Arithmetica Universalis;

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARITHMETICA

LIBER.

Cui accessit

HALLEIANA

Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ

TYPIS ACADEMICIS.

LONDINI, Impensis *Benj. Tooke* Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato *Fleetstreet*. A.D. MDCCVII.

AD

LECTOREM.

CUM poſt haud paucos Doctorum Virorum in Arte Analytica tradenda labores Liber aliquis materia plenus, mole parvus, in regulis neceſſariis brevis, in exemplis certo conſilio electis longus, & primis Tyronum conatibus accommodatus etiamnum deſiderari videretur; interque κειμήλια *noſtra Academica hujuſmodi Tractatus M. S. publicas Profeſſoris Mathematici tunc temporis Celeberrimi Prælectiones, triginta fere abhinc annis in Scholis habitas continens, mihi ſtatim occurreret; Dedi Operam ut Libellus iſte, imperfectus licet,*

& currente calamo pro officii urgentis ratione compositus, nec prælo ullatenus destinatus, tamen in usum studiosæ juventutis nunc in publicum prodiret. In quo quidem Quæstiones haud paucæ è variis Scientiis adductæ multiplicem Arithmeticæ Usum satis ostendunt. Animadvertendum tamen Constructiones illas sive Geometricas sive Mechanicas prope finem adpositas inveniendis solum duabus tribusve Radicum figuris prioribus, uti suo loco dicitur, inservire: Opus enim Cl. Autor ad umbilicum nunquam perduxit; Cubicarum Æquationum Constructionem hic loci tradidisse contentus; dum interea in animo habuerit Biquadraticarum aliarumque superiorum potestatum Constructionem methodo generali exponen-

ponendam adjicere, & qua ratione reliquæ Radicum Figuræ essent extrahendæ sigillatim docere. Cum autem summo Viro hisce minutiis postmodo vacare minime placuerit, defectum hunc aliunde supplere volui; atque eum in finem generalem planeque egregiam Cl. Halleii Æquationum Radices extrahendi methodum ex Actis nostris Philosophicis, exorata prius utrobique venia, huc transferendam judicavi. Vale Lector, & conatibus nostris fave.

G. W.

Dabam Cantabrigiæ
III. Kal. Mai.
A. D. MDCCVII.

LECTORI S.

Notes velim Titulum Perpetuum paginæ cuique, pro Typographorum consuetudine, hic appositum, in Distinctos, cujusque paginæ argumentum indicaturos, sequentibus editionibus esse mutandum: prout in in prioribus aliquot paginis alia de causa recusis jamjam fecimus.

ERRATA.

Page 17. Lin. 12. Lege instituit p. 20. l. 12. a^4 p. 24. l. ult. b^5. p. 26. l. 3. $\sqrt{aa - 2xx}$. l. 10. multiplicato p. 28. l. 14. occupant p. 31. l. 27. instituit p. 34. l. 20. & 22 & 28 277, &c. p. 35. l. ult. 3×4 p. 39. l. 17 & 22 $\frac{1}{4}aa$. l. 20. $12bbxx$. p. 44. l. 11. tantum l. ult. 11 27 33 p. 45. l. 23, 24. progressionis qui stat è regione termini o progressionis primæ. p. 46. l. 22. 2. 1. 0 1. p. 48. l. 26. Ut p. 63. l. 8. z^3 * * p. 67. l. 11. Eam prius docuimus. p. 85. l. 21. $\frac{405,8}{91,5}$ p. 88. l. penult. $\frac{288000}{3552000}$ p. 102. l. 24. 35 & 36. p. 129. l. 20. ppy. p. 140. l. 13. $-\!\!+ \frac{ab}{cc} xx$ l. penult. HK.

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

De Compositione & Resolutione Arithmetica

L I B E R.

COMPUTATIO vel fit per numeros ut in vulgari Arithmetica, vel per species ut Analystis mos est. Utraque iisdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: Arithmetica quidem definite & particulariter, Algebraica autem indefinitè & universaliter; ita & enuntiata ferè omnia quæ in hâc computatione habentur, & præsertim conclusiones, Theoremata dici possint. Verùm Algebra maximè præcellit quòd cùm in Arithmetica Quæstiones tantùm resolvantur progrediendo à datis ad quæsitas quantitates, hæc à quæsitis tanquam datis ad datas tanquam quæsitas quantitates plerumque regreditur; ut ad conclusionem aliquam, seu *Æquationem*, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæsitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata quorum resolutiones ex Arithmetica sola frustra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita subservit, ut non nisi unicam perfectam computandi Scientiam constituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quisquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum significationes intelligat, & fundamentales addiscat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum ſignificatione.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus & ſurdus: Integer quem unitas metitur, fractus quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & ſurdus cui unitas eſt incommenſurabilis.

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram, ſcripti denotant denas unitates, in ſecundo centenas, in tertio millenas, &c. ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, &c. Hos autem dicimus Fractos *Decimales* quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros à decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569. denotat ſeptingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732·569. vel etiam ſic 732 L569. nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus

57104'

57104'2083. denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem aliquam ſeu literam deſignare. Et ſiquando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſa deſignamus initialibus Alphabetæ literis a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes vel majuſculas literas, & vocales vel minuſculas pro incognitis.

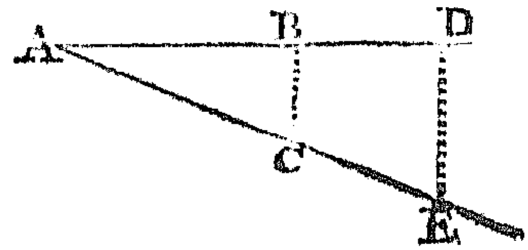
Quantitates vel affirmativæ ſunt ſeu majores nihilo, vel negativæ ſeu nihilo minores. Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt bona affirmativa, debita verò bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi AB dextrorſum ducatur, & BC ſiniſtrorſum; ac AB ſtatuatur affirmativa

tunc BC pro negativa habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC, vel ad nullam ſi forte C inciderit in ipſum A, vel ad minorem nulla ſi BC longior fuerit quam AB de qua aufertur. Negativæ quantitati deſignandæ nota $-$, Affirmativæ nota $+$ præfigi ſolet. Ad hoc $\mp$ ſignum incertum eſt, & $\pm$ ſignum etiam incertum ſed priori contrarium.

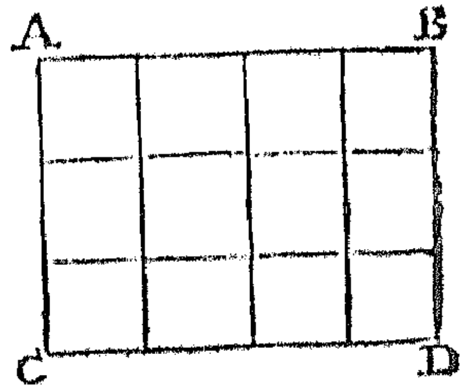
In aggregato quantitatum nota $+$ significat quantitatem suffixam esse cæteris addendam, & nota $-$ esse subducendam. Et has notas vocabulis plus & minus exprimere solemus. Sic $2+3$, sive 2 plus 3, valet *summam* numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et $5-3$, sive 5 minus 3, valet *differentiam* quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet *summam* quantitatum a & b: Et $a-b$ valet *differentiam*, quæ oritur subducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet summam istius differentiæ & quantitatis c. Puta si a sit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7 & $a-b$ 3 & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum est $2b+a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ $+$ & $-$ dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur, signum $+$ subintelligi debet.

Multiplicatio propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicanda quot numerus multiplicans sit major unitate. Sed aptioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici solet quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera &c. quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multi-

multiplicationem 6 A, ſive ſexies A, perinde ac ſi A multiplicaretur per abſtractum numerum 6, ſiquidem 6 A ſit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita ſi duas quaſvis lineas AC & AD per ſe multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis,



eo quod ſit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quinetiam mos obtinuit ut geneſis ſeu deſcriptio ſuperficiei per lineam ſuper alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies, adeoque hæc ſuperficiei è lineis generatio longè alia ſit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehenſa, ſi modò Unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet, Quadratum cujus latera ſunt unitates lineares. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis ut inſpicienti Schema patebit.



Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia quæ ad Geometriam ſpectant, Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimenſionum* non ſemper intelligimus ſuperficiem, ſed ut plurimùm quantitatem alterius cujuſcunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & ſæpiſſimè lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimenſionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & ſic in aliis.

Numerus ſpeciei alicui immediatè præfixus denotat ſpeciem illam toties ſumendam eſſe. Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x.

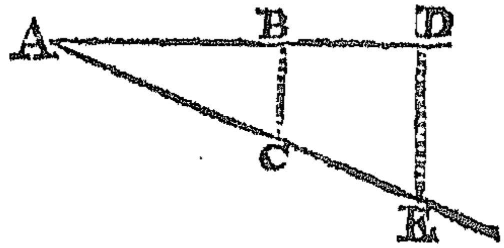
Duæ vel plures ſpecies immediatè connexæ deſignant factum, ſeu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in ſe invicem. Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicandò a per b. Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta ſi a ſit 2, & b ſit 3 & x ſit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates ſeſe multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum deſignandum nonnunquam interſcribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed uſus harum notarum præcipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriuſque multiplicatoris lineolâ ſuperimpoſitâ connectimus & ſcribimus $\overline{y - 2b}$ in $\overline{y + b}$, vel $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$.

Diviſio propriè eſt quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas ſit minor Diviſore. Sed ob analogiam vox etiam uſurpari ſolet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quæritur quam habet unitas ad diviſo-

rem;

rem: sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus aut alia cujusvis generis quantitas. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC, existente AB unitate: agenda est ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Divisio propter similitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Basem applicatur ut inde noscatur altitudo.



Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, seu quantitatem quæ oritur ex divisione superioris quantitatis per inferiorem. Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3. & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc est octavam partem numeri 5, & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b: puta si a sit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et sic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates fractiones dicuntur, parsque superior Numerator, ac inferior Denominator.

Aliquando Divisor quantitati divisæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem quæ oritur ex divisione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, scribi potest $\overline{a-b}\,)\,\frac{axx}{a+b}$.

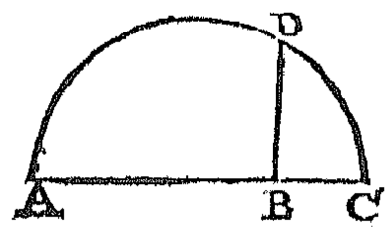
Etsi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas ſeipſam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, ſuffigi ſolet. Sic pro *aaa* ſcribimus a^3, pro *aaaa* ſcribimus a^4, pro *aaaaa* ſcribimus a^5, & pro *aaabb* ſcribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta ſi *a* ſit 5 & *b* ſit 2, tum a^3 erit $5\times5\times5$ ſive 125, & a^4 erit $5\times5\times5\times5$ ſive 625, atque a^3b^2 erit $5\times5\times5\times2\times2$ ſive 500. Ubi nota quod numerus inter duas ſpecies immediatè ſcriptus, ad priorem ſemper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat *bb* ter capiendum eſſe ſed *a* in ſe producendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot dimenſionum vel poteſtatum vel dignitatum eſſe dicuntur quot factoribus ſeu quantitatibus ſe multiplicantibus conſtant, & numerus ſuffixus vocatur index poteſtatum vel dimenſionum. Sic *aa* eſt duarum dimenſionum vel poteſtatum, & a^3 trium, ut indicat ſuffixus numerus 3. Dicitur etiam *aa* quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & ſic porro. Et quantitas *a* ex cujus in ſe multiplicatione hæ poteſtates generantur dicitur earum radix, nempe radix quadratica quadrati *aa*, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per ſeipſam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum &c. erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum &c. Adeoque quantitatis cujuſcunque radix quadratica erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & radix cubica primum è duobus mediè proportionalibus, & radix quadrato-quadratica primum è tribus, & ſic præterea. Duplici igitur affectione radices innoteſcunt, tum quod ſeipſas multiplicando producant ſuperiores poteſtates, tum quod ſint è mediis proportionalibus inter

iſtas

iſtas poteſtates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam eſſe 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64, vel quod ſit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc ſi lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda eſt, produc eam ad C ut ſit BC unitas, dein ſuper AC deſcribe ſemicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurens in D, critque BD radix, quia media proportionalis eſt inter AB & unitatem BC.



Ad deſignandam radicem alicujus quantitatis præfigi ſolet nota $\surd$ ſi radix ſit quadratica, & $\surd 3:$ ſi ſit cubica, & $\surd 4:$ ſi quadrato-quadratica &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3: 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3: 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut ſi a ſit 3, & x 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, ſeu 6; & $\surd 3: 4axx$ erit $\surd 3: 1728$, ſeu 12. Et hæ radices ubi non licet extrahere dicuntur ſurdæ quantitates, ut $\surd ax$; vel ſurdi numeri, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro deſignanda quadratica poteſtate uſurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipſius A, ſcribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ ſcribitur $\surd c: abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, ſed quæ jam ferè exoleverunt.

Nota $=$ deſignat quantitates hinc inde æquales eſſe. Sic $x = b$ deſignat x æqualem eſſe b.

Nota :: ſignificat quantitates hinc inde proportionales eſſe. Sic $a.b :: c.d$, ſignificat eſſe a ad b ut c ad d. Et $a.b.e :: c.d.f$ eſſe a, b & e inter ſe ut ſunt c, d & f inter ſe reſpectivè, vel eſſe a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

Deni-

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facilè innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc est per Quotum exortum divisione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum divisione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$ per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti, & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb, & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem summæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis.

Cæterùm

Cæterùm nota quod in hujusmodi complexis quantitatibus non opus est ad significationem singularum literarum semper attendere; sed sufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ significat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; quodcunque tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis substituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ significat quotum exortum divisione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac si quantitates illæ simplices essent & cognitæ, etsi quænam sint impræsentiarum prorsus ignoretur, & ad singularum partium constitutionem aut significationem neutiquam attendatur. Id quod monendum esse duxi ne complexione terminorum Tyrones quasi conterriti in limine hæreant.

De ADDITIONE.

NUmerorum, ubi non sunt admodum compositi, Additio per se manifesta est. Sic quod 7 & 9 seu $7+9$ faciunt 16, & quod $11+15$ faciunt 26 prima fronte patet. At in magis compositis opus peragitur scribendo numeros serie descendente & summas columnarum sigillatim colligendo. Quemadmodum si numeri 1357 & 172 addendi sunt, scribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 subjiciantur, cæterique numeri numeris correspondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem scribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus posteriorem

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

riorem numerum 2 scribe infra, priorem vero 1 asserva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & scribe 5 infra, & manebit tantùm 1 prima figura superioris numeri, quæ etiam infra scribenda est, & sic habebitur summa 1529.

