properabat huius Operis impressio, cum Celeberrimus Io. ALBERTUS EULERUS Auctoris nostri filius, & Petropolitanae Academiae a secretis, datis ad Cl. Matheseos Sublimioris Professorem GREGORIUM FONTANAM litteris, a quo fuerat hac de re officiose rogatus, magni Parentis sui Dissertationem ineditam, eamque oppido eximiam & numeris omnibus absolutam ad nos misit, cuius titulus est: *Dilucidationes in Capita postrema Calculi mei Differentialis de Functionibus Inexplicabilibus.*

C'est avec bien de plaisir (inquit Cl. Io. ALBERTUS in ea epistola Petropoli die 18 Decembris anni proxime elapsi 1787 exarata), *que je vous envoie la copie ci-jointe du Mémoire de feu mon Père sur les Fonctions Inexplicables, que votre Ami & Eléve souhaite de faire entrer dans la nouvelle édition qu'il va publier du Calcul Différentiel. Je vous l'aurois expédié plus tôt sans la grande difficulté &c....* Haec autem una est ex centum octoginta tribus Dissertationibus posthumis, quas immortalis LEONARDUS Petropolitanae Academiae moriens reliquit, & in eius Commentariis deinceps edendas legavit.

Nihil porro nobis optabilius contingere poterat, quam ut nova haec Euleriani Operis editio tam opportuno, tamque

que excellenti additamento locupletaretur, & hoc saltem nomine Berolinensi praestaret. Itaque Dissertationem ipsam continuo hic imprimi curavimus, ut Adnotationes post eandem sequentes, quasi post lautissimas epulas vilius obsonium, indulgentius haberentur. Nostram interim de te benemerendi voluntatem Lector benevole, aequi bonique consule, fave conatibus nostris, & vale.

DI-

DILUCIDATIONES

IN CAPITA POSTREMA CALCULI MEI DIFFERENTIALIS

DE FUNCTIONIBUS INEXPLICABILIBUS

1.

Cum hoc argumentum, utpote in Analysi prorsus novum neutiquam satis dilucide sit pertractatum, constitui hic, idem maiori studio retractare, atque omnia momenta, quibus innititur, ex primis principiis repetere; ubi plurimum iuvabit idonea signa in calculum introduxisse. Ita si proposita fuerit series quaecunque, eius terminos indicibus 1, 2, 3, 4, &c. respondentes his signis repraesentabo (1), (2), (3), (4), &c. hinc ergo terminus generalis huius seriei, indici indefinito x respondens, mihi erit (x), qui ergo pro quavis serie certa erit functio ipsius x, quam penitus cognitam assumo, ita scilicet comparatam, ut eius valores non solum pro numeris integris, loco x assumtis, sed etiam pro fractis, atque adeo surdis exhiberi queant.

2. Denotet porro $\Sigma : x$ terminum summatorium eiusdem seriei, qui exprimat summam terminorum a primo incipientium usque ad terminum (x), ita ut sit

$\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots\ldots\ldots + (x)$,

cuius ergo omnes valores, quoties x fuerit numerus integer positivus ex ipsa serie actu exhiberi poterunt; siquidem erit ut sequitur:

$\Sigma : 1 = (1)$
$\Sigma : 2 = (1) + (2)$
$\Sigma : 3 = (1) + (2) + (3)$
$\Sigma : 4 = (1) + (2) + (3) + (4)$
&c.

Cuiusmodi autem valores eadem formula $\Sigma : x$ sit acceptura quando loco x numeri fracti, vel adeo surdi, sive positivi, sive negativi tribuantur, hinc neutiquam apparet, unde istos valores ad peculiare functionum genus, quas *inexplicabiles* vocavi, refero. Quemadmodum igitur tales functiones per formulas analyticas determinatas exprimi queant, hic imprimis sum investigaturus

3. Totum autem hoc negotium commodissime expedietur per differentias continuas ex serie proposita derivatas, dum scilicet quilibet terminus a sequente subtrahitur, quo pacto oritur series primarum differentiarum, ex qua porro simili modo differentiae secundae, tertiae, quartae &c. formabuntur. Omnes autem has differentias sequentibus characteribus indicabo

DIFFERENTIAE I.	DIFFERENTIAE II.	DIFFERENTIAE III.
$(2)-(1)=\Delta 1$	$\Delta 2-\Delta 1=\Delta^2 1$	$\Delta^2 2-\Delta^2 1=\Delta^3 1$
$(3)-(2)=\Delta 2$	$\Delta 3-\Delta 2=\Delta^2 2$	$\Delta^2 3-\Delta^2 2=\Delta^3 2$
$(4)-(3)=\Delta 3$	$\Delta 4-\Delta 3=\Delta^2 3$	$\Delta^2 4-\Delta^2 3=\Delta^3 3$
$(5)-(4)=\Delta 4$	$\Delta 5-\Delta 4=\Delta^2 4$	$\Delta^2 5-\Delta^2 4=\Delta^3 4$
&c.	&c.	&c.

4. His characteribus constitutis singuli seriei termini ex primo (1), eiusque differentiis $\Delta 1$, $\Delta^2 1$, $\Delta^3 1$, $\Delta^4 1$, &c. exprimi poterunt. Cum enim sit $(2)=(1)+\Delta 1$, & $\Delta 2=\Delta 1+\Delta^2 1$, ob $(3)=(2)+\Delta 2$, erit $(3)=(1)+2\Delta 1+\Delta^2 1$; hinc iam fluit ista aequalitas $\Delta 3=\Delta 1+2\Delta^2 1+\Delta^3 1$. Quia nunc $(4)=(3)+\Delta 3$ habebimus $(4)=(1)+3\Delta 1+3\Delta^2 1+\Delta^3 1$. Inde porro sequitur $\Delta 4=\Delta 1+3\Delta^2 1+3\Delta^3 1+\Delta^4 1$, ob $(5)=(4)+\Delta 4$, erit $(5)=(1)+4\Delta 1+6\Delta^2 1+4\Delta^3 1+\Delta^4 1$, & ita porro. Ex ipsa formatione harum formularum manifestum est hic eosdem coefficientes, qui in potestate binomiali habeatur, cuius exponens est unitate minor quam index termini propositi, occurrere. Ita erit

$$(n)=(1)+\frac{n-1}{1}\Delta 1+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\Delta^2 1+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\Delta^3 1+\text{&c.}$$

5. Quod si hic numerum n unitate augeamus habebimus:

$$(n+1) = (1) + \frac{n}{1}\Delta 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 1 + \&c.$$

Cum iam haec postrema expressio exprimat terminum qui a primo n gradibus est remotus, simili modo terminus, qui a secundo per totidem gradus est promotus $(n+2)$ ex secundo eiusque differentiis determinatur: Erit enim:

$$(n+2) = (2) + \frac{n}{1}\Delta 2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 2 + \&c.$$

Eodem modo evidens est fore porinus

$$(n+3) = (3) + \frac{n}{1}\Delta 3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 3 + \&c.$$

$$(n+4) = (4) + \frac{n}{1}\Delta 4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta^3 4 + \&c.$$

6. Hinc ergo patet, ipsum seriei nostrae terminum generalem (x) ex primo eiusque differentiis hoc modo definiri:

$$(x) = (1) + \frac{x-1}{1}\Delta 1 + \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\Delta^2 1 + \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{3}\Delta^3 1 + \&c.$$

Hinc terminus ultimum sequens $(x+1)$ erit:

$$(x+1) = (1) + \frac{x}{1}\Delta 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\Delta^2 1 + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\Delta^3 1 + \&c.$$

quae expressio, cum in sequentibus frequentissime occurrat, brevitatis gratia introducamus sequentes characteres

$$\frac{x}{1} = x$$

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2} = x'$$

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} = x''$$

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4} = x'''$$ &c.

quibus adhibitis habebimus sequentes aequationes:

$(x+1) = (1) + x\Delta 1 + x'\Delta' 1 + x''\Delta'' 1 + \&c.$
$(x+2) = (2) + x\Delta 2 + x'\Delta' 2 + x''\Delta'' 2 + \&c.$
$(x+3) = (3) + x\Delta 3 + x'\Delta' 3 + x''\Delta'' 3 + \&c.$
$(x+4) = (4) + x\Delta 4 + x'\Delta' 4 + x''\Delta'' 4 + \&c.$
. . . . . .
$(x+n) = (n) + x\Delta n + x'\Delta' n + x''\Delta'' n + \&c.$

7. Deinde etiam summas quotcunque terminorum nostrae seriei ex solo termino primo eiusque differentiis determinari poterit, quemadmodum sequens tabula declarat:

$\Sigma : 1 = (1)$
add. $(2) = (1) + \Delta 1$
$\Sigma : 2 = 2(1) + \Delta 1$
$(3) = (1) + 2\Delta 1 + \Delta' 1$
$\Sigma : 3 = 3(1) + 3\Delta 1 + \Delta' 1$
$(4) = (1) + 3\Delta 1 + 3\Delta' 1 + \Delta'' 1$
$\Sigma : 4 = 4(1) + 6\Delta 1 + 4\Delta' 1 + \Delta'' 1$
$(5) = (1) + 4\Delta 1 + 6\Delta' 1 + 4\Delta'' 1 + \Delta''' 1$
$\Sigma : 5 = 5(1) + 10\Delta 1 + 10\Delta' 1 + 5\Delta'' 1 + \Delta''' 1$
&c.

Hic iterum evidens est coefficientes eosdem esse, qui in potestate binomiali eiusdem ordinis occurrunt.

8. In usum igitur vocatis characteribus modo ante stabilitis ipsum terminum summatorium nostrae seriei $\Sigma : x$ exprimere valemus: Erit enim

$\Sigma : x = x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta' 1 + x'''\Delta'' 1 + \&c.$

quae forma iam ita est comparata, ut loco x non solum numeros integros, sed etiam fractos, imo surdos, quoscunque tam positivos quam negativos accipere liceat, quibus casibus utique ista expressio in infinitum progredietur, nisi forte series proposita deducat tandem ad differentias evanescentes, cuiusmodi series algebraicae vocari solent, quibus ergo casibus

non

non ad functiones inexplicabiles pervenitur. Interim tamen ista expressio pro termino summatorio inventa quando in infinitum porrigitur nihil adiumenti affert, quando differentiationes, vel etiam summationes sunt instituendae; quamobrem in id erit incumbendum, quemadmodum, saltem pro certis casibus terminus summatorius inventus in alias formas transfundi queat, quae neque differentiationi neque integrationi refragentur, atque huc pertinent omnia subsidia, quae in calculo differentiali fusius exposui, & quorum inventio non parum erat obstructa: sequenti autem modo totum hoc negotium facile conficietur.

9. Ad expressionem pro termino summatorio $\Sigma : x$ modo ante inventam addantur plures formulae sub hac specie contentae.

$$(n) + \varkappa\Delta n + \varkappa'\Delta^2 n + \varkappa''\Delta^3 n + \&c. \ldots - (x+n)$$

quarum summae cum sint nihilo aequales, omnes, quotcunque fuerint, cum $\Sigma : x$ iunctim sumtae nihilominus terminum summatorium expriment. Sumantur ergo pro n successive omnes numeri 1, 2, 3, 4, &c., & tota expressio secundum columnas verticales singulis valoribus x, x', x'', &c. respondentes sequenti modo disponantur:

Expressio generalis pro termino summatorio

$$\begin{aligned}
&x(1) + \varkappa'\Delta 1 + \varkappa''\Delta^2 1 + \varkappa'''\Delta^3 1 + \&c. \\
&(1) + \varkappa\Delta 1 + \varkappa'\Delta^2 1 + \varkappa''\Delta^3 1 + \varkappa'''\Delta^4 1 + \&c. \ldots - (x+1) \\
&(2) + \varkappa\Delta 2 + \varkappa'\Delta^2 2 + \varkappa''\Delta^3 2 + \varkappa'''\Delta^4 2 + \&c. \ldots - (x+2) \\
&(3) + \varkappa\Delta 3 + \varkappa'\Delta^2 3 + \varkappa''\Delta^3 3 + \varkappa'''\Delta^4 3 + \&c. \ldots - (x+3) \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&(n) + \varkappa\Delta n + \varkappa'\Delta^2 n + \varkappa''\Delta^3 n + \varkappa'''\Delta^4 n + \&c. \ldots - (x+n)
\end{aligned}$$

10. Etsi veritas huius expressionis nulli amplius dubio est obnoxia, tamen non parum iuvabit, eam ex ipsa forma con-

confirmasse. Colligantur nimirum in unam summam singulae columnae verticales, ac prima quidem summa erit

$(1)+(2)+(3)+(4)+\ldots\ldots\ldots+(n)=\Sigma:x$

secunda columna dat

$x[(1)+\Delta 1+\Delta 2+\Delta 3+\ldots\ldots+\Delta n]$

Cum autem sit

$\Delta 1=(2)-(1)$; $\Delta 2=(3)-(2)$; $\Delta 3=(4)-(3)$; &c.

tota haec summa contrahetur in $x(n+1)$.

Simili modo tertiae columnae summa erit

$x'[\Delta 1+\Delta^2 1+\Delta^2 2+\Delta^2 3+\Delta^2 4+\ldots\ldots+\Delta^2 n]$

& quia

$\Delta^2 1=\Delta 2-\Delta 1$; $\Delta^2 2=\Delta 3-\Delta 2\ldots\Delta^2 n=\Delta(n+1)-\Delta n$

illa summa contrahitur in $x'\Delta(n+1)$. Eodem modo patet fore quartae columnae summam $x''\Delta^2(n+1)$, & quintae $=x'''\Delta^3(n+1)$, & ita porro. Ultimae vero columnae subtrahendae summa est

$(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots\ldots+(n+n)=\Sigma:(n+n)-\Sigma:n$.

11. Summa igitur omnium columnarum verticalium mediarum praeter primam & ultimam est ut vidimus

$x(n+1)+x'\Delta(n+1)+x''\Delta^2(n+1)+x'''\Delta^3(n+1)+$&c.

Cum autem sit $x(1)+x'\Delta 1+x''\Delta^2 1+x'''\Delta^3 1+$&c.$=\Sigma:x$, singulis terminis numero n auctis erit summa nostrae seriei

$x(n+1)+x'\Delta(n+1)+x''\Delta^2(n+1)+$&c.$=\Sigma:(n+n)-\Sigma:n$

consequenter omnium plane columnarum summa praeter ultimam est $=\Sigma:(n+n)$: unde si summa ultimae columnae, quae est $\Sigma:(n+n)-\Sigma:n$ subtrahatur, remanebit summa totius figurae $=\Sigma:n$, hoc est terminus summatorius quaesitus.

12. Maxime hic mirum videbitur, quod valorem formulae $\Sigma:n$, quae serie satis simplici exprimitur, per congeriem innumerabilium serierum expressum & involutum dederimus; verum mox summus usus huius formae complicatissimae patebit, quando numerum serierum horizontalium adeo in infinitum continuaverimus, quod fiet, si pro n numerum infinitum accipiamus, quemadmodum nunc clarius explicabimus.

13.

13. Denotante igitur n numerum infinite magnum, summa secundae columnae verticalis, quae est $\varkappa(n+1)$ continebit terminum seriei nostrae infinitesimum, qui ergo si evanescat, multo magis summae sequentium columnarum verticalium evanescent; quamobrem hoc casu sufficiet solam primam columnam cum ultima in calculo retinuisse. Sin autem termini infinitesimi non evanescant, sed tamen inter se fuerint aequales, tum tertiam columnam cum sequentibus abiicere licebit. Porro autem si demum differentiae secundae infinitesimae evanescant, tres priores columnas verticales in calculo retineri debebunt, similique modo quatuor si tertiae demum infinitesimae evanescant. Secundum igitur hoc serierum discrimen, ipsas series in sequentes species distribuemus:

Species prima serierum,

quarum termini infinitesimi evanescunt

14. Quoties igitur tales series proponuntur, pro earum termino summatorio sufficiet terminos primae & ultimae columnae verticalis in calculo retinuisse, sicque nanciscemur pro termino summatorio sequentem expressionem

$$\Sigma:\varkappa = (1) + (2) + (3) + (4) + \&c.$$
$$-(\varkappa+1)-(\varkappa+2)-(\varkappa+3)-(\varkappa+4)-\&c.$$

quae quidem in infinitum excurrit, atque eo magis convergeret quo minor fuerit index $\varkappa$, quandoquidem si evanescat, tota series in nihilum abibit, sive erit $\Sigma:0 = 0$, id quod cum rei natura egregie congruit; quando enim numerus terminorum addendorum est nullus, etiam summa necessario debet esse nulla.

15. Quando autem index $\varkappa$ numerus est praemagnus, haec series utique parum converget, verum semper licebit huiusmodi casus ad indices minores reducere. Cum enim sit $\Sigma:(\varkappa+1) = \Sigma:\varkappa+(\varkappa+1)$, simili erit modo

$\Sigma:$

$\Sigma:(x+2) = \Sigma:x + (x+1) + (x+2)$, atque adeo in genere, denotante i numerum integrum

$\Sigma:(x+i) = \Sigma:x + (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+i)$

quamobrem si summa $x+i$ terminorum desideretur, sufficiet summam x terminorum, hoc est $\Sigma:x$ investigasse, hocque modo omnes hujusmodi quaestiones reduci poterunt ad casus, ubi index x est adeo unitate minor, quo casu series pro $\Sigma:x$ ante data vehementer converget.

16. Talis reductio imprimis est necessaria, quando index x est numerus negativus. Cum enim sit $\Sigma:x = \Sigma:(x-1) + (x)$, erit $\Sigma:(x-1) = \Sigma:x - (x)$, eodemque modo $\Sigma:(x-2) = \Sigma:x - (x) - (x-1)$, & $\Sigma:(x-3) = \Sigma:x - (x) - (x-1) - (x-2)$ & in genere $\Sigma:(x-i) = \Sigma:x - (x) - (x-1) \ldots - (x-i+1)$ hocque modo quantumvis numerus negativus $x-i$ fuerit magnus, resolutio semper ad $\Sigma:x$ reduci potest, ita ut sit $x < 1$.

EXEMPLUM.

17. Proposita sit haec series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x} = \Sigma:x$$

ita ut huius seriei harmonicae summa x terminorum desideretur, ubi pro x numeros quoscunque praeter integros positivos accipere licet, siquidem pro casibus, quibus x est numerus integer positivus, tota res nulla difficultate laborat. Hoc igitur casu ex forma ante data erit

$$\Sigma:x = \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{&c.} \\ -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{&c.} \end{array}$$

quae duae series in hanc unicam contrahentur

$$\Sigma:x = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{&c.}$$

cuius ergo seriei summa per se constat, quoties x fuerit numerus

merus integer positivus, ita erit:

si $n=1$	$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+$ &c.
$n=2$	$1+\frac{1}{2}=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{4.6}+$ &c.
$n=3$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{1.4}+\frac{3}{2.5}+\frac{3}{3.6}+\frac{3}{4.7}+$ &c.
$n=4$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{1.5}+\frac{4}{2.6}+\frac{4}{3.7}+\frac{4}{4.8}+$ &c.
&c.	&c.

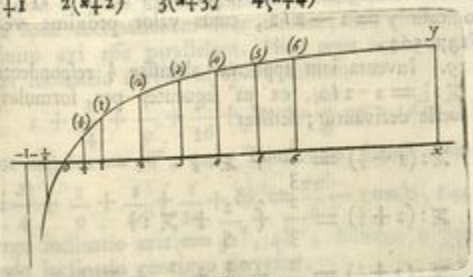
quae quidem series sunt notissimae.

18. Quo haec clarius intelligantur construamus curvam, cuius abscissae $0x=x$ respondeat applicata $xy=y=\Sigma:x$; ita ut sumtis super axe $0x$ intervallis unitate aequalibus $0,1;\ 1,2;\ 2,3;\ 3,4;$ &c. applicatae futurae sint

$1\ldots(1)=1$
$2\ldots(2)=1+\frac{1}{2}$
$3\ldots(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
$4\ldots(4)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
&c.

atque aequatio inter binas coordinatas erit

$$y=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{2(x+2)}+\frac{x}{3(x+3)}+\frac{x}{4(x+4)}+\text{ &c.}$$



ex qua ergo aequatione omnes applicatae intermediae definiri poterunt, atque adeo sufficiet pro x valores unitate minores accepisse. Ita si applicata $\frac{1}{1}..(\frac{1}{1})$ abscissae $0..\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$ desideretur reperietur $\frac{1}{1}..(\frac{1}{1})=\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{4.9}+\frac{1}{5.11}+$ &c. cuius summa per logarithmos assignari poterit hoc modo: formetur haec series: $y=\frac{t^3}{1.3}+\frac{t^5}{2.5}+\frac{t^7}{3.7}+\frac{t^9}{4.9}+$ &c. quae ergo series sumto $t=1$ dabit valorem quaesitum, at vero differentiando habebimus:

$\frac{dy}{dt}=\frac{tt}{1}+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3}+\frac{t^8}{4}+$ &c. & denuo differentiando:

$\frac{ddy}{2dt^2}=1+t^3+t^5+t^7+$ &c. $=\frac{1}{1-tt}$. Hinc ergo vicissim erit $\frac{dy}{2dt}=\int\frac{t\,dt}{1-tt}$, & $y=2\int dt\int\frac{t\,dt}{1-tt}$, quae duplex integratio reducitur more solito ad unicam, quo facto erit $y=2t\int\frac{t\,dt}{1-tt}-2\int\frac{tt\,dt}{1-tt}$. Quia autem post integrationem statui debet $t=1$, erit $y=2\int\frac{t\,dt}{1-tt}-2\int\frac{tt\,dt}{1-tt}=2\int\frac{t\,dt}{1+t}$; quamobrem integrando fiet $y=2t-2l(t+1)$, ideoque nostro casu $y=2-2l2$, cuius valor proxime verus est $0,61370564$.

19. Inventa iam applicata abscissae $\frac{1}{1}$ respondente, scilicet $\Sigma:\frac{1}{1}=2-2l2$, ex ea sequentes per formulas supra datas facile derivantur; scilicet

$$\Sigma:(1+\tfrac{1}{1})=\frac{2}{3}+\Sigma:\tfrac{1}{1}$$

$$\Sigma:(2+\tfrac{1}{1})=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\Sigma:\tfrac{1}{1}$$

$$\Sigma:(3+\tfrac{1}{1})=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\Sigma:\tfrac{1}{1}$$ &c.

Quin etiam praecedentes applicatae in figura non expressae ex formula $\Sigma:(x-i)$ determinari poterunt, quam invenimus $\Sigma:(x-i)=\Sigma:x-(x)-(x-1)-(x-2)\ldots-(x-i+1)$ quia nostro casu $x=\frac{1}{2}$, erit applicata

$$\Sigma:\left(-\frac{1}{2}\right)=\Sigma:\frac{1}{2}-2=-2/2,$$ erit scilicet negativa, quae adeo sumto $x=-1$ fit infinita. Infinita vero etiam evadet casibus $x=-2$, $x=-3$, $x=-4$ &c.: intra autem haec intervalla erit

$$\Sigma:-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\Sigma:\frac{1}{2}-2+2$$

$$\Sigma:-\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Sigma:\frac{1}{2}-2+2-\frac{2}{3}$$

$$\Sigma:-\left(3+\frac{1}{2}\right)=\Sigma:\frac{1}{2}-2+2-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$$

&c.

20. Differentiemus nunc seriem pro applicata y inventam fietque

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\text{&c.}$$

quae ergo series exprimit tangentem anguli, sub quo elementum curvae in y ad axem inclinatur; unde patet pro abscissa infinita hanc inclinationem fore nullam, sive tractum curvae in infinito axi esse parallelum. Hinc ergo sumto $x=0$ innotescet inclinatio curvae ad ipsum initium $=$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{&c.}=\frac{\pi\pi}{6}=1,644,$$

ideoque angulus $=58^\circ, 42'$. Tum vero sumto $x=1$ erit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{&c.}=\frac{\pi\pi}{6}-1=0,644,$$

ubi ergo inclinatio erit $=32^\circ, 48'$, hincque ulterius continuando inclinatio continuo decrescet.

21. Retrogrediendo vero ad abſciſſas negativas ſupra vidimus, caſibus, quibus $x = -1$; vel $x = -2$; vel $x = -3$ applicatas fieri infinite magnas, & totidem curvae aſſymptotas conſtituere. Nunc vero videbimus, iiſdem locis fieri $\frac{dy}{dx} = \infty$, ibique inclinationem curvae eſſe 90°, ſive tangentes ad axem fore perpendiculares. Praeterea quoniam ſeries pro $\frac{dy}{dx}$ inventa ſemper habet ſummam poſitivam, ſequitur omnes partes curvae dextrorſum ſemper aſcendere, contra vero ſiniſtrorſum deſcendere.

22. Quin etiam poterimus integrationem adhibere, atque aream curvae ab initio uſque ad applicatam xy aſſignare. Ex prima enim forma, ad quam ſumus perducti immediate manifeſto fiet

$$\int y dx = -l(1+x) - l(2+x) - l(3+x) - \&c. + x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \&c. + \text{Conſt.}$$

quae conſtans ita debet determinari, ut caſu $x = 0$ tota area evaneſcat, unde illa rite ita exprimetur

$$\int y dx = -l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) - \&c. + x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \&c.$$

Cum igitur ſit

$$l\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \&c. - \&c.$$

ſuperior expreſſio per ſeries ſequentes exprimi poterit:

$$\int y dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \&c.$$
$$+ \frac{x^3}{2.4} - \frac{x^4}{3.8} + \frac{x^5}{4.16} - \frac{x^6}{5.32} - \&c.$$
$$+ \frac{x^4}{2.9} - \frac{x^5}{3.27} + \frac{x^6}{4.81} - \frac{x^7}{5.243} + \frac{x^8}{6.729} - \&c.$$
$$+ \frac{x^5}{2.16} - \frac{x^6}{3.64} + \frac{x^7}{4.256} - \frac{x^8}{5.1224} + \frac{x^9}{6.4896} - \&c.$$

&c. 23.

23. Quod si iam has series verticaliter colligamus habebimus

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\&c.\right) = +0,822467.x^1$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\&c.\right) = -0,400685.x^3$$
$$+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\&c.\right) = +0,270581.x^4$$
$$-\frac{1}{5}x^5\left(1+\frac{1}{32}+\frac{1}{243}+\frac{1}{1224}+\quad+\&c.\right) = -0,207385.x^5$$

Ponamus nunc $x = 1$, ut prodeat area $01(1)$, & quia fractiones decimales hic datae parum convergunt, notetur seriei cuiuscunque, ubi signa alternantur, scilicet:

$$s = a - b + c - d + e - \&c.$$

summam per differentias continuas ita exprimi, ut sit

$$s = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \&c.$$

cuius ergo regulae ope calculus sequenti modo institui poterit:

	$-\Delta$	$+\Delta^2$	$-\Delta^3$
a) 0, 822467			
	0, 421782		
b) 0, 400685		0, 291678	
	0, 130104		0, 224770
c) 0, 270581		0, 066908	
	0, 063196		0, 041540
d) 0, 207385		0, 025368	
	0, 037828		0, 013047
e) 0, 169557		0, 012321	
	0, 025507		0, 005355
f) 0, 144050		0, 006966	
	0, 018541		0, 002600
g) 0, 125509		0, 004366	
	0, 014175		0, 001426
b) 0, 111334		0, 002940	
	0, 011235		
i) 0, 100099			

$+\Delta^4$	$-\Delta^5$	$+\Delta^6$	$-\Delta^7$	$+\Delta^8$	
0, 183230					
	0, 154737				
0, 028493		0, 133936			
	0, 020801		0, 118072		
0, 007692		0, 015864		0, 105564	&c.
	0, 004937		0, 012508		
0, 002755		0, 003356			
	0, 001581				
0, 001174					

24. Harum columnarum, quarum prima ex Calculi Differentialis Cap. VI. Part. II. pag. 365 est definita, numeri supremi referunt terminum primum a cum suis differentiis continuis, secundi vero descendendo referunt terminum b cum suis differentiis, tertii terminum c cum suis differentiis. Quia nunc supremi termini parum convergunt, duos primos $a - b$ actu colligamus, eritque $a - b = 0,421782$: sequentium vero $c - d + e - f +$ &c. summam

$$= \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}\Delta c + \frac{1}{8}\Delta^2 c - \frac{1}{16}\Delta^3 c + \text{&c.}$$

secundum datam legem computemus eritque

$\frac{1}{2}c = 0,135290$
$-\frac{1}{4}\Delta c = 0,015799$
$+\frac{1}{8}\Delta^2 c = 0,003171$
$-\frac{1}{16}\Delta^3 c = 0,000815$
$+\frac{1}{32}\Delta^4 c = 0,000220$
$-\frac{1}{64}\Delta^5 c = 0,000077$
$+\frac{1}{128}\Delta^6 c = 0,000026$
seqq. $= 0,000010$
summa $= 0,155408$
$a - b = 0,421782$
Area $= 0,577190$

Spero autem, fusiorem evolutionem huius Lineae Curvae satis memorabilis nemini fore ingratam praecipue cum aequatio pro hac curva pertineat ad functiones inexplicabiles, atque idcirco ista ad casum specialiorem digressio a nostro scopo haud aliena sit existimanda.

Species secunda serierum

quarum differentiae infinitesimae primae evanescunt.

25. Ad hanc ergo speciem pertinent omnes series, quarum termini infinitesimi inter se sunt aequales. Ut ergo ter-

mi-

minum summatorium harum serierum $\Sigma : x$ exprimamus, nil aliud opus est, nisi ut ad expressionem praecedentis speciei insuper termini secundae columnae verticalis formae generalis §. 9. exhibitae adiungantur, cuius quidem terminus supremus seorsim erit exhibendus, & quia columnae singulae horizontales iam tribus terminis constant, terminus summatorius quaesitus $\Sigma : x$ sequenti serie triplicata definietur.

$$\Sigma : x = \left.\begin{array}{l} +(1) - (2) + (3) - (4) \\ x(1) + x\Delta 1 + x\Delta 2 + x\Delta 3 + x\Delta 4 \\ -(x+1) - (x+2) - (x+3) - (x+4) \end{array}\right\} \text{&c.}$$

quae forma ob $\Delta 1 = (2) - (1)$; $\Delta 2 = (3) - (2)$; $\Delta 3 = (4) - (3)$; &c. transfundetur in hanc:

$$\Sigma : x = \left.\begin{array}{l} +\overline{1-x}(1) + \overline{1-x}(2) + \overline{1-x}(3) \\ x(1) + x(2) + x(3) + x(4) \\ -(x+1) - (x+2) - (x+3) \end{array}\right\} \text{&c.}$$

quae series eo magis convergit, quo minor x accipiatur. Supra autem docuimus omnes casus semper eo reduci posse ubi x sit fractio unitate minor.

26. Consideremus primo casum simplicissimum, quo omnes seriei termini sunt inter se aequales, scilicet $(x) = a$; per se enim patet eius terminum summatorium esse ax, quem eundem valorem nostra expressio statim declarabit.

Erit enim $\Sigma\, x = xa$.