Sic numeros $87899 + 13403 + 885 + 1920$, quo in unam summam redigantur, scribe in serie descendente ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam constituant, & sic præterea. Deinde dic $5 + 3$ valent 8, & $8 + 9$ valent 17, scribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo $1 + 8$ valent 9, $9 + 2$ valent 11, ac $11 + 9$ valent 20: Subscriptoque 0, dic iterum ut ante $2 + 8$ valent 10, $10 + 9$ valent 19, $19 + 4$ valent 23, & $23 + 8$ valent 31, adeoque asservato 3 subscribe 1 ut ante, & iterum dic $3 + 1$ valent 4, $4 + 3$ valent 7, & $7 + 7$ valent 14. Quare subscribe 4, denuoque dic $1 + 1$ valent 2, & $2 + 8$ valent 10, quem ultimò subscribe, & omnium summam habebis 104107.

$$\begin{array}{r} 87899 \\ 13403 \\ 1920 \\ 885 \\ \hline 104107 \end{array}$$

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre est.

$$\begin{array}{l} 630'953 \\ 51'0807 \\ 305'27 \\ \hline 987'3037 \end{array}$$

In terminis Algebraicis Additio fit connectendo quantitates addendas cum signis propriis, & insuper uniendo quæ possunt uniri. Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde est quo ordine scribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte specierum

conve-

convenit, uniuntur addendo numeros præfixos quibus species multiplicantur. Sic $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$, & $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$, & $6\sqrt{ab-xx} + 7\sqrt{ab-xx}$ faciunt $13\sqrt{ab-xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam si essent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et sic $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}} + 3a\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ faciunt $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ eo quod $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a + 3c$.

Fractiones affirmativæ quarũ idem est denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ faciunt $\frac{4}{5}$, & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$, & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $\overline{-a-b}\sqrt{ax}$. Ubi verò negativa quantitas affirmativæ adjicienda est, oportet affirmativam negativâ diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum.

tivum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitatum, convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$ & $7a-9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet ut termini maxime affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, species $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque species $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia. Dein terminos cujusque columnæ sigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod subscribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & insuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum subscribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & insuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit summa $-3a+5$.

$$\begin{array}{rrr}
17ax & -14a & +3 \\
-8ax & +4a & +2 \\
-9ax & +7a & \\
\hline
* & -3a & +5
\end{array}$$

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{rr}
12x & +7a \\
7x & +9a \\
\hline
19x & +16a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
11bc & -7\sqrt{ac} \\
15bc & +2\sqrt{ac} \\
\hline
26bc & -5\sqrt{ac}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
-\frac{4ax}{b} & +6\sqrt{3} & +\frac{1}{5} \\
+\frac{11ax}{b} & -7\sqrt{3} & +\frac{2}{5} \\
\hline
\frac{7ax}{b} & -\sqrt{3} & +\frac{3}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
 & -6xx & +\frac{3}{7}x \\
5x^3 & & +\frac{5}{7}x \\
\hline
5x^3 & -6xx & +\frac{8}{7}x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & aay & +2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\
 & -2ayy & -4aay & +a^3 & \\
y^3 & +2ayy & -\frac{1}{2}aay & & \\
\hline
y^3 & * & -3\frac{1}{2}aay & +3a^3 & -\frac{a^4}{2y}.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
5x^4 + 2ax^3 \\
-3x^4 - 2ax^3 + 8\tfrac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\
-2x^4 + 5bx^3 - 20a^3\sqrt{aa-xx} \\
 - 4bx^3 - 7\tfrac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\
\hline
* \; bx^3 + a^3\sqrt{aa+xx} - 20a^3\sqrt{aa-xx}.
\end{array}
$$

De SUBDUCTIONE.

NUmerorum non nimis compositorum inventio etiam Differentiæ per se patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in magis compositis Subductio fieri solet subscribendo numerum ablativum & sigillatim auferendo figuras inferiores de superioribus. Sic ad auferendum 63543 de 782579, subscripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod scribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter scribe infra: Tum 5 de 5 relinquit 0 quod itidem subscribe: Postea 3 de 2 auferendum est, sed cum 3 sit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò sumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri potest 3, & restat 9, quod insuper subscribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum sit, adde 1 ad 6, & summa 7 de 8 relinquet 1 quod etiam subscribe. Denique cùm in inferiori numero nihil restet auferendum de superiori 7, subscribe etiam 7, & sic tandem habes differentiam 719036.

$$
\begin{array}{r}
782579 \\
63543 \\
\hline
719036
\end{array}
$$

Cæterùm omnino cavendum est ut figuræ numeri ablativi subscribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, &c: sicut in Additione dictum est. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non dispones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}547\\0'63\end{smallmatrix}$ sed sic $\begin{smallmatrix}547\\0'63\end{smallmatrix}$, ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, subjicia-

tur

tur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis superioris numeri subintellectis, dic 3 de 0 auferendum esse, sed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo sumi ut 0 evadat 10 à quo 3 auferri potest & dabit 7, quod infra scribe. Dein illud 1 quod mutuò sumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de superiore 0 auferendum est; sed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori sumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod similiter infra scribendum est. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem subscribe. Denique figuras etiam 54, siquidem de illis nihil ampliùs auferendum restat, subscribe, & habebis residuum 546'37.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0'63 \\ \hline 546'37 \end{array}$$

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla subjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus est, oportet minorem de majore auferre, & residuo præfigere negativum signum. Veluti si auferendum sit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & residuo 132 præfigo signum $-$.

In terminis Algebraicis Subductio fit connectendo quantitates cum signis omnibus quantitatis subducendæ mutatis, & insuper uniendo quæ possunt uniri, perinde ut in Additione factum est. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$ sive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ sive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ sive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ sive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit

$-5\sqrt{ac}$

$-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ sive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ sive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ sive $\frac{-aa+2ab}{c}$; Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ sive $2x\sqrt{ax}$. Et sic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis constant, operatio perinde ac in numeris institui potest. Id quod in sequentibus exemplis videre est.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array}\quad.\quad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array}\quad.\quad \begin{array}{r} 5x^3+\frac{4}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}.$$

$$\begin{array}{r} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}.$$

De Multiplicatione.

NUmeri qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7 facit 35, quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram 0 ſcribe infra 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus poſteriorem figuram 8 ut ante ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter ſubſcripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

Porrò ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica ſuperiorē 9043 primò per 5 pro more oſtenſo, & emerget 45215, dein per 0 & emerget 0000, tertio per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco propior ſiniſtræ quàm ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

$$\begin{array}{r} 9043 \\ 2305 \\ \hline 45215 \\ 0000 \\ 27129 \\ 18086 \\ \hline 20844115 \end{array}$$

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
	10036	39025
2099,6		
	137,9950	0,05151300

Sed nota quod in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante. Et ſi fortè non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hic ſit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & ſpecies in ſpecies ac ſtatuendo factum affirmativum ſi ambo factores ſint affirmativi aut ambo negativi, & negativum ſi ſecus. Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^2x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores. Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$

facit

facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$ ut pateat si 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro Denominatore. Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$, nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ &c.) multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt{3:}\ 5ayy$ in $\sqrt{3:}\ 7ayz$ facit $\sqrt{3:}\ 35aay^3z$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a4bb}{cc}}$ hoc est * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc est $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$.

* Vide Cap. De Notatione.

Quantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bbc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit

$-aab$

$-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum summa est $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis specimen unà cum aliis consimilibus exemplis subjectum habes.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & aa & +2ac & -bc & \\
 & & & a-b & \\
\hline
 & -aab & -2abc & +bbc & \\
a^3 & +2aac & -abc & & \\
\hline
a^3 & +2aac & -aab & -3abc & +bbc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & a & +b \\
 & a & +b \\
\hline
 & ab & +bb \\
aa & +ab & \\
\hline
aa & +2ab & +bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
 & a & +b \\
 & a & -b \\
\hline
 & -ab & -bb \\
aa & +ab & \\
\hline
aa & * & -bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & yy & +2ay & -\frac{1}{2}aa \\
 & & yy & -2ay & +aa \\
\hline
 & & aayy & +2a^3y & -\frac{1}{2}a^4 \\
 & -2ay^3 & -4aayy & +a^3y & \\
y^4 & +2ay^3 & -\frac{1}{2}aayy & & \\
\hline
y^4 & * & -3\frac{1}{2}aayy & +3a^3y & -\frac{1}{2}a^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{2ax}{c}-\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
3a+\sqrt{\frac{abb}{c}} \\
\hline
\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}}-\frac{aab}{c} \\
\frac{6aax}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
\hline
\frac{6aax}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}+\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}}-\frac{aab}{c}.
\end{array}$$

De Divisione.

Divisio in numeris instituitur quærendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò, si opus est, quamdiu divisor auferri potest. Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro Quoto præcisè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum scripto 5 in Quoto, aufer 5 × 7 seu 35 de 37, & restabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3 × 7 seu 21 de 21 & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè qui oritur ex divisione 371 per 7.

```
7) 371 (53
   35
   --
    21
    21
    --
     0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 subduc 2 × 23 seu 46, restatque 1, cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19 subdue 0 × 23 seu 0; & restat 19, cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod

ex

ex initialibus numeris 2 & 19 conjici poteſt, animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto & de 198 ſubduc 8×23 ſeu 184, reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, ſitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6×23 ſeu 138, & reſtabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086 &c.

```
23) 4798 (208,6086 &c.
    46
    --
     19
     00
     --
     198
     184
     ---
      140
      138
      ---
        20
        00
        --
        200
        184
        ---
         160
```

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46,1 dividitur, & prodit 0,07639 &c. Ubi nota quod in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt quot ſunt in ultimo dividuo plures quam in diviſore: ut in hoc exemplo quin-

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      322,7
      -----
        2948
        2766
        ----
         1820
         1383
         ----
          4370
```

que, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46, 1.

Exempla plura lucis gratia ſubjunximus.

```
9043) 20844115 (2305.
      18086
       27581
       27129
         45215
         45215
             0
```

```
72,4) 2099,6 (290
      1448
       6516
       6516
          0
```

```
50,18)137,995 (2,75.
      10036
       37635
       35126
        25090
        25090
            0
```

```
0,0132) 0,051513 (3,9025
        396
        1191
        1188
          330
          264
           660
           660
             0
```

In terminis Algebraicis Diviſio fit reſolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab diviſ. per a dat b pro Quoto. $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div.

per

per 3 dat $\frac{2}{5}$; & viciſſim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$ ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſ. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70acc}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10cc}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt ut quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores; nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per Diviſorem reſolvi, ſufficit ubi ambæ quantitates ſunt integræ ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta. Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et

ſic

sic $\sqrt{ax - xx}$ divis. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax - xx}}{\sqrt{cx}}$ sive $\sqrt{\frac{ax - xx}{cx}}$. Et $\overline{aa + ab}\sqrt{aa - 2xx}$ divis. per $\overline{a - b}$ $\sqrt{aa - xx}$ dat $\frac{aa + ab}{a - b}\sqrt{\frac{aa - 2xx}{aa - xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fractæ sunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Divisoris ac Denominatorem in Numeratorem, & factus prior erit Numerator, ac posterior Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicatio scilicet a per d & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$ & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ divis. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; divis. autem per $\frac{2c\sqrt{aa - xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa - xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (sive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (sive $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a + b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a + b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a + b}\sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac + bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat

$\frac{2}{3}\sqrt{axx}$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa + 3ax - xx$ divisum per a dat $a + 3x - \frac{xx}{a}$. At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto, & ablato $a - b$ in aa sive $a^3 - aab$ de Dividendo, restabit $2aac - 3abc + bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a - b$ in $2ac$ sive $2aac - 2abc$ de præfato Residuo, restabit etiamnum $-abc + bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $+a - b$ in $-bc$ sive $-abc + bbc$ de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa + 2ac - bc$.

Cæterum ut hujusmodi operationes ad formam qua in Divisione numerorum usi sumus debitè reducantur, termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt.

Sic

Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones literæ a, formam operis exhibebit ad-

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,a^3 \begin{smallmatrix}+2aac\\-aab\end{smallmatrix} -3abc+bbc\ (aa+2ac-bc \\
\hline
\quad a^3-aab \\
\hline
\quad 0+2aac-3abc \\
\qquad\ \ 2aac-2abc \\
\hline
\qquad\quad 0-abc+bbc \\
\qquad\qquad -abc+bbc \\
\hline
\qquad\qquad\ \ 0 \qquad 0
\end{array}
$$

junctum Diagramma: Ubi videre est quod terminus a^3 sive a trium dimensionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\begin{smallmatrix}2aac\\-aab\end{smallmatrix}$ in quibus a est duarum dimensionum secundum occupat, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi $a^3 \begin{smallmatrix}+2c\\-b\end{smallmatrix} aa\ -3bca+bbc$. Ubi termini secundū locum occupant , uniuntur aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b disponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet, Cujus explicationē adnectere visū est,

$$
\begin{array}{l}
-b+a)\ cbb \begin{smallmatrix}-3ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\+2aac\end{smallmatrix}\ (-cb \begin{smallmatrix}+2ac\\+aa.\end{smallmatrix} \\
\hline
\quad cbb-acb \\
\hline
\quad 0 \begin{smallmatrix}-2ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+a^3\\+2aac\end{smallmatrix} \\
\qquad \begin{smallmatrix}-2ac\\-aa\end{smallmatrix} b \begin{smallmatrix}+2aac\\+a^3\end{smallmatrix} \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Dic

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Resp. $-cb$. Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$ seu $bbc-abc$ & restabit in secundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$. Residuo huic adnecte, si placet, quantitates in ultimo loco, nempe $\begin{matrix}a^3\\+2aac,\end{matrix}$ & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Resp. $\begin{matrix}+2ac\\+aa.\end{matrix}$ Quare his in Quoto scriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$ seu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$ $\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & restabit nihil. Unde constat divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oporteret $aay^4-aac^4+yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\,y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$ Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est quod ubi dimensiones literæ ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progressione Arithmetica sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota $*$.

$$yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)\;y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\;\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}$$

$$\underline{y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4}\qquad\Big(\,y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc.\end{matrix}$$

$$0\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$+2aa$

$$\begin{array}{llll}
\left.\begin{array}{l}+2aa\\-cc\end{array}\right\} y4 & \begin{array}{l}-2a^4\\-aacc\\+c^4\end{array}\Big\} yy & & \\
\hline
\circ & \left.\begin{array}{l}+a^4\\+aacc\end{array}\right\} yy & & \\
 & \left.\begin{array}{l}+a^4\\+aacc\end{array}\right\} yy & \begin{array}{l}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{array} & \\
\hline
 & \circ & \circ &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a+b)\; aa * -bb\; (a-b \\
\hline
aa+ab \\
\hline
\circ - ab \\
\quad -ab-bb \\
\hline
\quad \circ \quad \circ
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
yy-2ay+aa) \qquad\qquad (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa. \\
\quad y^4 * -3\tfrac{1}{2}aayy+3a^3y-\tfrac{1}{2}a^4 \\
\hline
\quad y^4-2ay^3+aayy \\
\hline
\quad \circ+2ay^3-4\tfrac{1}{2}aayy \\
\quad\;\; +2ay^3-4aayy+2a^3y \\
\hline
\qquad\quad \circ \; -\tfrac{1}{2}aayy+a^3y \\
\qquad\qquad -\tfrac{1}{2}aayy+a^3y-\tfrac{1}{2}a^4 \\
\hline
\qquad\qquad \circ \quad \circ \quad \circ
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa+ab\sqrt{2}+bb) \qquad\qquad (aa-ab\sqrt{2}+bb \\
\quad a^4 \quad * \quad * \quad * \quad +b4 \\
\hline
\quad a^4+a^3b\sqrt{2}+aabb \\
\hline
\qquad -a^3b\sqrt{2}-aabb \\
\qquad -a^3b\sqrt{2}-2aabb-ab^3\sqrt{2} \\
\hline
\qquad\qquad +aabb+ab^3\sqrt{2} \\
\qquad\qquad +aabb+ab^3\sqrt{2}+b4 \\
\hline
\qquad\qquad \circ \quad \circ \quad \circ
\end{array}$$

Aliqui Divisionem incipiunt ab ultimis terminis, sed eodem recidit si inverso terminorum ordine incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi sed facillimam & commodissimam nosse sufficit.

De

De EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus radix quadratica extrahi debet, is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt; Dein figura in Quoto ſeu Radice ſcribenda cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale ſit aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur dividendo reſiduum per duplum radicis catenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo è reſiduo illo factum à figura noviſſimè prodeunte & decuplo prædicti Diviſoris figura illa aucti.

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9˙98˙56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro ſequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 ſeu 6 continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61 ſeu 61 de 98 & reſtabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 ſeu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in Quoto aufer factum 6 × 626 ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte Radice 316.

```
9˙98˙56(316
9
———
098
 61
———
 3756
 3756
——————
    0
```

Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quære numerum cujus quadratum, (siquidem id nequeat æquari) sit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5×5 sive 25 major est quam 22, & 4×4 sive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis. Et hac itaque in Quoto scripta, de 22 aufer quadratum 4×4 seu 16, residuoque 6 adjunge desuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus divisione per duplum 4 elicienda est secunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Resp. 7. Quare scribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factū 7 in 87 seu 609 & restabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Resp. 0. Quare scribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus divisione per duplum 470 seu 940 elicienda est ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in

22'17'87'91 (4709,43637 &c.
16
——
617
609
——
88791
84681
——
4110.00
376736
——
3426400
2825649
——
60075100
56513196
——
356190400
282566169
——
73624231

8879

8879? Resp. 9. Quare scribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

Cæterum cum factus 9 × 9409 seu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcise, sed ea paulo minorem existere. Et in hoc casu aliisque similibus si veram radicem magis appropinquare placeat, prosequenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus divisione per duplum 4709 seu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein scripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184 seu 376736 de 411000 & restabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637 &c.

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta est, cæteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637 elici possent dividendo residuum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum si radix ex 32976 ad usque quinque figuras extrahi debet: postquam figuræ punctis notantur, scribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1×1 seu 1 maximum est quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, restabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29, Quære quoties duplum 1 seu 2

3·29·76(181,59
—
1
—
229
224
—
576
361
—
362) 215 (59

conti-

continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10, ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9×29 ſive 261 major eſt quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8×28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1×361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad cæteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181, 59.

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329, 76 radix eſt 18, 159. Et ex 3, 2976 radix eſt 1, 8159. Et ex 0, 032976 radix eſt 0, 18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297, 6 radix eſt 57,4247. Et ex 32, 976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9, 9856 radix eſt 3, 16. Sed ex 0, 99856 radix eſt 0, 999279 &c. Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

```
32'97;6(57,4247&c.
25
----
 797
 749
----
  4860
  4576
  ----
1148)284 (247
```

```
0;99'85'6(0,999279&c.
81
----
1885
1701
----
 18460
 17901
 -----
1998) 559 (279
```

Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ conſulens, ne moram in

eo

eo quod rarò usu veniet, discentibus inferam. Nimirum tertia quæque figura incipiendo ab unitate, primò punctis notanda est si radix sit cubica, aut unaquæque quinta si sit quadrato-cubica, &c. Dein figura in Quoto scribenda est cujus maxima potestas (hoc est cubica si radix sit cubica, aut quadrato-cubica si radix sit quadrato-cubica &c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primùm punctum, aut proximè minor sit. Et ablata illa potestate, figura proxima elicietur dividendo residuum proxima numeri resolvendi figura auctum, per potestatem Quoti penè-maximam ductam in indicem maximæ potestatis, hoc est, per triplum Quadratum Quoti si radix sit cubica, aut per quintuplum quadrato-quadratum si radix sit quadrato-cubica &c. Rursusque à numero resolvendo ablata maxima Quoti potestate, figura tertia invenietur dividendo residuum illud proxima numeri resolvendi figura auctum per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis. Et sic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13·312·053 notandus est. Deinde in Quoto scribenda est illa figura 2 cujus cubus 8, siquidem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo restabit 5, quod proxima numeri resolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum, quærendo nempe quoties 3*4 seu 12 continetur in 53, dat 4 pro se-

```
            13·312·053 (237
aufer cub. 8
      12) restat 53 (4. aut 3.
-------------------------------
       aufer c. 12167
    1587) restat 11450 (7.
-------------------------------
       aufer c. 13312053
                 restat 0
```

cunda figura Quoti. Sed cùm Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantum 3 in Quoto. Tum Quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167, & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proxima resolvendi numeri figura 0 auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 divisum, quærendo nempe quoties 3×529 seu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de resolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proximè minor est figuris 364 antecedentibus punctum istud, scribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, restat 121

```
        364·30820 (32,5
        ---------
        243
   405) 1213 (2
        ----
        33554432
5242880) 2876388,0 (5
```

quod proxima resolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum Quoti divisum, quærendo nempe quoties 5×81 seu 405 continetur in 1213, dat 2 pro secunda figura. Quotus ille 32 in se ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero resolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 est integra pars radicis, sed non justa radix, & proinde

proinde si opus in decimalibus numeris prosequi animus est, residuum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 seu 5242880 continetur in $2876388,0$, & prodibit tertia figura sive prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti $32,5$ de numero resolvendo ac dividendo residuum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui potest quarta figura. Et sic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda est, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{}^{4}$ valeat $\sqrt{}^{2 \times 2}$. Et cum radix cubo-cubica extrahenda est, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{}^{6}$: valeat $\sqrt{}^{2 \times 3}$: Unde aliqui radices hasce non cubo-cubicas sed quadrato-cubicas dixere. Et idem in aliis radicibus quarum indices non sunt numeri primi observandum est.

E simplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ sit a, & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac, & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7aax$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ sit $\frac{3az}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{4}{9}}$ sit $\frac{2}{3}$. Et quod $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ sit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt[4]{aabb}$ sit $\sqrt{ab}$. Quinetiam quod $b\sqrt{aacc}$ seu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac sive abc. Et quod $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ sive $\frac{9acz}{5b}$. Et quod $\frac{a+3x}{c}$

$\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ sive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent siquidem propositas quantitates è radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$ &c.) prima fronte constare potest. Ubi vero quantitates pluribus terminis constant, opus perinde ac in numeris absolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa nempe a scribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$ restabit $2ab+bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti seu $2a$ continetur in primo residui termino $2ab$? Resp. b. Adeoque scribe b in Quoto, & ablato facto b in $2a+b$ seu $2ab+bb$ restabit nihil. Quod indicat opus peractum esse, prodeunte radice $a+b$.

$$
\begin{array}{lll}
aa+2ab+bb & (a+b \\
aa & \\
\hline
0 & \\
\hline
\quad 2ab+bb & \\
\hline
\quad 0 \quad\; 0 &
\end{array}
$$

Et sic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quo-

$$
\begin{array}{l}
a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4 \;(aa+3ab-2bb \\
a^4 \\
\hline
0 \\
\quad 6a^3b+9aabb \\
\hline
\quad\; 0 \;\; -4aabb \\
\qquad -4aabb-12ab^3+4b^4 \\
\hline
\qquad\; 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

so

to radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$ ſeu a^4 reſtabit $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$ Quare ſcribe $3ab$ in Quoto & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa + 3ab}$ ſeu $6a^3b + 9aabb$ reſtabit etiamnum $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro opere proſequendo. Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa + 6ab$ continetur in $-4aabb - 12ab^3$, ſive quod perinde eſt dic quoties duplum primi termini Quoti ſeu $2aa$ continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$ ſeu $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{2}aa$ radix eſt $x - \frac{1}{2}a$, & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ radix $yy + 2y - 2$, & quantitatis $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$ ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$$
\begin{array}{lll}
xx - ax + \frac{1}{2}aa & (x - \frac{1}{4}a. \\
\underline{xx} & \\
0 & \\
\quad \underline{-ax + \frac{1}{4}aa} & \\
\quad\;\; 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
9x^4 \begin{array}{l} -24aa \\ +12bb \end{array} xx & \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array} & \left(3xx \begin{array}{l} -4aa \\ +2bb \end{array}\right. \\
\underline{9x^4} & & \\
0 & & \\
\quad \begin{array}{l} -24aa \\ +12bb \end{array} xx & \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array} & \\
\quad\quad 0 & \quad 0 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} y^4 + 4y^3 * - 8y + 4 \ (yy + 2y - 2 \\ y^4 \\ \overline{0} \\ \quad 4y^3 + 4yy \\ \quad \overline{0 - 4yy} \\ \quad\ - 4yy - 8y + 4 \\ \quad\ \overline{\ 0 \quad 0 \quad 0} \end{array}$$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio eſt hujuſmodi. Extrahe

$$\begin{array}{l} a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \ (a + b. \\ \overline{a^3} \\ 3aa)\ 0 + 3aab\ (b \\ \overline{a^3 + 3aab + 3abb + b^3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

radicem cubicam primi termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3; dic quoties triplum quadratum ejus ſeu $3aa$ continetur in proximo reſidui termino $3aab$? & prodit b. Quare ſcribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a + b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, prodit $zz + 2z - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

De

De Reductione Fractionum & Radicalium.

PRæcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

De Reductione Fractionum ad minimos terminos.

FRactiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3ac}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hac Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, &

& per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujusmodi casibus præstat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oporteret. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & bdd per communem divisorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$, prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut supra. Atque ita $\frac{aa}{c}$ in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divis. per $\frac{b}{c}$ evadit aa div. per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ seu $\frac{ac}{x}$ $-c$. Et 28 div. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 div. per $\frac{1}{3}$, seu 12.

De inventione Divisorum.

HUC spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit. Si quantitas simplex est divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos. Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1, 2, 2, 3, 5: ex binis compositi 4, 6, 10, 15: ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60.

Rursus

Rursus si quantitatis $21abb$ divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & restabit quotus primus b. Ergo divisores primi sunt $1, 3, 7, a, b, b$; ex binis compositi $21, 3a, 3b, 7a, 7b, ab, bb$; ex ternis $21a, 21b, 3ab, 3bb, 7ab, 7bb, abb$; ex quaternis $21ab, 21bb, 3abb, 7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipsius $2abb - 6aac$ divisores omnes sunt $1, 2, a, bb - 3ac, 2a, 2bb - 6ac, abb - 3aac, 2abb - 6aac$.

Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in ea est, & pro litera illa substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis Arithmeticæ, $3, 2, 1, 0, -1, -2$, ac terminos totidem resultantes una cum omnibus eorum divisoribus statue è regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam statue progressiones arithmeticas quæ per omnium numerorum divisores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progressionis $3, 2, 1, 0, -1, -2$ pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum propositæ quantitatis. Siqua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat è regione termini 0 progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus litteræ præfatæ, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$, pro x substituendo sigillatim terminos progressionis $1. 0. -1$, orientur numeri $-4, 6, -14$ quos cum omnibus eorum divisoribus colloco è regi-

one

one terminorum progressionis 1. 0. −1 hoc modo.

1	4	1.2.4.	+4.
0	6	1.2.3.6	+3.
−1	14	1.2.7.14	+2.

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est, quæro in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & à superioribus ad inferiora pergendo decrescunt perinde ac termini progressionis lateralis 1. 0. −1. Et hujusmodi progressionem unicam tantam invenio nempe 4. 3. 2. cujus itaque terminum +3 seligo qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1. 0. −1, tentoque divisionem per $x+3$. Et res succedit, prodeunte $xx-4x+2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$. Pro y substituo sigillatim 1. 0. −1 & numeros resultantes 7. 20. 1 cum omnibus eorum divisoribus è regione colloco ut sequitur.

1	7	1.7	+7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+4.
−1	1	1	+1.

Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionẽ arithmeticam +7. +4. +1. Hujus terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitatis terminum $6y^4$, Quare terminum +4 qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y+\frac{4}{3}$ vel quod perinde est per $3y+4$, & res succedit prodeunte $2y^3-3yy-3y+5$.

Atque ita si quantitas sit $24a^5-50a^4+49a^3-140aa+64a+30$: operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+3. +3. +7
1	23	1.23.	+1. −1. +1
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	−1. −5. −5
−1	297	1.3.9.11.33.99.297.	−3. −9. −11

Tres

Tres occurrunt hic progressiones quarum termini $-1. -5. -5$ divisi per differentias terminorum $2. 4. 6$, dant tres divisores tentandos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ & $a - \frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem $a - \frac{5}{6}$ seu $6a - 5$ succedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$.

Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hac methodo. In quantitate illa pro litera substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressionis hujus $3. 2. 1. 0. -1. -2. -3.$ *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim* adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque è regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit $\mp C$ terminus istiusmodi progressionis primæ, $\mp B$ differentia quæ oritur subducendo $\mp C$ de termino proxime superiori qui stat è regione termini 1 progressionis primæ, A prædictus termini altissimi divisor numeralis, & l litera quæ in quantitate proposita est, & erit $All \pm Bl \pm C$ divisor tentandus.

Ut si quantitas proposita sit $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, pro x scribo successivè $3. 2. 1. 0, -1. -2.$ & prodeuntes numeros $39. 6. 1. -6. -21. -26$, una cum eorum divisoribus è regione dispono, addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, viz. terminis $9. 4. 1. 0. 1. 4$, & summas differen-

differentiaſque è latere pariter diſpono. Dein progreſſiones quæ in iiſdem obveniunt è latere etiam ſcribo, ut ſequitur. Harum progreſſionum terminos 2 & -3 qui ſtant è regione termini 0 pro-

3	39	1.3.13.39	9	$-$30.$-$4.6.8.10.12.22.48.	$-$4.	6.
2	6	1.2. 3. 6	4	$-$ 2. 1. 2. 3. 5. 6. 7. 10.	$-$2.	3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0.
0	6	1.2. 3. 6	0	$-$6.$-$3.$-$2.$-$1.1.2.3.6.	2.	$-$3.
$-$1	21	1.3. 7.21	1	$-$20.$-$6.$-$2.0.2.4.8.22.	4.	$-$6.
$-$2	26	1.2.13.26	4	$-$22.$-$9.2.3.5.6.17.30.	6.	$-$9.

greſſionis illius quæ in columna prima eſt, uſurpo ſucceſſive pro $\mp$ C: Differentias quæ oriuntur ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus 0 & 0 nempe -2 & $+3$ uſurpo reſpectivè pro $\mp$ B. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro A $ll \pm$ B $l \pm$ C habeo diviſores duos tentandos $xx+2x-2$ & $xx-3x+3$, per quorum utrumque res ſuccedit.

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5-6y^4+y^3-8yy-14y+14$, Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 1. 0. 1 uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſur-

3	170		27		$-$7.	17
2	38	1.2.19.38	12	$-$26.$-$7.10.11.13.14.31.50.	$-$7.	11
1	10	1.2. 5. 10	3	$-$ 7.$-$ 2. 1. 2. 4. 5. 8. 13.	$-$7.	5
0	14	1. 2. 7. 14	0	$-$14.$-$ 7.$-$2.$-$1. 1. 2. 7. 14.	$-$7.	$-$1
$-$1	10	1.2. 5. 10	3	$-$ 7.$-$ 2. 1. 2. 4. 5. 8. 13.	$-$7.	$-$7
$-$2	190		12		$-$7.	$-$13

po 3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3 hoc eſt numeris 12. 3. 0. 3 addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio $-7. -7. -7. -7$ & 11. 5. $-1. -7$. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare con-

continuatis progressionibus sumo proximos earum hinc inde terminos, viz^t. -7 & 17 superius, & -7, & -13 inferius, ac tento si subductis his de numeris 27 ac 12 qui stant è regione in quarta columna differentiæ dividunt istos 170 & 190 qui stant è regione in columna secunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id est 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id est 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17 id est 10 dividit 170 sed differentia inter 12 & -13 id est 25 non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rejicio. Juxta priorem $\mp C$ est -7, & $\mp B$ nihil; terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy + 7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium, quærendo in prædictis summis differentiisque progressiones non arithmeticas quidem sed alias quasdem quarum terminorum differentiæ primæ, secundæ, tertiæ, &c. sunt in arithmetica progressione: at in his Tyro non non est detinendus.