27. Nunc consideretur casus, quo $(x) = \frac{x+1}{x}$, ita ut nostra series sit $\Sigma : x = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{x+1}{x}$.

cuius termini infinitesimi omnes unitate aequantur. Nostra igitur formula nobis dabit

$$\Sigma : x = \left.\begin{array}{l} +\overline{1-x}\frac{2}{1} + \overline{1-x}\frac{3}{2} + \overline{1-x}\frac{4}{3} \\ x\frac{3}{2} + x\frac{4}{3} + x\frac{5}{4} \\ -\frac{(x+2)}{x+1} - \frac{(x+3)}{x+2} - \frac{(x+4)}{x+3} \end{array}\right\} \text{&c.}$$

unde patet sumto $x = 1$ fore $\Sigma : x = \frac{2}{1}$; at sumto $x = 2$ fiet:

$$\Sigma : x = 4 + 2.\frac{3}{2} + 2.\frac{4}{3} + 2.\frac{5}{4} \text{ &c.} \left\{ \begin{array}{l} -1.\frac{2}{1} - 1.\frac{3}{2} - 1.\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} - \frac{5}{4} - \frac{6}{5} \end{array} \right\} = 4 - \frac{2}{1} + \frac{3}{2}$$

28. At vero iste casus facile reduci potest ad speciem praecedentem. Cum enim terminus generalis sit $(x) = \frac{x+1}{x}$, is in partes resolutus dabit $(x) = 1 + \frac{1}{x}$; quamobrem duae formentur series, prior scilicet ex termino generali 1, altera vero ex termino generali $\frac{1}{x}$, haeque duae series iunctim sumtae dabunt summam quaesitam $\Sigma : x$, erit scilicet

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + x \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x} \end{array}$$

Iam superioris seriei summa est x, inferior vero per speciem primam evolvi potest, indeque habebitur:

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{&c.} \\ -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{&c.} \end{array}$$

quae expressio multo est simplicior praecedente, nihilo vero minus eundem valorem exhibet. Ita si sumatur $x = \frac{1}{2}$ prior expressio nobis dabit $\Sigma : x = 1 + \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}.\frac{2}{1} + \frac{1}{2}.\frac{3}{2} + \frac{1}{2}.\frac{4}{3} + \frac{1}{2}.\frac{5}{4} + \frac{1}{2}.\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{2} - \frac{2}{1} - \frac{9}{7} - \frac{12}{9} \end{array} \right\}$ &c.

ter-

terminisque secundum ordinem collectis fiet

$$\Sigma:\tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.24} + \frac{1}{9.40} + \frac{1}{11.60} + \&c.$$

cuius ordo clarius patescet ex sequenti forma

$$\Sigma:\tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1.3.4} + \frac{1}{2.5.6} + \frac{1}{3.7.8} + \frac{1}{4.9.10} + \frac{1}{5.11.12} + \&c.$$

altera vero expressio dat has series

$$\Sigma:\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \&c.$$
$$\quad\quad - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} - \&c.$$

quae collectae dabunt

$$\Sigma:\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.9} + \&c.$$

29. Ex hoc exemplo apparet, seriem ex specie secunda deductam magis convergere quam posteriorem ex specie prima derivatam; quare operae pretium erit prioris seriei convergentiam attentius considerare. Quilibet scilicet huius seriei terminus oritur ex his tribus partibus

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} - \frac{2n+3}{2n+1},$$

quae cum se mutuo proxime destruant, summa duorum priorum proxime aequalis erit tertiae, unde sequitur haec formula satis memorabilis $\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} = \frac{2(n+3)}{2n+1}$, quod eo propius ad veritatem accedit, quo maior fuerit numerus n. Hinc utrinque subtrahendo 2 erit proxime

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{4}{2n+1}.$$

30. Talis autem reductio ad speciem primam semper locum habere potest, quando series proposita tandem ad valorem finitum convergit; verum si seriei termini tandem in infinitum crescant, haec reductio non amplius locum habere potest, ideoque necessario ad speciem secundam erit recurrendum.

dum. Talis est casus, quo $(x) = \sqrt{x}$, denotante enim n numerum infinitum bini termini infinitesimi contigui erunt $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$, quorum differentia est $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, ideoque evanescens. Hoc ergo casu series nostra erit

$$\Sigma : x = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots\ldots + \sqrt{x}.$$

Hinc ergo per praecepta data habebimus hanc expressionem

$$\Sigma : x = x + \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \\ + \frac{\sqrt{x}\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{4}}{\sqrt{x+3}} \end{array} \right\} \text{&c.}$$

quae series quantopere convergat videamus casu $x = \frac{1}{2}$, eritque

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \text{&c.}$$

cuius terminus quicunque erit $\frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ qui eo propius ad nihilum accedere debet, quo maior fuerit numerus n, quocirca proxime erit $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2(2n+1)}$. Sumtis enim quadratis habebimus $2n+1+2\sqrt{n(n+1)} = 2(2n+1)$, ideoque $2\sqrt{n(n+1)} = 2n+1$. Sumtis denuo quadratis fiet $4nn+4n = 4nn+4n+1$, quae ratio utique proxime ad aequalitatem accedit. Ceterum hic notari meretur, veros valores pro fractionibus loco x assumtis tantopere esse transcendentes, ut nullis plane formulis analyticis exprimi queant. Quin etiam quilibet valor pro x assumtus ad peculiare transcendentium genus pertinebit.

31. Antequam hanc speciem deseramus, adiungamus adhuc insigne Theorema circa convergentiam formularum multo generalius eo, quod modo ante attulimus.

Theo-

Theorema

Sequens aequalitas

$$(\beta-\alpha)\sqrt[\mu]{n^\nu}+\alpha\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}=\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

eo propius ad veritatem accedet, quo maior sumatur numerus n, *simulque quo minor fuerit fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$, *si modo expenens* $\frac{\nu}{\mu}$ *unitate fuerit minor. At vero sumto* ν *negativo ista aequalitas*

$$\frac{\beta-\alpha}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}+\frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}=\frac{\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}},$$

sine posteriore conditione ad veritatem eo propius accedet, quo maior fuerit numerus n *& quo minor fuerit fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$. *Quin etiam sub iisdem conditionibus ad logarithmos transferri potest, ita ut sit tam*

$$(\beta-\alpha)ln+\alpha l(n+1)=\beta l\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

quam

$$\frac{\beta-\alpha}{ln}+\frac{\alpha}{l(n+1)}=\frac{\beta}{l\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Demonstratio

32. Sequitur hoc Theorema ex solutione generali pro hac specie data, cuius terminus quicunque consistit his partibus $1-\varkappa(n)+\varkappa(n+1)-(n+\varkappa)$, atque eo minor evadit, quo maior sumatur numerus n existente $\varkappa$ fractione unitate minore. Quod si iam ponamus $\varkappa=\frac{\alpha}{\beta}$ & $(\varkappa)=\sqrt[\mu]{\varkappa^\nu}$, ideoque

etiam $(n) = \sqrt[\mu]{n^\nu}$, necesse est ut sit $\frac{\mu}{\nu} < 1$, quia alioquin termini infinitesimi non haberent differentias evanescentes. Hae autem substitutiones praebent formulas priores in theoremate datas. Quando vero fractio $\frac{\mu}{\nu}$ negativa accipiatur, tum series proposita adeo in specie prima continebitur, siquidem ipsi termini infinitesimi in nihilum abeunt.

33. Quo vis huius Theorematis clarius intelligatur, notasse iuvabit, has formulas quatuor casibus exacte cum veritate convenire, quorum primus est si $\alpha = 0$; secundus quo $\alpha = \beta$; tertius est quo $\nu = 0$; quartus denique locum habet si pro n accipiatur numerus infinitus; praeterea vero datur casus quintus, quo in forma priore est $\mu = \nu$ sive $\sqrt[\mu]{n^\nu} = n$.

Species tertia serierum

quarum differentiae demum infinitesimae secundae evanescunt.

34. Hoc igitur eveniet, quoties ipsi termini infinitesimi progressionem arithmeticam constituunt; formula igitur ante pro $\Sigma : x$ in superiore specie inventa ad hunc casum accommodabitur, si insuper singuli termini columnae tertiae verticalis adiungantur; hoc modo terminus summatorius sequenti modo exprimetur

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} x(1) + (1) + (2) + (3) \ldots + (n) \\ \quad + x\Delta 1 + x\Delta 2 + x\Delta 3 \ldots + x\Delta n \\ + x'\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x'\Delta^2 2 + x'\Delta^2 3 \ldots + x'\Delta^2 n \\ \quad - (x+1) - (x+2) - (x+3) \ldots - (x+n) \end{array}$$

35. Transmutemus nunc hanc expressionem in formam ad usum magis accommodatam, ac primo quidem loco x' scribamus eius valorem $\frac{xx - x}{2}$; tum vero ob $\Delta n = (n+1) - (n)$

& $\Delta^2 n = (n+2) - 2(n+1) + (n)$, his valoribus substitutis postrema columna praecedentis formulae abibit in hanc formam:

$$(n) + x(n+1) + \frac{xx-x}{2}(n+2)$$
$$-x(n) - \overline{xx-x}(n+1)$$
$$+\frac{xx-x}{2}(n)$$

qui termini collecti praebent

$$\frac{\overline{xx-3x+2}}{2}(n) - \overline{xx-2x}(n+1) + \frac{xx-x}{2}(n+2).$$

Ponamus igitur brev. gr. $\frac{\overline{xx-3x+2}}{2} = p$; $xx-2x = q$ & $\frac{xx-x}{2} = r$, sicque terminus summatorius quaesitus sequenti forma exprimetur:

$$\Sigma : x = \frac{3x-xx}{2}(1) + \frac{xx-x}{2}(2)$$
$$+p(1) - q(2) + r(3) - (x+1)$$
$$+p(2) - q(3) + r(4) - (x+2)$$
$$+p(3) - q(4) + r(5) - (x+3)$$

quae series iam vehementer converget.

36. Hinc igitur novum Theorema simile praecedenti, sed multo latius patens possumus derivare, ponendo ut ante $x = \frac{\alpha}{6}$, $(n) = \overset{\mu}{\mathrm{V}} n^\nu$, ubi iam sufficit ut exponens $\frac{\nu}{\mu}$ binario fit minor, multo magis autem hunc exponentem negativum statuere licebit. Theorema hoc est

Ista aequalitas

$$(\alpha\alpha - 3\alpha 6 + 2 6 6) \overset{\mu}{\mathrm{V}} n^\nu - (2\alpha\alpha - 4\alpha 6) \overset{\mu}{\mathrm{V}} (n+1)^\nu + (\alpha\alpha - \alpha 6) \overset{\mu}{\mathrm{V}} (n+2)^\nu =$$
$$2 6 6 \overset{\mu}{\mathrm{V}} \left(n + \frac{\alpha}{6}\right)^\nu$$

co

eo propius ad veritatem accedet quo maior capiatur numerus n *& fractio* $\frac{\alpha}{\beta}$ *parum ab unitate discrepet, dummodo* $\frac{\nu}{\mu}$ *binario sit minus. Tum vero sumto* μ *negativo erit plerumque multo accuratius:*

$$\frac{\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}-\frac{2\alpha\alpha-4\alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}+\frac{\alpha\alpha-\alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}}=\frac{2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{\alpha}{\beta})^\nu}}$$

Quin etiam pro formulis radicalibus logarithmi accipi poterunt.

37. Veritas huius Theorematis etiam exacte subsistit his quatuor casibus I. $\alpha=0$; II. $\alpha=\beta$; III. $\nu=0$ & IV. $n=\infty$. Praeterea vero idem evenit, quando in forma priori est vel $\nu=\mu$, vel $\nu=2\mu$, ita ut sit $\sqrt[\mu]{n^\nu}$ vel n vel nn. Habemus igitur sex casus, quibus hoc Theorema nihil plane a veritate aberrat, unde facile intelligitur etiam reliquis casibus omnibus errorem non esse posse notabilem

38. Possumus etiam hoc theorema adhuc generalius reddere, loco n scribendo $\frac{n}{c}$ & ubique per debitam potestatem ipsius c multiplicando, quo fractiones tollantur. Sicque prior forma fiet $(\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu}-(2\alpha\alpha-4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu}+(\alpha\alpha-\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu}=2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha c}{\beta}\right)^\nu}$

altera autem forma ab hac non discrepat, nisi quod radicalia in denominatorem ingrediuntur, id quod etiam de logarithmis est intelligendum.

39. Operae pretium erit hoc theorema aliquo exemplo illustrare. Sumatur igitur $\alpha=1$ & $\beta=2$, fientque aequalitates in theoremate exhibitae

$3\sqrt{n}$

$$3\sqrt[\mu]{n^\nu} + 6\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu} - \sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 8\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{1}{2}c\right)^\nu}$$

$$\frac{3}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} + \frac{6}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} - \frac{1}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{8}{\sqrt[\mu]{(n+\frac{1}{2})^\nu}}$$

Applicemus formam priorem ad logarithmos, fietque
$3l n + 6l(n+c) - l(n+2c) = 8l(n+\frac{1}{2}c)$ fit nunc $n = 10$ & $c = 2$, ut prodeat
$3l10 + 6l12 - l14 = 8l11$. Facta igitur evolutione

$3l10 =$	3, 0000000	$l14 =$	1, 1461280
$6l12 =$	6, 4750872	$8l11 =$	8, 3311416
	9, 4750872	=	9, 4772696

quarum differentia est 0, 0021824, quae multo minor prodiret, si numero n maiorem valorem tribuerimus

40. Circa ipsum autem terminum summatorium seriei propositae imprimis notari convenit, tam differentiationem quam integrationem facile institui posse, sumto scilicet indice x variabili, quemadmodum hoc iam in specie prima fusius est ostensum, ubi ipse terminus summatorius $\Sigma : x$ tanquam applicata cuiusdam curvae est consideratus, dum index x referebat abscissam, hocque respectu in calculo differentiali potissimum functiones inexplicabiles sum perscrutatus.

41. Ex formula autem generali pro termino summatorio $\Sigma : x$ supra data evolvamus hic quoque casum seriei harmonicae, quo est

$$\Sigma : x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x}$$

& quaeramus eius valorem pro indice $x = \frac{1}{2}$, atque ob

$$(x) = \frac{1}{x} \; ; \; p = \frac{3}{8} \; ; \; q = -\frac{3}{4} \; ; \; r = -\frac{1}{8}$$

habebimus

$\Sigma :$

$$M:\tfrac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} \left\{ \begin{array}{l} +\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32} \\ +\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{24}-\frac{1}{32}-\frac{1}{40}-\frac{1}{48} \\ -\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}-\frac{2}{9} \end{array} \right\} \text{&c.}$$

Sive erit $8M:\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{3}{1}+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4} \\ +\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6} \\ -\frac{16}{3}-\frac{16}{5}-\frac{16}{7}-\frac{16}{9} \end{array} \right\} \text{&c.}$$

Contrahamus singulas columnas in unam summam eritque

$$8M:\tfrac{1}{2} = \frac{6}{1.2.3.5} + \frac{6}{2.3.4.5} + \frac{6}{3.4.5.7} + \frac{6}{4.5.6.9} + \text{&c.}$$

quae series utique magis convergit ea, quam specie secunda invenimus.

42. Quodsi autem terminos non contrahamus, sed eos qui eundem habent denominatorem colligamus, omissa serie infima habebimus

$$8M:\tfrac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{9}{2} + 8\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9}+\text{&c.}\right) - 16\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\text{&c.}\right)$$

sive loco superioris seriei scribendo $16\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\text{&c.}\right)$ habebimus $\frac{1}{2}M:\frac{1}{4} = -\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}+$ &c. addamus utrinque $l\,2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+$ &c. fiet $\frac{1}{2}M:\frac{1}{2} - \frac{1}{2}+l\,2 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; consequenter $M:\frac{1}{2} = 2-2l\,2$, qui valor egregie convenit cum eo, qui in specie prima est datus.

SUP-

SUPPLEMENTUM
DE FUNCTIONIBUS INEXPLICABILIBUS FORMAE
$\pi : x = A.B.C.D.E.\ldots.X.$

1. Hic factores A, B, C, D, &c. sunt termini cuiusdam seriei indicibus 1, 2, 3, 4, &c. respondentes, & X terminus indici x respondens; factores autem, qui indicibus sequentibus $x+1$; $x+2$; $x+3$; &c. respondent per X', X'', X''' &c. designabo. Hinc iam statim patet fore $\pi : (x+1) = X'.\pi : x$, & $\pi : (x+2) = X'.X''.\pi : x$, & ita porro. Praecedentes vero erunt $\pi : (x-1) = \frac{\pi : x}{X'}$, &c. Unde intelligitur sufficere, dummodo hae formulae pro valoribus ipsius x unitate minoribus assignentur.

2. Quoties fuerit x numerus integer positivus, valores ipsius $\pi : x$ sponte se produnt. Erit nempe

$\pi : 1 = A$; $\pi : 2 = AB$; $\pi : 3 = ABC$; &c.

Quando autem x non est numerus integer positivus, productum, quod charactere $\pi : x$ designamus erit functio inexplicabilis ipsius x, nisi forte factores A, B, C, D, &c. ita fuerint comparati, ut praecedentes a sequentibus destruantur, veluti evenit in hac forma: $\pi : x = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\ldots.\frac{x}{x+1}$: quandoquidem hic manifesto est $\pi : x = \frac{1}{x+1}$, vel etiam in hoc exemplo: $\pi : x = \frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}.\ldots.\frac{xx+2x}{(x+1)^2}$; hinc enim erit

$$\pi : 1 = \frac{3}{2.2}; \pi : 2 = \frac{2}{3} = \frac{4}{2.3}; \pi : 3 = \frac{5}{8} = \frac{5}{2.4}; \pi : 4 = \frac{3}{5} = \frac{6}{2.5}; \pi : 5$$

$\pi : 5 = \frac{4}{2.6}$; &c. unde patet in genere fore $\pi : x = \frac{x+2}{2(x+1)}$.

3. Casus autem inexplicabiles sumendis logarithmis ad praecedentem dissertationem revocabuntur. Erit enim

$$l\pi : x = lA + lB + lC \ldots\ldots + lX,$$

quae forma cum supra tractata comparata nobis dabit sequentes valores

$\Sigma : x = l\pi : x$; $(1) = lA$; $(2) = lB$; $(3) = lC$; &c. & $(x) = lX$

tum vero erit $(x+1) = lX'$; $(x+2) = lX''$; &c. hocque consensu observato species supra tractatas ad praesentem casum accommodemus.

Species prima

ubi logarithmi factorum infinitesimorum evanescunt, sive ubi factores infinitesimi unitati aequantur.

4. Cum igitur pro hac specie introductis valoribus modo datis habeamus:

$$l\pi : x = \begin{matrix} lA + lB + lC + lD + \text{&c.} \\ -lX' - lX'' - lX''' - lX^{IV} - \text{&c.} \end{matrix}$$

ad numeros ascendendo erit

$$\pi : x = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \text{&c.}$$

Hic nulla exempla subiungo, quia iam plura in Calculo Differentiali sunt evoluta.

Species secunda

ubi factores infinitesimi inter se sunt aequales.

5. Tum enim eorum logarithmi etiam inter se erunt aequales, ideoque differentiae primae omnes evanescent. Huc igitur

igitur accommodemus formam supra §. 25. inventam eritque

$$l\pi:x = \begin{Bmatrix} +\overline{1-x}lA+\overline{1-x}lB+\overline{1-x}lC \\ +xlA+xlB+xlC+xlD \\ -lX'-lX''-lX''' \end{Bmatrix} \text{ &c.}$$

unde ad numeros ascendendo habebimus

$$\pi:x = A^{1-x}B^{x}.\frac{B^{1-x}C^{x}}{X'}.\frac{C^{1-x}D^{x}}{X''}.\frac{}{X'''}.\text{ &c.}$$

Species tertia

ubi termini infinitesimi constituunt progressionem geometricam.

6. Tum enim logarithmi horum terminorum progressionem arithmeticam constituent, cuius ergo differentiae secundae evanescent. Ut iam expressionem supra §. 35. inventam ad hunc casum accommodemus, notandum est br. gr. positum fuisse $p = \frac{xx-3x+2}{2}$; $q = xx-2x$; & $r = \frac{xx-x}{2}$, unde habebimus

$$l\pi:x = \begin{Bmatrix} +plA+plB+plC \\ \frac{3x-xx}{2}lA-qlB-qlC-qlD \\ \frac{xx-x}{2}lB+rlC+rlD+rlE \\ -lX'-lX''-lX''' \end{Bmatrix} \text{ &c.}$$

Ponamus autem hic porro compendii caussa $\frac{xx-3x}{2} = m$ & $\frac{xx-x}{2} = n$, atque ad numeros ascendendo habebimus hanc expressionem.

$$\pi : x = \frac{B^{\prime}}{A^{\prime}} \cdot \frac{A^{\prime}C^{\prime}}{B^{\prime}X^{\prime}} \cdot \frac{B^{\prime}D^{\prime}}{C^{\prime}X^{\prime\prime}} \cdot \frac{C^{\prime}E^{\prime}}{D^{\prime}X^{\prime\prime\prime}} \cdot \text{&c.}$$

7. Hoc modo confido, doctrinam de Functionibus Inexplicabilibus, quae in Calculo Differentiali non satis accurate & luculenter est expositа, fere penitus exhausisse, ita ut nihil amplius desiderari possit, id quod eo magis necessarium videbatur, cum hoc argumentum plane sit novum & a nemine adhuc tractatum, praecipue autem eius summus usus in interpolatione serierum, atque hinc adeo symptomata linearum curvarum, quarum applicatae per functiones inexplicabiles exprimuntur investiganda erant.

AD.

ADNOTATIONES

ADNOTAT. post Cap. II. Part. I.

1.

Proposita sit differentialis aequatio $dy + yX\,dx = Z\,dx$, in qua X & Z functiones quascunque exprimunt variabilis x: constat huius aequationis integrationem obtineri ponendo $y = uz$, ex quo oritur $u\,dz + z\,du + uzX\,dx = Z\,dx$, ubi per idoneum quantitatis u, vel z valorem possunt bini termini nihilo aequari. Assumamus igitur $z\,du + uzX\,dx = 0$; & dividendo per z fiet $du + uX\,dx = 0$, & consequenter $\frac{du}{u} = -X\,dx$, atque hinc capto integrali prodibit $lu = -\int X\,dx$, hoc est $u = e^{-\int X\,dx}$, sumto nimirum e aequali logarithmorum hyperbolicorum basi. Hisce peractis proposita aequatio convertitur in $u\,dz = Z\,dx$, unde habetur $dz = \frac{Z\,dx}{u}$, & integrando $z = \int \frac{Z\,dx}{u} = \int e^{\int X dx} Z\,dx$, ac denique $y = uz = \frac{\int e^{\int X dx} Z\,dx}{e^{\int X dx}}$

2. Si nunc methodus haec diligenter perpendatur, liquido apparebit, eandem felici exitu ad aequationes illas differentiales transferri posse, quae eandem habentes formam, quam aequatio praecedens, finitis tamen differentiis donantur. Esto igitur aequatio $\Delta y + My\Delta x = N\Delta x$, seu $\Delta y + My = N$ (sumto nimirum Δx pro unitate), in qua quantitates M & N functiones designant variabilis cuiuslibet x. Fiat primo $y = uz$, & erit in hac differentiarum finitarum hypothesi

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z;$$

atque hinc aequatio abibit in

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Muz = N.$$

Po-

Ponamus ut ante terminos binos $z\Delta u + Muz = 0$, & oritur $\Delta u + Mu = 0$, seu $\frac{\Delta u}{u} = -M$: ad hanc aequationem in hac hypothesi differentiae finitae Δu integrandam assumo $u = e^t$, & nanciscor $u + \Delta u = e^{t+\Delta t}$, & $\Delta u = e^t (e^{\Delta t} - 1)$; ex quo fit $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -M$, seu $e^{\Delta t} = 1 - M$, captisque logarithmis $\Delta t = l(1-M)$, & consequenter instituta integratione habebimus $t = \Sigma l(1-M)$. Est autem, ut ex Analysi constat, aggregatum ex logarithmis plurium numerorum aequale logarithmo producti horum omnium numerorum; si igitur generatim per $\pi(1-M)$ exprimamus productum continuum quantitatum omnium contentarum in formula $1-M$, orietur $t = l\pi(1-M)$; & propterea $u = e^t = \pi(1-M)$. Iam praedictis duobus terminis nullescentibus superior aequatio mutatur in $u\Delta z + \Delta u \Delta z = N$, unde eruitur $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, & integrando $z = \Sigma \frac{N}{u + \Delta u}$. Sed cum iam invenerimus $u = \pi(1-M)$, si terminus post M proxime subsequens designetur per M', prodit $u + \Delta u = \pi(1-M')$; ideoque $z = \Sigma \frac{N}{\pi(1-M')}$, & quia $y = zu$, fit

$$y = \pi(1-M)\Sigma \frac{N}{\pi(1-M')},$$

sive addita constante quacunque A consequemur

$$y = \pi(1-M)\left(A + \Sigma \frac{N}{\pi(1-M')}\right).$$

EXEMPLUM.

Sit proposita aequatio $y + (x+1)\Delta y + a(2x+1) = 0$, *quaeraturque valor separatus ipsius* y.

Haec aequatio ad generalem formam $\Delta y + My = N$ reducta dat $\Delta y + \frac{1}{x+1} y = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$. Habemus ergo

M =

$M = \frac{1}{x+1}$; $N = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$; $1 - M = \frac{x}{x+1}$; quapropter productum omnium valorum formulae $\frac{x}{x+1}$, qui habentur si in ea loco x successive $x-1, x-2, \ldots 3, 2, 1$, substituantur, scilicet $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}$, & per $\pi(1-M)$ indicavimus, erit $= \frac{1}{x}$; illud vero per $\pi(1-M')$ expressum $= \frac{1}{x+1}$. Hinc hisce valoribus in aequatione $y = \pi(1-M)\left(A + \Sigma \frac{N}{\pi(1-M')}\right)$ substitutis habebitur

$$y = \frac{1}{x}\left[A - \Sigma a(2x+1)\right] = \frac{A}{x} - 2a\frac{\Sigma x}{x} - a\frac{\Sigma 1}{x}.$$

Inventum est autem §. 60. $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$, & $\Sigma x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ proindeque erit $y = \frac{A}{x} - ax$

3. Sit modo propositа aequatio $y' = Ry + T$, in qua y' terminum designat, qui in serie quantitatum y proxime sequitur y: hinc quoniam $y' = y + \Delta y$, aequatio abit in $\Delta y + (1-R)y = T$. Instituta huius aequationis cum praecedenti comparatione prodit $1 - R = M$; $T = N$. Quapropter pro valore quantitatis y sequens habetur expressio

$$y = \pi R\left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R'}\right).$$

Si R quantitas constans est, perspicuum fit quantitates πR & $\pi R'$ nihil aliud esse quam potentias ipsius R, quarum exponens aequatur numero designanti in serie ipsarum y locum vel indicem terminorum y & y'. Sit igitur m numerus iste, vel index loci ab y occupati ita ut y^m idem fit ac y', & habe-

habebitur aequatio $y^{n} = R^{n}\left(A + \Sigma \frac{T}{R^{n+1}}\right)$. Si T constans est, fit $\Sigma \frac{T}{R^{n+1}} = T\Sigma \frac{1}{R^{n+1}}$, ubi termini per $\frac{1}{R^{n+1}}$ exhibiti progressionem geometricam constituunt, cuius summa protinus invenitur: summa haec ab $\frac{1}{R}$ incipiens, vocetur S, ponatur nimirum

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^{2}} + \frac{1}{R^{3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{R^{n}} = S,$$

& multiplicando per R consequemur

$$1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{R^{n-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^{n}}.$$

Ex hac aequatione elicitur $S = \frac{R^{n}-1}{R^{n}(R-1)}$; atque inde $y^{n} = R^{n}\left(A + T.\frac{R^{n}-1}{R^{n}(R-1)}\right)$, sive $y^{n} = AR^{n} + T.\frac{R^{n}-1}{R-1}$.

Ut nunc ostendamus per inventum ipsius y valorem omnimode satisfieri conditionibus datae aequationis $y' = Ry + T$, vel $y^{n+1} = Ry^{n} + T$, non alia re opus erit quam multiplicatione inventae formulae per R, & additione quantitatis T, ex quo colligitur expressio $AR^{n+1} + T.\frac{R^{n+1}-R}{R-1} + T$, quae redigitur ad $AR^{n+1} + T.\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$, hicque revera est valor, quem generalis formula pro termino y^{n+1} suppeditat.

4. Tradita iam methodo integrandi aequationem quamcumque differentialem ex differentiis finitis constantem, & sub generali forma $\Delta y + My = N$ comprehensam, reliquum est ut ad integrandas aequationes alias ab hac eadem pendentes progrediamur. Iam vero demonstravit ALEMBERTUS in Actis Beroli-

Berolinenſis Academiae, aequationes omnes differentiales e differentiis infinitefimis conſtantes huiuſce formae

$$(A) \qquad y + \frac{A dx}{dx} + \frac{B ddy}{dx^2} + \frac{C d^3 y}{dx^3} + \&c. = X,$$

ubi A, B, C, &c. conſtantes ſunt, & X functio eſt quaecunque ipſius x, revocari & converti in aequationem hanc ſimpliciorem $z + \frac{H dz}{dx} = V$, ubi H conſtans eſt, & V functio ipſius x; quae ſane aequatio eadem eſt cum ea, quam integrare docuimus ſuppoſitis etiam differentiis finitis. Si igitur Alembertiana methodus aequationibus etiam differentiarum finitarum accommodari poteſt licebit quoque integrare in hac ipſa differentiarum finitarum hypotheſi aequationem quamlibet

$$y + A\Delta y + B\Delta\Delta y + C\Delta^3 y + \&c. = X,$$

& conſequenter aequationem huius formae

$$y' + Py'' + Qy''' \ldots + \&c. = X$$

quae pro generali ſerierum recurrentium formula haberi merito poteſt. Ingenioſiſſima Alembertiana methodus, quae *coefficientium indeterminatorum* methodus appellatur, in hoc eſt poſita: Sumitur ſcilicet

$$\frac{dy}{dx} = p \; ; \quad \frac{dp}{dx} = q \; ; \quad \frac{dq}{dx} = r \; ; \quad \&c.$$

indeque fiunt aequationes

$$p - \frac{dy}{dx} = 0 \; ; \quad q - \frac{dp}{dx} = 0 \; ; \quad r - \frac{dq}{dx} = 0 \; ; \quad \&c.$$

Tum aequationes hae ſingulae in coefficientes indeterminatos a, b, c, &c. ducuntur, ut oriatur

$$ap - \frac{ady}{dx} = 0 \; ; \quad bq - \frac{bdp}{dx} = 0 \; ; \quad cr - \frac{cdq}{dx} = 0 \; ; \quad \&c.$$

Hae vero poſtremae addantur aequationi (A), quae ſi ultra tertias differentias variabilis y non procedat, mutatur factis debitis ſubſtitutionibus in ſequentem

$$(B)\ldots y+(A+a)p+(B+b)q-\frac{ady}{dx}-\frac{bdp}{dx}+\frac{Cdq}{dx}=X.$$

In primo huius aequationis membro sumamus nunc partem unam $y+(A+a)p+(B+b)q$ ductam in a esse multiplam integralis ex parte altera $ady+bdp-Cdq$ resultantis, vel quod eodem redit esse

$$dy+(A+a)dp+(B+b)dq=dy+\frac{bdp}{a}-\frac{Cdq}{a};$$

unde ex terminorum sibi respondentium comparatione prodeunt aequalitates $A+a=\frac{b}{a}$; $B+b=-\frac{C}{a}$, ex quibus consequimur $b=-\frac{C}{a}-B=Aa+a^2$, & $a^3+Aa^2+Ba+C=0$.

Huius porro aequationis $a^3+Aa^2+Ba+C=0$ radices praebent valores tres ipsius a diversos, qui requisitis conditionibus aeque satisfaciunt. Fiat nunc

$$y+(A+a)p+(B+b)q=z,$$

& aequatio inventa (B) mutabitur in

$$z-\frac{adz}{dx}=X, \text{ seu } dz-\frac{zdx}{a}=-\frac{Xdx}{a}.$$

Hac comparata cum §. 1. aequatione $dy+yPdx=Zdx$ (ubi ad ambiguitatem vitandam X convertimus in P) habetur

$$y=z;\ P=-\frac{1}{a};\ Z=-\frac{X}{a};\ e^{\int Pdx}=e^{\int-\frac{dx}{a}}=e^{-\frac{x}{a}},$$

ex quo demum colligitur $z=e^{\frac{x}{a}}\int\frac{-Xdx}{ae^{\frac{x}{a}}}$. Voco nunc a', a'', a''' tres distinctos ipsius a valores, & b', b'', b''' valores alios ipsius b prioribus homologos, ac denique Z', Z'', Z''' valores quantitatis variabilis z, quae per vices complectitur a', a'', a'''. Hinc tres sequentes prodibunt aequationes

$$y+(A+a')p+(B+b')q=Z'$$
$$y+(A+a'')p+(B+b'')q=Z''$$
$$y+(A+a''')p+(B+b''')q=Z'''$$

Si

Si iam ex tribus hisce aequationibus eliminantur quantitates p & q, invenitur ipsius y valor sequenti aequatione exhibitus

$$y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III}$$

ubi F, G, H constantes sunt a quantitatibus A, B, α^{I}, α^{II}, &c. pendentes.