Ubi in quantitate proposita duæ sunt literæ, & omnes ejus termini ad dimensiones æquè altas ascendunt; pro una istarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restituendo literam illam pro unitate. Ut si quantitas sit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$ ubi termini omnes sunt quatuor dimensionum: pro c pono 1, & quantitas evadit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus divisor ut supra est $3y + 4$, & completa deficiente dimensione posterioris termini per dimen-

dimensionem c, fit $3y+4c$ divisor quæsitus. Ita si quantitas sit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; posito 1 pro b, & quantitatis resultantis $x^4-x^3-5xx+12x-6$ invento divisore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimensiones per dimensiones b, & sic habeo divisorem quæsitum $xx+2bx-2bb$.

Ubi in quantitate proposita tres vel plures sunt literæ, & ejus termini omnes ad easdem dimensiones ascendunt; potest divisor per præcedentes regulas inveniri; sed expeditius hoc modo: Quære omnes divisores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non est, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non est, pariter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non est si tot sunt literæ. Et sic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca divisores respectivè. Dein vide si in serie aliqua divisorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot sunt literæ una dempta in quantitate proposita: & partes duas literas involventes tot vicibus quot sunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita est; partes istæ omnes sub signis suis semel sumptæ erunt divisor quæsitus.

Ubi si proponatur quantitas $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$; terminorum $8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$ in quibus non est x divisores unius dimensionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b-3c$ & $4b-6c$: terminorum $12x^3+9cxx+8ccx+6c^3$ in quibus non est b, divisor unicus $4x+3c$: ac terminorum $12x^3-14bxx-12bbx+8b^3$ in quibus non est c, divisores $2x-b$ & $4x-2b$. Hos divisores è regione literarum x, b, c dispono

x	$2b-3c.\ 4b-6c.$
b	$4x+3c.$
c	$2x-b.\ 4x-2b.$

dispono ut hic vides. Cum tres sint literæ & divisorum partes singulæ non nisi singulas literas involvant, in serie divisorum debent partes illæ bis reperiri. At divisorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non nisi semel occurrunt. Extra divisorem illum cujus sunt partes non reperiuntur. Quare divisores illos negligo. Restant tantum tres divisores $2b - 3c$. $4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in serie sunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes singulæ $2b$. $3c$. $4x$. bis reperiuntur in ipsis ut oportuit, idque cum signis iisdem, si modò signa divisoris $2b - 3c$ mutentur, & ejus loco scribatur $-2b + 3c$. Nam signa divisoris cujusvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$. $3c$. $4x$ semel sub signis suis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ divisor erit quem invenire oportuit. Nam si per hunc dividas quantitatem propositam prodibit $3xx - 2bx + 2cb - 4bb$.

Rursus si quantitas sit $12x^5 - 16ax^4 + 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; divisores terminorum in quibus x non est colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non est, è regione a; & illos terminorum in quibus b non est, è regione b, ut hic vides. Dein illos omnes qui sunt unius

x | b. $2b$. $4b$. $aa + 3bb$. $2aa + 6bb$. $4aa + 12bb$.
  | $bb - 3aa$. $2bb - 6aa$. $4bb - 12aa$
a | $4xx - 3bx + 2bb$. $12xx - 9bx + 6bb$.
b | x. $2x$. $3x - 4a$. $6x - 8a$. $3xx - 4ax$. $6xx - 8ax$.
  | $2xx + ax - 3aa$. $4xx + 2ax - 6aa$.

dimensionis rejiciendos esse sentio, quia simplices b. $2b$. $4b$. x. $2x$, & partes compositorum $3x - 4a$. $6x - 8a$, non nisi semel in omnibus divisoribus reperiantur; tres autem sunt literæ in quantitate pro-

 posita

posita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter divisores duarum dimensionum $aa+3bb$. $2aa+6bb$. $4aa+12bb$. $bb-3aa$ & $4bb-12aa$ rejicio, quia partes eorum aa. $2aa$. $4aa$. bb & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non nisi semel reperiuntur. Divisoris autem $2bb-6aa$, qui solus restat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ similiter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in divisore $4xx-3bx+2bb$ & pars $6aa$ in divisore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb$, $6aa$, $4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes vero $3bx$, $2ax$ quæ duas literas involvunt non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ, dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$: assume literam quamvis c, & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus divisore $4x-2b+3c$, invento dele c; & habebitur divisor desideratus $4x-2b+3$.

Aliquando divisores facilius quam per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate propo-

proposita sit unius tantum dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratia, si proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - cx^3 + acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; quæratur communis divisor terminorum $-cx^3 + acxx - 8aacx + 6a^3c$ in quibus c unius est tantum dimensionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac divisor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ dividet totam quantitatem.

Cæterum maximus duorum numerorum divisor communis, si prima fronte non innotescit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor qui tandem nihil relinquit. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, restabitque nihil: Quod indicat 29 esse divisorem quæsitum.

Haud secus in speciebus communis divisor, ubi compositus est, invenitur subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: si modò & quantitates illæ & residuum juxta literæ alicujus dimensiones ut in Divisione ostensum est, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipsas per suos omnes divisores qui aut simplices sunt, aut singulos terminos instar simplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem divisorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$ evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore & restabit $-axx - 2aax + 2a^3$. Quod itidem per $-a$ divisum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino novissimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum est; & restabit $-2axx - 4aax + 4a^3$, quod per $-2a$ divisum fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc cum idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciorem, nempe ad $\dfrac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita si habeatur fractio $\dfrac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3}$, termini ejus imprimis abbreviandi sunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ de $6a^3 + 15aab - 4acc - 10bcc$, restabit $\begin{matrix}15b\\+18c\end{matrix}\,aa\;\begin{matrix}-10bcc\\-12c^3\end{matrix}$. Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$ perinde ac si $5b + 6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ & secunda vice restabit $-9aac + 6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut ante. Quare $3aa - 2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ & obtinebitur $\dfrac{2a^3 + 5aab}{3ab - 9bc}$.

Quod

Quod si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere, nisi forsan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio $\frac{aadd - ccdd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur ita ut Numerator evadat $\begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} dd \begin{matrix} -aacc \\ +c^4 \end{matrix}$ ac Denominator $\begin{matrix} 4aa \\ -4ac \end{matrix} d \begin{matrix} -2acc \\ +2c^3 \end{matrix}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminũ per $aa - cc$ & utrumque Denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac si $aa - cc$ & $2a - 2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd - cc$, & vice Denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$ reduci potest. Quod si neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram divident absque residuo. Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa - ab$, nempe a & $a - b$. Dein tentandum est an alteruter a vel $a - b$ dividet etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ absque residuo.

De Reductione Fractionum ad communem Denominatorem.

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius. Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ sive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b.

Hæc autem Reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum, quæ si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a+\frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$ vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$.

Et

Et $\frac{c^4 + x^4}{cc - xx} - cc - xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc - xx}$. Atque ita $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$ sive $\frac{14 + 15}{21}$ hoc est $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$ sive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$ sive $\frac{4}{12}$ hoc est $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ sive $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$ sive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones ubi plures sunt gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a - x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & restabit $\frac{aa - ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3 - 3aax + 2x^3}{3ax}$, unde aufer denique $\frac{ax}{a - x}$ & restabit $\frac{3a^4 - 6a^3x + 2ax^3 - 2x^4}{3aax - 3axx}$. Atque ita si habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & restabit $\frac{61}{21}$.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

RAdicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem divisoris alicujus. Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem divisoris aa fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem divisoris 16 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicē divisoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aa - 4ab + 4bb}{cc}$ fit

$\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{25}{49}$ fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, sive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$ radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et sic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ sive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}\,\overline{8a^3b+16a^4}$ extrahendo radicem cubicam divisoris $8a^3$ fit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$. Haud secus $\sqrt{4}\,a^3x$ extrahendo radicem quadraticam divisoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$ vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam divisoris a^4 fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$ vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inservit, sed & earum Additioni & Subductioni, si modò ex parte radicali conveniant ubi ad formam simplicissimam reducuntur. Tunc enim uniri possunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ hoc est $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc est $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et sic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid est rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$ hoc est $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3}:\overline{b^4+2ab^3}$ eva-

evadit $2a\sqrt[3]{b+2a}-b\sqrt[3]{b+2a}$ hoc est $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De Reductione Radicalium ad eandem denominationem.

Cum in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale cujus index est minimus numerus quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo quoties index ille jam major evaserit. Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt[3]{aax}$ evadit $\sqrt[6]{a^3x^3}$ in $\sqrt[6]{a^4xx}$ hoc est $\sqrt[6]{a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{ax}$ evadit $\sqrt[4]{aa}$ in $\sqrt[4]{ax}$ hoc est $\sqrt[4]{a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ evadit $\sqrt[4]{36}$ in $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ hoc est $\sqrt[4]{30}$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc est $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc est $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt[3]{b+2a}$ evadit $\sqrt[3]{8a^3}$ in $\sqrt[3]{b+2a}$ hoc est $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ sive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ sive $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

De Reductione Radicalium *ad simpliciores radicales per extractionem radicum.*

Radices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur, sic extrahe. Designet A quantitatis alicujus partem majorem, B partem minorem: & erit $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2}$ quadratū majoris partis radicis; & $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius B. Ut si quantitas sit $3 + \sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA - BB} = 1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1 + \sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$. Eodem modo si de $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa, & pro B $2x\sqrt{aa - xx}$, & erit $AA - BB = a^4 - 4aaxx + 4x^4$. Cujus radix est $aa - 2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa - xx$, il-

lud

lud alterius xx; adeoque radix $x + \sqrt{aa - xx}$. Rursus si habeatur $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$, scribendo $aa + 5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax + 4xx}$ pro B, fiet $AA - BB = a^4 + 6a^3x + 9aaxx$ cujus radix est $aa + 3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa + 4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{aa + 4ax} - \sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ & $-\sqrt{12} - \sqrt{24} = B$ fiet $AA - BB = 8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ hoc est (ut supra) $1 + \sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Cæterum ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam Quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$. $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$. $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium. Sit quantitas $A \pm B$. Ejus pars major A. Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum N, cujus potestas N^c dividitur per $AA - BB$ sine residuo, & sit quotus Q. Computa $\sqrt[c]{A + B \times \sqrt{Q}}$ in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide $A\sqrt{Q}$ per maximum divisorem rationa-

rationalem: Sit quotus s, sitque $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ in numeris integris proximis t. Et erit $\frac{ts\pm\sqrt{ttss-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ radix quæsita, si modo radix extrahi potest.

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB=343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $N=7$ & $Q=1$. Porro $A+B\times\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}+25$ extracta prioris partis radice fit paulo major quam 56: ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r=4$. Insuper $A\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale est fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis est s, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis est 2. Ergo $t=2$. Denique ts est $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ est 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ seu $\sqrt[6]{1}$ est 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ est radix quæsita si modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt{2}+1$ sit $\sqrt{968}+25$ & res succedit.

Rursus si radix cubica extrahenda sit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, Cujus divisores sunt 5, 5, 5, 2. Ergo $N=5, 2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$ seu $\sqrt[3]{\overline{68+\sqrt{4374}}\times 2}$ in numeris proximis integris est $7=r$. Insuper $A\sqrt{Q}$ seu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale est fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s=1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ seu $\frac{7+\frac{12}{7}}{2}$ in numeris integris proximis est $4=t$: ergo $ts=4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$ &

$\sqrt[2c]{Q}$

$\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[6]{4}$ seu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\dfrac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$; Erit $AA - BB = 3$, adeoque $N = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$. $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[10]{81}$ seu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterum in hujusmodi operationibus si quantitas fractio sit vel partes ejus communem habent divisorem; radices denominatoris, & factorum seorsim extrahe. Ut si ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\dfrac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\dfrac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $11 + \sqrt{125}$, cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

De

De forma ÆQUATIONIS.

ÆQUATIONES, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuo æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipuè modis conſiderandæ veniunt: vel ut ultimæ concluſiones ad quas in Problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modò Problema ſit definitum & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideò debent inter ſe comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui ineſt unica quam quærimus incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt, donec evadat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus, in quibus x deſignat quantitatem quæſitam ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quaſcunque quantitates ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos poſt explicandas inveſtigari poteſt.

$x = p.$		$x - p = 0.$
$xx = px + q.$	Vel	$xx - px - q = 0.$
$x^3 = pxx + qx + r.$		$x^3 - pxx - qx - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$		$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.		&c.

Ad horum normam itaque termini æquationum ſecundum dimenſiones incognitæ quantitatis in ordinem ſemper redigendi ſunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eſt pluri-

plurimarum dimensionum, instar x, xx, x^3, x^4, & secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, instar p, px, pxx, px^3, & sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic $x^3 * -bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, est æquatio tertii gradus, & $Z^4 \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} Z^3 * \begin{matrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{matrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio secundi gradus: cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$ secundi etiam gradus, dabit x.

Atque hæ sunt conclusiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum resolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abstractè doceam. Æquationis autem solitariæ reductionem in sequentibus regulis complectar.

De

De concinnanda Æquatione solitaria.

Reg. I. Siquæ sunt quantitates quæ se mutuo destruere, vel per Additionem aut Subductionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt. Veluti si habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri solet per translationem ad contrarias partes cum signo contrario. Ut si habita æquatione $5b = 8a + x$ desideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum signo mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo si habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac desideretur y, transpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte consistant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. sequentem, dividendo scilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam transpositionem & ordinationem evadit $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$, vel $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0$.

Reg. II. Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi: vel si per eandem

eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari. Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$ multiplica omnes per c & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

Reg. III. Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt. Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per $a - x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ siquidem x inibi reperiatur, & prodit $ax + ab - bx = ax - xx$, seu $ab - bx = -xx$, & facta utriusque partis translatione $xx = bx - ab$. Atque ita si habeatur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$ terminique juxta y ordinandi sint, multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$ vel saltem per divisorem $2y - c$ quo y tollatur è denominatore, & exurget $\frac{a^3 - abb}{c} = 2yy - 3cy + cc$ & ordinando $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$. Ad eundem modum $\frac{ad}{x} - a = x$ multiplicando per x evadit $ad - ax = xx$, & $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a + b - x}$ multiplicando

 primo

primo per xx, dein per $a+b-x$ evadit $\frac{a^3bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

Reg. IV. Sicui surdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se semel multiplicanda si radix quadratica sit, vel bis si sit cubica &c. Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa-ax}+a=x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa-ax}=x-a$; & quadratis partibus, $aa-ax=xx-2ax+aa$, seu $0=xx-ax$ hoc est $x=a$. Sic etiam $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}-a+x=0$, transponendo $-a+x$ evadit $\sqrt[3]{aax+2axx-x^3}=a-x$, & partibus cubicè multiplicatis $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$, seu $xx=4ax-aa$. Et sic $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$ quadratis partibus evadit $yy=ay+yy-a\sqrt{ay-yy}$ & terminis debitè transpositis $ay=a\sqrt{ay-yy}$ seu $y=\sqrt{ay-yy}$, & partibus iterum quadratis $yy=ay-yy$, & transponendo denuo, $2yy=ay$ sive $2y=a$.

Reg. V. Terminis secundum dimensiones literæ alicujus ope præcedentium regularum dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi. Sic $2y=a$ dividendo per 2 evadit $y=\frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a}=a$ dividendo per $\frac{b}{a}$ evadat $x=\frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix}2ac\\-cc\end{matrix}x^3\begin{matrix}+a^3\\+aac\end{matrix}xx\begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix}x-a^3cc=0$ dividendo per $2ac-cc$ evadit

x^3

$$\frac{x^3 \begin{matrix}+a^3\\+aac\end{matrix} xx \begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix} x - a^3cc}{2ac - cc} = 0, \text{ sive } x^3 \frac{+a^3 + aac}{2ac - cc} xx$$

$$-aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0.$$

REG. VI. Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem. Sic enim $y^3 = \begin{matrix}-2c\\+b\end{matrix} yy + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad easdem partes hoc modo, $y^3 \begin{matrix}+2c\\-b\end{matrix} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in capite de divisione ostensum est: prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est & alibi satius docebitur.

REG. VII. Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte instituitur. Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer $2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisque partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$ & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, & extracta utrobique radice $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et sic universaliter Si sit $xx = \cdot px \cdot q$, erit $x = \cdot \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \cdot q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis ac p & q in æquatione priori afficienda sunt; sed $\frac{1}{4}pp$

ſemper affirmativè ponendum. Eſtque hoc exemplum Regula ad cujus ſimilitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam ſimplicium reduci poſſunt. E. g. Propoſita æquatione $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc eſt ſcribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{4}pp \cdot q$, atque orietur $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, vel $y = \frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Eodem modo æquatio $yy = ay - 2cy + aa - cc$ conferendo $a - 2c$ cum p, & $aa - cc$ cum q, dabit $y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{1}{4}aa - ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^3$ cujus termini impares deſunt, ope hujus regulæ evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}$, & extracta iterum radice $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^3}}$. Et ſic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione ſolitaria, quarum uſum cum Analyſta ſatis perſpexerit, ita ut æquationem quamcunque propoſitam ſecundum quamlibet literarum in ea complexarum diſponere noverit, & ejuſdem literæ ſi ea unius ſit dimenſionis, aut maximæ poteſtatis ejus ſi plurium, valorem elicere: haud difficilem ſentiet comparationem plurium æquationum inter ſe; quam pergo jam docere.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur: æquationes istæ (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x = 3$. Et sciendum est quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli, atque adeo cum tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitatis incognitæ, & si sint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius est tantum dimensionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic positis $a+x=b+y$ & $2x+y=3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a+x-b=y$, & secunda dabit $3b-2x=y$. Est ergo $a+x-b=3b-2x$, sive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$ seu $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}$ $(=y)$ $=\frac{bb}{x}$; sive ordinando $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$ tollendo x dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}$ $(=x)$ $=\frac{2aac-ayy}{bc}$: & reducendo $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$ & $ay=xz$ tollendo z, dant $x+y$ $(=z)$ $=\frac{ay}{x}$ sive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur subducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo residuum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$ & manebit $a+3x-4b=0$, sive $x=\frac{4b-a}{3}$.

Ex-

Exterminatio quantitatis incognitæ substituendo pro ea valorem suum.

CUM in altera saltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit, valor ejus in ea quærendus est; & pro se in æquationem alteram substituendus. Sic propositis $xyy = b^3$ & $xx + yy = by - ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy} = x$: quare in secundam substituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$.

Propositis autem $ayy + aay = z^3$; & $yz - ay = az$, ut y tollatur, secunda dabit $y = \frac{az}{z - a}$. Quare pro y substituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz - 2az + aa} + \frac{a^3z}{z - a} = z^3$. Et reducendo, $z^4 - 2az^3 + aazz - 2a^3z + a^4 = 0$.

Pari modo propositis $\frac{xy}{c} = z$ & $cy + zx = cc$, ad z tollendum pro eo substituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem secundam, & prodit $cy + \frac{xxy}{c} = cc$.

Cæterum qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit sæpenumero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari possit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$ & $x = \frac{az}{x - b}$ si æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx = abb$ sive $x = b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio marte cum res tulerit investigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimensionum existit.

CUM in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit valor maximæ potestatis ejus in utraque quærendus est; Deinde si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum &c, ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima potestas sive dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx + 5x = 3yy$ & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$ & secunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & sic x ad unicam tantum dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debite reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, sive $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propositis (velut in $xx + 5x = 3yy$) substituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. Quam ut in ordinem redigatur

tur, multiplico per $4yy+60y+225$, & prodit $81y^4+72yy+16+90y^3+40y+675yy+300$ $=12y^4+180y^3+675yy$, sive $69y^4-90y^3+72yy$ $+40y+316=0$.

Præterea si sit $y^3=xyy+3x$, & $yy=xx-xy$ -3: ut y tollatur multiplico posteriorem æquationem per y & fit $y^3=xxy-xyy-3y$ totidem dimensionum quot prior. Jam ponendo valores ipsius y^3 sibimet æquales habeo $xyy+3x=xxy-xyy$ $-3y$, ubi y deprimitur ad duas dimensiones. Per hanc itaque & simpliciorem ex æquationibus primo propositis $yy=xx-xy-3$ quantitas y prorsus tolli potest insistendo vestigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem absolvi possunt; idque sæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$ & $yy=2xy+\frac{x^4}{aa}$, ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y sicut in Reg. 7. ostensum est, & prodibunt $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, & $y=x+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Jam hos ipsius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}=x+$ $\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, restabit $\frac{xx}{a}=x$, vel $xx=ax$ & $x=a$.

Porro ut ex æquationibus $x+y+\frac{yy}{x}=20$, & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$ tollatur x, aufer y de partibus

bus æquationis primæ, & restat $x+\frac{yy}{x}=20-y$, & partibus quadratis fit $xx+2yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y+yy$, tollendoque utrinque yy restat $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y$. Quare cum $400-40y$ & 140 iisdem quantitatibus æquentur, erit $400-40y=140$, sive $y=6\frac{1}{2}$. Et sic opus in plerisque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimensionum existit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laboriosus nonnunquam requiritur: sed labor tunc plurimum minuetur per exempla sequentia tanquam regulas adhibita.

Reg. I.

Ex $axx+bx+c=0$, & $fxx+gx+h=0$,
Exterminato x prodit
$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah:+\overline{bh-cg}\times bf:+\overline{agg+cff}\times c=0.$$

Reg. II.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fxx+gx+h=0$,
Exterminato x prodit
$$\overline{ah-bg-2cf}\times ahh:+\overline{bh-cg-2df}\times bfh:+\overline{ch-dg}\times\overline{agg+cff}:+\overline{3agh+bgg+dff}\times df=0.$$

Reg. III.

Ex $ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$, & $fxx+gx+h=0$,
Exterminato x prodit
$$\overline{ah-bg-2ef}\times ah^3:+\overline{bh-cg-2df}\times bfhh:+\overline{agg+cff}\times\overline{chh-dgh+egg-2efh}+\overline{3agh+bgg+dff}\times dfh:+\overline{2ahh+3bgh-dfg+eff}\times eff:-\overline{bg-2ah}\times efgg=0.$$

Reg.

Reg. IV.

Ex $ax^3+bxx+cx+d=0$, & $fx^3+gxx+hx+k=0$, Exterminato x prodit

$$ah-bg-2cf\times adhh-achk:+ak+bh-cg-2df\times bdfh:-ak+bh+2cg+3df\times aakk:+cdh-ddg-cck+2bdk\times agg+cff:+3agh+bgg+dff-3afk\times ddf-3ak-bh+cg+df\times bcfk:+bk-2dg\times bbfk:-bbk-3adh-cdf\times agk=0.$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx+5x-3yy=0$, & $3xx-2xy+4=0$ exterminetur x: in regulam primam pro a, b, c; f, g, & h respective substituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et signis $+$ & $-$ probe observatis oritur $4+10y+18yy\times 4:+20-6y^3\times 15:+4yy-27yy\times -3yy=0$. Sive $16+40y+72yy+300-90y^3+69y^4=0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3-xyy-3x=0$ & $yy+xy-xx+3=0$, in regulam secundam pro a, b, c, d; f, g, h, & x substituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx+3$, & y, respective, proditque $3-xx+xx\times 9-6xx+x^4:-3x+x^3+6x\times -3x+x^3:+3xx\times xx:+9x-3x^3-x^3-3x\times -3x=0$. Tum delendo superflua & multiplicando, fit $27-18xx+3x^4$, $-9xx+x^6$, $+3x^4-18x^2+12x^4=0$. Et ordinando $x^6+18x^4-45xx+27=0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod si plures è pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur: ex æquationibus $ax=yz$, $x+y=z$ & $5x=y+3z$, si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x substituendo pro eâ valo-

valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem ſecundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a}+y=z$, & $\frac{5yz}{a}=y+3z$: E quibus deinde tolle z ut ſupra.

De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum ſurdarum exterminationem fingendo eas literis quibuſlibet æquales. Quemadmodum ſi ſit $\sqrt{ay}-\sqrt{aa-ay}=2a+\sqrt[3]{:ayy}$, ſcribendo t pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa-ay}$, & x pro $\sqrt[3]{:ayy}$ habebuntur æquationes $t-v=2a+x$, $tt=ay$, $vv=aa-ay$, & $x^3=ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x reſultabit tandem æquatio libera ab omni Aſymmetria.

Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur.

POſtquã Tyro in æquationibus pro arbitrio tranſformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæſtionibus ad æquationem redigendis tentet. Propoſita autem aliqua Quæſtione, Artificis ingenium in eo præſertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus deſignet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propoſitiones ſive ſententiæ quibus enunciatur ſint omnes aptæ quæ terminis algebraicis deſignari poſſint, haud ſecus quam conceptus noſtri characteribus græcis vel latinis. Et si ita, (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates versantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quæstionis sermone, ut ita loquar, analytico designet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Quemadmodum si quærantur tres numeri continue proportionales quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140: positis x, y & z nominibus numerorum trium quæsitorum, Quæstio è latinis literis in algebraicas vertetur ut sequitur.

Quæstio latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri his conditionibus	$x. \ y. \ z?$
Ut sint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ sive $xz=yy$
Ut omnium summa sit 20.	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum summa sit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæstio deducitur ad æquationes $xz=yy$, $x+y+z=20$ & $xx+yy+zz=140$, quarum ope x, y & z per regulas supra traditas investigandi sunt.

Cæterum notandum est solutiones quæstionum eo magis expeditas & artificiosas ut plurium evadere quo pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Sic in hac quæstione posito x pro primo numero & y pro secundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero, quæstionem ad æquationes sic reduco.

Quæstio

Quæstio latine enunciata.	Eadem algebraice.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x.\ y.\ \frac{yy}{x}?$
Quorum summa sit 20,	$x + y + \frac{yy}{x} = 20.$
Et quadratorum summa 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140.$

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$ & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi sunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotanis adauget, demptis 100 ℔ quas annuatim impendit in familiam, & post tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem resolvendum sciendum est quod plures latent propositiones quæ omnes sic eruuntur & enunciantur.

Latine.	Algebraice.
Mercator habet nummos quosdam	$x.$
Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.	$x - 100.$
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ sive $\frac{4x - 400}{3}.$
Annoque secundo expendit 100 ℔.	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ sive $\frac{4x - 700}{3}.$
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ sive $\frac{16x - 2800}{9}.$
Et sic anno tertio expendit 100 ℔.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ sive $\frac{16x - 3700}{9}.$

Et

Et reliquo trientem similiter lucratus est.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, five $\frac{64x-14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam sub initio.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$.

Quæstio itaque ad æquationem $\frac{64x-14800}{27}=2x$ redigitur; cujus reductione eruendus est x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x-14800=54x$ subduc $54x$ & restat $10x-14800=0$, seu $10x=14800$, & dividendo per 10 fit $x=1480$. Quare 1480 lb *sunt nummi sub initio, ut & lucrum.*

Vides itaque quod ad solutiones quæstionum quæ *circa numeros vel abstractas quantitatum relationes* solummodo versantur, nihil aliud fere requiritur quam ut è sermone Latino, vel alio quovis in quo Problema proponitur, translatio fiat in sermonem (si ita loquar) Algebraicum, hoc est in characteres qui apti sunt ut nostros de quantitatum relationibus conceptus designent. Nonnunquam vero potest accidere quod sermo quocum status quæstionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum possit verti; sed paucis mutationibus adhibitis, & ad sensum potius quam verborum sonos attendendo versio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: quæ ubi obvenerint, translatio ex unis in alias non verbo tenus instituenda est sed ex sensu determinanda. Cæterum ut hujusmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem conciliam & illustrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum solutiones adjungere:

PROB. I. Data duorum numerorum summa a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a-x$, eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: quorum differentia $aa-2ax$ supponitur b. Est itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ seu $\frac{aa-b}{2a}$ $(=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a})=x$.

EXEMPLI GR. Si summa numerorum seu a sit 8, & quadratorum differentia seu b 16: erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}$ $(=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri sunt 3 & 5.

PROB. II. Invenire tres quantitates x, y & z quarum paris cujusque summa datur.

Si summa paris x & y sit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: pro determinandis tribus quæsitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x+y=a$, $x+z=b$, & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & secunda æquatione, & emergent $y=a-x$ & $z=b-x$, quos valores pro y & z substitue in tertia, & orietur $a-x+b-x=c$ & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x æquationes superiores $y=a-x$ & $z=b-x$ dabunt y & z.

EXEMPL. Si summa paris x & y sit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13: tum in valoribus x, y & z scribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque x $(=\frac{a+b-c}{2})=3$, y $(=a-x)=6$, & z $(=b-x)=7$.

PROB.

PROB. III. Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda, ejusque prima atque minima pars x, & super hanc excessus secundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d: & erit $x + b$ secunda pars, $x + c$ tertia pars & $x + d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x + b + c + d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b + c + d$ & restat $4x = a - b - c - d$ sive $x = \frac{a - b - c - d}{4}$.

EXEMPL. Proponatur linea 20 pedum sic in 4 partes distribuenda ut super primam partem excessus secundæ sit 2 pedum tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt x $\left(= \frac{a - b - c - d}{4}\right.$ sive $\left.\frac{20 - 2 - 3 - 7}{4}\right) = 2$, $x + b = 4$, $x + c = 5$ & $x + d = 9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iisdem conditionibus dividitur.

PROB. IV. Viro cuidam nummos inter mendicantes distribuere volenti, desunt octo denarii quo minus det singulis tres denarios. Dat itaque singulis duos denarios & tres denarii supersunt. Quæritur numerus mendicantium.

Esto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x - 8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x - 8$ sunt tres. Hoc est $x - 8 = 3$ seu $x = 11$.

PROB. V. Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill.

in 3 horis, ac B una hora ſerius iter inſtituit quam A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B. Et cum A pertranſeat 7 mill. in 2 hor. pertranſibit ſpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod ſit 7 mill. 2 hor. :: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum b pertranſeat 8 mill. in 3 hor. pertranſibit ſpatium ſuum $59-x$ in $\frac{177-3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia ſit 1 hor; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177-3x}{8}$, & emerget $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35=x$. Nam multiplicando per 8 fit $185-3x=\frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295-21x=16x$, ſeu $1295=37x$. Et dividendo denique per 37, exoritur $35=x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generalius.