5. Hac methodo probe perpensa luculenter apparet aequationem quamlibet multo pluribus terminis conflatam, cuiusmodi esset isthaec

$$y + \frac{A dy}{dx} + \frac{B ddy}{dx^2} + \frac{C d^3y}{dx^3} + \frac{D d^4y}{dx^4} + \frac{E d^5y}{dx^5} = X$$

aeque resolvi posse, indeque obtineri

$$y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V},$$

ubi quantitates Z^{I}, Z^{II}, &c. tales sunt ipsarum X & x functiones, ut sit $Z = e^{\frac{x}{\alpha}} \int \frac{-X dx}{\alpha e^{\frac{x}{\alpha}}}$, substitutis pro α radicibus quinque α^{I}, α^{II}, α^{III}, α^{IV}, α^{V} aequationis

$$\alpha^5 + A\alpha^4 + B\alpha^3 + C\alpha^2 + D\alpha + E = 0.$$

Sed quod longe utilius est ac praestantius methodus eadem ad aequationes quoque ex finitis differentiis constantes felicissime aptari potest.

6. Esto itaque aequatio differentialis finita quinti ordinis

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + C\Delta^3 y + D\Delta^4 y + E\Delta^5 y = X$$

& ponatur $\Delta y = p$; $\Delta p = q$; $\Delta q = r$; $\Delta r = s$, ut prodeant aequalitates

$$p - \Delta y = 0;\ q - \Delta p = 0;\ r - \Delta q = 0;\ s - \Delta r = 0$$

hisque multiplicatis per coefficientes indeterminatos a, b, c, d fiat $ap - a\Delta y = 0$; $bq - b\Delta p = 0$; $cr - c\Delta q = 0$; $ds - d\Delta r = 0$. Aequationi propositae post substitutionem valorum assumtorum pro differentiis ipsius y addantur aequalitates modo inventae; quo facto eruitur aequatio

$$y + (A+a)p + (B+b)q + (C+c)r + (D+d)s - a\Delta y - b\Delta p - c\Delta q - d\Delta r + E\Delta s = X$$

huius aequationis pars

$y+(A+a)p+(B+b)q+(C+c)r+(D+d)s$
differentiata aequalis assumatur parti alteri
$$a\Delta y+b\Delta p+c\Delta q+d\Delta r-E\Delta s$$
per $-a$ divisae, scilicet fiat
$$\Delta y+(A+a)\Delta p+(B+b)\Delta q+(C+c)\Delta r+(D+d)\Delta s=$$
$$\Delta y+\frac{b\Delta p}{a}+\frac{c\Delta q}{a}+\frac{d\Delta r}{a}-\frac{E\Delta s}{a}$$
unde per terminorum homologorum comparationem inferuntur aequalitates
$$A+a=\frac{b}{a};\ B+b=\frac{c}{a};\ C+c=\frac{d}{a};\ D+d=-\frac{E}{a},$$
ex quibus per consueras eliminationes exurgit aequatio quinti gradus
$$a^5+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=0:$$
huius radices praebent quinque ipsius a distinctos valores a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V. Iam vero capiatur
$$y+(A+a)p+(B+b)q+(C+c)r+(D+d)s=z$$
ideoque
$$\Delta z=\Delta y+(A+a)\Delta p+(B+b)\Delta q+(C+c)\Delta r+(D+d)\Delta s=$$
$$\Delta y+\frac{b}{a}\Delta p+\frac{c}{a}\Delta q+\frac{d}{a}\Delta r-\frac{E}{a}\Delta s,$$
unde oritur aequatio
$$z-a\Delta z=X, \text{ hoc est } \Delta z-\frac{z}{a}=-\frac{X}{a}$$
eiusdem scilicet formae cum praecedenti $\Delta y+My=N$ (§. 2.) ubi ex terminorum homologorum comparatione deducitur
$$M=-\frac{1}{a};\ N=-\frac{X}{a}, \text{ \& consequenter } 1-M=\frac{1+a}{a};$$
Quapropter oritur $z=\left(\frac{1+a}{a}\right)\left(\text{Const.}+\Sigma\frac{-X}{a.z\left(\frac{1+a}{a}\right)}\right)$;

Et quoniam a constans est, invenitur

z^{II}

$$z^m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m \left(\text{Const.} - \Sigma \frac{X a^m}{(1+a)^{m+1}}\right)$$

denotante m ut antea indicem loci a termino z occupati in serie quantitatum z. Si X constans est tunc progressionis geometricae per $\Sigma \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$ expressae accepta summa assequimur $z^m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m \left(\text{Const.} - X\frac{(1+a)^m - a^m}{(1+a)^m}\right)$.

Quum autem a quinque valoribus diversis a', a'', a''', a^{IV}, a^V praeditus sit, si valores isti in formula inventa subrogantur per vices, totidem exsurgunt ipsius z^m valores, qui omnes aeque satisfacient; his vero per Z', Z'', Z''', Z^{IV}, Z^V designatis quinque sequentes nanciscimur aequationes

$$y+(A+a')p+(B+b')q+(C+c')r+(D+d')s = Z'$$
$$y+(A+a'')p+(B+b'')q+(C+c'')r+(D+d'')s = Z''$$
$$y+(A+a''')p+(B+b''')q+(C+c''')r+(D+d''')s = Z'''$$
$$y+(A+a^{IV})p+(B+b^{IV})q+(C+c^{IV})r+(D+d^{IV})s = Z^{IV}$$
$$y+(A+a^V)p+(B+b^V)q+(C+c^V)r+(D+d^V)s = Z^V$$

Tum ex hisce aequationibus per notas regulas eliminantur quantitates p, q, r, s, quo facto ad aequationem pervenitur huius formae $y = FZ' + GZ'' + HZ''' + IZ^{IV} + KZ^V$, in qua F, G, H, I, K constantes sunt a cognitis quantitatibus aequationum earundem pendentes.

7. Proposita demum sit aequatio

$$y' + Ay'' + By''' + Cy^{IV} \ldots + \&c. = X$$

ubi y', y'', y''', &c. terminos designant se proxime sequentes in serie quantitatum y. Perspicuum imprimis est haberi

$$y'' = y' + \Delta y$$
$$y''' = y'' + \Delta y'' = y' + \Delta y' + \Delta(y' + \Delta y') = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y'$$
$$y^{IV} = y''' + \Delta y''' = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y' + \Delta(y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y')$$
$$= y' + 3\Delta y' + 3\Delta^2 y' + \Delta^3 y',$$

sicque porro de ceteris. Ex quo apparet aequationem propositam ad formam earum, quas ante examinavimus, commo-

de

de revocari. Verum ut facilius ac promptius aequatio ipsa ad series recurrentes accommodari queat praestabit terminos $y', y'', y''', \&c.$ ordine inverso spectare, ut scilicet habeatur $y'' + \Delta y'' = y'$; $y''' + \Delta y''' = y''$; $y'' + \Delta y'' = y'''$, &c. & exponentes I, II, III, &c. designent cujuslibet termini distantiam a postremo y'. Ponatur $y'' = p'$, eritque $y''' = p''$: fiat iterum $p'' = q'$, proindeque $p''' = q''$; sit rursus $q'' = r'$, ideoque $q''' = r'' = s'$. Ex quo oriuntur aequalitates $y'' = p'$; $y''' = q'$; $y^{IV} = r'$; $y^{V} = s'$; $y^{VI} = s''$: quibus valoribus in aequatione proposita subrogatis ea abit in hanc (A) $\ldots\ldots y' + Ap' + Bq' + Cr' + Ds' + Es'' = X$. Jam vero aequationibus $p' - y'' = 0$; $q' - p'' = 0$; $r' - q'' = 0$; $s' - r'' = 0$ per indeterminatos coefficientes a, b, c, d singillatim multiplicatis, hisque de more additis aequationi (A) invenitur sequens $y' + (A+a)p' + (B+b)q' + (C+c)r' + (D+d)s' = X - ay'' - bp'' - cq'' - dr'' + Es''$

In prima hujus aequationis parte $y' + (A+a)p' + (B+b)q' + (C+c)r' + (D+d)s'$ variantes terminis tranfeant in proxime antecedentes ita ut fiat $y'' + (A+a)p'' + (B+b)q'' + (C+c)r'' + (D+d)s''$ haecque quantitas ponatur aequalis parti alteri per $-a$ divisae seu $y'' + \frac{b}{a}p'' + \frac{c}{a}q'' + \frac{d}{a}r'' - \frac{E}{a}s''$

tum aequatis coefficientibus homologis habentur aequationes

$$A + a = \frac{b}{a}; \quad B + b = \frac{c}{a}; \quad C + c = \frac{d}{a}; \quad D + d = -\frac{E}{a},$$

ex quibus eruitur ut ante quinti gradus aequatio

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$$

cujus radices designantur per $a', a'', a''', a^{IV}, a^{V}$. Quocirca accepto $z' = y' + (A+a)p' + (B+b)q' + (C+c)r' + (D+d)s'$, aequatio proposita transibit in hanc $z' - az'' = X$, quae (ob $z' = z'' + \Delta z''$) evadet $\Delta z'' + (1-a)z'' = X$. Hac autem comparata cum aequatione §. 3. oritur $y = z''$,

$R = a$, $T = X$; fitque propterea $z^m = a^m \left(\text{Conſt.} + \Sigma \frac{X}{a^{m+1}} \right)$

ubi m locum denotat a termino z^m in ſerie ipſarum z occupatum. Quum autem loco ipſius a ſubſtitui poſſint per vices radices ſingulae a', a'', &c. inde conſequitur, quantitatis z^m valores quinque diverſos per Z', Z'' Z''', Z^{IV}, Z^V expreſſos oriri, proindeque aequationes quinque ſequentes produci

$y^m + (A+a')p^m + (B+b')q^m + (C+c')r^m + (D+d')s^m = Z'$
$y^m + (A+a'')p^m + (B+b'')q^m + (C+c'')r^m + (D+d'')s^m = Z''$
$y^m + (A+a''')p^m + (B+b''')q^m + (C+c''')r^m + (D+d''')s^m = Z'''$
$y^m + (A+a^{IV})p^m + (B+b^{IV})q^m + (C+c^{IV})r^m + (D+d^{IV})s^m = Z^{IV}$
$y^m + (A+a^V)p^m + (B+b^V)q^m + (C+c^V)r^m + (D+d^V)s^m = Z^V$.

Eliminatis porro quantitatibus p^m, q^m, r^m, s^m ex hiſce aequationibus pervenitur ad formulam

$$y^m = FZ' + GZ'' + HZ''' + IZ^{IV} + KZ^V,$$

in qua F, G, H, &c. conſtantes ſunt, quae per comparationem totidem terminorum ſeriei ipſarum y determinari debent.

8. Si X conſtans eſt ſumma (§. 7.) per $\Sigma \frac{X}{a^{m+1}}$ expreſſa evadet $= X \frac{a^m - 1}{a^m (a-1)}$; dictaque L conſtanti integrationi addenda nanciſcimur tandem $Z = La^m + X \frac{a^m - 1}{a - 1}$, ex qua protinus habentur valores Z', Z'', Z''', &c. ſubſtitutis dumtaxat loco ipſius a radicibus inventis a', a'', a''', &c.

9. Ex hactenus dictis hoc ſtatim deducitur generale theorema:

Propoſita aequatione $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} \ldots + \mathcal{C}c. = X$, *ubi ipſius* y *exponentes deſignant loca ab* y *occupata; inventiſque radicibus* a', a'', a''' *&c. aequationis*

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \mathcal{C}c. = 0,$$

habebitur generatim

y^m

$$y^m = Fa^{1m}\left(\psi + \Sigma\frac{X}{a^{1m+1}}\right) + Ga^{11m}\left(\psi + \Sigma\frac{X}{a^{11m+1}}\right)$$
$$+ Ha^{111m}\left(\psi + \Sigma\frac{X}{a^{111m+1}}\right) + Ia^{1vm}\left(\psi + \Sigma\frac{X}{a^{1vm+1}}\right) + \&c.$$

Si X constans fuerit prodibit aequatio

$$y^m = \psi(Fa^{1m} + Ga^{11m} + Ha^{111m} + Ia^{1vm} + Ka^{vm} + \&c.)$$
$$+ X\left[F\frac{a^{1m}-1}{a^1-1} + G\frac{a^{11m}-1}{a^{11}-1} + H\frac{a^{111m}-1}{a^{111}-1} + I\frac{a^{1vm}-1}{a^{1v}-1} + K\frac{a^{vm}-1}{a^v-1} + \&c.\right]$$

Si fuerit $X = 0$ constans ψ supprimi poterit, & simpliciorem assequemur aequationem

$$y^m = Fa^{1m} + Ga^{11m} + Ha^{111m} + Ia^{1vm} + Ka^{vm} + \&c.$$

quae exhibet terminum generalem seriei ipsarum y, hoc est seriei $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} \&c. = 0$, quae sane nihil aliud est quam series recurrens, cuius scala relationis est $-A-B-C-D-E-\&c.$

10. En igitur serierum recurrentium theoriam ad differentialis calculi fundamenta revocatam, & ex genuinis, directisque principiis depromtam, cum ea prius methodis omnino indirectis, notionibusque alienis, & e longinquo detortis inniteretur.

Doctrinam hanc praestantissimam maximique in analysi universa usus & emolumenti selectis aliquot exemplis declarare, ac tyronum captui accommodare operae pretium ducimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus generalis seriei recurrentis secundi ordinis

$1 + 2u^3 + 2u^3 + 6u^4 + 10u^5 + 22u^6 + 42u^7 + 86u^8 + \&c.$

quae oritur ex evolutione fractionis rationalis

$$\frac{1-u}{1-u-2u},$$

Vocato itaque y^n termino generali seriei numericae

1,

1, 0, 2, 2, 6, 10 &c., & y', y terminis binis ipsum y'' proxime antecedentibus, habebitur $y''=y'+2y$, existente nimirum $1+2$ *relationis scala*. Iam vero ob $y'=y+\Delta y$, & $y''=y+2\Delta y+\Delta^2 y$, convertitur aequatio $y''=y'+2y$ in hanc $y+2\Delta y+\Delta^2 y=3y+\Delta y$; unde oritur

(A) $\quad y-\frac{1}{2}\Delta y-\frac{1}{2}\Delta^2 y=0$.

Capio iam $\Delta y=p$, factaque multiplicatione per coefficientem indeterminatum a colligo aequalitatem $ap-a\Delta y=0$, hancque addo aequationi (A) post substitutionem ipsius p loco Δy, & Δp loco $\Delta^2 y$, ex quo nanciscor aequationem

(B) $\quad y+(a-\frac{1}{2})p-a\Delta y-\frac{1}{2}\Delta p=0$.

Sit iam huius aequationis pars $y+(a+\frac{1}{2})p$ aequalis integrali partis alterius $-a\Delta y-\frac{1}{2}dp$ per $-a$ divisae, hoc est fiat $y+(a-\frac{1}{2})p=y+\frac{p}{2a}$, unde ex terminorum comparatione oritur $a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$, nimirum $a^2-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}=0$; atque inde $a'=1$, $a''=-\frac{1}{2}$. Pono $z=y+(a-\frac{1}{2})p$, & aequatio (B) transit in $z-a\Delta z=0$, vel $\Delta z-\frac{z}{a}=0$, quae comparata cum aequatione (§. 3.) $\Delta y+(1-R)y=T$ praebet $T=0$, $1-R=-\frac{1}{a}$, seu $R=\frac{a+1}{a}$, $y=z$. Igitur

$$z^m=R^m\left(A+\Sigma\frac{T}{R^{m+1}}\right)=\left(\frac{a'+1}{a'}\right)^m A=2^m A, \text{ & rursus}$$

$$z^m=\left(\frac{a''+1}{a''}\right)^m B=(-1)^m B.$$

Est autem $z^m=y^m+(a'-\frac{1}{2})p=y^m+\frac{1}{2}p$; & iterum $z^m=y^m+(a''-\frac{1}{2})p=y^m-p$. Igitur substitutis valoribus binis inventis loco z^m oriuntur aequationes duae $2^m A=y^m+\frac{1}{2}p$, $(-1)^m B=y^m-p$, ex quibus eliminata

p infertur aequatio $y^m = \frac{2^{m+1}A + (-1)^m B}{3}$. Determinantur porro constantes binae arbitrariae A, B ex eo, quod in hypothesi $m = 0$ fit $y = 1$, & in hypothesi $m = 1$ fit $y = 0$, ex quo nanciscimur aequationes duas

$1 = \frac{2A+B}{3}$; $0 = \frac{4A-B}{3}$, quae praebent $A = \frac{1}{7}$, $B = 2$.

Quocirca erit demum terminus generalis quaesitus

$$\frac{2^m + 2(-1)^m}{3} u^m$$

Quoniam problemata quae ad Analysim Sortis seu Calculum probabilitatis, atque Aleae Ludos referuntur, ex hac aequationum differentiarum finitarum theoria maximum lumen mutuantur, & solutiones recipiunt directas, omniumque simplicissimas, bina idcirco ad rei illustrationem proponemus exempla ex aleae ludis depromta.

EXEMPLUM II.

A *certat cum* B *ludo illo, quem Galli dicunt* à croix ou pile, *nummo scilicet in altum iacto, cuius frons una signatur* croix, *altera* pile: *ludi conditiones sunt, ut si* A *primo iactu edat* croix, *accipiat a* B *aureos duos; si* A *secundo tantum iactu edat* croix, *accipiat a* B *aureos quatuor; si tertio tantum, aureos octo; si iactu solum* $x.^{mo}$, *aureos* 2^x. *Quaeritur spes, seu exspectatio ipsius* A, *hoc est quid* A *ante ludum solvere debeat ipsi* B, *ut aequa sit utriusque sors.*

Dicatur $\varkappa_x$ aureorum numerus ab A in antecessum solvendus, existente, ut assumimus iactuum numero x. Si x augeatur unitate, ita ut pecunia in antecessum ab A solvenda, seu exspectatio ipsius A exprimatur per $\varkappa_{x+1}$, manifestum est pecuniam $\varkappa_x$ auctum iri aureorum numero 2^{x+1} ducto in probabilitatem $\frac{1}{2^{x+1}}$ eundem lucrandi $x+1$. iactu. Igitur

habe-

habebimus aequationem $y_{x+1} = y_x + \frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} = y_x + 1$, ad quam integrandam resumo formulam $y' = Ry + T$, & ex terminorum collatione assequor $y' = y_{x+1}$; $y = y_x$; $R = 1$; $T = 1$. Quapropter quaesitum integrale invenietur

$$y = y_x = \pi R\left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R}\right) = A + \Sigma . 1 = A + x.$$

Constans arbitraria A determinatur ex eo, quod posito $x = 1$, habetur evidenter exspectatio $y_x = 1$, proindeque $A + 1 = 1$, sive $A = 0$. Igitur $y_x = x$, nimirum aureorum numerus ab A solvendus $= x$. Q. E. D.

In hoc percelebri & famigerato Problemate certatim elaborarunt Principes huiusce aetatis Geometrae Dan. Bernoullius, La Fontaine, D'Alembert, La Place, qui ingeniosissimis hinc derivatis speculationibus Probabilitatum mirifice Calculum illustrarunt.

EXEMPLUM III.

Ex nummorum vel lapillorum acervo, quorum numerus est x, casu arripio multitudinem eorum ignotam: quaero quanta sit probabilitas, arreptam multitudinem fore parem, aut imparem.

Voco y summam casuum, quibus arrepta multitudo par esse potest, & z summam casuum, quibus esse potest impar. Pono augeri unitate acervum x, tuncque y' exhibebit summam casuum parium, eritque $y' = y + z$, eo quod quivis casus impar cum novo numero compositus parem casum inducit; Praeterea z' indicabit summam casuum imparium, & quia casus quilibet par cum addito numero coniunctus impar evadit, ipsaque unitas superaddita impar est, fiet $z' = z + y + 1$. Iam vero prima aequatio nihil aliud est quam $\Delta y = z$, secunda nihil aliud quam $\Delta z = y + 1$. Igitur $\Delta^2 y = y + 1$, seu $y'' - 2y' + y = y + 1$, & consequenter $y'' = 2y' + 1$, seu quod eodem redit $y' = 2y + 1$. Ex comparatione aequationis huius cum generali $y' = Ry + T$, invenitur $R = 2$, $T = 1$, quo-

quocirca habebitur $y = AR^x + T\frac{R^x - 1}{R - 1} = A2^x + 2^x - 1 =$

$(A + 1)2^x - 1$.

Sed facto $x = 1$ fit $y = 0$. Igitur $2A = 1 - 2$, & $A = -\frac{1}{2}$; proindeque I.° $y = 2^{x-1} - 1$. Praeterea

II.° $z = \Delta y = y' - y = 2^x - 1 - 2^{x-1} + 1 = 2^x(1 - \frac{1}{2}) = 2^{x-1}$.

Quapropter eventuum omnium probabilium summa erit $y + z = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1$, atque inde invenitur probabilitas pro casibus paribus $\frac{y}{y+z} = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$, pro imparibus $\frac{z}{y+z} = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$ Q. E. D.

Examen, quod huius Problematis suscepit MAIRANUS in Historia Parisiensis Scientiarum Academiae ad ann. 1728, subtile quidem & ingeniosum est, sed in accurata Problematis aestimatione Vir alias doctus & acutus incaute offendit.

11. Praeter expositam methodum revocandi serierum recurrentium doctrinam ad integrationem aequationum linearium finitis differentiis constantium, simpliciorem aliam multoque elegantiorem protulit sagacissimus idem Geometra De la GRANGE in Actis Berolinensis Academiae pro an. 1775; quae sane methodus, quum omnium longe commodissima sit, atque expeditissima in iis praesertim exemplis, in quibus radices aequationis coefficientium indeterminatorum inveniuntur aequales, peropportunum censeo eam hic breviter proponere.

Esto igitur series recurrens generica

$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+t}$,

cuius terminus generalis est y_x. Suppono aequationem relationis inter $t+1$ terminos successivos esse hanc linearem

(A) $Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots Ky_{x+t-1} + y_{x+t} = 0$,

ita ut series recurrens sit ordinis t, & A, B, C . . . K sint coefficientes quicunque constantes. Eo iam res redit, ut aequatio haec differentialis finita linearis integretur, seu, quod idem est, ut inveniatur analyticus valor termini generalis y_x in serie proposita. Ad

Ad hoc consequendum sumo $y_x = az^x$, ubi a, z constantes sunt indeterminatae. Erit igitur $y_{x+1} = az^{x+1}$; $y_{x+2} = az^{x+2}$; &c. ex quo substitutionibus peractis aequatio convertitur in $Aaz^x + Baz^{x+1} + Caz^{x+2} \ldots + Kaz^{x+t-1} + az^{x+t} = 0$ seu (facta per az^x divisione) in

(B) $\quad A + Bz + Cz^2 \ldots + Kz^{t-1} + z^t = 0$

Ex hac aequatione manifestum est I. coefficientem a, qui in ipsa desideratur arbitrarium esse; II. tot haberi distinctos ipsius z valores, quot sunt unitates in indice t. Valores hosce z, seu aequationis radices designo per α, β, γ &c.; sumptisque pariter diversis coefficientibus arbitrariis a, b, c &c., totidem oriuntur distincti valores ipsius y_x, nimirum $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$, &c., qui sane valores, tum singuli seorsim, tum omnes simul aequationi lineari (A) omnino satisfaciunt. Habetur itaque in universum

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{&c.}$$

Et quoniam valor hic quantitatis y_x constantes arbitrarias a, b, c, &c. numero t complectitur, erit is propterea integrale completum aequationis finitae differentialis (A) ad ordinem $t.^{um}$ pertinentis. Valores autem harum constantium a, b, c &c. inveniuntur tribuendo variabili x successivos valores 0, 1, 2, 3, 4 &c. & comparando assumtam termini generalis y_x expressionem in hisce ipsius x hypothesibus cum terminis primis seriei, qui semper noti esse debent; ex quibus comparationibus totidem exsurgunt aequationes, quot sunt constantes a, b, c &c., quae hoc modo per functiones y_0, y_1, y_2 &c., & per radices α, β, γ, &c. invenientur expressae.

12. In hypothesi $t = 1$ unica esse debet radix aequationis relationis (B); & terminus generalis pro hac hypothesi fit $y_x = a\alpha^x$; unde sumto $x = 0$ prodit $y_0 = a\alpha^0 = a$; proindeque $y_x = y_0\alpha^x$.

In hypothesi $t = 2$ ob binas aequationis radices α, β evadit $y_x = a\alpha^x + b\beta^x$. Quocirca sumto $x = 0$, & $x = 1$ prodeunt aequationes duae $y_0 = a + b$; $y_1 = a\alpha + b\beta$, ex quibus indeterm-

terminatarum a, b valores obtinentur huiusmodi

$$a = \frac{-\beta y_0 + y_1}{\alpha - \beta}; \quad b = \frac{-\alpha y_0 + y_1}{\beta - \alpha}.$$

Sit $t = 3$, cui hypothesi respondet generalis terminus $y_x = ax^x + b\beta^x + c\gamma^x$. Captis successive $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ habentur tres aequationes

$$y_0 = a + b + c; \; y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma; \; y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2,$$

ex quibus per notas algebrae regulas tandem deducitur

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}; \; b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha+\beta)y_1 + y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Pari modo si sit $t = 4$, voceturque δ radix quarta aequationis relationis (B), & f constans arbitraria respondens in termino generali

$y_x = ax^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x$, capto successive $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, quatuor nanciscimur aequationes

$$\begin{aligned} y_0 &= a + b + c + f \\ y_1 &= a\alpha + b\beta + c\gamma + f\delta \\ y_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + f\delta^2 \\ y_3 &= a\alpha^3 + b\beta^3 + c\gamma^3 + f\delta^3 \end{aligned}$$

Ex hisce porro constantes arbitrariae a, b, c, f inveniuntur ut sequitur.

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta+\gamma+\delta)y_2 + y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)y_1 - (\alpha+\gamma+\delta)y_2 + y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \beta\delta + \alpha\delta)y_1 - (\alpha+\beta+\delta)y_2 + y_3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha+\beta+\gamma)y_2 + y_3}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

13. Hinc eliciemus canonem pro determinandis valoribus con-

constantium arbitrariarum a, b, c, f, &c. qui sane est huiusmodi: sit

(C) $z^t+pz^{t-1}+qz^{t-2}\ldots+fz^2+gz+K=0$

aequatio radicum inaequalium α, β, γ, δ, $\ldots$ φ. Ea aequipollet huic alteri

$(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)\ldots(z-\varphi)=0$,

ac postremus terminus k aequatur producto earundem radicum negative sumtarum, sive est $k=(-\alpha)(-\beta)\ldots(-\varphi)$; atque hoc productum affirmativum erit, si radicum numerus sit par; negativum si impar. Diviso autem eodem producto per unumquemlibet factorum $-\alpha$, $-\beta$ &c. quotiens contra prodibit affirmativus, si radicum numerus impar fuerit; negativus, si par. Iam vero consideratis termini $y_\circ$ coefficientibus in valore ipsius a pro variis indicis t hypothesibus, sequenti schemate res exhibetur

Indices	Coefficientes termini $y_\circ$
$t=1$	1
$t=2$	$-\beta$
$t=3$	$\beta\gamma$
$t=4$	$-\beta\gamma\delta$
&c.	&c.

Propterea coefficiens ipsius $y_\circ$ in valore arbitrariae constantis a erit in universum $\frac{k}{-\alpha}$; & ob similitudinem coefficientis ipsius $y_\circ$ in valoribus ceteris constantium reliquarum b, c, f &c. coefficiens ipse in valore ipsius b exprimetur per $\frac{k}{-\beta}$; in valore ipsius c per $\frac{k}{-\gamma}$; nimirum aequabitur producto radicum omnium aequationis (C) negative sumtarum demta illa, quae per coefficientem inveniendum multiplicatur.

14. Exempla superius adducta regulam commonstrant, quam coefficientes terminorum y_1, y_2, y_3 &c. constanter servant. Et primo quidem signa alternatim procedant, ita ut si coef-

coefficiens termini y_0 affirmativus fit, negativus evadat in y_1, inde affirmativus redeat in y_2, &c.; & contrarium evenit, ubi coefficiens termini y_0 negativus exiſtat. Praeterea poſito v. g. quod coefficiens termini y_0 ſit productum trium factorum $-\delta$, $-\gamma$, $-\beta$ in valore conſtantis α, erit coefficiens termini y_1 aggregatum omnium binariorum, quae ex tribus ipſis factoribus effici poſſunt, & coefficiens termini y_2 erit aggregatum factorum eorundem $-\delta$, $-\gamma$, $-\beta$; denique erit unitas coefficiens termini poſtremi y_3. Hoc modo ſuppoſitis in aequatione (C) radicibus quinque inaequalibus α, δ, γ, β, ε erit termini y_0 coefficiens $= \delta\gamma\beta\varepsilon$; termini y_1 coefficiens $= -(\delta\gamma\beta + \delta\gamma\varepsilon + \delta\beta\varepsilon + \gamma\beta\varepsilon)$; termini y_2 coefficiens $= \delta\gamma + \delta\beta + \delta\varepsilon + \gamma\beta + \gamma\varepsilon + \beta\varepsilon$; termini y_3 coefficiens $= -(\delta+\gamma+\beta+\varepsilon)$; denique termini ultimi y_4 coefficiens $= 1$. Eodem modo determinabimus coefficientes terminorum y_0, y_1, y_2 &c. pro valoribus conſtantium reliquarum b, c, f &c. Quod porro ſpectat ad valorum a, b, c &c. denominatores, ſtatim apparebit denominatorem ipſius a obtineri ſi in aequatione (C) vel $(x-\alpha)(x-\delta)(x-\gamma)(x-\beta)\ldots(x-\varphi)=0$ ſupprimatur factor $x-\alpha$, ſcribaturque $x=\alpha$, ita ut prodeat

$$(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\varphi),$$

qui erit denominator quaeſitus. Ita pro denominatore ipſius b dividendum erit productum idem integrum per $x-\delta$, & in quotiente ſcribere oportebit $x=\delta$, quo fiet ipſius b denominator $= (\delta-\alpha)(\delta-\gamma)(\delta-\beta)\ldots(\delta-\varphi)$. Idipſum quadrat in alios ceterarum conſtantium c, f &c. denominatores.

15. Praeſtantiſſimam methodum uno vel altero exemplo explanare non utile modo, ſed neceſſarium prorſus arbitramur. Eſto itaque

EXEMPLUM I.

Scala relationis $1+2$

Indices	0	1	2	3	4	5	$\ldots n$
Series recurrens	0,	u,	u^2,	$3u^3$,	$5u^4$,	$11u^5$	$\ldots y_n u^n$

Aequatio differentialis finita $y_n = y_{n-1} + 2y_{n-2}$, ſeu (A)

(A) $y_x - y_{x-1} - 2y_{x-2} = 0$

sumatur $y_x = az^x$, quo substituto in (A) oritur

Aequatio relationis $1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{zz} = 0$

seu $zz - z - 2 = 0$,

cuius radices sunt $z = 2$, $6 = -1$. Est igitur integrale completum, hoc est terminus generalis

$y_x = ax^x + b6^x = a.2^x + b(-1)^x$

Hypothesis I. $x = 0$; $a + b = 0$; $a = \frac{1}{3}$

Hypothesis II. $x = 1$; $2a - b = 1$; $b = -\frac{1}{3}$.

Hisce inventis oritur $y_x = \frac{1}{3}[2^x - (-1)^x]$; ideoque generalis seriei terminus erit $\frac{1}{3}[2^x - (-1)^x]u^x$. Q. E. I.

EXEMPLUM II.

Scala relationis $0 + 7 - 6$

Indices 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... x

Series recur. $0, u, u^2, 7u^3, u^4, 43u^5, -35u^6, 295u^7, -503u^8 .. y_x u^x$

Aequatio differ. finita $y_{x+3} + 0.y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0$

fiat $y_x = az^x$ & praecedens aequatio mutatur in

Aequationem relationis $z^3 + 0 - 7z + 6 = 0$,

cuius tres radices sunt $z = a = 1$; $z = b = 2$; $z = 9 = -3$.

Hinc habetur aequationis differentialis integrale completum

$y_x = ax^x + b6^x + c9^x = a + b.2^x + c(-3)^x$.

Hypothesis I. $x = 0$; $a + b + c = 0$

II. $x = 1$; $a + 2b - 3c = 1$

III. $x = 2$; $a + 4b + 9c = 1$.

Ex tribus hisce aequationibus per notas algebrae regulas invenitur $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{5}$; $c = -\frac{1}{10}$;

ac denique $y_x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{5}.2^x - \frac{1}{10}(-3)^x$.

Quapropter seriei terminus generalis $y_x u^x$ prodibit $=$

$\left(\frac{3}{5}.2^x - \frac{1}{10}(-3)^x - \frac{1}{2}\right)u^x$. Q. E. I.

16. Hactenus a nobis ea tacite conditio posita fuit,

quae radices omnes α, β, γ, &c. inter se inaequales constituit: At si radices aliquae assumantur aequales, valores nonnulli constantium arbitrariarum a, b, c &c. infiniti deprehenduntur. Revera facto $s = 3$ invenimus supra §. 12

$$c = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}; \quad b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha+\beta)y_1 + y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}:$$

Quapropter assumtis aequalibus radicibus binis α, β quantitates a & b infinitae evadunt, tertia c finita perseverante. Idem ostenditur in aliis ipsius s hypothesibus, ubi radices aliquae inter se aequales fuerint.

Huic incommodo, quod frequentissime occurrit, sequens adhiberi solet remedium. In generali seriei recurrentis termino $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x +$ &c. quando $\beta = \alpha$, accipiatur $\beta = \alpha + d\alpha$, ita ut differentia inter utramque radicem fit infinite parva; & sumta hic ex. gr. serie recurrente ordinis tertii, cuius generalis terminus sit trinomia quantitas $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$, per substitutionem binomii $\alpha + d\alpha$ loco ipsius β terminus ipse generalis transit in hunc alterum $a\alpha^x + b(\alpha+d\alpha)^x + c\gamma^x$, qui infinite parum differt a vero. Vertatur iam in seriem iuxta Neutonianum canonem binomium $(\alpha+d\alpha)^x$ orieturque

$$(\alpha+d\alpha)^x = \alpha^x + x\,d\alpha.\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}d\alpha^2.\alpha^{x-2} + \text{&c.}$$

Hinc terminus generalis erit

$$(D)\quad (a+b)\alpha^x + c\gamma^x + bx\,d\alpha.\alpha^{x-1} + \frac{bx(x-1)}{2}d\alpha^2.\alpha^{x-2} + \text{&c.}$$

Invenimus supra $b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$; ideſt substituto $d\alpha$ loco $\beta - \alpha$ fit

$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{d\alpha(\alpha-\gamma)}, \text{ vel } \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{d\alpha(\alpha-\gamma)};$$

proin-

proindeque $bd\alpha = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{\alpha-\gamma}$, quae manifesto quantitas est finita. Sed si $bd\alpha$ finita quantitas est; infinite parva erit $bd\alpha^2$, multoque magis $bd\alpha^3$ &c. Quapropter generalis terminus (D) evadet =

(E) $(a+b)\alpha^x + bxd\alpha.\alpha^{x-1} + c\gamma^x$.

Praeterea quoniam $\alpha = \frac{\delta\gamma y_0 - (\delta+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)}$, per substitutionem $-d\alpha$ loco $\alpha-\delta$ oritur $\alpha = \frac{\delta\gamma y_0 - (\delta+\gamma)y_1 + y_2}{-d\alpha(\alpha-\gamma)}$, quae pariter infinita quantitas est. At si valores bini quantitatum infinitarum a & b simul colligantur adhibitis generalibus eorum expressionibus exurget aggregatum finitum. Etenim

$$a+b = \frac{\delta\gamma y_0 - (\delta+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha+\gamma)y_1 + y_2}{(\alpha-\delta)(\delta-\gamma)}$$

& redactis fractionibus ad eandem denominationem invenitur

$$a+b = \frac{(\delta^2\gamma - \delta\gamma^2 - \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2)y_0 + (\alpha^2-\delta^2)y_1 - (\delta-\alpha)y_2}{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)}$$

& divisione facta per $\alpha-\delta$ prodit

$$a+b = \frac{(\gamma^2 - \alpha\gamma - \delta\gamma)y_0 + (\alpha+\delta)y_1 - y_2}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)}$$

expressio prorsus ab infinitis libera. Quare facto $\delta = \alpha$ tandem assequimur

$$a+b = \frac{(\gamma^2 - 2\alpha\gamma)y_0 + 2\alpha y_1 - y_2}{(\alpha-\gamma)^2}$$

In termino itaque generali (E) dabuntur coefficientes quantitatum α^x & $x\alpha^{x-1}$, finitus uterque, infinitesimis existentibus coefficientibus $bd\alpha^2$, $bd\alpha^3$ &c. terminorum

$$\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}, \quad \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3} \text{ &c.}$$

qui propterea negliguntur. Atque hinc si statuatur $a + \frac{1}{bda}b = a'$;

$bd\alpha = b'$, terminus generalis induet hanc formam

$$y_x = a' \alpha^x + b' x \alpha^{x-1} + c\gamma^x$$

17. Pergo nunc ad series illas recurrentes, in quibus aequatio relationis tres habet radices aequales. Assumo seriei terminum generalem

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

in quo sit $\alpha = \beta = \gamma$. Ut harum radicum aequalitas citra errorem e medio tollatur, infinite parvam differentiam inter ipsas constituo, ponendo $\beta = \alpha + d\alpha$; $\gamma = \alpha + d\beta$; ficque generalis terminus evadit

$$y_x = a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c(\alpha + d\beta)^x + f\delta^x:$$

adhibito Neutoniano canone, & pro quovis binomio tribus tantum acceptis terminis, assequimur

$$(F)\quad y_x = (a+b+c)\alpha^x + (bd\alpha + cd\beta)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2} + f\delta^x.$$

Supra autem §. 12. invenimus

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta+\gamma+\delta)y_2 + y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\delta + \alpha\gamma + \gamma\delta)y_1 - (\alpha+\gamma+\delta)y_2 + y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \alpha\beta + \beta\delta)y_1 - (\alpha+\beta+\delta)y_2 + y_3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha+\beta+\gamma)y_2 + y_3}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

Hinc ob $\alpha = \beta = \gamma$ valores coefficientium a, b, c infiniti evadunt ordinis secundi; sed valor postremi f finitus est. Quamvis autem singuli a, b, c infinitam magnitudinem ordinis secundi constituant, eorum tamen aggregatum finitum esse deprehenditur. Nam facta reductione trium valorum ad denominatorem eundem, divisaque fractione per $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ invenitur tandem

$$a+b+c = \frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2+\beta^2\gamma)y_0 - (\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma)y_1 + (\alpha+\beta+\gamma)y_2 - y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\beta)(\beta-\gamma)}$$

quae

quae evidenter finita quantitas est, & substituto α loco ipsorum δ & γ, fit eadem summa

$$a+b+c=\frac{(-3\alpha^2\delta+3\alpha\delta^2-\delta^3)y_0+3\alpha^2y_1-3\alpha y_2+y_3}{(\alpha-\delta)^3}$$

Praeterea in valoribus coefficientium b, c substituo $\alpha+d\alpha$ pro δ, & $\alpha+d\delta$ pro γ, tum duco b in $d\alpha$, & c in $d\delta$; quo facto invenio

$$bd\alpha=\frac{(-\alpha^2\delta-\alpha\delta d\delta)y_0+[\alpha^2+2\alpha\delta+(\alpha+\delta)d\delta]y_1-(2\alpha+\delta+d\delta)y_2+y_3}{(d\alpha+d\delta)(\alpha-\delta+d\alpha)}$$

$$cd\delta=\frac{(\alpha^2\delta+\alpha\delta d\alpha)y_0-[\alpha^2+2\alpha\delta+(\alpha+\delta)d\alpha]y_1+(2\alpha+\delta+d\alpha)y_2-y_3}{(d\alpha-d\delta)(\alpha-\delta+d\delta)}$$

Valores hosce ad communem denominatorem redigo, eorumque summam capio, quae divisione facta per $d\alpha-d\delta$, neglectisque terminis aliorum comparatione evanescentibus reperitur

$$bd\alpha+cd\delta=\frac{(2\alpha^2\delta-\alpha\delta^2)y_0-(2\alpha^2+2\alpha\delta-\delta^2)y_1+3\alpha y_2-y_3}{(\alpha-\delta)^2}$$

haecque evidenter finita quantitas est.

Denique multiplico $bd\alpha$ per $d\alpha$, & $cd\delta$ per $d\delta$; & duobus valoribus resultantibus ad eandem denominationem revocatis, eorum accipitur summa, quae post divisionem per $(d\alpha-d\delta)(\alpha-\delta)$, & neglectum terminorum infinite parvorum deprehenditur

$$bd\alpha^2+cd\delta^2=\frac{-\alpha^2\delta y_0+(\alpha^2+2\alpha\delta)y_1-(2\alpha+\delta)y_2+y_3}{\alpha-\delta}$$

nimirum aequalis quantitati finitae.

Si igitur in termino generali (F) capiatur $a+b+c=a'$; $bd\alpha+cd\delta=b'$; $bd\alpha^2+cd\delta^2=c'$, quae quidem omnes ex demonstratis finitae quantitates sunt, assequemur generalem ipsum terminum

$$y_x=a'\alpha^x+xb'\alpha^{x-1}+\frac{x(x-1)}{2}c'\alpha^{x-2}+f^{3x}.$$

In praecedenti calculo tres dumtaxat Neutoniani canonis terminos

minos in quovis binomio accepimus, eo quod termini subsequentes infinitesimi sunt, seu evanescentes; quartus enim terminus foret

$(bd\alpha^2+cd\delta^2)\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\alpha^{n-3}$, ubi ob b, c infinitas quantitates ordinis secundi evadit coefficiens $(bd\alpha^2+cd\delta^2)$ infinitesimus ordinis primi, proindeque terminus hic quartus negligi tuto potest, multoque magis quintus ceterique sequentes.

18. Eodem omnino ratiocinandi modo generalem seriei recurrentis terminum $y_n = a\alpha^n + b\delta^n + c\gamma^n + f\zeta^n + b\varepsilon^n$ +&c. ubi quatuor sunt radices aequales nimirum $\alpha=\delta=\gamma=\zeta$ ita inveniemus expressum

$$y_n = (a+b+c+f)\alpha^n + (bd\alpha+cd\delta+fd\gamma)n\alpha^{n-1} + (bd\alpha^2+cd\delta^2+fd\gamma^2)\frac{n(n-1)\alpha^{n-2}}{2} + (bd\alpha^3+cd\delta^3+fd\gamma^3)\frac{n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}}{2.3} + b\varepsilon^n + \text{ &c.}$$

ubi non modo coefficiens $a+b+c+f$ ostenditur absolute finitus, sed finiti quoque demonstrantur coefficientes reliqui trinomiales

$bd\alpha + cd\delta + fd\gamma$, $bd\alpha^2 + cd\delta^2 + fd\gamma^2$; $bd\alpha^3 + cd\delta^3 + fd\gamma^3$, quamvis speciem mentiantur quantitatum infinite parvarum.

In hac autem hypothesi quatuor radicum aequalium non pergitur ultra quartum Neutoniani canonis terminum, eo quod quintus, & a fortiori sextus ac sequentes omnes termini ob infinitam parvitatem evanescant. Quocirca assumi poterit termini α^n coefficiens $a+b+c+f=a'$; termini $n\alpha^{n-1}$ coefficiens $bd\alpha + cd\delta + fd\gamma = b'$; termini $\frac{n(n-1)\alpha^{n-2}}{2}$ coefficiens $bd\alpha^2 + cd\delta^2 + fd\gamma^2 = c'$; denique termini $\frac{n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}}{2.3}$ coefficiens $bd\alpha^3 + cd\delta^3 + fd\gamma^3 = f'$; & generalis seriei terminus y_n vertetur in hunc

$y_n =$

$$y_x = a'\alpha^x + nb'\alpha^{x-1} + \frac{n(n-1)}{2}c'\alpha^{x-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}f'\alpha^{x-3} + \&c.$$

Ex hactenus dictis quid fieri oporteat in exemplis omnibus, ubi plures quam quatuor aequales aequationis radices occurrunt, nemo non intelligit; lex eadem enim semper perseverat, ac totum supputationis negotium moderatur. Non inutile erit peculiarem hanc radicum aequalium hypothesim unico saltem exemplo illustrare.

EXEMPLUM.

Esto recurrens series

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 + 8n + 27n^2 + 64n^3 + 125n^4 + 216n^5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_x n^x. \end{matrix}$$

quae evolvitur ex rationali fractione $\frac{1+4n+n^2}{(1-n)^4}$. Manifestum est fore scalam relationis $4-6+4-1$; proindeque terminum generalem

$$y_x = 4y_{x-1} - 6y_{x-2} + 4y_{x-3} - y_{x-4};$$

unde oritur aequatio finita differentialis

$$y_x - 4y_{x-1} + 6y_{x-2} - 4y_{x-3} + y_{x-4} = 0.$$

Fiat $y_x = az^x$, & praedicta aequatio mutabitur in aequationem relationis

$$1 - \frac{4}{z} + \frac{6}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4} = 0,$$

seu $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0$,

quae evidenter nihil aliud est nisi $(z-1)^4 = 0$. Igitur aequatio relationis praedita est radicibus quatuor aequalibus $z = \alpha = 6 = \gamma = \delta = 1$. Quare in formula termini generalis mox inventa

$$y_x = a'\alpha^x + b'n\alpha^{x-1} + c'\frac{n(n-1)}{2}\alpha^{x-2} + f'\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\alpha^{x-3}$$

substituendo unitatem pro α nanciscemur

$$y_x = a' + b'n + c'\frac{n(n-1)}{2} + f'\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} = s'$$

$$= a' + \left(b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3}\right)x + \left(\frac{c'-f'}{2}\right)x^2 + \frac{f'}{6}x^3;$$

captoque rursus $b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3} = b''$; $\frac{c'-f'}{2} = c''$; $\frac{f''}{6} = f''$

oritur tandem terminus generalis

$$y_x = a' + b''x + c''x^2 + f''x^3$$

Quatuor porro arbitrariae constantes a', b'', c'', f'' determinantur accipiendo pro x successive 0, 1, 2, 3, ex quo habentur valores termino generali y_x respondentes 1, 8, 27, 64, & consequenter aequationes quatuor sequentes

$$a' = 1$$
$$a' + b'' + c'' + f'' = 8$$
$$a' + 2b'' + 4c'' + 8f'' = 27$$
$$a' + 3b'' + 9c'' + 27f'' = 64,$$

ex quibus deducitur $a' = 1$; $b'' = 3$; $c'' = 3$; $f'' = 1$. Quo facto habetur $y_x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3$;

Adeoque $y_x x^x = (1+x)^3 x^x$. Q. E. I.

Ceterum in hoc exemplo idem obtinetur alia methodo ab Auctore nostro tradita. Et sane si fieri terminus generalis vocetur Y; terminique quatuor ipsum praecedentes $'Y$, $''Y$, $'''Y$, $''''Y$, ex enunciata conditione habemus $Y = 4\,'Y - 6\,''Y + 4\,'''Y - ''''Y$, hoc est $''''Y - 4\,'''Y + 6\,''Y - 4\,'Y + Y = 0 = \Delta^4 Y$ (§. 23. Cap. I.). Quare eo res redit ut finita differentialis aequatio $\Delta^4 Y = 0$ integretur in hypothesi quod Δx constans sit & unitati aequalis. Iam vero ex praecedentibus constat

$$\Sigma\Delta^4 Y = \Delta^3 Y = a\Delta x$$
$$\Sigma\Delta^3 Y = \Delta^2 Y = \Sigma a\Delta x = ax + b\Delta x$$
$$\Sigma\Delta^2 Y = \Delta Y = \Sigma ax + bx + c\Delta x = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax}{2} + bx + c\Delta x$$
$$\Sigma\Delta Y = Y = \Sigma\frac{ax^2}{2} - \Sigma\frac{ax}{2} + \Sigma bx + cx + f$$

=

$$= \frac{a}{6}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)x + f$$

Igitur si capiatur $\frac{a}{6} = f''$; $\frac{b-a}{2} = c''$; $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = b''$; $f = a'$, habebitur, prorsus ut ante, generalis seriei terminus

$$Y = a' + b'x + c''x^2 + f''x^3,$$

Qui de integratione formularum differentialium finitarum plura cupit, adeat insignes Geometras La Grange, La Place, Monge, Condorcet, &c., qui in Actis Academicis Taurinensibus, Berolinensibus, Parisinis hac de re copiose exquisiteque tractarunt.

ADNOT. post CAP. III. PART. I.

Ut haec nova Auctoris nostri theoria de quantitatum infinitesimarum, atque infinitarum natura mutuaque relatione ad germanum legitimumque sensum revocetur, iisque omnibus difficultatibus & controversiis praecludatur aditus, quas eadem ab Auctore vix dum prolata ubique excitavit & peperit, operae pretium erit ipsam interpretari, atque explicare perinde ac si a Newtoniana celeberrima *rationum primarum & ultimarum*, vel *limitum* doctrina vix, aut ne vix quidem differret. Sequentia itaque constituenda sunt principia ac dictata.

1. Si quantitas quaedam A continuo crescendo vel decrescendo ad aliam L magnitudinem datam, quam nunquam aequare potest, magis magisque accedit, ita ut ab ea differre possit magnitudine utcunque parva, atque adeo minori quam quaelibet data; vocabitur quantitas ipsa L *limes* quantitatis prioris A.

Sic I. Curvae cuiuscunque tangens *limes* est omnium secantium.

II. Fractio $\frac{1}{3}$ *limes* est fractionis huius decimalis

0, 333333333 &c.

III. Unitas *limes* est summae huius progressionis geometricae

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\text{&c. in infin.}$$

IV. Quantitas $a+\frac{1}{1}a$ *limes* est summae huius progressionis

$$a+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+\frac{a}{64}+\frac{a}{256}+\text{&c. in inf.}$$

V. Radix quadrata numeri binarii *limes* est rationis illius, quam habet quadrati diagonalis ad latus.

VI. Denique summa geometricae progressionis decrescentis

$$a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{b^4}{a^3}+\text{&c. in inf.}$$

limitem habet $=\frac{a^2}{a-b}$; nimirum (quod & de praecedentibus exemplis tenendum est) progressionis summa ita semper magis magisque accedit ad valorem $\frac{a^2}{a-b}$, ut quamvis eum nunquam adaequet, differre tamen ab eodem possit quantitate quantumvis parva, & quavis data minori: hoc autem vel ex eo liquet, quod si progressio non in infinitum continuetur, terminusque eius postremus sit p, summam recipit omnino accuratam & exactam $\frac{a^2-bp}{a-b}$, quae semper minor est quam $\frac{a^2}{a-b}$, earumque differentia fieri potest utcunque parva, quia terminus ipse p per ulteriorem progressionis continuationem evadit utcunque parvus. Atque hinc quemadmodum p semper propius accedit ad nihilum seu 0, quod tamen nunquam adaequat, atque adeo nihilum ipsum seu 0 *limes* est termini p, ita pariter fractio $\frac{a}{a-b}$ *limes* est fractionis $\frac{a^2-bp}{a-b}$, quae cum

cum priori non congruit, nisi fiat $p=0$ hoc est nisi pro p *limes* ipsius sufficiatur.

2. Sit y functio quantitatis variabilis x per $Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ &c. repraesentata, ita ut posito $x=0$, fiat $y=0$, & ex aequatione $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ &c. per x divisa oriatur $\frac{y}{x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. Patet itaque rationem $\frac{y}{x}$ variabilem esse quia exponens huius rationis est quantitas variabilis, nimirum functio ipsius variabilis x, & quidem talis quae iugiter decrescit quandiu ipsa variabilis x minuitur. Posito iam $x=0$ functio ipsa y simul evadit $=0$, & rationis $\frac{y}{x}$ exponens $=A$, seu ipsa ratio $\frac{y}{x}=A$. Paradoxum videtur quod hic afferitur esse $\frac{y}{x}=\frac{0}{0}=A$ quia cyphrae non sunt quantitates, neque una altera maior vel minor esse dicive potest. Verum ratio $\frac{y}{x}=A$ revera non est ratio cyphrarum, sed *limes*, ad quem ratio $\frac{y}{x}$ perpetuo appropinquat, variabili x & cum ea simul variabili y continuo decrescente; *limes* quem nondum attingit ratio $\frac{y}{x}$ quamdiu x & y sunt quantitates verae quantumvis parvae. Ratio $\frac{y}{x}=A$ ea est quacum variabiles x & y evanescunt, seu quantitates esse desinunt; atque hic aequationis *limes* certus est ac definitus. Potest hic *limes* rationis $\frac{y}{x}=A$ vocari *ultima ratio* variabilium y & x, si spectetur ut ea, quacum y & x quantitates esse desinunt seu evanescunt. Si variabilis

riabilis $x = 0$ iterum crescere concipiatur, functio y cum ea simul crescere incipit, atque ratio $\frac{y}{x} = A$ iterum ea erit, quacum crescere incipiunt; atque hoc respectu *limes* huius rationis $\frac{y}{x}$, qui est A, vocari potest prima ratio variabilium y & x, quacum quantitates esse incipiunt. Hoc modo ad verum germanumque sensum revocabitur Auctoris nostri doctrina contendentis infinite parva revera esse nihila, interque duo infinite parva intercedere posse rationem quamcunque. Ratio infinite parvorum revera non est ratio nihilorum, sed *ratio ultima*, quacum duae variabiles nascuntur, seu quantitates esse incipiunt. Hoc est aliis verbis ratio infinite parvorum nihil aliud est, quam *limes* ille, ad quem quantitatum variabilium ratio perpetuo accedit, quem nunquam transgredi, neque etiam attingere potest, sed ad quem propius accedit pro data quavis differentia. Verbo dicam: *ultimae* magnitudinum evanescentium *rationes*, & *primae* nascentium non sunt rationes, quas magnitudines ipsae unquam inter se habent, sed *limites* omnium variabilium rationum. In paradoxa expressione $\frac{0}{0}$ possumus *limitem* latentem detegere hac ratiocinatione: est $\frac{0}{0} = \frac{a-a}{b-b}$, est autem $a : b :: x : \frac{bx}{a}$, igitur $a + x : b + \frac{bx}{a} :: a : b$, & $a + x - a : b + \frac{bx}{a} - b :: a : b$. Quocirca erit $\frac{a}{b} = \frac{a-a+x}{b-b+\frac{bx}{a}}$; Hinc nullescente x rationis constantis $\frac{a}{b}$ *limes* aequabitur ipsi $\frac{a-a}{b-b} = \frac{0}{0}$.

3.

3. Omnis variabilis quantitas non tantum continuo decrescere, & tandem penitus evanescere potest, sed etiam continuo augeri potest, idque in infinitum. Esto

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n$$

in hac aequatione apparet, aucto in infinitum x etiam y in infinitum excrescere. Ex ea autem deducitur

$$\frac{y}{x^n} = \frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{H}{x} + K;$$

ex quo patet rationem $\frac{y}{x^n}$ eiusque exponentem variabilem esse, ita quidem ut variabili x, & cum ea simul ipsa y perpetuo crescente, exponens illius continuo decrescat, terminis nimirum omnibus praeter ultimum constantem decrescentibus. Posito autem $x = \infty$, qua in hypothesi fit etiam $y = \infty$, exponens rationis $\frac{y}{x^n}$ evadit aequalis constanti K, reliquis, terminis ob $x = \infty$, nullescentibus. Verum, sicuti antea pro quantitatibus infinite parvis monuimus, ratio istaec $\frac{y}{x^n} = K$ proprie loquendo non est ratio infinite magnorum y & x^n ad se invicem, quia fieri nequit, ut duo quanta inassignabilia inter se comparentur; sed est *limes* rationis, ad quem variabiles y & x^n in infinitum crescentes continuo appropinquant, quemque nunquam attingunt quandiu sunt determinatae & assignabiles quantitates; atque idcirco $\frac{y}{x^n} = K$ est *ultima ratio*, quacum quantitates y, & x^n assignabiles esse desinunt. Hinc recte intelligitur pervulgatum illud Calculi Infinitesimalis dictatum, quantitates scilicet, & quantitatum rationes, quarum data sit differentia, si ita perpetuo excrescant, ut datam quamvis magnitudinem superent *ultimo* fieri aequales. Sint enim A, B quantitates seu rationes sine fine crescentes, quarum differentia

data

data semperque constans sit D. Capio magnitudinem aliam datam & constantem a, statuoque analogiam $A : D :: a : d$. Perspicuum est crescente A decrescere d, & quidem proportionaliter, ita ut si crescat A ultra quamlibet datam quantitatem, minuatur d infra quamlibet datam. Igitur ob $A \pm D : D :: a \pm d : d$, quum quantitates duae a & $a \pm d$, decrescente d infra quamlibet datam quantitatem, *ultimo*, seu in *limite* ubi nimirum nullescit, fiant aequales; etiam quantitates proportionales A, & $A \pm D$, seu A & B datam habentes differentiam D *ultimo* ad aequalitatem pervenient. Hinc quemadmodum per quantitates & rationes perpetuo decrescentes & quibuscunque datis minores determinantur *proportiones ultimae*, quae valent in *limite* continue decrescentium; ita per quantitates & rationes sine fine crescentes, & quibuslibet datis maiores definiuntur *proportiones ultimae*, quae praesto sunt in *limite* perpetuo crescentium. Veruntamen inter duos hosce *limites* extremos illud intercedit discrimen, quod decrescentium *limitem* assequi, & detegere licet, ubi quantitates prorsus evanescunt nullaeque evadunt; sed *limitem* crescentium nunquam proprie assequimur, quia tametsi quantitates terminum quemcunque datum crescendo praetergredi possunt, nunquam tamen fieri possunt *absolute* infinitae.

4. Illud itaque fixum ratumque semper habeatur in Calculo Differentiali nunquam aequales assumi eas quantitates, aut rationes, quarum datur aliqua utcunque parva differentia, sed illas duntaxat, quarum differentia ultra quemlibet terminum assignabilem decrescens, tandem evanescere, nullaque prorsus fieri demonstratur, ita ut quantitatum, & rationum aequalitas obtineatur tantum in *limite extremo*, ad quem eaedem ultra quamcunque mensuram accedunt, & quamvis saepissime contingat, ut quantitates ipsae, quarum investigatur proportio in *limite* prorsus evanescant, nihilo tamen minus *limitis* proportio, in quem unice inquiritur, semper subsistit, & immutata perseverat.

5.

5. Nomine itaque *Differentiarum*, *Fluxionum*, *Elementorum*, *Incrementorum*, *Decrementorum*, *Quantitatum Infinitesimarum*, quomodocunque appellentur, nihil aliud significatum volumus, nisi differentias continuo decrescentes, & quibuslibet datis minores a veteribus ipsis Geometris usurpatas, ex quibus aequalitates & proportiones *ultimas*, quae locum habent in *limite*, tuta consecutione deducimus. Brevitatis autem gratia utimur compendio, & *limitis* aequalitatem tribuimus quantitatibus, rationibusque differentiam habentibus perpetuo decrescentem & inassignabilem, non quod revera aequales statuamus quantitates & rationes, donec differentiam aliquam utcunque minimam servant, sed quod alias notum perspectumque sit, differentiam in *limite* ipso nimirum *ultimam* nullam fieri, adeoque quantitates ac rationes in *limite* esse accuratissime aequales. Quapropter magnam Calculo Differentiali inferret iniuriam si quis contenderet, differentias, quae adhuc aliquid sunt, ab ipso negligi, & pro nullis haberi. Nihil procul dubio in infinitesimorum Analysi, nihil omnino contemnitur: nam cum aequales pronunciamus quantitates & rationes infinitesimas seu inassignabili differentia praeditas, non intelligimus eas aequales esse, donec differentiam habent aliquam utcunque parvam, sed in *limite*, ubi differentia prorsus nulla est, earum absolutissimam aequalitatem concludimus. Quocirca infinitesimas differentias negligere, & pro nullis omnino haberi, nihil aliud sibi vult, quam *limitis* absolutissimas aequalitates ac proportiones inquirere ac definire. Hinc autem perspicue patet *Differentialem Calculum* nihil aliud esse, & definiri, quam analyticam methodum inveniendi *limitem* rationis, quae intercedit inter differentiam finitam duarum quantitatum, & differentiam finitam aliarum binarum, quae habent ad priores duas analogiam & relationem lege cognitam ac definitam.

6. Huic adnotationi finem imponat gravissimum magni Fluxionum inventoris NEWTONI testimonium hac de re ita ap-

aptiſſime mirificeque differentis (a): „ Malui demonſtrationes ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate praemittere. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi „.

„ Obiectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quae antequam evanuerunt non eſt ultima; ubi evanuerunt nulla eſt. Sed & eodem argumento aeque contendi poſſet, nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam; ubi attingit nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt illam ipſam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum, & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Haec eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determi-

(a) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. I. in fine.*

terminandis ac demonstrandis legitime usurpantur „.

„ Contendi etiam potest, quod si dentur ultimae quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimae magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum demonstravit. Verum haec obiectio falsae innititur hypothesi. Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligitur in infinite magnis. Si quantitates duae, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio aequalitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimae seu maximae quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite „.

7. Offendit Alembertum Neutoniana loquendi formula ab aliis etiam recepta nimirum *ratio quacum quantitates evanescunt*; *ratio quacum nascuntur*: locutionem hanc quasi absonam & absurdam his verbis notat & carpit (*a*): „ Quelques mathematiciens ont défini la quantité infiniment petite celle qui, s'évanouit, considérée non pas avant qu'elle s'évanouisse, non pas après qu'elle est évanouie, mais dans le moment même ou elle s'évanouit. Je voudrois bien savoir quelle idée nette & precise on peut espérer de faire naitre dans l'esprit par une semblable définition. Une quantité est quelque chose ou rien. Si elle est quelque chose, elle n'est pas évanouie; si

(*a*) *Mel. de Lit. d' Hist. & de Phil. Tom. V. Eclairc. sur les Elém. de Phil. §. XIV.*

elle eſt rien, elle eſt évanouie tout-a-fait. C'eſt une chimere que la ſuppoſition d'un état moyen entre ces deux-la „.

At equidem non video quid iſtud ſit, quod ſummo Geometrae Alemberto tantopere faſtidium creat: huiuſmodi enim loquendi formulae, licet fortaſſis ad ſeveriſſimam veritatis normam minus exactae, ſunt tamen a Geometris, atque adeo Philoſophis communi uſu ac ſermone receptae, ut longiores verborum ambitus vitentur. Quid quod alibi Alembertus ipſe id genus formulas adeo non improbet, ut potius brevitatis & compendii cauſſa commendet? „ Toutes les parties des mathématiques „ inquit ille (a) „ ſont ſouvent uſage d'expreſſion de cette eſpece, qui dans le ſens metaphyſique qu'elles preſentent, paroiſſent d'abord peu exactes; mais qui ne doivent être regardées que comme des manieres abrégées de s'exprimer, que les Mathématiciens ont inventées pour énoncer une verité, dont le developpement & l'énoncé exact auroit demandé beaucoup de mots „.

(a) *Loc. cit.* §. XL.

ADNOT. ad §. 214. PART. I.

QUoniam Auctoris noſtri demonſtratio mera nititur inductione, adeoque ſumma illa ſeveritate caret, quam ſemper Geometrae, ubi res fieri poteſt, requirunt; demonſtrationem ipſam ab Alemberto mutuabimur, qui *Tom. IV. Opuſ. Mathem. pag.* 5. eam hiſce verbis adornat.