Datis duorum mobilium A & B eodem curſu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: determinare metam in qua convenient.

Pone mobilis A eam eſſe celeritatem qua ſpatium c pertranſire poſſit in tempore f, & mobilis B eam eſſe qua ſpatium d pertranſire poſſit in tempore g; & locorum intervallum eſſe e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

CAS.

CAS. I. Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motus longius distat a meta: pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e; & restabit $x-e$ pro distantia B a meta: Et cum A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quod sit spatium c ad tempus f ut spatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B pertranseat spatium d in g, tempus in quo pertransibit spatium $x-e$ erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cum horum temporum differentia supponatur h, ut ea evadant æqualia adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ si modo B prius incipiat moveri, & evadet $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ vel $\frac{ge+dh}{g-\frac{d}{c}f}=x$. Sin A prius moveri incipiat adde h tempori $\frac{gx+ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx+ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg-df}=x$.

CAS. II. Quod si mobilia obviam eant, & x sit ut ante initialis distantia mobilis A a meta, tum $e-x$ erit initialis distantia ipsius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet distantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam suam $e-x$. Quorum temporum minori, ut supra, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ si B prius incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. Sin A prius incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge-gx}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

EXEMPL. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancri atque post tres dies Luna in principio Arietis: quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Resp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cum ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motus lunæ quæ longius distat a meta: erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris, quæ, si scribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro h; evadet $\frac{13,1,90+13,1,3}{13,1-1,1}$; hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice principio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

EXEMPL. II. Si Tabellarii duo A & B 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora serius iter instituit quam A: quæriter iter quod A conficiet antequam conve-

conveniat B. Resp. 35 mill. Nam cum obviam eant & A primo instituat iter, erit $\frac{cge + cdh}{cg + df}$ iter quæsitum. Et hoc, si scribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7,3,59 + 7,8,1}{7,3 + 8,2}$; hoc est $\frac{1295}{37}$ sive 35.

PROB. VI. Data agentis alicujus potestate, invenire quot ejusmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis potestas qua effectum c producere potest in tempore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iste producere potest in tempore d, ad effectum quem potest producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iste unicus ad omnes agentes: adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

EXEMPL. Si scriba in 8 diebus 15 folia describere potest, quot ejusmodi scribæ requiruntur ad describendum 405 folia in 9 diebus? Resp. 24. Nam si substituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405,8}{9,15}$ hoc est $\frac{3240}{135}$, sive 24.

PROB. VII. Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c respective;

& hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$. Quare est $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, & per reductionem $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$.

EXEMPL. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, viz. A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: & quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro a, b, c, d, e, f, g scribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12}}$ sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent.

PROB. VIII. Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + kC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & d, e, f, g, h, &c. proportiones earundem in misturis. Et sit $pA + qB + rC$ mistura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet $pA + qB + rC$.

Est itaque $\left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ +gyA + hyB + kyC \\ +lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC$.

Adeoque collatis terminis $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, & per reductionem

nem $x = \frac{p-gy-lz}{d} = \frac{q-hy-mz}{e} = \frac{r-ky-nz}{f}$.

Et rursus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d} = \frac{q-hy-mz}{e}$ & $\frac{q-hy-mz}{e} = \frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionẽ dant

$$\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh} (=y) = \frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$$

Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-dh$, δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = \frac{\delta+\zeta z}{\theta}$, & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta} = z$. Invento z pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = y$ & $\frac{p-gy-lz}{d} = x$.

Exempl. Si tres sint metallorum colliquefactorum misturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥12, æris ℥1, & stanni ℥3, secundæ pondo continet argenti ℥1, æris ℥12, & stanni ℥3, & tertiæ pondo continet æris ℥14, stanni ℥2 & argenti nihil; sintque hæ misturæ ita componendæ ut pondo compositionis contineat argenti ℥4 æris ℥9 & stanni ℥3: pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective, & erit α $(= ep-dq = 1,4 - 12,9) = -104$, & β $(= dm-el = 12,14-1,0) = 168$, & sic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. Adeoque z, $\left(= \frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta} = \frac{-3432+3432}{5720-5544}\right) = 0$, y $\left(= \frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = \frac{-104+0}{-143}\right) = \frac{8}{11}$, & x $\left(= \frac{p-gy-lz}{d} = \frac{4-\frac{8}{11}}{12}\right) = \frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo misturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo tertiæ & nihil primæ, aggre-

aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres ſtanni.

PROB. IX. Datis plurium ex iiſdem rebus miſturarum pretiis, & proportionibus miſtorum inter ſe, pretium cujuſvis è miſtis determinare.

Cujuſvis rerum A, B, C, miſturæ $dA + gB + lC$ pretium eſto p, miſturæ $eA + hB + mC$ pretium q, & miſturæ $fA + kB + nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C ſubſtitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$, $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

EXEMPL. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ ſimul 15 libris 12 ſolidis; Deinde conſimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ ſimul 16 libris: Ac tertio conſimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ ſimul 34 lib. Quæritur quanti æſtimandus ſit modius cujuſque grani? Reſp. Modius tritici 5 ſolidis, hordei 3 ſolidis & avenæ 2 ſolidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r ſcribendo reſpective 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit α ($= ep - dq = 26, 15\frac{3}{5}, - 40, 16$) $= -234\frac{2}{5}$; & β ($= dm - el = 40, 50 - 26, 20$) $= 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoque z ($= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 28800}{-806400 + 355200} = \frac{274560}{2745600}$) $= \frac{1}{10}$. y ($= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}$) $= \frac{3}{20}$. Et x ($= \frac{p - gy - lz}{d}$

$= 15\frac{3}{5}$

$= \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}) = \frac{1}{4}$. Constitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ seu 5 solidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ seu 3 solidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ seu 2 solidis.

PROB. X. Datis & misturæ & mistorum gravitatibus specificis invenire proportionem mistorum inter se.

Sit e gravitas specifica misturæ $A + B$ cujus A gravitas specifica est a, & B gravitas b: & cum gravitas absoluta seu pondus componatur ex mole corporis & gravitate specifica, erit aA pondus ipsius A, bB pondus ipsius B & $eA + eB$ pondus aggregati $A + B$, adeoque $aA + bB = eA + eB$, indeque $aA - eA = eB - bB$ seu $e - b. a - e ::$ A. B.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 ($:: e-b. a-e ::$ A. B) :: moles auri in corona, ad molem argenti, vel 190. 31 ($:: 19 \times 10. 10\frac{1}{3} \times 3 :: a \times \overline{e-b}. b \times \overline{a-e}$) :: pondus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI. Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum æque bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: quæritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depascant pratum b; tum per analogiam boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depascent pratum e: puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cùm propter graminis incre-

incrementum boves d in tempore f, depascant solummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ per tempus h. Et in tempore $h-c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{h}-\frac{eca}{bh}$ sive $\frac{bdfh-ecah-bdcf+aecc}{bfh-bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$ & prodibit $\frac{bdfh-ecah-bdcf+ecfa}{bfh-bch}$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam pratū g bobus $\frac{bdfgh-ecagh-bdcgf+ecfga}{bcfh-bcch}$ per idem tempus h pascendis sufficiet.

Exempl. Si 12 boves depascant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; quæritur quot boves depascant 36 jugera in 18 septimanis? Resp, 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgh-ecagh-bdcgf+ecfga}{befh-bceh}$ numeros 12, $3\frac{1}{2}$, 4, 21, 10, 9, 36, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h respective. Sed solutio forte haud minus expedita erit si è primis principiis ad formam solutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant $3\frac{1}{2}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis vel 16 boves in 9 septimanis vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: puta si gramen non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis

nis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incremeutum illud graminis per analogiam tantum erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. 14 sept. $\frac{5}{2}$ boves. 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas adde hosce 7 boves quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

PROB. XII. Datis sphæricorum corporum in eadem recta moventium, sibique occurrentium magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respective; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percussione exortum: & post reflexionem motus erunt $a\mathrm{A}-x$ & $b\mathrm{B}+x$; & celeritates $\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}$ ac $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}$ quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio

$b\mathrm{B}+$

$\frac{bB+x}{B} - \frac{aA+x}{A} = a-b$, & inde per reductionem fit $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A+B}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{aA-x}{A}$ & $\frac{bB+x}{B}$ substituto prodeunt $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ celeritas ipsius B post reflexionem.

Quod si corpora obviam eant, tum signo ipsius b ubique mutato, celeritates post reflexionem erunt $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$ & $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$: quarum alterutra si forte negativa obvenerit, id arguit motum illum post reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipsius A in casu priori intelligendum est.

EXEMPL. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad easdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b scribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA-aB+2bB}{A+B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA-bA+bB}{A+B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis post reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII. Invenire tres numeros continue proportionales quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140.

Pone numerorum primum x, & secundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy$

$+y^4$

$+\frac{y^4}{xx}=140$. Et per reductionem $xx\,{+y \atop -20}\,x+yy=0$, & $x^4\,{+yy \atop -140}\,xx+y^4=0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 5. substitue respective $1, 0, \overline{yy-140}, 0, y^4; 1, \overline{y-20}$, & yy; Et emerget $\overline{-yy+280}\times y^6:+\overline{2yy-40y}\times\overline{260y^4-40y^5}:+3y^4\times y^4:-2yy\times\overline{y^6-40y^5+400y^4}:=0$. Et per multiplicationem $1600y^6-10400y^5=0$. seu $y=6\frac{1}{2}$. Id quod etiam brevius alia methodo sed minus obvia supra inventum est. Porro ut inveniatur x substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx\,{+y \atop -20}\,x+yy=0$. Et exurget $xx-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, seu $xx=13\frac{1}{2}x-42\frac{1}{4}$. Et extracta radice $x=6\frac{3}{4}+$ vel $-\sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x+y+\frac{yy}{x}=20$, seu $xx={20 \atop -y}\,x-yy$ & extracta radice $x=10-\frac{1}{2}y+\sqrt{100-10y-\frac{1}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & restat $\frac{yy}{x}=10-\frac{1}{2}y-\sqrt{100-10y-\frac{1}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum à tribus hisce numeris $400-40y$, adeoque $400-40y=140$, sive $y=6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, substitue eum pro y in primo

primo ac tertio numero ſupra invento; & evadet primus $6\frac{1}{4} + \sqrt{3\frac{1}{16}}$ ac tertius $6\frac{1}{4} - \sqrt{3\frac{1}{16}}$ ut ante.

PROB. XIV. Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii ſimul conſtituant 12, & duo extremi 20.

Sit x ſecundus numerus; & erit $12-x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus: adeoque $\frac{xx}{12-x} + \frac{144-24x+xx}{x} = 20$. Et per reductionem $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$ ſeu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri nnmeri è ſuperioribus dantur.

PROB. XV. Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur ſumma a, & ſumma quadratorum b.

Etſi deſideratas quantitates ut plurimum immemediate quærere ſolemus, ſiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eſt quæ conditionibus omnino ſimilibus præditæ ſunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præſtat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum harum ſummam vel differentiam vel rectangulum. Ponamus ergo ſummam duorum mediorum numerorum eſſe s, & rectangulum r; & erit ſumma extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y ſecundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum ſub mediis $sy-yy=r$, indeque medii $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$ & $s-y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$: Item rectangulum ſub extremis $ax - sx - xx = r$, indeque extremi $x = \frac{a-s}{2}$

$+\sqrt{}$

$+\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}}-r$, & $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}}-r$.

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss-2as+aa-4r$ quæ est $=b$. Ergo $r=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}as+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

Duo medii $\begin{cases}\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}. \\ \frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}aa}.\end{cases}$

Duo extremi $\begin{cases}\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}. \\ \frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}ss}.\end{cases}$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}s+p. \\ \frac{1}{2}s-p.\end{matrix} \quad \& \quad \begin{matrix}\frac{a-s}{2}+q. \\ \frac{a-s}{2}-q.\end{matrix}$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque $\frac{as-ss}{4}-\frac{1}{2}qs+\frac{pa-ps}{2}-pq=\frac{1}{4}ss-ps+pp$. Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi, & erit $\frac{as-ss}{4}+\frac{1}{2}qs\frac{-pa+ps}{2}-pq=\frac{1}{4}ss+ps+pp$. Harum æquationum priorem aufer è posteriori & restabit

restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = a + s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, seu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor numeri quæsiti è superioribus.

PROB. XVI. Si pensio annua librarum a per quinque annos proxime sequentes solvenda, ematur parata pecunia c, quæritur quanti æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum.

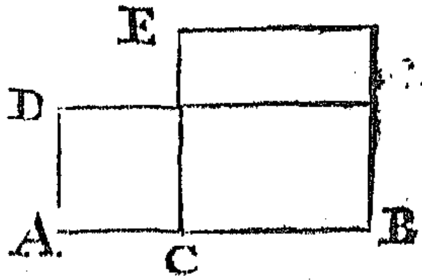
Pone $1 - x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno, hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a post annum solvenda valebit ax paratæ pecuniæ, post duos annos axx, post tres ax^3. post quatuor ax^4 & post quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, seu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimensionum, cujus ope cum x per regulas post docendas inventum fuerit, pone $x.\ 1 :: 100.\ y.$ & erit $y - 100$ usura usuræ centum librarum per annum.

Atque has in quæstionibus ubi solæ quantitatum proportiones absque positionibus linearum considerandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat: pergamus jam ad Problematum Geometricorum solutiones.

Quo-

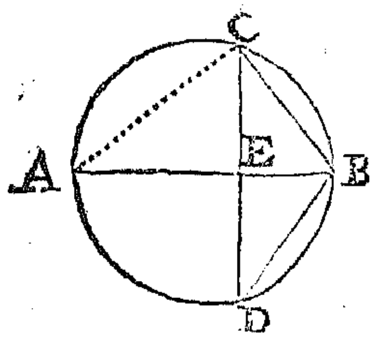
Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

Quæſtiones Geometricæ eadem facilitate iiſdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta AB in extrema & media proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt ita ut BE quadratum maximæ partis ſit æquale rectangulo BD ſub tota & minore parte contento: poſito



$AB = a$, & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentius occurrunt, à variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent ut egeant ulteriori inventione & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujuſque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma: conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque quod quæſtiones circa eaſdem lineas definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuſcunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eadem plane methodo ex Analyſeos ſerie perficietur, nulla omnino circumſtantia variata præter fictas linearum ſpecies ſive nomina quibus datas à quæſitis ſolemus diſtinguere. Quemadmodum ſi quæſtio ſit de Iſoſcele CBD in circulum inſcripto, cujus latera BC, BD, & basis CD cum diametro circuli AB conferenda sunt: ea vel proponi potest de investigatione diametri ex datis lateribus & basi, vel de investigatione basis ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione laterum ex datis basi & diametro: sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratur diameter pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est $AB \,.\, BC :: BC \,.\, BE$, sive $x \,.\, b :: b \,.\, BE$. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & CE $= \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$: & propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x.