„ Si une quantité A contient tant de variables x, y, z, &c. qu'on voudra, & qu'on la différentie en faiſant varier ſucceſſivement x, y, z, &c. en négligeant les différences ſecondes, troiſiémes &c. on aura le même reſultat dans quelqu'ordre qu'on différen-

différencie, c' eſt-à-dire, que par exemple, $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz\,dt}$ &c. $= \frac{d^n A}{dz\,dy\,dt\,dx}$ &c. M. Euler a démontré cette propoſition dans ſon *Analyſe des infiniment petits*, mais par une eſpece d'induction. Pour en donner une démonſtration générale & rigoureuſe nous conſidérerons, I. que $\frac{ddA}{dx\,dy} = \frac{ddA}{dy\,dx}$, comme le ſavent les Géomètres. II. Nous allons démontrer que ſi en général les quantités $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz}$, & $\frac{d^n A}{dz\,dx\,dy}$, ſont égales, la même égalité ſubſiſtera en faiſant varier une nouvelle variable t; ce qu'il eſt aiſé de voir en conſidérant I. que la combinaiſon $dx\,dy\,dz$, donne (*hyp.*) le même réſultat que la combinaiſon $dz\,dx\,dy$, la combinaiſon $dt\,dx\,dy\,dz$ donne évidemment le même réſultat que $dt\,dz\,dx\,dy$; II. que $dt\,dx\,dy\,dz$ donne le même réſultat que $dx\,dt\,dy\,dz$, puiſque $dt\,dx$ donne le même que $dx\,dt$; III. que $dx\,dt\,dy\,dz$ donne le même réſultat que $dx\,dy\,dt\,dz$, & par la même raiſon puiſque $dt\,dy$ donne le même que $dy\,dt$, &c. Donc, &c. Donc puiſque le théorême a lieu lorſque $n = 2$, il aura lieu lorſque $n = 3$, & enſuite lorſque $n = 4$, &c. & ainſi de ſuite „.

Hanc demonſtrationem applicat Alembertus communi quantitatum algebraicarum multiplicationi, qua de re elementorum Scriptores monet, eorumque circumſpectionem excitat his verbis:

„ Cette démonſtration pourroit ſervir à prouver d'une maniere très-ſimple une propoſition que la plupart des Auteurs élémentaires négligent de prouver, ſavoir, qu'en quelqu'ordre qu'on multiplie tant de quantités a, b, c, d, e *&c.* qu'on voudra, les unes par les autres, le réſultat eſt toujours le même. On le démontre bien pour les produits ab & ba de deux quantités, mais on néglige ſouvent de le prouver pour les

produits d'un plus grand nombre de quantités, quoique la chose ne soit pas évidente par elle-même. C'est un avis qu'on donne ici aux Auteurs d'Elémens, afin qu'ils y fassent attention à l'avenir „.

ADNOT. ad CAP. VIII. PART. I.

CEleber. De la Grange in italica epistola ad Fagnanum anno 1754 typis edita novam proponit seriem pro differentialibus, & integralibus cuiuslibet gradus, eamque adamussim respondentem & analogam Neutonianae seriei pro potestatibus & radicibus. Rem novitate atque elegantia commendabilem hic breviter explanabimus: Sint itaque series binae Neutoniana una, Grangiana altera:

I. $(a+b)^m = a^m b^0 + ma^{m-1}b^1 + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3 + \&c.$

II. $(xy)^m = x^m y^0 + mx^{m-1}y^1 + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3 + \&c.$

Iam vero I. quemadmodum prima series dat evolutionem potestatis cuiuscunque, ad quam elevatur summa duarum, adeoque quotcunque datarum magnitudinum, assumto exponente m pro gradu propositae potestatis; ita propemodum series secunda praebet differentiale cuiuscunque gradus ex producto duarum, adeoque quotcunque, variabilium, sumto pariter exponente m pro gradu vel ordine differentialis propositi.

II. Quemadmodum prima series suppeditat terminos radicis cuiuscunque, quae a summa duarum, vel quotcunque quantitatum, extrahitur, modo fiat exponens m aequalis numero fracto radicis gradum indicanti; ita series secunda continet integrale cuiuslibet gradus ex producto duarum, vel quotcunque finitarum, aut infinitesimarum magnitudinum, dum-

dummodo accipiatur exponens m aequalis numero integro, sed negativo gradum dati integralis indicanti.

III. Denique sicuti in prima serie exponens o indicat quantitatem, quam afficit, elevatam ad potestatem nullam, adeoque aequalem unitati; ita in secunda exponens idem o non aliud significat, quam in quantitate ab eodem affecta nullum esse differentiationi, nec integrationi locum, adeoque quantitatem ipsam talem accipiendam, qualis nulla habita exponentis ratione reperitur.

Propterea si Neutoniana serie feliciter utimur per universam Analysim in elevationibus ad potestates, & in radicum cuiuscunque gradus extractionibus; seriem alteram successu aeque prospero in differentiationibus & integrationibus cuiuscunque ordinis usurpabimus. Proponatur igitur quantitas xy differentianda: in hoc casu, quoniam differentiale quaesitum primi ordinis est, erit $m = 1$, proindeque generalis series secunda induet hanc formam $x^1y^0 + x^0y^1$, quae ad communem notandi modum redacta iuxta id, quod ante indicavimus, convertitur in hanc $y\,dx + x\,dy$.

Si secundum, aut tertium, aut quartum differentiale quaeratur erit $m = 2$, vel $m = 3$, vel $m = 4$, & quaesita differentialia, factis pro m debitis substitutionibus erunt sequentia:

$d^2.xy = x\,y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 = y\,ddx + 2dx\,dy + x\,ddy$;

$d^3.xy = x^1y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3 = yd^3x + 3ddx\,dy + 3dx\,ddy + xd^3y$;

$d^4.xy = x^1y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + x^0y^4 =$

$y\,d^4x + 4d^3x\,dy + 6ddx\,ddy + 4dx\,d^3y + x\,d^4y$:

Sicque porro differentiale cuiuscunque ordinis summa facilitate semper obtinebitur, spectato tanquam variabili etiam differentiali primo dx, vel secus deletis terminis, qui differentialia ipsius dx continent.

Sed praeterea series eadem II. ad integralium inventionem aeque accommodatur, ac Neutoniana series ad radicum extractionem. Proponatur ex. gr. ad habendam quadraturam indefinitam curvae cuiuslibet integratio elementi $y\,dx$ areae curvilineae:

lineae: accipiatur in canone generali $dx = x$; eritque per id, quod ante adnotavimus, $m = -1$, quibus valoribus in canone secundo substitutis assequemur seriem peculiarem

$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4$ &c.

Iam vero dx^{-1} denotat integrale ipsius dx; dx^{-2} integrale integralis ipsius dx (idest integrale quantitatis x) quod voco integrale secundum eiusdem dx, designoque per symbolum $^2\int dx$: Pariter dx^{-3} exprimit integrale tertium ipsius dx, nimirum $^3\int dx$; dx^{-4} integrale quartum, seu $^4\int dx$; &c. Sed

$$\int dx = x;$$

$$^2\int dx = \int x = \int \frac{x\,dx}{dx} = \frac{x^2}{2\,dx};$$

$$^3\int dx = \int \frac{x^2}{2\,dx} = \int \frac{x^2\,dx}{2\,dx^2} = \frac{x^3}{2.3\,dx^2};$$

$$^4\int dx = \int \frac{x^3}{2.3\,dx^2} = \int \frac{x^3\,dx}{2.3\,dx^3} = \frac{x^4}{2.3.4\,dx^3};$$

& in universum

$$^m\int dx = \frac{x^m}{2.3.4\ldots m\,dx^{m-1}}$$ accepto semper dx tanquam constanti. Igitur hisce valoribus in praecedenti serie subrogatis, positisque de more dy, ddy, d^3y, &c. loco y^1, y^2, y^3, &c. tandem apparebit

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2\,dy}{2\,dx} + \frac{x^3\,ddy}{2.3\,dx^2} - \frac{x^4\,d^3y}{2.3.4\,dx^3} + \frac{x^5\,d^4y}{2.3.4.5\,dx^4} - \text{&c.}$$

haecque est decantata series Bernoulliana (*a*) Geometris dudum notissima.

Ceterum hic canon secundus non solum ad differentialia primi gradus integranda extenditur, verum etiam unica operatione integralia differentialium cuiuslibet ulterioris gradus confestim suppeditat. Quaeratur ex. gr. integrale secundum producti $dy\,dx$; facto igitur $m = -2$, $x = dx$, & $y = dy$ consequemur

(*a*) Io. Bern. *Oper. Tom. I. N. XXI.*

$$^{1}\int dy\,dx = dx^{-1}dy^{0} - 2dx^{-2}dy^{1} + 3dx^{-3}dy^{2} - 4dx^{-4}dy^{3} + \&c.$$
$$= \frac{x^{1}dy}{2dx} - \frac{2x^{2}ddy}{2.3\,dx^{2}} + \frac{3x^{3}d^{3}y}{2.3.4dx^{3}} - \frac{4x^{4}d^{4}y}{2.3.4.5dx^{4}} + \&c.$$

Quum autem ob dx constantem sit $^{1}\int dy\,dx = \int y dx$, & ante inventum sit integrale

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^{2}dy}{2dx} + \frac{x^{3}ddy}{2.3dx^{2}} - \frac{x^{4}d^{3}y}{2.3.4dx^{3}} + \&c.;$$

aequabuntur ideirco inter se binae series specie tenus immaniter discrepantes, hoc est

$$xy - \frac{x^{2}dy}{2dx} + \frac{x^{3}ddy}{2.3dx^{2}} - \&c. = \frac{x^{1}dy}{2dx} - \frac{2x^{2}ddy}{2.3dx^{2}} + \frac{3x^{3}d^{3}y}{2.3.4dx^{3}} - \&c.$$

quarum paullo ocultior aequalitas vel ex eo colligitur, quod si utraque bis differentietur, termini omnes utrinque destruuntur unico utrobique manente $dydx$.

ADNOT. ad §. 324. PART. I.

Data differentiali aequatione tres variabiles involvente

(A) $\quad Pdx + Qdy + Rdz$

deductaque inde *aequatione conditionis*

(B) $\quad P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$

Auctor noster canonem hunc generatim constituit, quod nimirum ubi aequatio finita (B) nec identica reperitur, nec eam praebet variabilium x, y, z relationem, quae aequationi differentiali (A) satisfaciat, *nulla exhiberi possit aequatio finita*, quae ipsi satisfaciat. At vero canonem hunc non ea gaudere extensione, quam Eulerus ei tribuit, sed circumscriptione aliqua coercendum esse primus acutissime animadvertit Celeberr. De la Place in egregia Dissertatione *Sur les solutions particulieres*

lieres des Equations differentielles, & sur les inégalités séculaires des Planetes. In Actis Reg. Scient. Paris. Acad. an. 1772. Si enim differentialis aequatio fuerit

$$dx = \{1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} + b\sqrt[3]{(x-z-y)}]\}dy + [1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)}]dz,$$

quae cum aequatione (A) collata praebet

$$P = 1, Q = 1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} - b\sqrt[3]{(x-z-y)}],$$
$$R = 1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)};$$

atque hi valores substituantur in aequatione conditionis (B), eruitur post molestam prolixamque suppûtationem aequatio linearis

$y + z - x + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12} = 0$, quae nec identica est, nec differentiali aequationi satisfaciens. At nihilominus datur inter variabiles x, y, z relatio, quae hoc ipsum praestat; siquidem $x = y + z$ propositae differentiali aequationi evidentissime satisfacit. Ex quo luculenter patet, Eulerianum Canonem brevioribus terminis contineri quam ab Auctore fancitur.

ADNOT. ad §. 11. PART. II.

AUctor noster in hoc loco testatur se in Introductione ostendisse, *seriem utramque*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$\& \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \frac{1}{6.64} + \&c.$$

logarithmum hyperbolicum binarii exhibere. At in citata *Introductio-*

ductione ad Analysin Infinitorum desideratur demonstratio ab EULERO indicata, nec eam ibi invenire omni adhibita diligentia mihi contigit. Quapropter eandem hic supplere non abs re erit. Constat ex logarithmorum theoria, esse

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$$

adeoque posito $x = 1$ erit

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

Est autem assumto $x = -\frac{1}{2}$

$$l(1+x) = l\frac{1}{2} = -\frac{1}{1.2^1} - \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} - \&c.$$

Igitur ob $l2 = -l\frac{1}{2}$, orietur

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$= \frac{1}{1.2^1} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \&c.$$

Q. E. D.

ADNOT. post §§. 45. & seqq. PART. II.

QUamvis insigne ac mirificum Taylorianum Theorema innumeris prope usibus per matheſim universam accommodetur, & elegantissimas pariat, vixque aliunde speranda Problematum etiam difficillimorum solutiones, sublimiorumque Theorematum demonstrationes; quandoque tamen usuvenit, ut nisi caute & circumspecte adhibeatur in errorem ac fallaciam inducat; fallitur scilicet qui in universum affirmat

functionem quamlibet binomiae quantitatis $x+a$, hoc est $\varphi(x+a)$ per Taylorianum Theorema semper assumi posse aequalem indefinitae seriei

$$\varphi(x)+\frac{a\,d.\varphi(x)}{dx}+\frac{a^2\,dd.\varphi(x)}{2\,dx^2}+\frac{a^3\,d^3.\varphi(x)}{2.3\,dx^3}+\frac{a^4\,d^4.\varphi(x)}{2.3.4\,dx^4}+\&c.$$

Hoc enim vel in simplicissima hypothesi, qua statuatur $\varphi(x+a)=[\sin(x+a)]^{\frac{1}{3}}$, falsum prorsus & absurdum deprehenditur, quum quantitas $[\sin(x+a)]^{\frac{1}{3}}$, quae semper manifesto finita est in Taylorianam seriem conversa, vel in ipso secundo termino valorem adipiscatur infinitum ubi $x=0$, fit quippe series $=$

$$\sin x^{\frac{1}{3}}+\frac{a\,d.\sin x^{\frac{1}{3}}}{dx}+\&c.=\sin x^{\frac{1}{3}}+\frac{a\cos x}{3\sin x^{\frac{2}{3}}}+\&c.=\infty$$

in hypothesi $x=0$. Vel hoc uno edoctus exemplo magnam semper adhibebit prudens Geometra considerationem & sagacitatem in applicatione atque usu Tayloriani Theorematis, quod incaute usurpatum nonnullis etiam magni nominis Geometris non semel imposuit.

Accidit etiam quandoque, ut ex Tayloriano Theoremate, licet citra errorem usurpato, solutio propositi problematis habeatur non ita generica lateque patens, qualem esse oporteret, vel qualem methodus alia tutior ac melior suppeditaret. En luculentum huiusce rei exemplum. Proponatur inveniendae talis functio $\varphi(x)$ quantitatis variabilis x, ut habeatur $\varphi(x+a)=\varphi(x)$, existente a quantitate data. Palam est a formula $\varphi(x)$ exhiberi ordinatam cuius curvae, in qua, acceptis in axe segmentis $=a$, ordinatae per hanc quantitatem aequidistantes aequales sint: id accidit in Cycloide si a aequetur circuli genitoris circumferentiae. Patet igitur quantitatem $\varphi(x)$ infinitis praeditam esse valoribus arbitrariis problemati satisfacientibus, dummodo $\varphi(x)$ praedictae curvae ordinatam exhibeat: Vertamus nunc $\varphi(x+a)$ in seriem per canonem Taylorianum, eritque

$\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \varphi(x+a) = \varphi(x) + \frac{a d.\varphi(x)}{dx} + \frac{a^2 dd.\varphi(x)}{2\,dx^2} + \frac{a^3 d^3.\varphi(x)}{2.3\,dx^3} + \&c.$$

atque hinc habebitur aequatio

$$\frac{a d.\varphi(x)}{dx} + \frac{a^2 dd.\varphi(x)}{2\,dx^2} + \frac{a^3 d^3.\varphi(x)}{2.3\,dx^3} + \&c. = 0.$$

Sit e logarithmorum hyperbolicorum basis, & accipiatur $\varphi(x) = Ae^{bx}$, huiusque valoris fiat in praecedenti aequatione substitutio. Quocirca divisione facta per Ae^{bx} exurgit aequatio $ab + \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{a^3 b^3}{2.3} + \&c.$ Erit igitur $e^{ab} - 1 = 0$; adeoque facto regressu a numeris ad logarithmos orietur $ab = l1$. Sed per notissimum Euleri nostri inventum est $l1 = \pm m\pi\sqrt{-1}$, existente m numero quovis integro una cum 0. Igitur $ab = \pm m\pi\sqrt{-1}$, & $b = \pm \frac{m\pi\sqrt{-1}}{a}$, & consequenter

$$\varphi(x) = Ae^{\pm \frac{m\pi x}{a}\sqrt{-1}} = A\left(\cos\frac{m\pi x}{a} \pm \sin\frac{m\pi x}{a}.\sqrt{-1}\right),$$

seu posito $A\sqrt{-1} = B$ assequimur tandem

$$\varphi(x) = A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Iam vero haec functionis $\varphi(x)$ forma, seu valor non videtur eam universalitatem habere, quam oportet: capiatur enim circuli arcus v, & diametri abscissa $1 - \cos v$, erigaturque ordinata x ad eam curvam, in qua habeatur $x = v - \sin v$; sitque adeo curvae abscissa $1 - \cos v$ aequalis functioni ipsius ordinatae x, seu $\varphi(x)$. Erit itaque

$$x = v - \sin v = Cv^3 + Dv^5 + Ev^7 + \&c.,$$

& per serierum regressum invenietur

$$v = Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.; \text{ proindeque } \varphi(x) = 1 - \cos v = 1 - \cos(Fx^{\frac{1}{3}} + \&c.).$$

Si iam valor supra inventus $\varphi(x) = A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}$

debita donaretur universalitate, is in se contineret valorem alterum $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{i}} + \&c.)$, seu quod idem est quantitas $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{i}} + \&c.)$ converti posset in seriem huius formae $A'\sin\pi x + B'\sin 2\pi x + C'\sin 3\pi x + \&c. \ldots + H'\cos\pi x + I'\cos 2\pi x + \&c.$ adeoque (per nota Trigonometriae analyticae Theoremata) in seriem

$$A'' + B''\pi x + C''\pi^2 x^2 + D''\pi^3 x^3 + E''\pi^4 x^4 + \&c.$$

in qua nulla adest ipsius variabilis x potestas nisi integra. Atqui hoc repugnat evolutioni formulae $1 - \cos(Fx^{\frac{1}{i}} + \&c.)$, quae praebet ut notum est $A'''x^{\frac{1}{i}} + B'''x^{\frac{2}{i}} + \&c.$, ubi ipsius x potestates fractae evitari nullo modo possunt. Patet igitur functionis $\Phi(x)$ valorem $A\cos\frac{m\pi x}{a} \pm B\sin\frac{m\pi x}{a}$ exprimendis omnibus quaestionis propositae casibus nequaquam aptari, minusque genericum esse quam oporteat

Si quis regerat quantitatem $A'''x^{\frac{1}{i}} + B'''x^{\frac{2}{i}} + \&c.$ revocari posse ad formam $\alpha + \beta\cos 2x + \gamma\cos 4x + \&c.$, propterea quod habeatur

$$x = \sin x + a\sin x^3 + b\sin x^5 + \&c. = \sin x\,(1 + a\sin x^2 + b\sin x^4 + \&c.)$$
$$= \sin x\,(a' + b'\cos 2x + c'\cos 4x + \&c.)\,;$$ ideoque

$$x^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}\,(a'' + b''\cos 2x + c''\cos 4x + \&c.)\,;$$ ac denique

$$x^{\frac{1}{i}} = a''' + b'''\cos 2x + c'''\cos 4x + \&c.:$$ si quis inquam hoc regerat, is refelletur ea maxime ratione, quod aequatione

$$x^{\frac{1}{i}} = a''' + b'''\cos 2x + c'''\cos 4x + \&c.$$

differentiata divisaque per dx oritur aequatio altera

$$\frac{2}{x^{\frac{i-1}{i}}} = -2b'''\sin 2x - 4c'''\sin 4x - \&c.$$

quae

quae in hypothesi $x=0$ absurdissimam parit aequalitatem $\infty=0$. Praeterea si proposita staret oppositio, etiam $\sin x$ converti posset in $f+g\cos 2x+b\cos 4x+$ &c. liceret quippe statuere

$$\sin x=\sqrt{\sin x^2}=\sqrt{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)}=f+g\cos 2x+b\cos 4x+\text{&c.},$$

quae tamen aequatio duplici vitio laborat: I. Quod $\frac{d.\sin x}{dx}=1$ quando $x=0$, & contra $\frac{d(f+g\cos 2x+b\cos 4x+\text{&c.})}{dx}=0$ quando $x=0$; II. Quod $y=\sin x$ curvam designat oppositis ramis instructam supra & infra axem sitis; contra vero

$$y=f+g\cos 2x+b\cos 4x+\text{&c.}$$

curvam definit, cuius rami abscissis x & $-x$ respondentes ad eandem axis partem iacent.

ADNOTATIO ad §. 69. PART. II.

Inter plures, quas Auctor noster instituit Tayloriani Theorematis applicationes ad functionum cuiuscunque variabilis evolutionem, eos tantummodo casus expendit, in quibus variabilis ipsa certum suscipit incrementum vel decrementum; nullatenus vero evolutionem considerat ubi variabilis immutata perseverat, quamvis Tayloriana formula in his quoque casibus mirum praestet usum & insigne adiumentum. Id breviter explanare ad maiorem formulae illius admirabilis amplificationem non abs re erit.

Itaque sit z functio binomii $x+\omega$, & y similis functio ipsius x, hoc est $z=\varphi(x+\omega)$, & $y=\varphi(x)$; erit

$$(A)\quad z=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{2.3dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{2.3.4dx^4}+\text{&c.},$$

quae sane aequatio semper vera erit, quaecunque assumatur quan-

quantitas pro ω, & quaecunque sit variabilis x. Igitur subsistet aequatio (A) tum etiam, cum in omnibus eius terminis per x & ω datis positum fuerit $x=0$, & deinde $\omega=x$. Quocirca si valores, in quos migrant termini

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \text{ &c.}$$

per substitutionem $x=0$, dicantur K, A, B, C, D, &c., nanciscimur formulam

$$\text{(B)} \quad \varphi(x) = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \text{&c.}$$

EXEMPLUM I.

Evolvenda proponatur quantitas exponentialis a^x

Assumto itaque $x=0$ invenitur

$K=1$, $A=la$, $B=(la)^2$, $C=(la)^3$, $D=(la)^4$, &c.

Quamobrem opportunis factis substitutionibus in aequatione

(B) erit $a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{2} + \frac{x^3(la)^3}{2.3} + \frac{x^4(la)^4}{2.3.4} + \text{&c.}$

EXEMPLUM II.

Quaeratur $\sin x$ *per seriem potestatum arcus* x.

Erit itaque $\sin x = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \text{&c.}$

est autem $K=0$, $A=1$, $B=0$, $C=-1$, $D=0$, $E=1$, &c.

Igitur $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{&c.}$

ADNOT. post §. 151. PART. II.

IN seriebus huiusmodi reciprocis potestatum numerorum naturalium, quae generaliter repraesentantur per

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \text{&c. in inf.}$$

illud

illud habetur certo singulare, quod *summa terminorum omnium in locis imparibus se habet ad summam terminorum in locis paribus uti* $2^m - 1$ *ad* 1: Nam divisa serie (A) per 2^m oritur series

(B) $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \&c.$

quae terminos continet seriei (A) in locis paribus existentes. Est autem $\frac{(A)}{2^m} = (B)$, & consequenter $(A) : (B) :: 2^m : 1$. Igitur $(A) - (B) : (B) :: 2^m - 1 : 1$, hoc est:

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \&c. : \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \&c. :: 2^m - 1 : 1,$$

nimirum summa terminorum in locis imparibus eandem habet rationem ad summam terminorum in locis paribus, quam habet $2^m - 1$ ad 1. Atque ita posito exponente $m = 1$ invenitur series reciproca imparium aequalis seriei reciprocae parium nimirum

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \&c.;$$

Posito $m = 2$ invenitur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \&c. : \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} \&c. :: 3 : 1.$$

Sumto $m = 3$ detegitur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{1}{343} + \frac{1}{729} + \&c. :$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{216} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1000} + \&c. :: 7 : 1;$$

& in universum in seriebus, quae fiunt ex potestatibus inversis numerorum naturalium, summa terminorum in locis imparibus tantundem excedit summam terminorum in locis paribus quantum binarii potestas homologa unitate mulctata excedit unitatem.

Verum hic inopinato insigne se nobis offert paradoxum, quod

quod nimirum quotiescunque potestatis exponens non est maior unitate summa terminorum in locis imparibus per demonstratum Theorema minor sit oportet quam summa terminorum in locis paribus; quum tamen contra termini locorum imparium cum terminis parium singillatim collati semper inveniantur manifesto maiores: quippe in praecedenti analogia $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+$ &c.:

$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+$ &c.:: $2^m-1:1$, ratio $2^m-1:1$

est semper *minoris inaequalitatis*, seu ratio minoris ad maius, quoties exponens m minor est unitate; & tamen ratio altera $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+$ &c.: $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+$ &c. est *maioris inaequalitatis*, seu ratio maioris ad minus, quia terminus quilibet in antecedente manifesto excedit terminum quemlibet sibi respondentem in consequente.

Paradoxum hoc non fugit acutissimum Iacobum Bernoullium, qui in tractatu de Seriebus Infinitis §. XXIV. haec habet: „Mirabile vero est quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+$ &c., cuius summa infinita est, seu maior serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. ob denominatores minores, termini locorum imparium ad terminos parium iuxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2}-1$ ad 1, minoris scilicet ad maius, cum tamen illi cum his singillatim collati iisdem manifesto sint maiores, cuius ἐναντιοφανείας rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quae infinitam summam habent intelligendum„. Sed quum veram legitimamque paradoxi explicationem, quam se

se tenere aiebat, Bernoullius nunquam vulgaverit, eamque in posthuma eius operum collectione incassum quaesierim, non inutile arbitror eam hic aperire. Itaque quando seriei

(A) $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{8^m}+$ &c.

dividuntur termini omnes per 2^m, ut inde oriatur series altera

(B) $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}+\frac{1}{14^m}+\frac{1}{16^m}+$ &c.

certum est, huiusce terminos in locis paribus seriei (A) reperiri, quemadmodum tertiae seriei

(C) $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{11^m}+$ &c.

termini in locis eiusdem imparibus inveniuntur; attamen numerus terminorum seriei (B) bis excedit numerum terminorum seriei (C), quia singuli seriei (B) termini oriuntur a singulis ipsius (A) divisis per 2^m; contra vero seriei (C) termini singuli respondent alternis tantum terminis prioris (A), eorumque adeo numerus dimidium duntaxat est numeri terminorum in (A) & proinde dimidium etiam numeri terminorum in (B). Fit hinc ut in mutua serierum (C) & (B) comparatione non singuli termini cum singulis conferri debeant, sed post institutam termini primi cum termino primo comparationem terminus quilibet seriei (C) conferri semper debeat cum duobus simul seriei (B), quo facto patebit in hypothesi $m<1$ terminum quemlibet seriei (C) minorem esse aggregato duorum sibi respondentium in (B). Etenim sit $\frac{1}{a^m}$ terminus unus quicunque seriei (C), & bini eidem respondentes in (B) erunt $\frac{1}{(2a-2)^m}$, & $\frac{1}{(2a)^m}$, & ratio illius ad aggregatum istorum erit $\frac{1}{a^m}:\frac{1}{(2a-2)^m}+\frac{1}{(2a)^m}$. Si porro huius

ius rationis antecedens & consequens per $(2a)^m$ multiplicatur, oritur analogia

$$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a)^m} + \frac{1}{(2a-2)^m} :: 2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m,$$

in qua ratio altera $2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m$ est evidenter ratio minoris ad maius, quia ob $m < 1$ fit $2^m < 2$, & ob $\frac{a}{a-1} > 1$ fit $\left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 1$, ac proinde $1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 2 > 2^m$. Igitur singuli seriei (C) termini (excepto primo) cum binis simul seriei (B) collati iisdem semper minores deprehenduntur, quotiescunque exponens m deficit ab unitate, & consequenter series ipsa (C) minor est altera (B), prouti mutua illarum proportio ante inventa $2^m - 1 : 1$ manifestat.

Sed in serie harmonica

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{&c.}$$

illud est animadversione dignum, quod siquidem termini locorum imparium, excepto primo, semper auferantur a binis respondentibus simul iunctis locorum parium, nova inde series consurgat, quae summa donatur finita: quod quidem in aliis seriebus, ubi idem occurrit paradoxum, haudquaquam obtinet, quum in istis summa eius seriei, quae praedicto modo progignitur, infinita deprehendatur. Sic in serie harmonica si ab aggregato duorum terminorum $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ auferatur $\frac{1}{3}$, oritur

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.6}; \text{ pariter } \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4.10};$$

$$\text{rursus } \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6.14};$$

atque

atque ita deinceps: hincque nova colligitur series

$$\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.10}+\frac{1}{6.14}+\frac{1}{8.18}+\frac{1}{10.22}+\text{ &c. in inf.}$$

cuius summam finitam esse ex eo constat, quod semissis est seriei istius

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{10.11}+\text{ &c.}$$

longe minoris hac alia

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{6.6}+\frac{1}{8.8}+\frac{1}{10.10}+\text{ &c.,}$$

quae ut alias exploratum est summa donatur finita, eaque admodum parva. Inde autem intelligitur, cur in serie harmonica summa terminorum in locis imparibus non sit minor summa terminorum in locis paribus, quamvis terminus quilibet locorum imparium (excepto primo) minor est duobus respondentibus simul sumtis locorum parium; id scilicet ideo contingit, quod prior summa deficit ab altera per quantitatem duntaxat finitam, quum tamen utraque summa sit infinita.

Nec dissimili modo ratio redditur paradoxi alterius quod nimirum in serie numerorum naturalium ad potestatem quamcunque elevatorum

$$1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+\text{ &c. in inf.}$$

summa terminorum in locis paribus habent ad summam terminorum omnium seriei rationem quam habet 2^n ad unitatem scilicet duplam in serie numerorum naturalium, quadruplam in serie quadratorum, octuplam in serie cuborum, &c. quamvis termini locorum parium, utpote partes totius seriei, quantitatem illius multiplicem nullo modo constituere posse videantur. Fallax quippe & anceps partis, & totius notio hisce exemplis accommodata eodem iure adsurdum immane suaderet, series quadratorum, cuborum, aliarumque altiorum potestatum ex numeris naturalibus minores esse oportere serie ipsa numerorum naturalium, in qua continentur, tanquam partes

in toto, quod quam absonum, & praeposterum sit nemo non intelligit.

ADNOTATIO ad §. 159. PART. II.

Ex elegantissima Auctoris nostri aequatione

$$l1+l2+l3\ldots+lx=\frac{1}{2}l2\pi+(x+\tfrac{1}{2})lx-x+\frac{A}{1.2x}-\frac{B}{3.4x^3}+\frac{C}{5.6x^5}-\frac{D}{7.8x^7}+\&c.$$

nonnulla inferuntur theoremata, quae cum utilitate, usu, praestantia se potissimum commendent, hic peculiariter proponi, demonstrarique merentur.

Theorema I.

Sumto x *infinite magno, &* e *pro logarithmorum hyperbolicorum basi habetur* $1.2.3.4\ldots.x=\dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$.

Euleriana praedicta aequatio sumto $x=\infty$, & existente $-x=-le^x$ transit in hanc

(A) $l1+l2+l3\ldots.+lx=\frac{1}{2}l2\pi+(x+\frac{1}{2})lx-le^x$.

Haec autem facto transitu a logarithmis ad numeros convertitur in $1.2.3.4\ldots.x=\dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$. Q. E. D.

Theorema II.

Sumtis x *&* p *infinitae magnis aio fore*

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+2)(x-p+1)=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}$$

In aequatione (A) substituo $x-p$ loco ipsius x, & nanciscor

$l1+$

$l1+l2+l3\ldots+l(x-p)=(x-p+\frac{1}{2})l(x-p)-le^{x-p}+\frac{1}{2}l2\pi.$

Aequationem hanc aufero a priore (A) & invenio

$lx+l(x-1)+l(x-2)\ldots+l(x-p+2)+l(x-p+1)=(x+\frac{1}{2})lx$
$-(x-p+\frac{1}{2})l(x-p)+le^{p}$

Quamobrem progrediendo a logarithmis ad numeros apparebit

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+2)(x-p+1)=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.$$ Q. E. D.

Theorema III.

Captis x & p *numeris ingentibus (si infiniti caperentur aequalitas foret absoluta) coefficiens termini* $(p+1)^{\text{tesimi}}$ *in binomio ad poteſtatem* x *elevato aequatur proxime expreſſioni*

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

Ex vulgari Algebra conſtat elevato binomio ad poteſtatem x coefficientem termini $(p+1)^{\text{tesimi}}$ nihil aliud eſſe quam $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots p}$. Sed in hypotheſi x & p infinitorum, vel etiam ingentium huius fractionis numerator per Theor. II eſt $=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}$; & denominator per Theor. I. eſt $=\frac{p^{p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{p}}$: Igitur fractio praedicta; hoc eſt coefficiens termini $(p+1)^{\text{tesimi}}$ in binomio ad poteſtatem x elato proxime aequatur quantitati

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$ Q. E. D.

CO-

COROL. I. Si fiat $p = nx$ orietur

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^p + \frac{1}{2}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(nx)^{nx+\frac{1}{2}}(x-nx)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{nx+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{n^{nx}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\left(\frac{n}{1-n}\right)^{nx}(1-n)^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}.$$

COR. II. Hinc eruitur valor coefficientis maximi aut medii in binomio ad immensam potestatem x elevato; nam posito $p = \frac{1}{2}x$, seu $n = \frac{1}{2}$, hocque substituto in praecedenti expressione, mutatur illa in hanc alteram $\frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}$, quae valorem maximi coefficientis repraesentat.

COR. III. In binomio ad infinitam potestatem x elevato ratio coefficientis maximi ad summam coefficientium omnium aequatur quantitati $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$; est enim ut liquet summa omnium coefficientium $= 2^x$; proindeque praedicta ratio

$$= \frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} : 2^x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

ADNOTATIO ad §. 185. PART. II.

I. Suspecta non paucis apparebit Auctoris nostri demonstratio, quae tota eo nititur principio, quod proponit his verbis: *Quodsi ergo* x *fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, haec consideratio cessare debet, ac proinde in summa termini ambigui sunt reiiciendi: unde sequitur, huiusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adiiciendam.* Nemo non videt quam labile & ruinosum sit principium huiusmodi ex arcana obscurissimaque numeri infiniti indole deprumtum. Itaque operae pretium ducimus Eulerianas formulas nova, eaque apodictica demonstratione munire (*a*). Sint iam sequentes formulae

I. $1 - 2 + 3 - 4 + \&c. = \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \&c. = 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \&c. = -\frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \&c. = 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \&c. = \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \&c. = 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \&c. = -\frac{272}{256}$

VIII. $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \&c. = 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + \&c. = \frac{7936}{1024}$

&c.

2.

(*a*) *Vide* Cl. GREG. FONTANAE *Dissert.* De Seriebus in *T. II. Part. I.* Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana. 1784.

2. Praemitto Lemmata bina sequentia.

Lemma I.

Posito x *arcu quolibet circuli radio* 1 *descripti habetur aequatio*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \&c. \text{ in infin.} = -\frac{1}{2}$$

Fiat $S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \&c.$ & multiplicetur per $\cos x$, ita ut prodeat

$S\cos x = \cos x^2 + \cos x\cos 2x + \cos x\cos 3x + \cos x\cos 4x + \&c.$

Liquet ex Trigonometria productum ex cosinibus duorum angulorum aequari dimidio cosinui summae ipsorum angulorum una cum dimidio cosinu eorum differentiae. Igitur resoluto producto quolibet praedictae aequationis in terminos binos oritur.

$S\cos x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + \&c.$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \&c. = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + S.$

Quamobrem erit

$$S(1 - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}, \text{ ideſt } S = -\frac{1}{2}. \text{ Q. E. D.}$$

Lemma II.

Infinita ſeries $S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \&c.$ *in infin. aequalis eſt huic expreſſioni* $\frac{\sin x}{2(1 - \cos x)}$

Ducatur propoſita ſeries in $\cos x$ & prodibit

$S\cos x = \sin x\cos x + \sin 2x\cos x + \sin 3x\cos x + \sin 4x\cos x + \&c.$

Iam vero datis binis angulis φ, θ ex theoria functionum angularium conſtat fore $\sin\varphi\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(\varphi+\theta) + \frac{1}{2}\sin(\varphi-\theta)$. Quapropter facta termini cuiuslibet reſolutione in duos invenietur

$$S\cos x = \tfrac{1}{2}(\sin 2x + 0) + \tfrac{1}{2}(\sin 3x + \tfrac{1}{2}\sin x) + \tfrac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) + \tfrac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x) + \&c. = \tfrac{1}{2}$$

$= \frac{1}{2}\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \&c. = S - \frac{1}{2}\sin x$.
Hinc per transpositionem erit $S - S\cos x = \frac{1}{2}\sin x$, ac postremo

$$S = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \text{ . Q. E. D.}$$

3. His praemissis demonstratio Formularum Eulerianarum sponte consequitur.

I. Differentietur series Lemmatis secundi, dividaturque per $-dx$, ex quo orietur

(M) $-\cos x - 2\cos 2x - 3\cos 3x - 4\cos 4x - \&c.$ in inf.

$$= \frac{1}{2(1-\cos x)} = \frac{1}{4\sin \frac{1}{2}x^2}.$$

Propterea sumto x pro semicircumferentia fiet $\cos x = -1$, $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = -1$, $\cos 4x = 1$, &c., & consequenter inventa series transit in I.am

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. \ldots = \frac{1}{4} \text{ . Q. E. D.}$$

II. Lemmatis I. series bis differentietur, dividaturque per dx^2, quo facto invenietur

(N) $-\cos x - 2^2\cos 2x - 3^2\cos 3x - 4^2\cos 4x - 5^2\cos 5x - \&c. = 0.$

Quocirca sumto x pro semicircumferentia oritur series II.a

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. \ldots = 0.$$

III. Capiatur ex aequatione (M) differentiale secundum, hocque per $-dx^2$ dividatur; quod dat aequationem

(O) $-\cos x - 2^3\cos 2x - 3^3\cos 3x \ldots - \&c.$

$$= \frac{-1 - 2\cos \frac{1}{2}x^2}{8\sin \frac{1}{2}x^4};$$

quae in praedicta ipsius x assumtione convertitur in seriem III.am

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. \ldots = -\frac{1}{8}$$

IV. Eodem modo capta aequationis (N) differentia secunda, eaque divisa per $-dx^3$ oritur aequatio

(P) $-\cos x - 2^4\cos 2x - 3^4\cos 3x - 4^4\cos 4x - 5^4\cos 5x \ldots \&c. = 0;$

haecque in hypotheſi $x = 180^\circ$, abit in formulam IV.^tam

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0$$

V. Aequatio (O) bis differentiata, ac per $-dx^2$ diviſa praebet

(Q) $$-\cos x - 2^3 \cos 2x - 3^3 \cos 3x - 4^3 \cos 4x - \&c. = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x^3 + 13 \cos \frac{1}{2} x^3 + 2 \cos \frac{1}{2} x^4}{8 \sin \frac{1}{2} x^3}$$

Hinc capto de more $x = 180^\circ$, praedicta aequatio convertitur in formulam V.^tam

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 \ \ldots \ + \&c. = \frac{1}{4}$$

VI. Sumo aequationis (P) differentiam ſecundam, eamque divido per $-dx^2$, hincque aequationem nanciſcor,

$-\cos x - 2^2 \cos 2x - 3^2 \cos 3x - 4^2 \cos 4x \ldots\ldots - \&c. = 0$.

Haec autem per ſubſtitutionem ſemicircumferentiae loco x degenerat in formulam VI.^tam

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 \ldots + \&c. = 0$. Q. E. D

Hac ipſa methodo protinus demonſtrantur Theoremata omnia Euleriana circa ſeries poteſtatum poſitivarum integrarum ex numeris naturalibus cum ſignis alternantibus; & generatim conſtitui ratumque haberi poteſt, ſeries quantitatum parium praeditas eſſe ſumma improprie dicta, ſeu potius *quantitate genitrice*, ſemper nihilo aequali; ſeries vero poteſtatum imparium donari ſumma, vel *magnitudine genitrice*, ſemper a nihilo diverſa.

Theoremata alia Eulerianis analoga demonſtrari pariter poſſent circa ſeries poteſtatum numerorum imparium alternis ſignis affectarum

$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \&c.$$

In hiſce numerorum imparium ſeriebus, ſecus atque in illis numerorum naturalium, illud generatim conſtitui poteſt *poteſtates impares veri a magnitudine genitrice nihilo aequali; pares a magnitudine determinata.*

ADNO-

ADNOTATIO ad §. 208. PART. II.

PEr calculum differentialem insigni compendio inveniri possunt sequenti etiam modo coefficientes terminorum in formula, quae exprimit generalem terminum seriei cuiuscunque recurrentis. Sit igitur ex serie recurrenti ordinis i

$$y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots y_{x+i-1}, y_{x+i}$$

orta aequatio

$$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots + My_{x+i-1} + y_{x+i} = 0,$$

ex qua facto $y_z = az^x$, per substitutionem, elicitur (facta divisione per az^x) aequatio relationis

(A) $$A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^{i-1} + z^i = 0.$$

Concipiamus nunc huiusce aequationis radices esse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., sintque radices $= \alpha$ numero n: praedicta aequatio induet hanc formam

(B) $$(z-\alpha)^n (z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots + fz^2 + gz + k) = 0 = P$$

assumto $m + n = i$. Statuatur $z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots fz^2 + gz + k = Z$, eritque $(z-\alpha)^n Z = P$. Fiat porro

$dZ = Z'\,dz$, $ddZ = Z''\,dz$, $d^3Z = Z'''\,dz$, &c. Hinc habebitur $\frac{dP}{dz} = n(z-\alpha)^{n-1}Z + (z-\alpha)^n Z'$ ubi facto $n = 1, z = \alpha$ prodit $\frac{dP}{d\alpha} = Z$. Differentiatio secunda praebet

$$\frac{ddP}{dz^2} = n(n-1)(z-\alpha)^{n-2}Z + 2n(z-\alpha)^{n-1}Z' + (z-\alpha)^n Z'';$$

ubi posito $n = 2, z = \alpha$, evadit $\frac{ddP}{2d\alpha^2} = Z$. Pari ratiocinatione invenietur $\frac{d^nP}{1.2.3 \ldots n\,d\alpha^n} = Z$, quando $z = \alpha$, & n numerus aliquis est seriei naturalis 1, 2, 3, &c. Iam vero est $Z = (z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$ &c., & posito α pro z, fit

$Z = (\alpha-\varepsilon)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ &c.

Ergo si in aequatione (B) unica est radix α, seu si $n=1$, habemus $\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha-\varepsilon)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ &c.; si binae sunt aequales radices α, ita ut sit $\varepsilon=\alpha$, habemus $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ &c.; Si tres sunt radices aequales, hoc est $\alpha=\varepsilon=\gamma$, nanciscimur $\frac{d^3P}{2.3d\alpha^3} = (\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ &c. Sicque deinceps.

2. Fiat modo $B+Cz+Dz^2.....+z^{n-1}=Q$, & ob $A+Bz+Cz^2....+Mz^{n-1}+z^n=(z-\alpha)^n(z^m+pz^{m-1}+qz^{m-2}....+fz^2+gz+k)$, adeoque $A=k(-\alpha)^n$, sublato A, factaque divisione per z prodibit $Q=\frac{(z-\alpha)^nZ-k(-\alpha)^n}{z}$, ubi posito $n=1$, & $z=\alpha$ oritur $Q=k$. Ex differentiatione autem elicitur $\frac{dQ}{dz}=\frac{n(z-\alpha)^{n-1}Z+(z-\alpha)^nZ'}{z} - \frac{(z-\alpha)^nZ+k(-\alpha)^n}{z^2}$, ubi assumto $n=2$, $z=\alpha$ prodit $\frac{dQ}{d\alpha}=k$. Si iterum differentietur; tum tertio; deinde quarto &c. inveniemus iugiter $\frac{ddQ}{2d\alpha^2}=k$, quando $n=3$, $z=\alpha$; pariter $\frac{d^3Q}{2.3d\alpha^3}=k$, quando $n=4$, $z=\alpha$, & in universum $\frac{d^{n-1}Q}{1.2.3....(n-1)d\alpha^{n-1}}=k$ existente n numero aliquo seriei naturalis 2, 3, 4, &c. a binario incipientis. Sed k aequatur producto ex $-\varepsilon\times-\gamma\times-\delta$ &c. Igitur huic producto differentialia praedicta aequabuntur.

Statuatur $R=C+Dz+Ez^2.....+z^{n-1}$; eritque ob $A=k(-\alpha)^n$, $B=nk(-\alpha)^{n-1}+g(-\alpha)^n$, demtis ex aequatione (A) terminis $A+Bz$, ac divisione facta per z^2, $R=\frac{(z-\alpha)^nZ-z[nk(-\alpha)^{n-1}+g(-\alpha)^n]}{z^2}$; quae sane

expres-

expressio in hypothesi $n=1$, $z=\alpha$, migrat in $R=g$. Capto differentiali, factoque $n=2$, $z=\alpha$, invenitur $\frac{dR}{d\alpha}=g$; sicque rursus sumto $n=3$, $z=\alpha$ detegitur $\frac{d^2R}{2\,d\alpha^2}=g$, &c. eodem quo antea tenore atque ordine. Est autem g aggregatum productorum ex radicibus $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, &c. quae producta denominationem mutuantur a numero $n-1$. Igitur huic productorum aggregato aequantur differentialia omnia praedicta.

Pari modo si ponatur $S=D+Ez\ldots+z^{n-1}$, invenietur $\frac{d^{n-1}S}{1.2.3\ldots(n-1)\,d\alpha^{n-1}}=f$, idest = aggregato productorum ex radicibus $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, &c., quae producta denominationem accipiunt ab exponente $n-2$. Ita semper de ceteris.

3. Sit iam exempli caussa seriei recurrentis terminus generalis $y_x=a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x$, ubi (*Adnot. post Cap. II.*)

$$a=\frac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)};\quad b=\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)};$$

$$c=\frac{\alpha\beta y_0-(\alpha+\beta)y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Quoniam in hac hypothesi tres habentur radices, eaeque inaequales α,β,γ, erit idcirco $\frac{dP}{d\alpha}=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$; $Q=\beta\gamma$; $R=-\beta-\gamma$. Quapropter prodibit $a=\frac{Qy_0+Ry_1+y_2}{\frac{dP}{d\alpha}}$, qui valor migrat in b mutando α in β, & β in α; pariterque migrat in c permutando α cum γ, & γ cum α.

4. Concipiamus nunc in allato exemplo binas esse radices aequales $\alpha=\beta$, in qua hypothesi terminus generalis hanc induit formam $a'\alpha^x+b'x\alpha^{x-1}+c\gamma^x$, ubi (*loco cit.* §. 16.)

$a'=$

$$a' = \frac{-y_2 + 2\alpha y_1 + (\gamma^2 - 2\alpha\gamma)y_0}{(\alpha-\gamma)^2}; \quad b' = \frac{y_2 - (\alpha+\gamma)y_1 + \alpha\gamma y_0}{\alpha-\gamma}$$

$$c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 - \alpha\alpha y_0}{(\gamma-\alpha)^2}.$$

Valorem a' revoco ad hanc formam $\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} + \frac{-y_1 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2}$ quae a praecedenti non differt, uti liquet. In hac itaque hypothesi, in qua $n=2$, invenitur $Q = \frac{-k\alpha^2}{\alpha} = -\alpha k = \alpha\gamma$, ob $k=-\gamma$. Pariter facto $n=2$ detegitur $R = \frac{-\alpha^3 k - g\alpha^3 + 2\alpha^2 k}{\alpha^2} = k - \alpha g = -\gamma - \alpha$, ob $k=-\gamma, g=1$. Quocirca deducimus $b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$. Est autem manifesto $\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$, & rursus

$$\frac{-y_2 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2} = \frac{-b'}{\alpha-\gamma} = -\frac{b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$ Igitur

$$a' = \frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha-\gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha+\gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha-\gamma)^2} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

Hinc coefficientium indeterminatorum valores sequenti modo exprimentur

I. $c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 + \alpha\alpha y_0}{(\gamma-\alpha)^2}$; II. $b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$; III. $a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$

5. Eodem omnino ratiocinandi modo si tres sint radices aequales, & in r termino seriei generali sint c'', b'', a'' coefficientes indeterminati aequalibus radicibus praefixi (quaecunque demum fuerint radices reliquae inaequales) sequentes formulas semper praesto habebimus

I. $c'' = \dfrac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + Ty_3 \text{ &c.}}{\dfrac{d^3P}{2.3\,da^3}}$;

II. $b'' = \dfrac{\dfrac{dQ}{da}y_0 + \dfrac{dR}{da}y_1 + \dfrac{dS}{da}y_2 \text{ &c.} - c''}{\dfrac{d^3P}{2.3\,da^3}}$;

III. $a'' = \dfrac{\dfrac{ddQ}{2da^2}y_0 + \dfrac{ddR}{2da^2}y_1 + \dfrac{ddS}{2da^2}y_2 \text{ &c.} - b''}{\dfrac{d^3P}{2.3\,da^3}}$

Atque ex his perspicue patet progressus ad casus alios radicum aequalium quatuor, quinque, sex &c.

ADNOT. ad CAP. XI. PART. II.

1. FUnctio aliqua quantitatis cuiuscunque variabilis tunc semper *Maxima* evadit vel *Minima*, cum eius functionis differentialia ordinum successivorum simul evanescentia numero impari sunt; & *Maxima* quidem, quotiescunque eius differentiale ultimo evanescenti superstes negativum est; *Minima* si positivum. Demonstratur hoc ab Auctore, aliisque passim.

2. Hisce constitutis, ac probe perpensis sit modo Z algebraica functio quantitatum variabilium t, u, x, y, &c., cuius

ius *maximos*, *minimosve* valores indagare oportet; erit itaque ex demonstratis $dZ = pdt + qdu + rdx + sdy +$ &c.
unde protinus haec manat aequatio

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \text{&c.} = 0.$$

Quum porro relatio inter variabiles t, u, x &c., nec non inter ipsarum differentialia dt, du, dx &c. sit adhuc indeterminata, & praedicta aequatio locum semper habere debeat, quaecunque sit huiusmodi relatio; hinc evidenter consequitur, singula membra pdt, qdu, rdx &c. nihilo aequari oportere, proindeque tot oriri aequationes, quot existunt variabiles, nimirum I. $p = 0$; II. $q = 0$; III. $r = 0$; &c.
Harum aequationum subsidio inveniuntur quantitatum incognitarum t, u, x, &c. valores, qui in functione Z subrogati eam reddunt *Maximam*, vel *Minimam*.

3. Progrediamur nunc ad secundum differentiale. Assumtis, quod licet, constantibus primis differentialibus dt, du, dx &c. prodibit $d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dsdy +$ &c.
Sit $dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$
$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$
$dr = Ddt + Edu + Fdx + Idy$
$ds = Gdt + Hdu + Idx + Ldy$ Ex quo eruitur
$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Dtdx + 2Edudx + Fdx^2$
$+ 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2$.
Ut a casu omnium simplicissimo ordiamur, ponamus unam tantum esse variabilem t, ideoque $d^2Z = Adt^2$, ubi, ob valorem dt^2 semper affirmativum, differentiale d^2Z eodem afficietur signo, quo quantitas A: quocirca *minima* erit Z, si A fuerit affirmativa: *maxima* si A negativa; inventaque $A = 0$, a subsequentibus ipsius Z differentialibus petendum erit, ut liquet, *Maximi Minimive* criterium.

4. Ponamus nunc, in functione Z variabiles duas t & u contineri. In hac hypothesi oritur

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 = A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2.$$

In

In hac aequatione, quoniam quadrata $\left(dt+\frac{Bdu}{A}\right)^2$ & du^2 semper affirmativa sunt, differentiale secundum d^2Z necessario affirmativum erit quotiescunque coefficientes bini A, & $C-\frac{B^2}{A}$ fuerint affirmativi; contra vero negativum erit, si iidem fuerint ambo negativi, quaecunque sit differentialium dt & du mutua relatio. Igitur pro *Minimo* functionis Z valore habebitur $A>0$, $C-\frac{B^2}{A}>0$, nimirum $C>\frac{B^2}{A}$, seu $CA>B^2$, unde infertur $C>0$. Quamobrem functio proposita Z *Minima* esse nequit nisi tres sequentes simul habeantur conditiones

I. $A>0$; II. $C>0$; III. $AC>B^2$

Pari ratiocinatione inveniemus pro *Maximo* ipsius Z valore fieri oportere $A<0$; $C-\frac{B^2}{A}<0$, seu $C<\frac{B^2}{A}$; ideoque $CA>B^2$, ob A scilicet negativum; ex quo etiam infertur $C<0$; quocirca functio Z valorem *Maximum* nanciscinon potest, nisi tres simul conditiones locum habeant:

I. $A<0$; II. $C<0$; III. $CA>B^2$.

Hinc porro patet, *Maximi* conditiones partim congruere, partim adversari conditionibus *Minimi*.

5. Si vel A, vel C, vel utraque simul sit $=0$, quin tamen sit quoque $B=0$, conditio praecedens $AC>B^2$ stare haudquaquam potest; proindeque proposita quantitas valorem *Maximum Minimumve* nunquam assequetur. Idem prorsus eveniet si A & C signa habuerint contraria; tunc enim ob valorem B^2 semper affirmativum conditio $AC>B^2$ impossibilis evadit. Si B evanescat una cum A, vel una cum C, secundi differentialis d^2Z valor ab unica variabili penderet, & consequenter vel *Maximus* vel *Minimus*, vel neuter esset iuxta criteria ab Auctore tradita pro functionibus unius variabilis. Denique si tota quantitas d^2Z sit $=0$, nimirum $A=0$,

$B=0$, $C=0$, ad tertium differentiale d^3Z confugere oportet, quo non evanescente functio Z nec *Maxima* nec *Minima* esse potest, eo autem evanescente, differentiale quartum d^4Z quaerendum erit, cuius valor an affirmativus, an potius negativus fuerit, per methodum hic expositam facile dignoscetur; ex quo rursus *Maximus* vel *Minimus* functionis propositae valor colligetur.

6. Si Z functio sit trium variabilium t, u, x, differentiale d^2Z induit hanc formam

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2$$

$$= A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2 + 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)dudx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2$$

Fiat $C - \frac{B^2}{A} = a$; $E - \frac{BD}{A} = b$; $F - \frac{D^2}{A} = c$,

& aequatio transibit in hanc

$$d^2Z = A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + adu^2 + 2bdudx + cdx^2$$

$$= A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + a\left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dx^2$$

Iam vero ob valorem quadratorum

$$\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2, \left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2, \text{ \& } dx^2$$

semper affirmativum, differentiale d^2Z erit pariter affirmativum si coefficientes A, a, & $c - \frac{b^2}{a}$ signo + afficientur. Igitur pro *Minimo* functionis Z valore conditiones habentur sequentes $A > 0$; $a > 0$; $ca > b^2$, seu ipsarum a, b, c valoribus subrogatis

$$A > 0; C - \frac{B^2}{A} > 0; \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2$$

nimirum $A > 0$; $CA > B^2$; &

(CA

$(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$;
unde iterum oritur $C > 0$, $F > 0$, & $FA > D^2$. Quocirca functionis Z *Minimum* quinque hisce conditionibus definietur I. $A > 0$; II. $C > 0$; III. $F > 0$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

Pari ratiocinatione inveniemus, valorem *Maximum* ipsius Z conditiones postulare
$A < 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$;
nam I. debet esse $a < 0$, nimirum $C - \frac{B^2}{A} < 0$, vel $C < \frac{B^2}{A}$;
est autem A negativum; igitur $CA > B^2$: II. est $c - \frac{b^2}{a} < 0$;
hoc est $c < \frac{b^2}{a}$; proindeque ob a negativum $ca > b^2$, hoc est

$$\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2$$

vel $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$;
unde oritur $FA > D^2$, & $F < 0$. Quocirca *Maxima* conditiones sunt quae sequuntur
I. $A < 0$; II. $C < 0$; III. $F < 0$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

7. Si quantitates A & C vel singulae, vel ambae evanescunt IV. conditio fit impossibilis. Si evanescat F corruit conditio V.: Ex hisce consequitur functionem Z nec *Maximam*, nec *Minimam* esse posse quotiescunque quantitates A, C, F vel singulae vel omnes evanescant.

Ex dictis luculenter innotescit theoriam hanc ad functiones quatuor, vel etiam plurium variabilium aptari.

8. Quoniam haec nova theoria EULERO est prorsus intacta, non inutile erit sequentia animadvertere.

Quicunque sit numerus variabilium, quae functionem propositam Z ingrediuntur, si earum quaelibet seorsim spectetur, quaeraturque *Maximum* vel *Minimum*, quod eidem conveniat dum interea reliquae eaedem perseverant, invenientur singillatim differentialia prima *pdt*, *qdu*, *rdu*, *sdy* &c., quo-

rum unumquodque nihilo aequatum aequationes §. 2. expositas praebebit, nimirum $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ &c. Eodem modo ad secunda differentialia progredientes inveniemus seorsim quantitates Adt^2, Cdu^2, Fdx^2, Ldy^2 &c., ubi si A, C, F, L &c. sint vel omnes affirmativae, vel omnes negativae facile inde quispiam colligeret valores ipsarum t, u, x &c. ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$, &c. elicitos necessario inducere functioni propositae Z valorem *Maximum Minimumve*. Et sane exploratum est quam quod maxime, functionem ipsam Z habita tantum ratione unius cuiuslibet ex praedictis variabilibus *Maximam* vel *Minimam* esse oportere: at quis tuto pronunciabit, id, quod pro variabili qualibet seorsim spectata obtinet, pro omnibus simul sumtis obtinere? Rem penitius perscrutemur.

9. Sit itaque Z functio duarum variabilium t & u, exhibeatque ordinatam superficiei, cuius t & u sunt ordinatae reliquae; ita ut superficiei ipsius coordinatae sint variabiles tres Z, t, & u. Iam quaestio eo redibit, ut inveniatur ordinata *Maxima* superficiei, cuius datur aequatio, nimirum $dZ = pdt + qdu$. Facta u constanti aequatio abit in $dZ = pdt$, tuncque exprimit sectiones omnes eiusdem superficiei parallelas axi quantitatum t, prouti quantitas u varios subinde recipit valores. Ponatur itaque $p = 0$; & ex hac aequatione is colligetur quantitatis t valor, qui in qualibet parallelarum sectionum ordinatam Z *Maximam* reddet aut *Minimam*. Et quoniam u constans assumitur, fiet differentiale secundum $d^2Z = Adt^2$, & consequenter ex solo ipsius A valore licebit, de *Maximi* aut *Minimi* existentia pronunciare, dummodo valor t ex aequatione $p = 0$ petitus substituatur. Nimirum si pro quolibet ipsius u valore quantitas A negativa inveniatur vel positiva, sectiones praedictae omnes *Maximum* habebunt aut *Minimum*; & si pro vario ipsius u valore quantitas A signis diversis afficiatur, sectiones eaedem intra certos statosque limites *Maximo* donabuntur, intra alios *Minimo*. Si fuerit $A = 0$, quicunque

sit

sit constantis u valor, tunc sectionum illarum nulla *Maximum* habebit aut *Minimum*. At si A tunc solum fiat $= 0$, cum u certos definitosque valores habet, in hac hypothesi eae tantum sectiones, quae praedictis ipsius u valoribus respondent, *Maximo Minimove* destituentur. Omnium harum ordinatarum locus geometricus continetur in aequatione $p = 0$, sola variabilitate ipsius u spectata, ideoque ordinatae ipsae in eadem superficie sectionem constituent, quae simplicis erit, vel duplicis curvaturae, quaeque determinabitur per aequationes binas coniunctas $dZ = pdt + qdu$, & $p = 0$, seu $dZ = qdu$, & $p = 0$. Ex quo perspicuum sit ad invenienda totius superficiei *Maxima* vel *Minima*, quaeri oportere ordinatam *Maximam* vel *Minimam* huic ipsi sectioni convenientem; unde iterum habebitur $q = 0$, quae porro aequatio valorem alterius variabilis u quaesito satisfacientem statim exhibebit.

10. Transeamus nunc ad differentiale ipsius q, nimirum ad aequationem prius inventam $dq = Bdt + Cdu$. Quum itaque ex aequatione $p = 0$ determinetur t per u, sive in illius aequationis differentiali $Adt + Bdu = 0$ sit $dt = -\frac{Bdu}{A}$, hoc subrogato valore nanciscimur $dq = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right) du$: ex quo consequitur, ordinatam *Minimam* fore, si quantitas $-\frac{B^2}{A} + C$ positiva fuerit, idest $C > \frac{B^2}{A}$; *Maximam* vero si $C < \frac{B^2}{A}$; nec *Maximam* denique nec *Minimam* si $C = \frac{B^2}{A}$, dummodo reliqua altiora differentialia conditionibus supra indicatis teneantur. Iam vero *Maxima* huiusmodi vel *Minima* serio perpendentes facili negotio comperimus, ordinatam Z ceterarum omnium *Maximam* esse non posse, nisi simul sit illarum omnium *Maxima*, quae in sectione per aequationem $dZ = qdu$ determinata continentur, & nisi praeterea ordinatae omnes

hanc

hanc sectionem componentes sint totidem *Maxima* in sectionibus parallelis homologis. Pari ratiocinatione quantitas Z nequit esse *Minima*, quin sit itidem *Minima* in sectione, quae *Minima* omnia complectitur. Ex hoc porro licet colligere, valores ipsarum t & u ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$ deductos, & in quantitatibus A, & $C - \frac{B^2}{A}$ substitutos, ordinatae Z valorem *Maximum* inducere, ubi A fuerit negativa, & $C < \frac{B^2}{A}$, hoc est $CA > B^2$; & contra ordinatae Z per illam substitutionem valorem *Minimum* induci, ubi fuerit A affirmativa, & $C > \frac{B^2}{A}$, vel $CA > B^2$; quae omnia cum generali theoria superius explicata usquequaque consentiunt.

11. Conditiones praedictae locum habent quando u spectatur primo constans, & t tanquam variabilis: at si contra variabilis accipiatur u & constans t, ad sequentes conditiones pervenietur: $C < 0$, & $AC > B^2$ pro *Maximo*: $C > 0$, & $AC > B^2$ pro *Minimo*; quod sane eodem redit. Ceterum methodus haec altera inveniendi *Maximorum Minimorumque* conditiones in functionibus duarum tantum variabilium, aeque accommodatur functionibus aliis magis complexis, estque praeterea magis analytica & directa quam methodus prior. Quamobrem non inutile erit eam hic generaliter evolvere.