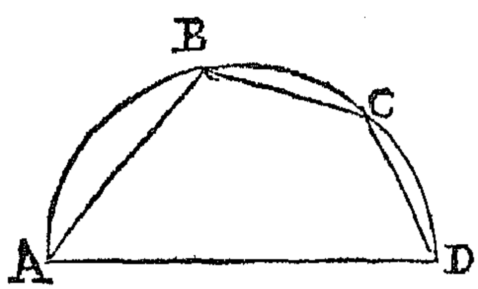
Sin quærarur Basis, pono $AB = c$, $CD = x$ & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter sim. tri. ABC & CBE est $AB \,.\, BC :: BC \,.\, BE$, sive $c \,.\, b :: b \,.\, BE$. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}x$, & propter angulum CEB rectum $CEq + BEq = BCq$ hoc est $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Atque ita si latus BC vel BD quæratur, pono $AB = c$, $CD = a$ & BC vel $BD = x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est $AB \,.\, BC :: BC \,.\, BE$; sive $c \,.\, x :: x \,.\, BE$. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$ sive $\frac{1}{2}a$; & propter

ter angulum CEB rectum est $CEq + BEq = BCq$, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas áliis atque aliis literis designavi prout datæ vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: nam æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ alia est reductio ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{bb - cc}$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}}$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diversis modis reduci debet:) sed in harum æquationum inventione nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quæsitas quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quæsitorum competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: vel potius convenit ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitis propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

Proposito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæsitas habito discrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoscas quænam si assumantur, synthetice gradiendo, dabunt cæteras. Ad quod faciendum non opus est ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci possint, sed sufficit animadversio generalis quod possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; si quæstio sit de circuli diametro AD tribusque lineis AB, BC, & CD in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifestum est diametrum AD determinare semicirculum, dein lineas AB & CD per inscriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæsitum BC, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analysin eruatur non ita manifestum est. Hoc idem quoque de AB vel CD si ex reliquis datis quærerentur, intelligendum est. Quod si AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æque patet



id non fieri posse Synthetice; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ sunt inscribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura postulat ut AD non Synthetice sed ex ejus assumptione quæratur ut ad data fiat regressus.

Cum varios ordines quibus termini quæstionis sic evolvi possint perspexeris, è syntheticis quoslibet

adhibe,

adhibe, assumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progressus & ad ipsas vicissim difficillimus. Nam computatio, ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet; ac promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac si de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillime prodituro instituerctur, quam de quæstione prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur AD: cum id synthetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo AD tanquam datum & abinde computationem non secus incipio quam si revera daretur & aliqua ex datis AB, BC & CD quæreretur. Atque hac methodo computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

Cæterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt: quemadmodum de BC ex AD, AB & CD colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis deſignentur, quales præſertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. ſcaturiunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel ſubductionem linearum eo ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut ſupra) factum à mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maxime ſe prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoſcatur, in iis comparandis Analyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29 & 32. lib 1. Prop. 4, 5, 6, 7 & 8. lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3. lib. 6. ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præſtant Prop. 36 & 37. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel à quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius è minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11 & 12. deſumptæ cum agitur de ſolidis,) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones

&

& ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei inſtantiam ſubjunxi Problema de perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demittendo ſine adjumento Prop. 47. lib. 1. ſolutum. Etſi vero juvet ſimpliciſſima principia à quibus problematum ſolutiones dependent non ignoraſſe, & iſtis ſolis adhibitis poſſe quælibet ſolvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non ſolum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus uſus eſt frequentiſſimus; ſed & alia etiam Theoremata nonnunquam adhibeantur.

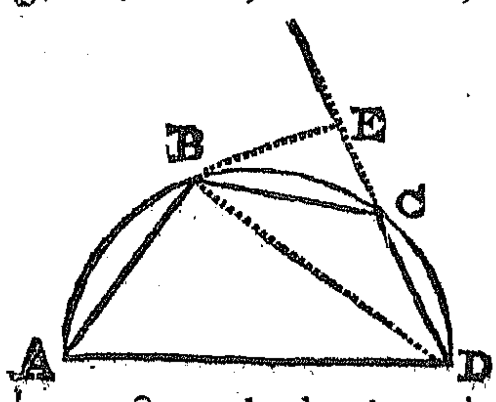
Quemadmodum ſi perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demiſſo, de ſegmentis baſis ad calculum promovendum agatur; ex uſu erit ſcire quod, Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo ſub baſi & diſtantia perpendiculi à medio baſis.

Si trianguli alicujus verticalis angulus biſecetur, computationi non ſolum inſerviet quod baſis ſecetur in ratione laterum, ſed etiam quod differentia factorum à lateribus & à ſegmentis baſis æquetur quadrato lineæ biſecantis angulum.

Si de figuris in circulo inſcriptis res eſt, Theorema non raro ſubveniet quod Inſcripti cujuſlibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur ſummæ factorum à lateribus oppoſitis.

Et hujuſmodi plura inter exercendum obſervet Analyſta, & in penum forte reſervet; ſed parcius utatur ſi pari facilitate aut non multo difficilius poſſit ſolutionem è ſimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo propoſita tanquam notiora, ſimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen ſufficientia animum præsertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujusmodi Theoremata ad solvenda Problemata accommodari possint, Schemata plerumque sunt ultra construenda, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status Problematis, & Theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes constituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et sic in cæteris; ad hanc metam semper collimando ut schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur.



Sic in exemplo proposito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum resolvatur. Deinde resolvo triangulum obliquangulum in duo rectangul a demittendo perpendiculũ à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppositum: quemadmodum a B in CD productam ad E ut huic per-

pen-

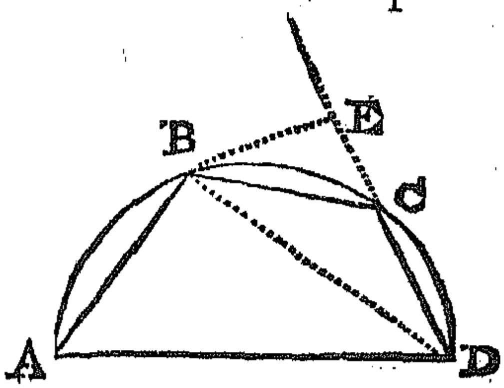
pendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3 Elem.) perinde ac BCE & BCD constituant; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem (assumendo AD, AB & BC tanquam si CD quæreretur) ad hunc modum institui posse, viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC (propter sim. tri. ABD & CEB) dant BE & CE. BD & BE (propter triang. BED rect.) dant ED; & ED − EC dat CD. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de CD sic inventum & litteram pro ea suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satius est quam opus in serie continuata nimis prosequi,) à diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE ut prius; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED (propter triang. rect. BED) dant BE. Potest etiam computatio hac lege optime institui ut valores quantitatum investigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12. Lib. 2. Elem. constet; nempe quod sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: quæro BDq ex assumptis AD & AB; ac CE ex assumptis AD, AB & BC. Et assumendo denique CD facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie Analyseos, deque schemate propter eam construendo semper debes una prospicere.

Ex his credo manifestum est quid sibi velint Geometræ cum jubent putes factum esse quod quæris.

ris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes quasi omnes ex prævia solutione fuissent notæ, & non amplius de solutione Problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis, etsi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: Et in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes prodent. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte agressus sum, sed cum ad æquationem deventum est sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 42° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $a + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitatibus quæ computationem ingre-

ingredientur (hoc eſt ex quibus aſſumptis aliarum valores derivandi ſunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & concluſionem (quantum poſſis conjicere) ſimpliciorem reddent, ſed non plures tamen quam propoſito ſufficiunt. Itaque pro quantitatibus quæ ex aliarum vocabulis facile deduci poſſint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod minimùm ſine nomine permittere ſolemus, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari poſſit. Quemadmodum in exemplo jam allato ſi dicam $AD = x$ & $AB = a$ ipſum BD nulla litera deſigno quod ſit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{xx - aa}$. Dein ſi dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE ſint ſimilia & inde lineæ AD . AB : : BC . CE proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC impoſita ſunt nomina; ea propter quartam CE ſine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum uſurpo. Atque ita ſi DC vocetur c, ipſi DE nomen non aſſigno quod ex partibus ejus DC & CE, ſive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.



Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum eſt. Nam poſtquam literæ

teræ pro ſpeciebus principalium linearum præſcriptæ ſunt, nihil aliud agendum reſtat quam ut ex iſtis ſpeciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviſo in æquationem coeant. Et in hoc caſu nihil reſtare video niſi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe eſt BCq − CEq (ſive $bb - \frac{aabb}{xx}$) = BEq, ut & BDq − DEq (ſive $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) = BE$q$. Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$: quæ reducta fit

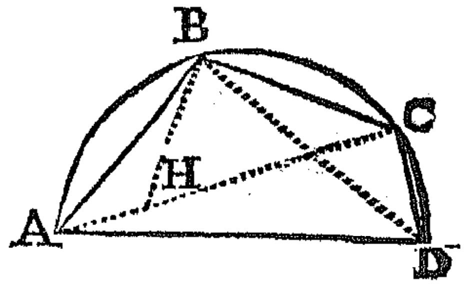
$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cum vero de ſolutione Problematis hujus plures modos etſi non multum diſſimiles in præcedentibus recenſuerim quorum iſte de Prop. 12. Lib. 2. Elem. deſumptus ſit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam ſubjungere. Sit itaque AD $= x$, AB $= a$, BC $= b$, & CD $= c$, eritque BDq $= xx - aa$, & CE $= \frac{ab}{x}$ ut prius. Hiſce dein ſpeciebus in Theorema BDq − BCq − CDq = 2CD × CE ſubſtitutis orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione $x^3 = \begin{matrix} aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc$. Ut ante.

Sed ut pateat quanta ſit in ſolutionum inventione varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geo-

Geometræ non ſit admodum difficile: viſum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio BD ſi vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC ſupra demiſſi demittatur perpendiculum à puncto D in latus BC vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque reſolvatur, iiſdem ferme quas jam deſcripſi methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab iſtis ſatis differentes;

Quemadmodum ſi diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex aſſumptis AD & AB; ut & AC ex aſſumptis AD & CD; deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inſcriptis, nempe



quod ſit AD $\times$ BC $+$ AB $\times$ CD $=$ AC $\times$ BD obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit BD $= \sqrt{xx - aa}$ & AC $= \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum ſpeciebus in Theorema jam recenſitum ſubſtitutis, exibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum

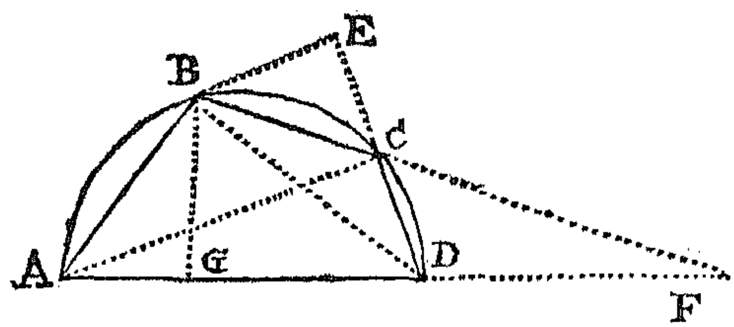
$$x^3 = \begin{matrix} aa \\ + bb \\ + cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cæterum ut pateat etiam quo pacto ſolutiones ex iſto Theoremate petitæ poſſint inde ad ſolas triangulorum ſimilitudines redigi: erigatur BH ipſi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA ſimilia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut

&c

& triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque quod ex proportionalitate BD. AD :: BC. HC detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH. Unde cum sit AH + HC = AC, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis $x, a, b, c,$ nec non ipsarum AC & BD valoribus $\sqrt{xx-cc}$ & $\sqrt{xx-aa}$: prima proportionalitas dabit $HC = \frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$, & secunda dabit $AH = \frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$.
Unde propter AH + HC = AC erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia, producantur BC & AD donec conveniant in F; & fient triangula ABF & CDF similia, quippe



quorum angulus ad F communis est, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur AF, proportio AB. AF :: CD. CF daret CF. Item AF − AD daret DF, & proportio CD. DF :: AB. BF daret BF: unde (cum sit

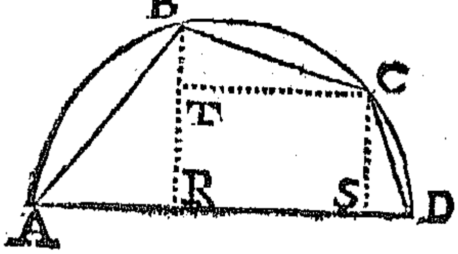
BF −

BF − CF = BC) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio AD . AB : : AB . AG. dabit AG : quo habito, Theorema e 13. 2. Elem. petitum, nempe quod sit $BFq + 2FAG = ABq + AFq$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto $AF = y$: erit (insistendo vestigiis Theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} = BF$. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x} = AG$, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio secunda. Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem inventus est $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex qua recte disposita fiet $x^3 = \begin{matrix} aa \\ + bb \\ + cc \end{matrix} x + 2abc$, ut ante.

Atque ita si AB ac DC producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen è fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD ut in duo triangula quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$ inde-

indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx-aa}$ $(=\frac{1}{2}AB \times BD)$ aream trianguli ABD. Porro demisso BE perpendiculariter in CD, (erit propter similia triangula ABD, BCE) AD. BD : : BC. BE, & proinde $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ $(=\frac{1}{2}CD \times BE)$ erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secus ducendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba}\sqrt{xx-cc}$, æquatio quæ quadrando ac ac dividendo per $aax-ccx$ redigetur ad formam sæpius inventam $x^3 = \begin{matrix} aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$.

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia, & obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ sunt donec modum quam poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in sequentem modum quam in aliquem è præcedentibus inci-

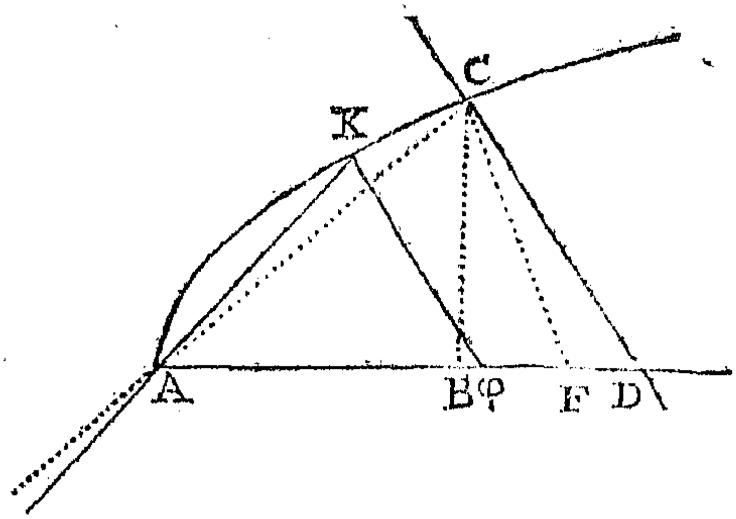


incidere. Demissis nempe BR & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BR, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est quod AD & AB dant AR, AD & CD dant SD, AD—AR—SD dat RS vel TC. Item AB & AR dant BR, CD & SD dant CS vel TR, & BR—TR dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores quam sunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria: nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod cum anguli sive positiones linearum per angulos expressæ statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ ab angulis datis possunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo descriptas respiciunt haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si AKC sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ AKϕ, cujus unum crus AK per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum Kϕ datæ longitudinis super rectam AD positione datam promovetur, & quæratur punctum

C in quo recta quævis CD positione data hanc curvam secabit: duco rectas ACF quæ normam in



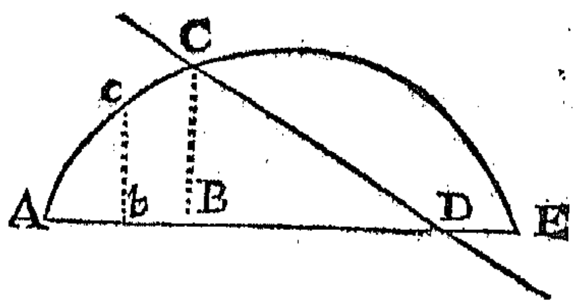
positione quæsita referant, & relatione linearum (sine aliquo dati & quæsiti discrimine aut respectu ad curvam) considerata, percipio dependentiam cæterarum à CF & qualibet harum quatuor BC, BF, AF & AC Syntheticam esse; quarum duas itaque ut CF $= a$ & CB $= x$ assumo, & inde computum ordiendo statim lucratus sum BF $= \sqrt{aa - xx}$ & AB $= \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$ propter ang. rectum CBF, lineasque BF. BC :: BC. AB continue proportionales. Porro ex data positione CD datur AD quam itaque dico b, datur etiam ratio BC ad BD quam pono d ad e & fit BD $= \frac{ex}{d}$ & AB $= b - \frac{ex}{d}$. Est ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc formã

$$x^4 = \frac{2bde\,x^3 \begin{matrix} -bbdd \\ +aaee \end{matrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd + ee};$$

unde demum è datis $a, b, d,$ & e erui debet x per regulas

las post tradendas, & intervallo isto x sive BC acta ipsi AD parallela recta secabit CD in quæsito puncto C.