12. Sint variabiles in functione Z contentae quot libuerit: ceteris habitis ut constantibus earum unam tantum ut variabilem reputo, & ex differentiatione aequationem pro *Maximo* aut *Minimo* deduco; tum sumto in hac ipsa hypothesi secundo differentiali, conditiones determino, quae functioni Z valorem *Maximum* vel *Minimum*, vel neutrum inducunt. Hac prima operatione absoluta substituo in functione Z vel in eius differentialibus valorem primae variabilis inventum, eodemque modo in variabili altera calculum instituo, & va-

& valorem huius secundae variabilis ex differentiatione prosectum in functione Z substituo: deinde ad examen tertiae variabilis progredior, sicque porro eodem semper tenore. Sit t prima variabilis, quae spectari potest in Z, eritque $dZ = pdt$, $d^2Z = Adt^2$; ex quo $p = 0$, & $A > 0$ pro *Minimo*; $A < 0$ pro *Maximo*. Sint modo t & u ambae variabiles, orieturque $dZ = pdt + qdu$, quae aequatio ob $p = 0$ abit in $dZ = qdu$, unde profluit $d^2Z = (Bdt + Cdu)\,du$, sed ob $p = 0$ est etiam $dp = 0$, & consequenter $Adt + Bdu = 0$, seu $dt = -\frac{B\,du}{A}$, atque hic valor in aequatione praecedenti subrogatus eandem reddit $d^2Z\left(-\frac{B^2}{A} + C\right)du^2$. Erit igitur $q = 0$; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pro *Minimo*; $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pro *Maximo*; cumque alias sit A positiva pro *Minimo*, negativa pro *Maximo*, eadem semper pro utroque exurget conditio $AC > B^2$.

Si praeter duas praecedentes tertia quoque variabilis x consideranda veniat, tunc quaeritur ipsius dZ valor habita trium variabilium t, u, x ratione, oriturque $dZ = pdt + qdu + rdx$, quae aequatio ob $p = 0$, $q = 0$ transit in $dZ = rdx$. Quocirca habebitur secundum differentiale $d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)\,dx$; iam vero ex aequationibus $p = 0$, $q = 0$, vel $dp = 0$, $dq = 0$, hoc est $Adt + Bdu + Ddx = 0$, & $Bdt + Cdu + Edx = 0$ quaero valores ipsorum dt & du per dx expressos & invenio

$$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\,dx\,;\quad du = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,dx\,;$$

Hisque subrogatis in expressione d^2Z pervenio ad aequationem $d^2Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F\right)dx^2$. Hinc igitur consequitur pro *Maximo* vel *Minimo* haberi primo $r = 0$; deinde $\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F > 0$ pro *Minimo*,

& < 0

& < 0 pro *Maximo*: quocirca sublato denominatore $AC - B^2$, qui semper positivus est, orietur
$2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF > 0$ pro *Minimo*, & < 0 pro *Maximo*. Ducatur haec expressio in A, qui positivus est in primo casu, negativus in altero, & prodibit
$$2ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0$$
tam pro *Maximo* quam pro *Minimo*, idest
$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (AE - BD)^2.$$
Quantumvis magnus fuerit variabilium numerus, eadem semper methodo res conficietur.

Novam hanc theoriam Clarissimus De la Grange, a quo illam derivavimus, sequentibus illustrat exemplis.

EXEMPLUM I.

Sint globi perfecte elastici quotcunque in recta linea dispositi & a se mutuo seiuncti; incurrat primus velocitate data c in secundum quiescentem, secundus acquisita velocitate incurrat in tertium, hic in quartum, atque ita deinceps ad postremum usque; datis iam primi & ultimi massis quaeruntur massae omnium intermediorum ad hoc, ut postremus velocitatem omnium maximam *ex impactu acquirat.*

Sit primi massa a, & postremi b, sintque t, u, x, y &c. massae intermediae incognitae, ex notis impactus legibus velocitas, quam primus globus a alteri t communicat, invenitur $= \frac{2ac}{a+t}$; velocitas, quam hic secundus imprimit tertio u, detegitur $= \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$; velocitas quarti x ex impactu tertii prodit $= \frac{2actu}{(a+t)(t+u)(u+x)}$; sicque porro de ceteris. Quamobrem velocitas ultimi b exprimetur per
$$\frac{2catuxy \ldots .b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y) \ldots .},$$
quae quantitas *Maxima* sit oportet. Eam pono $= Z$, & sumtis

tis utrinque logarithmis reperio $l\,2ca + lt + lu + lx + ly +$ &c. $- l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) -$ &c. $= lZ$, unde oritur per differentiationem

$$\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \text{\&c.}$$
$$- \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} - \text{\&c.} = \frac{dZ}{Z},$$

collectisque terminis eodem differentiali affectis, iisque ad eundem denominatorem redactis invenitur

$$dZ = \frac{Z(au - t^2)\,dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx - u^2)\,du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy - x^2)\,dx}{x(u+x)(x+y)} + \text{\&c.}$$

Hisce peractis habemus pro *Maximo Minimove* aequationes sequentes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$; &c. quae praebent analogias $a : t :: t : u :: u : x :: x : y$ &c., videlicet

$\therefore a : t : u : x : y : \ldots . b$, ex quo pronum est colligere, massas omnes globorum progressionem geometricam constituere binis extremis a & b circumscriptam. Ut nunc criterium supra expositum usurpantes *Maximum* a *Minimo* internoscamus, fiat compendii gratia

$$\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha; \quad \frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta; \quad \frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma, \text{ \&c.}$$

Igitur comparatione instituta cum aequatione §. 2. invenietur $p = \alpha(au - t^2)$; $q = \beta(tx - u^2)$; $r = \gamma(uy - x^2)$; &c. : ac propterea $dp = (au - t^2)\,d\alpha + \alpha(a\,du - 2t\,dt)$; $dq = (tx - u^2)\,d\beta + \beta(x\,dt + t\,dx - 2u\,du)$; $dr = (uy - x^2)\,d\gamma + \gamma(y\,du + u\,dy - 2x\,dx)$; &c. Cum autem termini a, t, u, x, y &c. sint continue proportionales vocata $1 : m$ ratione constanti antecedentis cuiuslibet ad consequentem suum, inveniemus $t = ma$, $u = m^2 a$, $x = m^3 a$, $y = m^4 a$ &c.; praeterea

$\beta = \frac{\alpha}{m^3}$, $\gamma = \frac{\alpha}{m^6}$ &c.; qui porro valores in praecedentibus expressionibus subrogati dant

$$dp = \alpha a (du - 2m\,dt)$$

$$dq = \alpha a \left(dt - \frac{2\,du}{m} + \frac{dx}{m^2} \right)$$

$$dr = \alpha a \left(\frac{du}{m^2} - \frac{2\,dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4} \right);$$

atque ita deinceps. Erit igitur per supra demonstrata

$$A = -2m\alpha a;\ B = \alpha a;\ C = -\frac{2\alpha a}{m};\ D = 0;\ E = \frac{\alpha a}{m^2};$$

$$F = -\frac{2\alpha a}{m^3};\ G = 0;\ H = 0;\ I = \frac{\alpha a}{m^4};\ \&c.$$

Hinc autem statim apparet A negativam esse, & consequenter si ceterae conditiones impleantur quantitatem $\frac{2cat\alpha xy \ldots . b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots}$, seu celeritatem globo ultimo impressam *Maximam* esse. Iam vero $AC = 4\alpha^2 a^2$, & $B^2 = \alpha^2 a^2$ quocirca invenitur I. $AC > B^2$.

Tum $AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2$; $FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}$;

$(AC - B^2)(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}$; & $(EA - BD)^2 = \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}$;

atque inde oritur II. $(AC - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. Si bini tantum sint interpositi globi, primam duntaxat harum conditionum attendere sufficiet; si tres fuerint interiecti globi, altera quoque conditio erit attendenda; sicque pro variabilium numero conditionum pariter augebitur multitudo. Ceterum si labore improbo calculus longius protrahatur invenientur in hoc problemate conditiones omnes adamussim impletae, ita ut tuto liceat pronunciare, in globorum continuo proportionalium serie quacunque, velocitatem ultimo impressam per interpositorum actionem esse omnium possibilium *Maximam*.

Problema hoc ab Ugenio primum, postea a Geometris aliis tractatum nullis certis determinationibus regebatur, quas tan-

men

men hic necessarias invenimus ad *Maximi* aut *Minimi* existentiam, & distinctionem evincendam.

EXEMPLUM II.

Sit generalis aequatio superficierum secundi ordinis

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

& inveniendum proponatur superficiei punctum, in quo ordinata z evadit omnium Maxima, *aut* Minima.

Sumto aequationis differentiali detegitur

$$2z\,dz = (2ax + 2by - e)\,dx + (2bx + 2cy - f)\,dy;$$

indeque habentur aequationes binae sequentes:

$$2ax + 2by - e = 0;\quad 2cy + 2bx - f = 0,$$

quae praebent $x = \frac{ec - bf}{2(ac - b^2)}$; $y = \frac{af - eb}{2(ac - b^2)}$. Sumo differentiale secundum, & ob $dz = 0$, invenio

$$2zd^2z = 2a\,dx^2 + 4b\,dx\,dy + 2c\,dy^2.$$

Iam vero ut ordinata z omnium *Maxima* sit, quantitates a & c ambae negativae sint oportet; & contra affirmativae ut sit *Minima*. At si existente licet hac conditione deesset conditio altera nimirum $ca > bb$, valores inventi x & y in aequatione superficiei substituti ordinatam z haudquaquam *Maximam* vel *Minimam* redderent: Et sane Auctor noster in *Appendice Introductionis ad Analysim Infinitorum Tom.* 2. ex aliis principiis dilucide ostendit, ubi ca non est $> b^2$, superficiem propositam in infinitum extendi, & asymptoto conica donari. Id quod omnem respuit *Maximorum Minimorumve* conceptum.

13. Hinc luculenter apparet, vulgarem *Maximorum*, ac *Minimorum* methodum, per quam in quaestione plures variabiles involvente singulae seorsim spectantur, & indivisa omnium consideratio negligitur, pluribus saepe incommodis erroribusque laborare. Et re quidem vera in Exemplo praecedenti si respicimus solam x tanquam variabilem, invenimus differentiale primum $2\left(ax + by - \frac{e}{2}\right)dx$, & secundum

$2adx^2$; pariter sola y variante habetur differentiale primum $2\left(cy+bx-\frac{f}{2}\right)dy$, & secundum $2cdy^2$. Bina haec prima differentialia nihilo aequata eaſdem praebent aequationes, quas praec. §. invenimus; & bina differentialia ſecunda indicant ordinatae z valorem *Maximum* aut *Minimum*, quotieſcunque ambae a & c negativae, vel affirmativae fuerint; quod ſane criterium deficiente conditione altera $ca > bb$ mancum ac mendoſum eſſe iam demonſtravimus.

ADNOT. ad CAP. XV. PART. II.

IN hoc Capite, quod Bernoullianam regulam de inveniendo fractionis indeterminatae $\frac{0}{0}$ valore complectitur, nulla fit ab Auctore mentio caſus cuiuſdam memorabilis, in quo regula ipſa deficere videtur, quando ſcilicet repetitis in infinitum differentiationibus, in eandem ſemper expreſſionem $\frac{0}{0}$ indeterminatam incurritur. Exemplum habemus in formula $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$, quae ubi $x=-1$ abit in $0.l0$, ſeu $l0=-\infty=-\frac{1}{0}$, tranſit in $-\frac{0}{0}$, vel $\frac{0}{0}$. Captis enim differentialibus numeratoris ac denominatoris praedictae formulae $\frac{1+x}{1:l(1+x)}$ prodit $\frac{d(1+x)}{d[1:l(1+x)]}=-(1+x)[l(1+x)]^2=-0.\infty^2$, rurſuſque $-(1+x)[l(1+x)]^2$ converſo in $\frac{-(1+x)}{1:[l(1+x)]^2}$ habebitur

$d[-$

$\frac{d[-(1+x)]}{d[1:(l(1+x))^2]} = \frac{(1+x)[l(1+x)]^3}{2} = -\frac{0.\infty^3}{2}$; & sic deinceps in infinitum, prodeunte nimirum semper valore indeterminato.

Hunc itaque scopulum declinabimus, expressionem $0\,l\,0$ specie tenus indeterminatam, re tamen ipsa determinatam, hoc est nihilo aequalem esse ostendendo; quod ita perficimus: pono $0\,l\,0 = x = x\,l\,e = l\,e^x$ (sumto nimirum e pro logarithmorum hyperbolicorum basi) . Igitur $l\,0^0 = l\,e^x$; factoque regressu a logarithmis ad numeros erit $0^0 = e^x$. Est autem ut constat $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4}$ + &c. Ergo $0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4}$ + &c. Iam vero $0^0 = 1$; nam $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$.

Itaque $1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4}$ + &c., cui aequationi satisfieri nullo modo potest, nisi fuerit $x = 0$. Ex quo consequitur, quantitatem $0\,l\,0$ nihilo aequalem esse. Sicque pariter licebit ostendere productum ex infinitesima qualibet quantitate ducta in logarithmum alterius cuiuslibet infinitesimae non aliud esse nisi infinitesimum (*a*).

Si cui haec demonstratio de quantitate $0^0 = 1$ non arridet hic sequentem subrogare poterit ratiocinationem: Sit ω magnitudo infinitesima, pariterque λ infinitesima; aio fore $\omega^\lambda = 1 + z$, existente z quantitate infinite parva ordinis cuiusdam indeterminabilis. Nam nequit esse $\omega^\lambda = 1$, secus foret $\omega = 1$ quod est absurdum: rursus nequit esse $\omega^\lambda = 1 + a$ (sumta a pro quantitate finita affirmativa); secus esset $\omega = (1+a)^{\frac{1}{\lambda}} =$ infinito altissimi ordinis, quod pariter absurdum

(*a*) *De mirifica indole quantitatum* $1.0, 1.\infty$, *&c. V. Cl.* G. FONTANAE Disquisitiones Phisico-Mathematicas, *Disq. XIII.* de infinito logarithmico.

dum immane est: demum nequit esse $\omega^{\lambda} = 1 - \alpha$ (existente $\alpha < 1$); secus esset $\omega = (1-\alpha)^{\lambda}$, nimirum aequalis legitimae fractioni, puta $\frac{f}{f+g}$ ad infinitam potestatem evectae, hoc est

$$\omega = \left(\frac{f}{f+g}\right)^{n} = \frac{f^{n}}{f^{n} + \frac{nf^{n}g}{f} + \frac{n^{2}f^{n}g^{2}}{2f^{2}} + \frac{n^{3}f^{n}g^{3}}{2\cdot 3f^{3}} + \text{ &c.}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{ng}{f} + \frac{n^{2}g^{2}}{2f^{2}} + \frac{n^{3}g^{3}}{2\cdot 3f^{3}} + \frac{n^{4}g^{4}}{2\cdot 3\cdot 4f^{4}} + \text{ &c.}}$$

quae evidenter quantitas est infinite parva ordinis altissimi; & dividendo per ω haberetur unitas aequalis magnitudini infinite parvae altissimi ordinis per infinitesimam primi ordinis divisae, hoc est aequalis quotienti semper infinitesimo, quod hypothesi repugnat. Igitur est $\omega^{\lambda} = 1 + z$, & z nihil aliud esse potest quam infinite parva magnitudo. Quocirca ω^{λ}, & consequenter 0° non differt ab unitate nisi magnitudine infinite parva, seu evanescente, quae proinde tuto negligitur

Si ex aequationibus $0^{\circ} = 1^{\circ} = \alpha^{\circ}$ quispiam colligeret facto regressu a numeris ad logarithmos fore $0l0 = 0l1 = 0l\alpha$, & divisione per 0 facta esse etiam $l0 = l1 = l\alpha$, nimirum infinitum negativum aequari finito, atque adeo nihilo, is semetipsum captiosa subtilitate illaquearet.

At quis concederet quantitatem quamlibet datam dividi posse per absolutum nihilum, tuncque praesertim, cum dividendum ipsum nihilum est absolutum, praebetque quantitatem $\frac{0}{0}$, magnitudinem scilicet ita indeterminatam & vagam, ut nullum non referat valorem? Figmenta haec sunt intellectus nostri, quae nisi circumspecto maturoque iudicio usurpentur, atque intra legitimos veri rectique cancellos coerceantur, inextricabiles hallucinationes progignunt.

IN-

INDEX
ABSOLUTISSIMUS
Omnium EULERI *Lucubrationum*
tum editarum, tum ineditarum

OPERA SEORSIM EDITA

Dissertatio physica de Sono. Basil. 1727. 4.
Mechanica, sive Motus Scientia analytice exposita. Petrop. 1736. 2 Tom. 4.
Anleitung zur Arithmetik. 2 Th. Petersburg. 1738. 8.
Tentamen novae Theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. Petrop. 1739. 4.
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio Problematis Isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae 1744. 4.
Theoria motuum Planetarum & Cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum Planetarum tum Cometarum determinandi. Berol. 1744. 4.
Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würkung der Cometen. Berl. 1744. 8.
Fortsetzung dieser Beantwortung. Berl. 1744. 8.
Neue Grundsätze der artillerie, aus dem Englischen des Hrn B. Robins übersetzt, und mit Anmerkungen begleitet. Berl. 1745. 8.
Opuscula varii argumenti. 3 Tom. Berol. 1746, 50, 51. 4.
Novae & correctae tabulae ad loca lunae computanda Berol. 1746. 4.
Tabulae astronomicae Solis & Lunae. Berol. 1746. 4.
Gedanken von den Elementen der Körper. Berl. 1746. 4.
Rettung der offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister. Berl. 1747. 8.
Introductio in Analysin Infinitorum. 2 Tom. Lausan. 1748. 4.
Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petrop. 1749. 2 Vol. 4.
Theoria motuum Lunae, exhibens omnes corporum inaequalitates, cum additamento. Berol. 1753. 4.
Dissertatio de principio minimae actionis, una cum examine obiectionum Cl. Prof. Koenigii contra hoc principium factarum. Berol. 1753. 8.
Institutiones Calculi differentialis, cum eius usu in Analysi Finitorum, ac doctrina serierum. Berol. 1755. 4.
Constructio lentium obiectivarum ex duplici vitro. Petrop. 1762. 4.
Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostoch. 1765. 4.
Institutiones Calculi integralis. 3 Tom. Petrop. 1768-70. 4.
Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique & de

Philosophie. 3 Tom. Petersb. 1768-1772. 8.
Anleitung zur Algebra. 2 Th. Petersb. 1770. 8.
Dioptrica. Petrop. 1769, 1770, 1771. 3 Tom. 4.
Recherches & calculs sur l'orbite de la Comète de 1769., exécutés sous la direction de M. L. Euler par M. Lexell. St. Petersb. 1770. 4.
Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata, una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca Lunae expedite computare licet. Petrop. 1772. 4.
Novae tabulae lunares singulari methodo constructae, quarum ope loca lunae ad quodvis tempus expedite computare licet. Petrop. 1772. 8.
Théorie complette de la construction & de la manoeuvre des vaisseaux. St. Petersb. 1773. 8.
Instruction détaillée pour porter les lunettes au plus haut degré de leur perfection, calculée sous la direction de M. Euler, par M. N. Fuss. St. Petersb. 1774. 4.
Eclaircissemens sur les caisses mortuaires, calculés sous la direction de M. Euler, par M. N. Fuss. &c. St. Petersb. 1776. 4.
Opuscula Analytica 2 Tom. Petrop. 1783-85. 4.

DISSERTATIONES IN ACTIS ACADEMICIS.

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARUM IMP. PETROPOLITANAE.

Tom. II. 1729.

Solutio problematis traiectoriarum reciprocarum.
De novo quodam curvarum tautochronarum genere.
Tentamen explicationis phaenomenorum aeris.

Tom. III. 1732.

Solutio de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica & gravis.
De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente.
Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad primum gradum.

Tom. IV. 1735.

De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo.
Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum.
Solutio problematis astronomici. Ex datis tribus stellae fixae altitudinibus & temporum differentiis invenire elevationem poli & declinationem stellae.

Tom.

Tom. V. 1738.

De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.
De summatione innumerabilium progressionum.
Quomodo, data quacunque curva, invenire oporteat aliam, quae cum data quodammodo iuncta ad tautochronismum producendum sit idonea.
De communicatione motus in collisione corporum.
De curvis rectificabilibus algebraicis, atque traiectoriis reciprocis algebraicis.

Tom. VI. 1739.

Solutio singularis casus circa tautochronismum.
Methodus generalis summandi progressiones.
Observationes de theoremate quodam Fermatiano, aliisque ad numeros primos spectantibus.
Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis.
Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione.
De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros.
De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio.
Constructio aequationis differentialis $ax^n dx = dy + y^2 dx$.

Tom. VII. 1740.

Solutio problematis arithmetici, de inveniendo numero, qui per datos numeros divisus relinquat data residua.
De motu planetarum & orbitarum determinatione.
Determinatio orbitae solaris.
Solutio problematum quorundam astronomicorum.
De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium, methodus nova ac facilis.
De summis serierum reciprocarum.
De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente.
De progressionibus harmonicis observationes.
De infinitis curvis eiusdem generis: seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis, cum additamento.

Tom. VIII. 1741.

Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi.
Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali.
Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituunt.
De oscillationibus fili flexilis quotcunque ponduscula onusti.
Methodus computandi aequationem meridiei.

De constructione aequationum ope motus trajectorii, aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus.
Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium.
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.
Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio.
Methodus universalis serierum summandi ulterius promota.
Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova ac facilis.

Tom. IX. 1744.

De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium.
De constructione aequationum.
De fractionibus continuis.
Variae observationes circa series infinitas.
Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas.
De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi.

Tom. X. 1747.

Disquisitio de bilancibus.
De motu cymbarum remis propulsarum in fluviis.
De aequationibus differentialibus, quae certis tantum casibus integrationem admittunt.
De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso.
De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum.
Demonstrationes theorematum quorundam arithmeticorum.
Solutio problematis cuiusdam a Cel. Dan. Bernoulli propositi.

Tom. XI. 1750.

De productis ex infinitis factoribus ortis.
De fractionibus continuis observationes.
Determinatio caloris & frigoris graduum pro singulis terrae locis ac temporibus.
Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae.
De novo genere oscillationum.
Explicatio phaenomenorum, quae a motu lucis successivo oriuntur.
Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales.

Tom. XII. 1750.

Investigatio curvarum, quae evolutae sui similes producunt.
De seriebus quibusdam considerationes.
Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica.

Tom. XIII. 1751.

De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus.

Observationes analyticae variae de combinationibus.
De motu oscillatorio corporum flexibilium.
De descensu corporum super plano inclinato.
De motu corporum super plano horizontali aspero.

Tom. XIV. 1751.

Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes.
Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales.
Theoremata circa divisores numerorum in hac forma $paa \pm qbb$ contentorum.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARUM IMP. PETROPOLITANAE.

Tom. I. 1750.

De superficie conorum scalenorum, aliorumque corporum conicorum.
Theoremata circa divisores numerorum.
Variae demonstrationes geometricae.
De propagatione pulsuum per medium elasticum.
Examen artificii, naves a principio motus interno propellendi, quod quondam ab acut. Iac Bernoulli est propositum.
De motu nodorum lunae, eiusque inclinationis ad ecliptican variatione.
Quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquiritur.

Tom. II. 1751.

De reductione linearum curvarum ad arcus circulares.
Solutio problematis difficillimi a Fermatio propositi.

Tom. III. 1753.

Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota.
De serierum determinatione, seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum.
Consideratio quarundam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae.
De partitione numerorum.
Solutio problematis geometrici.
De perturbatione motus planetarum a figura eorum non sphaerica oriunda.
De machinis in genere.
De motu tautochrono pendulorum compositorum.

Emendatio laternae magicae ac microscopii solaris.

Tom. IV. 1758.

De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum.
De constructione molarum alatarum.
Elementa doctrinae solidorum.
Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita.
De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato.

Tom. V. 1760.

Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum.
Observatio de summis divisorum.
Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.
De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum.
Subsidium calculi sinuum.
De seriebus divergentibus.
De cochlea Archimedis.
De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda.

Tom. VI. 1761.

Methodus inveniendi infinitas curvas isoperimetricas communi proprietate praeditas.
De integratione aequationis differentialis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$.
Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.
De problematibus indeterminatis, quae videntur plus quam determinata.
De expressione integralium per factores.
Solutio generalis problematum quorundam Diophantaeorum, quae vulgo non nisi solutiones speciales admittere videntur.
Specimen de usu observationum in matheſi pura.
De frictione corporum rotantium.
Principia motus fluidorum.
De motu & rectione aquae per tubos mobiles transfluentis.
Tentamen theoriae de frictione fluidorum.

Tom. VII. 1761.

Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi. De comparatione arcuum ellipsis.
Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta.
Specimen novae methodi curvarum quadraturas & rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi.

Demonstratio theorematis & solutio problematis in Actis Erud. Lips. propositorum.
De aequationibus differentialibus secundi gradus.

Tom. VIII. 1763.

De integratione aequationum differentialium.
Solutio problematis de investigatione trium numerorum, quorum tam summa quam productum, nec non summa productorum ex binis, sint numeri quadrati.
Theoremata arithmetica, nova methodo demonstrata.
Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur.
Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest.
Constructio aequationis differentio-differentialis.
Annotationes in locum quendam Cartesii, ad circuli quadraturam spectantem.
Dilucidationes de resistentia fluidorum.
Principia theoriae machinarum.
De motu & attritu lentium, dum super catinis poliuntur.

Tom. IX. 1764.

De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros.
De progressionibus arcuum circularium quorum tangentes secundum certam legem procedunt.
Specimen algorithmi singularis.
De resolutione aequationum cuiusvis gradus.
De numeris primis valde magnis.
De resolutione aequationis $dy + cyy\,dx = bx^n\,dx$.
Investigatio functionum ex data differentialium conditione.
De motu vibratorio fili flexilis corpusculis quotcunque onusti.
De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum.
Cogitationes de aggeribus construendis

Tom. X. 1766.

De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae.
Elementa calculi variationum.
Analytica explicatio methodi maximorum & minimorum.
De insigni promotione methodi tangentium inversae.
Dilucidationes de tautochronis in medio resistente.
Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione curvae cuiuscunque rectangulae in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur.
De motu corporis ad duo virium centra attracti
De motu vibratorio tympanorum.
Tentamen de sono campanarum.

Tom. XI. 1767.

De usu functionum discontinuarum in analysi.
De usu novi algorithmi in solvendo problemate Pelliano.
Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se rationem tenent.
Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum.
Observationes analyticae.
De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium.
De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.
De phaenomenis coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati.
Supplementum de figura dentium rotarum.
De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriundo.

Tom. XII. 1768.

Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}.$$

De arcubus curvarum aeque amplis eorumque comparatione.
Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inservientium.
Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi.
Disquisitio de vera lege refractionis radiorum diversicolorum.
De novo microscopiorum genere ex sex lentibus composito.
De telescopiis quatuor pluribusve lentibus instructis eorumque perfectione.

Tom. XIII. 1769.

De curva hypergeometrica hac aequatione expressa: $y = 1.2.3.4.\ldots.x$.
Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi, nec ne?
Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi.
Considerationes de theoria motus lunae perficienda & imprimis de eius variatione.
Annotatio quarundam cautelarum in investigatione inaequalitatum, quibus corpora coelestia in motu perturbantur, observandarum.
Investigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu terrae diurno a viribus coelestibus produci possunt.
De aequilibrio & motu corporum flexuris elasticis iunctorum.
Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum.

Tom. XIV. P. I. 1770.

Considerationes de trajectoriis orthogonalibus.
De formulis integralibus duplicatis.

Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum.
De summis serierum numeros Bernoullianos involventium.
De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas.
De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem.
Sectio secunda de principiis motus fluidorum.

Tom. XIV. P. II. 1770.

Methodus ex observato transitu Veneris per Solem inveniendi parallaxin Solis, sive:
Expositio methodorum, cum pro determinanda parallaxi Solis ex observato transitu Veneris per Solem, tum pro inveniendis longitudinibus locorum super terra ex observationibus eclipsium Solis, una cum calculis & conclusionibus inde deductis.

Tom. XV. 1771.

Solutio problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum tam summa, quam differentia eorum, sive auctum sive minutum fiat quadratum.
Observationes circa radices aequationum.
Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile.
De curva rectificabili in superficie sphaerica.
Sectio tertia de motu fluidorum, lineari potissimum aquae.
Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii & motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum.
De ictu glandium contra tabulam explosarum.

Tom. XVI. 1772.

De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet.
Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi.
Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{n}{m}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa.
Problematis cuiusdam geometrici prorsus singularis evolutio.
Considerationes cyclometricae.
Sectio quarta de motu aeris in tubis.
De perturbatione motus terrae ab actione Veneris orunda.

Tom. XVII. 1773.

Problematis cuiusdam Diophantaei evolutio.
Observationes circa bina biquadrata, quorum summam in duo alia biquadrata resolvere liceat.
De variis integrabilitatis generibus.
Observationes circa aequationem differentialem: $y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0$.

Consideratio aequationis differentio-differentialis

$$(a+bx)\,dax+(\alpha+\varepsilon x)\frac{x}{dx\cdot dz}+(f+gx)\frac{z\,dx^2}{x^2}=0.$$

Exercitationes analyticae.

Digressio de traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis.

De collisione corporum gyrantium.

De collisione corporum pendulorum, tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata.

De vera tautochrona in fluido.

De tautochrona in medio rarissimo, quod resistit in ratione multiplicata quacunque celeritatis.

Dilucidationes de tautochronismo.

De chordis vibrantibus disquisitio ulterior.

Animadversiones in solutionem Bernoullianam de motu cordarum ex duabus partibus diversae crassitiei compositarum. Tom. XVI. Nov. Com. p. 410.

De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum.

De motu vibratorio chordarum crassitie utcunque variabili praeditarum.

De motu vibratorio laminarum elasticarum, ubi plures novae vibrationum species hactenus non pertractatae evolvuntur.

De motu gravium citissimo super curvis specie datis.

Tom. XVIII. 1774.

Summatio progressionum.

$$\sin\varphi^\lambda+\sin 2\varphi^\lambda+\sin 3\varphi^\lambda\ldots.+\sin.n\varphi^\lambda,$$
$$\cos.\varphi^\lambda+\cos.2\varphi^\lambda+\cos.3\varphi^\lambda\ldots.+\cos.n\varphi^\lambda.$$

Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exhibens.

Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia.

Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi.

Solutio problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales.

Resolutio aequationis: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ per numeros tam rationales quam integros.

Insignes proprietates serierum sub hoc termino generali contentarum:

$$x=\tfrac{1}{2}(a+\frac{b}{\sqrt{k}}(p+q\sqrt{k})^n+\tfrac{1}{2}(a-\frac{b}{\sqrt{k}}(p-q\sqrt{k})^n.$$

De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam singularis species minimi exponitur.

Determinatio motus oscillatorii in Dissertatione Cel. Dan. Bernoulli pertractati, ex primis Mechanicae principiis petita.

De pressione ponderis in planum cui incumbit.

De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis.

Nova

Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas aſtronomicas reducendi.

Diſquiſitio de lentibus obiectivis triplicatis, quae vel nullam confuſionem pariant, vel etiam datam confuſionem a reliquis lentibus ortam deſtruere valeant.

De applicatione lentium obiectivarum compoſitarum ad omnis generis teleſcopia; ubi agitur:

1. De perfectione teleſcopiorum primi generis, nullam imaginem realem continentium.
2. De perfectione teleſcopiorum ſecundi generis, ſeu aſtronomicorum, unicam imaginem realem continentium.
3. De perfectione teleſcopiorum tertii generis, duas imagines reales continentium.

Tom. XIX. 1775.

De valore formulae integralis: $\int\left(\frac{z^{m-1}\pm z^{n-m-1}}{1\pm z^{n}}\right)dz$ caſu quo poſt integrationem ponitur $z=1$.

De valore formulae integralis: $\int\left(\frac{z^{\lambda-\omega}\pm z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\right)\frac{x}{dz}(\log z)^{\mu}$ caſu quo poſt integrationem ponitur $z=1$.

Nova methodus quantitates integrales determinandi.

Demonſtratio theorematis Newtoniani, de evolutione poteſtatum binomii, pro caſibus quibus exponentes non ſunt numeri integri.

Problema Diophantaeum ſingulare.

De tabula numerorum primorum uſque ad millionem & ultra continuanda, in qua ſimul omnium numerorum non primorum minimi diviſores exprimantur.

De oſcillationibus minimis penduli quotcunque ponduſculis onusti.

De motu oſcillatorio binarum lancium ex libra ſuſpenſarum.

Explicatio motus oſcillatorii mirabilis in libra maiore obſervati.

De motu turbinatorio chordarum muſicarum, ubi ſimul univerſa theoria tam aequilibrii, quam motus corporum flexibilium ſimulque etiam elaſticorum breviter explicatur.

Commentatio hypothetica de periculo, a nimia cometae appropinquatione metuendo.

Tom. XX. 1776.

Solutio quorundam problematum Diophantaeorum.

Speculationes analyticae.

Obſervationes circa novum & ſingulare ſerierum genus.

Meditationes circa ſingulare ſerierum genus.

Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum.

Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.

Regula facilis pro diiudicanda firmitate pontis aliusve corporis similis, ex cognita firmitate moduli.

De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi, & utriusque egregio consensu.

De pressione funium tensorum in corpora subiecta eorumque motu a frictione impedito; ubi praesertim methodus traditur, motum corporum tam perfecte flexibilium quam utcunque elasticorum non in eodem plano sitorum determinandi.

De pressione funium tensorum in corpora subiecta eorumque motu a frictione impedito. Dissertatio altera.

De traiectu citissimo stellae per duos circulos almucantharat datos, pro qualibet elevatione poli.

De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum & cometarum referantur.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

Tom. I. 1777. P. I.

Réflexions sur quelques nouvelles expériences optiques, communiquées à l'Académie par M. Wilson.

Observationes in dissertationem Ill. Dan. Bernoulli.

De formulis exponentialibus replicatis.

De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.

De proiectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata.

De proiectione geographica superficiei sphaericae.

Vera theoria refractionis & dispersionis radiorum lucis, rationibus & experimentis confirmata.

De figura quam ventus fluido stagnanti inducere valet.

Considerationes super problemate astronomico in Comment. Vet. Tomo IV. pertractato.

De figura apparente annuli Saturni, pro eius loco quocunque respectu terrae.

De apparitione & disparitione annuli Saturni.

Tom. I. 1777. P. II.

De integratione formulae: $\int \frac{dx\, lx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ab $x=0$ ad $x=1$ extensa.

De valore formulae integralis: $\int \frac{x^{a-1}\, dx\,(1-x)^b\,(1-x)^c}{lx \qquad\qquad 1-x^n}$

a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensa.

Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata.

Considerationes circa Brachystochronas.

Sur l'effet de la réfraction dans les observations terrestres.
De motu oscillatorio penduli cuiuscunque, dum arcus datae amplitudinis absolvit.
De theoria lunae ad maiorem perfectionis gradum evehenda.

Tom. II. 1778. P. I.

De corporibus regularibus per doctrinam sphaericam determinatis; ubi simul nova methodus, globos sive coelestes sive terrestres charta obducendi traditur.
Dilucidationes super methodo elegantissima, qua Ill. de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$
De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum.
Determinatio onerum, quae columnae gestare valent.
Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis.
De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium.
Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la terre, causées par l'action de Venus; avec une table des corrections du lieu de la terre.
Investigatio perturbationum, quae in motu terrae ab actione Veneris producuntur, cum tabula perturbationum istarum.

Tom. II. 1778. P. II.

De curvis triangularibus.
De mensura angulorum solidorum.
De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata; ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantaea ostenditur.
De motu oscillatorio duorum corporum ex filo super trochleas traducto suspensorum.
De problemate quodam mechanico satis obvio, at solutu difficillimo.
Solutio gemina problematis, quo motus corporis, filo alicubi alligati, super plano horizontali quaeritur.
Nova methodus motum planetarum determinandi.

Tom. III. 1779. P. I.

De formatione fractionum continuarum.
De tribus numeris quadratis, quorum tam summa quam summa productorum ex binis sit quadratum.
Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter & dilucide derivata.
De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum.
Investigatio motuum, quibus laminae & virgae elasticae contremiscunt.
Coniectura circa naturam aeris, pro explicandis phaenomenis in atmosphaera observatis.
Annotatio in Dissertationem Cel. Kratzensteinii, de Tubi iconantidiptici sive

duplicantis emendatione.
Theoria parallaxeos ad figuram terrae sphaeroidicam accommodata.

Tom. III. 1779. P. II.

De serie Lambertina, plurimisque eius insignibus proprietatibus.
De motu oscillatorio pendulorum ex filo tenso dependentium.
Dilucidationes super aliquot casus aequilibrii difficiliores.
Determinatio omnium motuum, quos chorda tenia & uniformiter crassa recipere potest.
De proprietatibus triangulorum mechanicis.
De figura curvae elasticae, contra obiectiones quasdam Ill. d' Alembert.
Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observanda.

Tom. IV. 1780. P. I.

Supplementum calculi integralis. De integratione formularum irrationalium.
Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi.
Evolutio producti infiniti:
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$
in seriem simplicem.
De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium.
Problematis cuiusdam Pappi Alexandrini constructio.
De motu libero plurium corporum filis colligatorum super plano horizontali.
De vi fluminis ad naves sursum trahendas applicanda.
De statu aequilibrii maris a viribus solis & lunae sollicitati.
Determinatio facilis orbitae cometae, cuius transitum per eclipticam bis observare licuit.
De variis motuum generibus, qui in setellitibus planetarum locum habere possunt.
De motibus maxime irregularibus, qui in systemate mundano locum habere possunt, una cum methodo huiusmodi motus per temporis spatium quantumvis magnum prosequendi.

Tom. IV. 1780. P. II.

De ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda.
Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum.
De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet.
De inductione ad plenam certitudinem evehenda.
Dilucidationes de motu chordarum inaequaliter crassarum.
De motu penduli circa axem cylindricum fulcro datae figurae incumbentem mobilis, remota frictione. Dissertatio prior.
De motu penduli circa axem cylindricum fulcro datae figurae incumbentem mobilis, habita frictionis ratione. Dissertatio altera.

Tom. V. 1781. P. I.

Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales, sine subsidio quantitatum imaginariarum.
De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum.
De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis.
De mirabilibus proprietatibus unciarum quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt.
De oscillationibus minimis funis libere suspensi.
De perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda.
De perturbatione motus planetarum & cometarum.

Tom. V. 1781. P. II.

Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int \frac{Zdz}{\sqrt{(1+mz^2+nz^4)}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius z.
Uberior evolutio comparationis, quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet.
De numero memorabili in summatione progress. harmonice naturalis occurrente.
De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis.
De effectu frictionis in motu volutorio.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS.

Année 1765.

Précis d'une Théorie générale de Dioptrique.

Année 1778.

Essai d'une Théorie de la résistance qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement.

RECUEIL DES PIECES QUI ONT REMPORTE LES PRIX DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS.

Tome II.

Meditationes super Problemate nautico de implantatione malorum. 1727.

Tome IV.

Dissertatio de igne, in qua eius natura & proprietates explicantur. 1738.

Inquisitio physica in causam fluxus & refluxus maris. 1740.

Tome V.

De observatione inclinationis magneticae dissertatio. 1743.
Dissertatio de magnete. 1744.

Tome VII.

Recherches sur la question des inégalités du mouvement de saturne & de Jupiter. 1748.
Recherches sur les irrégularités de Jupiter. 1752.

Tome VIII.

De promotione navium sine vi venti. 1753.
Investigatio perturbationum, quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur 1756.
Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis & dans le tangage. 1759.

Tome IX.

Théorie de la Lune & spéciellement sur l'équation séculaire. 1770.
Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune. 1772.

MISCELLANEA BEROLINENSIA.

Tom. VII. 1743.

Determinatio orbitae cometae Anno 1742. observati.
Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam.
De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.
Dissertatio altera de summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum.
De integratione aequationum differentialium altiorum graduum.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE R. DE SCIENCES DE BERLIN.

Tome I. Année 1745.

Sur la lumière & les couleurs.
Sur le choc & la pression.

Sur la nature des moindres particules de la matière.
Sur de nouvelles tables astronomiques pour calculer la place du Soleil.
Sur le mouvement des noeuds de la Lune & sur la variation de son inclinaison a l'écliptique.
Sur quelques propriétés des sections coniques.
Sur le mouvement des corps flexibles.
Sur la force de percussion & de sa véritable mesure.
Sur quelques propriétés des sections coniques, qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes.

Tom. II. Année 1746.

Recherches physiques sur la cause de la queue des Comètes, de la lumière boréale & de la lumière zodiacale.
Mémoire sur l'effet de la propagation successive de la lumière dans l'apparition tant des Planètes que des Comètes.
Mémoire sur la plus grande équation des Planètes.

Tom. III. Année 1747.

Recherches sur le mouvement des corps célestes en général.
Méthode pour trouver les vrais momens tant des nouvelles que des pleines lunes.
Méthode de trouver le vrai lieu géocentrique de la Lune par l'observation de l'occultation d'une étoile fixe.
Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la Lune.
Mémoire sur la force des rames.
Réflexions sur la dernière éclipse du Soleil du 25 Juillet, de l'année 1748.
Sur la perfection des verres objectifs des lunettes.

Tom. IV. Année 1748.

Sur les vibrations des cordes.
Sur l'accord des deux dernières éclipses du Soleil & de la Lune avec mes tables, pour trouver les vrais momens des pleni-lunes & novi-lunes.
Sur l'Atmosphère de la Lune, prouvée par la dernière éclipse annulaire du Soleil.
Sur le frottement des corps solides.
Sur la diminution de la résistance du frottement.
Recherches sur les plus-grands & les plus-petits qui se trouvent dans les actions des forces.
Réflexions sur quelques loix générales de la nature, qui s'observent dans les effets des forces quelconques.
Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes.
Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper.
Réflexions sur l'espace & le tems.

De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires.
Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de Mr. le Marquis de l'Hôpital.
Recherches sur les racines imaginaires des équations.
Recherches sur la précession des équinoxes, & sur la nutation de l'axe de la terre.
De la parallaxe de la Lune, tant par rapport à sa hauteur qu'à son azimuth, dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique.

Tom. VI. Année 1750.

Découverte d'un nouveau principe de Mécanique.
Réflexions sur les divers degrés de lumière du Soleil & des autres corps célestes.
Avertissement au sujet des recherches sur la précession des équinoxes.
Recherches sur l'origine des forces.
Lettre à Mr. Merian.

Tom. VII. Année 1751.

Harmonie entre les principes généraux de repos & de mouvement de Mr. de Maupertuis.
Sur le principe de la moindre action.
Examen de la dissertation de Mr. le Prof. Koenig, insérée dans les Actes de Leipzig, pour le mois de Mars, 1751.
Addition à cet examen.
Essai d'une démonstration métaphysique du principe général de l'équilibre.
Calcul de probabilité dans le jeu de rencontre.
Application de la machine hydraulique de Mr. Segner à toutes sortes d'ouvrages, & de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement.
Recherches sur une nouvelle manière d'élever de l'eau, proposée par Mr. Demour.

Tom. VIII. Année 1752.

Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite.
Discussion plus particulière de diverses manières d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage.
Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever de l'eau par le moyen des pompes.
Essai d'une explication physique des couleurs engendrées sur des surfaces extrêmement minces.

Tom. IX. Année 1753.

Remarques sur les mémoires de Mr. Dan. Bernoulli, qui roulent sur la courbe

que

que fait une corde tendue mise en vibration, & sur les différentes espèces de vibration des cordes.

Principes de la Trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus-grands & des plus-petits.

Elémens de Trigonométrie sphéroïdique, tirés de la méthode des plus-grands & des plus-petits.

Examen d'une controverse sur la loi de réfraction des rayons de différentes couleurs, par rapport à la diversité des milieux transparens, par lesquels ils sont transmis.

Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque.

Tom. X. Année 1754.

De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère, selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air.

Réflexions sur un problème de Géométrie traité par quelques Géomètres, & qui est néanmoins impossible.

Recherches physiques sur la diverse refrangibilité des rayons de lumière.

Théorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau.

De la variation de la latitude des étoiles fixes & de l'obliquité de l'écliptique.

Tom. XI. Année 1755.

Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides.

Principes généraux du mouvement des fluides.

Continuation des recherches sur la Théorie du mouvement des fluides.

Tom. XII. Année 1756.

Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent.

Expériences pour déterminer la réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes.

Sur l'action des scies.

Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral.

Tom. XIII. Année 1757.

Recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée.

Sur la force des colonnes.

Regles générales pour la construction des télescopes & des microscopes, de quelque nombre de verres qu'ils soient composés.

Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés.

Tom. XIV. Année 1758.

Recherches sur la connoissance mécanique des corps.

Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable.
Remarques générales sur le mouvement diurne des Planetes.

Tom. XV. Année 1759.

De la propagation du son.
Supplément aux recherches sur la propagation du son.
Continuation des recherches sur la propagation du son.
Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes.
Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse, sur la marche du cavalier sur l'échiquier.

Tom. XVI. Année 1760.

Recherches sur le mouvement des rivières.
Recherches sur la courbure des surfaces.
Recherches générales sur la mortalité & la multiplication du genre humain.
Sur les rentes viagères.
Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile.
Problème : un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique.

Tom. XVII. Année 1761.

Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques.
Recherches sur la confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture.
Recherches sur les moyens de diminuer ou de réduire même à rien la confusion causée par l'ouverture des verres.
Nouvelle manière de perfectionner les verres objectifs des lunettes.
Détermination du champ apparent, que découvrent tant les téloscopes que les microscopes.
Règles générales pour la construction des télescopes & des microscopes.
Sur la perfection des lunettes astronomiques qui représentent les objets renversés.

Tom. XVIII. Année 1762.

Considérations sur les difficultés qu'on rencontre dans l'exécution des verres objectifs délivrés de toute confusion.
Recherches sur les télescopes à réflexion & les moyens de les perfectionner.
Recherches sur une autre construction des télescopes à réflexion.
Sur la confusion que cause dans les instrumens dioptriques la diverse réfrangibilité des rayons.
Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de Mr. Dollond, & sur le principe qui en est le fondement.
Sur les avantages des verres objectifs composés de deux verres simples.

Remarques sur l'effet du frottement dans l'équilibre.

Tom. XIX. Année 1763.

Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle.
Réflexions sur les diverses manières, dont on peut représenter le mouvement de la Lune.
Considérations sur le Problème des trois corps.
Nouvelle manière de comparer les observations de la Lune avec la Théorie.
Du mouvement des absides des Satellites de Jupiter.

Tom. XX. Année 1764.

Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations.
Recherches sur les microscopes simples & sur les moyens de les perfectionner.
Recherches sur les microscopes à trois verres, & les moyens de les perfectionner.
Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon.
Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique moderne.
Des lunettes à trois verres, qui représentent les objets debout.

Tom. XXI. Année 1765.

Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise.
Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie.
Eclaircissemens plus détaillés sur la génération & la propagation du son, & sur la formation de l'écho.

Tom. XXII. Année 1766.

Construction des objectifs composés de deux différentes sortes de verre, qui ne produisent aucune confusion, ni par leur ouverture, ni par la différente réfrangibilité des rayons, avec la manière la plus avantageuse d'en faire des lunettes.
Construction des objectifs composés, propres à détruire toute la confusion dans les lunettes.
Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction du verre par le moyen des prismes.
Corrections nécessaires pour la Théorie de la déclinaison magnétique, proposée dans le XIII.e Volume des Mémoires de l'Académie.

Tom. XXIII. Année 1767.

Méthode pour porter les verres objectifs des lunettes à un plus haut degré de perfection.

Solution d'une question trés-difficile dans le calcul des probabilités.

NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES DE BERLIN.

Année 1772.

Extrait d'une lettre de Mr. Euler à Mr. Bernoulli, concernant le mémoire imprimé parmi ceux de 1771. p. 318. p. 35.

Année 1776.

Extrait d'une lettre de Mr. Euler à Mr. Beguelin, concernant les nombres premiers.

ACTA ERUDITORUM LIPSIENSIA.

Anno 1733.

Constructio aequationum quarundam differentialium, quae indeterminatarum separationem non admittunt.

Anno 1744.

Solutio problematis, mens. Nov. 1743. propositi.

Anno 1773.

Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata.

JOURNAL LITTÉRAIRE DE L'ALLEMAGNE.

Mois de Janv. & Fevr. 1751.

Découverte d'une loi extraordinaire des nombres.

MISCELLANEA TAURINENSIA.

Tom. II. 1760-1761.

Lettre à Mr. de la Grange, contenant des recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique.

Tom. III. 1762-1765.

Eclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes.
Recherches sur le mouvement des cordes inégalement épaisses.
Recherches sur l'intégration de l'équation différentio-différentielle.

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{x^2}z.$$

Recherches sur les nouvelles lunettes de cinq & six verres, & sur leur perfection ultérieure.

Observationes circa integralia talium formularum: $\int x^{p-1} dx (1-x)^{\frac{n}{n}-1}$, posito post integrationem $x = 1$.

DISSERTATIONES IN SOCIETATE SCIENTIARUM FLISSINGENSI. PARS IX.

Recherches sur une nouvelle espéce de quarrés magiques.

IN CALENDARIO ASTRONOMICO BEROLINENSI An. 1783.

Theorie der Parallaxe für die sphäroidische Gestalt der Erde.

DISSERTATIONES IN SOCIETATE OECONOMICA PETROPOLITANA PARS VI.

Nachricht von einem neuem Mittel zur Vermehrung des Getreides

DISSERTATIONES INEDITAE.

Solutio problematis difficillimi ex methodo tangentium inversa.
De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum.
De descensu baculi super cylindro.

De motu globi heterogenei super plano horizontali, eiusque motu a frictione impedito.

De motu globi circa axem obliquum quemcunque gyrantis & super plano horizontali incedentis.

Methodus motum corporum tam perfecte flexibilium quam utcunque elastic corum non in eodem plano sitorum determinandi. Dissertatio prior.

Methodus motum corporum tam &c. Dissertatio altera.

Consideratio motus plane singularis, qui in filo perfecte flexili locum habere potest.

De traiectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis.

Commentatio de curvis tractoriis.

Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis.

De tractoriis compositis.

De miris proprietatibus curvae elasticae, sub aequatione: $y = \int \frac{x x dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ contente.

Enodatio difficultatis super figura terrae a vi centrifuga oriunda.

Speculationes super formula integrali: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa+2bx+cxx)}}$, ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt.

Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis primis, secundis, tertiis, vel ordinis cuiuscunque.

Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae $xx + nyy$.

De motu sanguinis per arterias.

De motu oscillatorio tabulae suspensae & a vento agitatae.

De transformatione seriei divergentis:
$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \&c.$
in fractionem continuam.

De viribus centripetis ad curvas non in eodem plano sitas describendas requisitis.

Evolutio formulae integralis: $\int dx \left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{lx}\right)$, a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae.

De summatione serierum, in quibus terminorum signa alternantur.

Uberior explicatio methodi singularis integralia alias maxime abscondita investigandi.

Methodus facilis inveniendi integrale huius formulae:
$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^{n+1} - 2x^n \cos.\zeta + x^{n-1}}{x^{2n} - 2x^n \cos.\theta + 1},$$
casu quo post integrationem ponitur $x = 1$ & $x = \infty$.

Innumera theoremata circa formulas integrales, quorum demonstratio vires Analyseos superare videatur.

De summo usu calculi imaginariorum in Analysi.

De singulari ratione differentiandi & integrandi, quae in summis serierum occurrit.

Specimen singulare Analyseos infinitorum indeterminato.
De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaecunque earum potestates exprimi possunt.
Analysis facilis & plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaevis eorum potestates exprimi possunt.
De multiplicatione angulorum per factores expedienda.
Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem.
Innumerae aequationum formae ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest.
Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat.
De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudo per arcus parabolicos metiri potest.
De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudo per arcus ellipticos metiri potest.
De curvis algebraicis, quarum longitudo exprimitur hac formula integrali:

$$\int \frac{v^{n-1}\,dv}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$$

De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se sint aequales.
Quatuor theoremata maxime notatu digna in calculo integrali.
De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrice ducendis.
De formulis differentialibus, quae per tres pluresve quantitates datas multiplicatae fiant integrabiles.
De termino generali serierum hypergeometricarum.
De iterata integratione, dum aliquis exponens pro variabili assumitur.
Variae considerationes circa series hypergeometricas.
De duabus pluribusve curvis algebraicis, in quibus si a terminis fixis arcus aequales abscindantur, eorum amplitudines datam inter se teneant rationem.
De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata.
Methodus facilis ducendi radios osculi curvarum, ex methodo maximorum ac minimorum petita.
De superficie coni scaleni.
Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur.
De integratione formulae $\int \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$, aliarumque simillium.
De vero valore huius formulae integralis $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n$ ab $x=0$ ad $x=1$.
Exercitatio analytica.
Comparatio formulae integralis: $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}}$ ab $x=0$ ad $x=1$.

De quadratis magicis.

De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta.

De radicibus aequationis infinitae:

$$0 = 1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \&c.$$

Determinatio onerum, quae columnae gestare valent.

Evolutio problematis, cuius Solutio analytica est difficillima, dum synthetica per se est obvia.

De singulari genere quaestionum Diophantearum, & methodo maxime recondita eas resolvendi.

Exercitatio analytica, ubi imprimis seriei maxime generalis summatio traditur.

De curvis hyperbolicis, quae intra suas asymtotas spatium finitum includunt.

Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile.

Dilucidationes super formulis, quibus sinus & cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, ubi ingentes difficultates diluuntur.

Observationes generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur.

De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis; cum supplemento.

De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt.

Evolutio formulae integralis: $\int \frac{dz(3+zz)}{(1+zz)\sqrt{(1+zz+z^4)}}$, per logarithmos & arcus circulares.

De formulis differentialibus secundi gradus, quae integrationem admittunt.

De insignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variabiles etiam earum differentialia cuiuscunque ordinis involventium.

Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis.

Specimen integrationis abstrusissimae, haec formula: $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(2xx-1)}}$ contentae.

Integratio formulae cuiusdam differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos & arcus circulares expedire licet.

Formae generales differentialium, quae etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos & arcus circulares admittunt.

De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali.

De casibus quibus formulam $x^4 + kxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet.

Integratio succinta formulae maxime memorabilis: $\int \frac{dz}{(3 \pm zz)\sqrt{(1 \pm 3zz)}}$.

De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos & arcus circulares integrare licet.

Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria Astronomiae est amplissimus.

Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet.

Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus.

Evolutio formulae analyticae, cui theoria Astronomiae potissimum innititur.

De centro similitudinis.

Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt, ea quaeritur, cuius area sit omnium minima.

Problema geometricum: inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, eam definire, quae habet aream minimam.

Supplementum in Calculi Integralis Tom. I. Cap. VI.

De inventione longitudinis locorum ex observata altitudine fixarum.

Eclaircissemens sur le mémoire de Mr. de la Grange, (Misc. Taur.) concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations.

Recherches sur quelques intégrations rémarquables dans l'Analyse des fonctions à deux variables, connues sous le nom de différences partielles.

Intégration d'une espèce remarquable d'équation différentielle, dans l'Analyse des fonctions à deux variables.

Investigatio superficierum, quarum normales, ad datum planum productae, sint omnes inter se aequales.

Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi.

Resolutio formulae Diophanteae: $ab(mdd + nbb) = cd(mcc + ndd)$ per numeros rationales.

Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab eius centro gravitatis rationaliter exprimantur.

De corporibus cylindricis incurvatis.

Enodatio insignis paradoxi in determinatione perturbationum motus planetarum occurrentis.

Speculationes super area triangulorum sphaericorum.

Utrum hic numerus 1000009 sit primus, nec ne? inquiritur.

Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi, utrum sint primi nec ne.

Facillima methodus plurimos numeros primos praemagnos inveniendi.

De formulis speciei $mxx + nyy$, ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus.

De variis modis numeros praegrandes examinandi utrum sint primi, nec ne.

Observationes singulares circa aequationes differentiales lineares.

De formulis integralibus implicatis earumque resolutione & transformatione.

Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite resolvendi.

Additamentum ad dissertationem Tom. XI. Nov. Comment. insertam.

De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunq.: $(1 + x + xx + x^3 + \&c.)^n$.

Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1 + xx + x^3)^n$.

Specimen transformationis singularis serierum.

Disquisitio coniecturalis super formula integrali : $\int \frac{d\Phi \cos. i\Phi}{(a+b\cos.\Phi)^n}$.

Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium.

Demonstratio theorematis insignis, per coniecturam eruti, circa integrationem formulae : $\int \frac{d\Phi \cos. i\Phi}{(1+aa-2a\cos.\Phi)^{n+\frac{1}{2}}}$.

Methodus nova & facilis omnium aequationum algebraicarum radices non solum ipsas, sed etiam quascunque earum potestates per series concinnas exprimendi.

De resolutione fractionum compositarum in simpliciores.

Methodus facilis inveniendi radium oculi pro curvis non in eodem plano sitis.

Integratio aequationis differentialis : $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{(a+2bx+cxx)^2}$

Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda.

De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae maximi vel minimi proprietate sunt praeditae.

Methodus singularis resolvendi aequationes differentiales secundi gradus.

De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum & minimorum occurrit.

Solutio problematis ob singularia calculi artificia memorabilis.

De motu quodam maxime memorabili, satis quidem simplici, at solutu difficillimo.

Dilucidationes super problemate quodam geometrico, olim a Iacobo Bernoulli tractato.

Solutio completa problematis de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales.

De summatione serierum in hac forma contentarum :

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\&c.$$

Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum definiendam maxime sunt accommodatae, cum additamento.

De novo genere talium serierum.

Solutio facilior problematis in Tomo XVIII. Comment. Nov. pertractati, circa triangulum, in quo rectae latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur.

De resolutione formulae integralis : $\int x^{m-1}\,dx\,(\Delta+x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem, ubi simul insignia artificia circa serierum summationem explicantur.

Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum.

Solutio facilis problematis geometrici, quo quaeritur circulus, qui tres alios circulos datos tangat.

Solutio facilis problematis geometrici, quo quaeritur sphaera, quae quatuor alias datas tangat.

De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest.

Methodus nova investigandi omnes casus, quibus hanc aequationem differentio-differentialem: $ddy(1-axx)-bxdxdy-cydx^2=0$ resolvere licet.

De fractionibus continuis Wallisii.

De seriebus memorabilibus, quibus sinus & cosinus angulorum multiplorum exprimere licet.

Commentatio in fractionem continuam, qua Illustris la Grange potestates binomiales expressit.

Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi.

Dilucidationes in Capita postrema Calculi mei differentialis, de functionibus inexplicabilibus.

Nova Methodus summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi.

De eclipsibus solaribus in superficie sphaerae per projectionem repraesentandis.

De integralibus quibusdam inventu difficillimis.

Geometrica & Sphaerica quaedam.

Investigatio quadrilateri, in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt.

Solutio succinta & elegans problematis, quo quaeruntur tres numeri tales, ut tam summae quam differentiae binorum fiant quadrata.

De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.

Solutio problematis Fermatiani, de duobus numeris quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum.

De binis formulis $xx+myy$, & $xx+nyy$ inter se concordibus & discordibus.

De insigni promotione analysis Diophanteae.

Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula generalis:
$$vvzz(axx+byy)^2+\Delta xxyy(avv+bzz)^2$$
ad quadratum reduci postulatur.

Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae:
$aaxx+bbyy$, & $aayy+bbxx$ quadrata reddi debent.

Investigatio accuratior circa brachystochronas.

Investigatio binorum numerorum formae: $xy(x^4-y^4)$, quorum productum sive quotus sit quadratum.

De motu oscillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem.

De binis numeris, quorum summa, sive aucta sive minuta tam unius quam alterius quadrato, producat quadrata.

De momentis virium respectu axis cuiuscunque inveniendi; ubi plura insignia symptomata, circa binas rectas non in eodem plano sitas, explicantur.

Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi.

Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales.

De resolutione huius aequationis:
$$0=a+bx+cy+dxx+exy+fyy+gxxy+hxyy+ixxyy.$$
per numeros rationales.

Methodus nova & facilis formulas cubicas & biquadraticas ad quadratum redocendi.

Constructio manometri, densitatem aeris quovis tempore accurate monstrantis.

De vera brachystochrona, seu linea celerrimi descensus, in medio resistente.

De valoribus integralium, a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum.

De problemate curvarum synchronarum, eiusque imprimis *inverso*.

Enodatio maximi paradoxi in problemate quodam mechanico occurrentis.

Methodus nova & generalis problema synchronarum inversum aliaque eiusdem generis resolvendi.

De curvis, quarum radii oculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus.

De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui ellipticо aequatur.

De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus.

De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur.

De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri licet.

Recherches sur deux problèmes de l'Analyse de Diophante.

Supplément au Problème de quatre nombres, dont la somme de deux fasse toujours un nombre quarré.

Problematis ad analysin infinitorum indeterminatam referendi solutio.

De aequationibus differentialibus cuiuscunque gradus, quae denuo differentiatae integrari possunt.

Solutio problematum difficiliorum ad methodum tangentium inversam pertinentium.

De unciis potestatum binomii earumque interpolatione.

Specimen aequationum differentialium indefiniti gradus, earumque integrationis.

Solutio problematis mechanici.

Solutio alius problematis mechanici non parum curiosi.

De casibus, quibus formulam $x^n \pm m\,xx\,yy + y^n$ ad quadratum reducere licet.

De problemate traiectoriarum orthogonalium ad superficies translato.

Solutio problematis analytici difficillimi.

FINIS.

INDEX CAPITUM

PARTIS PRIORIS.

Caput I.	*De Differentiis finitis.* . .	pag. 3
Cap. II.	*De Usu Differentiarum in doctrina serierum*	33
Cap. III.	*De Infinitis & infinite parvis.* .	57
Cap. IV.	*De Differentialium cuiusque ordinis natura.*	80
Cap. V.	*De Differentiatione functionum algebraicarum unicam variabilem involventium.*	99
Cap. VI.	*De Differentiatione functionum transcendentium.* . .	122
Cap. VII.	*De Differentiatione functionum duas pluresve variabiles involventium.* . .	145
Cap. VIII.	*De Formularum Differentialium ulteriori differentiatione.* . . .	166
Cap. IX.	*De Aequationibus Differentialibus* .	197

PARTIS POSTERIORIS.

		227
Caput I.	*De Transformatione Serierum.* .	244
Cap. II.	*De Investigatione serierum summabilium.*	267
Cap. III.	*De inventione Differentiarum finitarum.*	288
Cap. IV.	*De Conversione Functionum in Series.*	
Cap. V.	*Investigatio summae Serierum ex Termino generali* . .	321
Cap. VI.	*De Summatione Progressionum per Series infinitas.* . . .	353
Cap. VII.	*Methodus summandi superior ulterius promota.*	384
Cap. VIII.	*De usu Calculi Differentialis in formandis seriebus.* . . .	412

Cap.

Cap. IX. *De usu Calculi Differentialis in aequationibus resolvendis.* . . 434
Cap. X. *De Maximis & Minimis.* . . . 459
Cap. XI. *De Maximis & Minimis functionum multiformium pluresque variabiles complectentium.* 493
Cap. XII. *De Usu differentialium in investigandis radicibus realibus aequationum.* . 523
Cap. XIII. *De Criteriis radicum imaginariarum.* 548
Cap. XIV. *De Differentialibus functionum in certis tantum casibus.* . . . 566
Cap. XV. *De Valoribus functionum, qui certis casibus videntur indeterminati.* . . 586
Cap. XVI. *De Differentiatione Functionum inexplicabilium.* . . . 611
Cap. XVII. *De Interpolatione Serierum.* . 641
Cap. XVIII. *De Usu Calculi differentialis in resolutione Fractionum.* . . 668
Dilucidationes in Capita postrema De Functionibus Inexplicabilibus. . . 705
Adnotationes. . . . 733
Index omnium EULERI *Lucubrationum.* . . 815

ERRATA. CORRIGE.

Pag.	35	*l.* 5	summus	sumus
	81	24	excollere	excolere
	145	20	relationem habebunt	relationem non habebunt
	404	12	$S.Zs$	Zs
	466	26	dum fit	tum fit
	519	4	$x=2+\omega\ \&\ y=3+\varphi$	$x=1+\omega\ \&\ y=\frac{1}{2}+\varphi$
	527	30	Ad si	At si

16978