Quod si non descriptiones Geometricæ sed æquationes pro curvis lineis designandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipsis lucro cedunt. Quemadmodum si datæ Ellipseos ACE intersectio C cum recta CD positione data quæratur: pro Ellipsi designanda sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$ ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q



dantur ex datâ specie Ellipsis. Cum itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dic a; & erit BD $a-x$, dabitur etiam angulus ADC & inde ratio BD ad BC quam dic 1 ad e, & erit BC (y) $=$ $ea - ex$, cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque per reductionem orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, seu

$$x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}.$$

Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricã vel per sectionẽ solidi designetur, potest tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

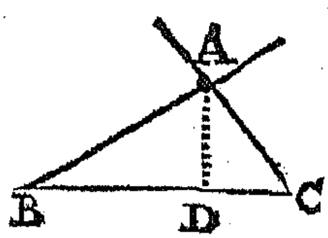
Sic in exemplo priori si AB dicatur x & BC y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CFq, hoc est $\frac{y^4}{xx}+yy=aa$; sive $y^4+xxyy=aaxx$. Estque hæc æquatio qua Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique basis longitudini AB congruens (adeoque ipsa Curva) definitur, & è qua proinde solutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur specie sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea designanda tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematū quæ in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium congessi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Data recta terminata BC a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA ducuntur in datis angulis ABC, ACB: invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC.

SIT BC$=a$, & AD$=y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula sinuum vel tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Est ergo $d.\ e::$ AD (y). BD. Quare BD $=\frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angu-

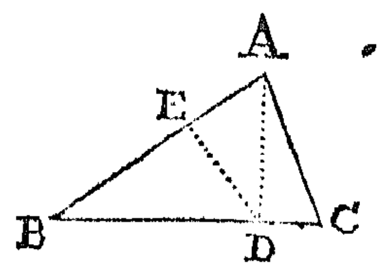


lum

lum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC $=\frac{fy}{d}$. At BD $+$ DC $=$ BC, hoc est $\frac{ey}{d}+\frac{fy}{d}=a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e+f$ evadit $y=\frac{ad}{e+f}$.

Prob. II.

Cujuslibet Trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & Basi BC quam perpendiculum AD ab angulo verticali secat in D: invenire segmenta BD ac DC.



SIT AB $=a$, AC $=b$, BC $=c$, & BD $=x$, eritque DC $=c-x$. Jam cum ABq $-$ BDq $(aa-xx)$ $=$ ADq; & ACq $-$ DCq $(bb-cc+2cx-xx)=$ ADq: Erit $aa-xx=bb-cc+2cx-xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa-bb+cc}{2c}=x$.

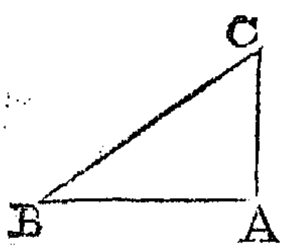
Cæterum ut pateat omnes omnium Problematum difficultates per solam linearum proportionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse: placuit sequentem hujus solutionem ex abundanti subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & stantibus jam positis linearum nominibus, erit AB . BD :: BD . BE.

$a \ . \ x \ :: \ x \ . \ \frac{xx}{a}$. Et BA $-$ BE $(a-\frac{xx}{a})$ $=$ EA.

$= EA$. Nec non $EA \cdot AD :: AD \cdot AB$ adeoque $EA \times AB$ $(aa - xx) = ADq$. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur ut ante $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

Prob. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenusam BC.



ESTO perimetur a, area bb, $BC = x$, & $AC = y$; eritque $AB = \sqrt{xx - yy}$: unde rursus periemeter $(BC + AC + AB)$ est $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area $(\frac{1}{2}AC \times AB)$ est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$ quare scribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori ut asymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, sive multiplicando per y, & ordinando $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$ & restat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo

$ay - xy$

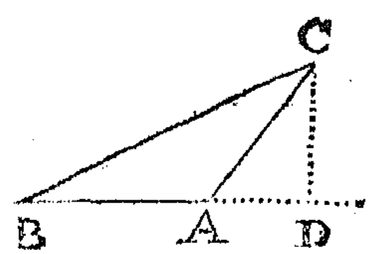
$ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimetrr $= a$, area $= bb$, & BC $= x$, eritque AC + AB $= 2a - x$. Jam cum sit xx (BCq) $=$ ACq + ABq, & $4bb = 2$AC $\times$ AB, erit $xx + 4bb =$ ACq + ABq + 2AC $\times$ AB $=$ quadrato ex AC + AB $=$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

Trianguli cujuscunque ABC, datis area, perimetro, & uno angulorum A, cætera determinare.



Esto perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum erit AC ad CD in data ratione, puta d ad e. Dic ergo AC $= x$ & erit CD $= \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} =$ AB. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget BD $= \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD$q$

& orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e}\sqrt{dd-ee} = BCq$. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & reſtabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = BC$, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd-ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, aſſumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e}\sqrt{dd-ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, ſive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiiſſet etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC ſimiliter ſe habent ad omnes conditiones problematis. Quare ſi AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ erit $AB = f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, & viciſſim: atque horum ſumma $2f$ ſubducta de perimetro relinquit tertium latus $BC = a - 2f$.

PROB. V.

Datis altitudine, baſi, & ſumma laterum invenire triangulum.

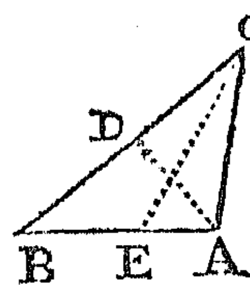
SIT altitudo $CD = a$, baſis AB dimidium $= b$, laterum ſemiſumma $= c$, & ſemidifferentia $= z$: eritque majus latus, puta $BC = c + z$, & minus $AC = c - z$.

$c-z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc BD $=\sqrt{cc+2cz+zz-aa}$, & inde AD $=\sqrt{cc-2cz+zz-aa}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum AD $=\sqrt{cc+2cz+zz-aa}-2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb+cz=b\sqrt{cc+2cz+zz-aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz-bbzz=bbcc-bbaa-b^4$. Et $z=b\sqrt{1-\frac{aa}{cc-bb}}$. Unde dantur latera.

Prob. VI.

Datis basi AB, summa laterum AC + BC, & angulo verticali C, determinare latera.

SIT basis $=a$, semisumma laterum $=b$, & semidifferentia $=x$, eritque majus latus BC $=b+x$ & minus AC $=b-x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit CD $=\frac{eb-ex}{d}$. Est etiam per



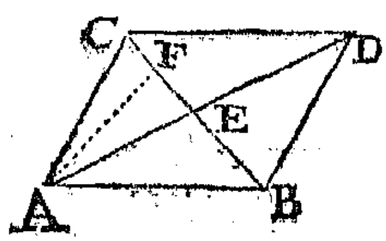
11. II. Elementorum $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC}$ hoc est $\frac{2bb+2xx-aa}{2b+2x}=$ CD; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x=\sqrt{\frac{daa+2ebb-2dbb}{2d+2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad basin quærerentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bise-

bisecans & basi occurrens in E; & erit AB . AC + BC (:: AE . AC) :: sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejusque complemento BEC si subducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. VII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.



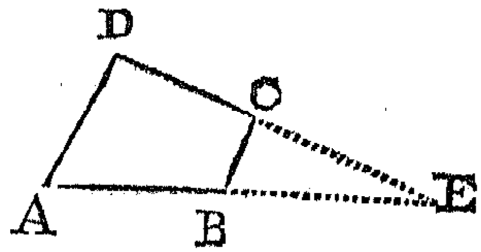
SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$, atque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare cum sit $EC = \frac{1}{2} BC$, & $AE = \frac{1}{2} AD$, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4} ADq + \frac{1}{4} BCq}{BC}$, & facta reductione $AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. VIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.

Latera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, ſitque $AB = x$ & $BC = y$, & propter angulos omnes datos dantur rationes BC



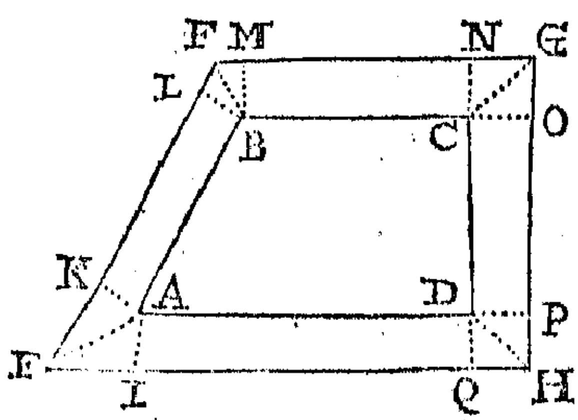
ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE = \frac{ey}{d}$ & $BE = \frac{fy}{d}$ adeoque $AE = x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit $AD = \frac{dx + fy}{g}$ & $ED = \frac{dx + fy}{h}$, adeoque $CD = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & ſumma omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, eſto a, & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n & erit triang. $BCE = \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d; & erit triang.

triang. ADE $= \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb, & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$, ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Et abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} + \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $-\frac{adqr}{pp} + \frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$ ſeu $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

Prob. IX.

Piſcinam ABCD perambulatorio ABCD EFGH datæ areæ, & ejuſdem ubique latitudinis circundare.



Eſto perambulatorii latitudo x & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demiſſis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia IK, LM, NO, PQ & in quatuor parallelogramma AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejusdem longitudis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo summa laterum $(AB + BC + CD + DA) = b$, & erit summa parallelogrammorum $= bx$.

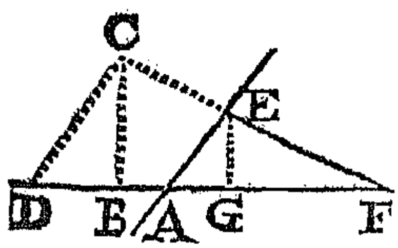
Porro ductis AE, BF, CG, DH; cum sit $AI = AK$ erit ang. $AEI =$ ang. $AEK = \frac{1}{2} IEK$ sive $\frac{1}{2} DAB$. Datur ergo ang. AEI & proinde ratio ipsius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit $IE = \frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$ AI sive $\frac{1}{2}x$ & fiet area trianguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK sunt æqualia, adeoque trapezium IK ($= 2$ triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo $BL . LF :: d . f$, & $CN . NG :: d . g$, & $DP . DH :: d . h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium $LM = \frac{fxx}{d}$, $NO = \frac{gxx}{d}$, & $PQ = \frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$ sive $\frac{pxx}{d}$ scribendo p pro $e + f + g + h$, erit æquale trapeziis quatuor $IK + LM + NO + PQ$; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$.

Latitudine Perambulatorii sic inventa facile est ipsum describere.

PROB.

PROB. X.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus positione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet.

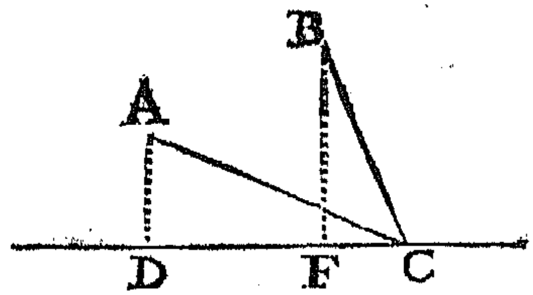


Age CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares AF, sitque AD $= a$, CB $= b$, AF $= x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc est $a + x. \ x. :: b. \ \frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} =$ EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo æquatione ordinata est $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ seu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

Nihil secus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione secabit.

PROB. XI.

Punctum C in data recta linea DF determinare, à quo ad alia duo positione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datā habeant differentiam. Vide Prop. 39.

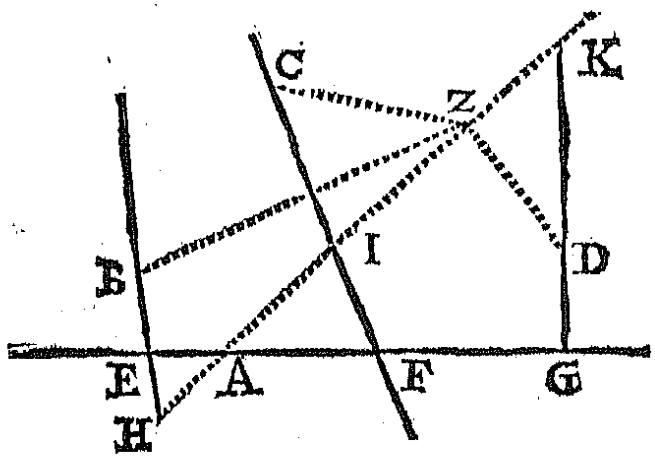


A Datis ad punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD $=a$, BF $=b$, DF $=c$, DC $=x$, & erit AC $=\sqrt{aa+xx}$, FC $=x-c$, & BC $\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Sit jam data harum differentia d, existente AC majori quam BC erit $\sqrt{aa+xx}-d=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et quadratis partibus $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx}=bb+xx-2cx+cc$. Factaque reductione & abbreviandi causa pro datis $aa+dd-bb-cc$ scripto $2ee$, emerget $ee+cx=d\sqrt{aa+xx}$. Iterumque quadratis partibus $e^4+2ceex+ccxx=ddaa+ddxx$. Et æquatione reducta $xx=\dfrac{2eecx+e^4-aadd}{dd-cc}$, seu $x=\dfrac{eec+\sqrt{e^4dd-aad^4+aaddcc}}{dd-cc}$.

Haud secus problema resolvitur si linearum AC & BC summa vel quadratorum summa aut differentia, vel proportio vel rectangulum vel angulus ab ipsis comprehensus detur: vel etiam si vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præsertim casu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB. XII.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor positione datas rectas lineas FA, EB, FC, GD, si aliæ quatuor lineæ ZA, ZB, ZC, & ZD in datis angulis ducantur, duarum è ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD summa detur.



E Lineis elige aliquam positione datam FA ut & positione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque $EA = x$ & $AZ = y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q, & erit $AH = \frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ si ea ponatur n ad p habebitur $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Præterea si data EF dicatur a, erit $AF = a - x$, Indeque, si propter datos angulos trianguli AFI statuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & restabit $IZ = y - \frac{ra - rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum si ponatur $EG = b$. $AG . AK :: l : s$ & $ZK . ZD :: . p . l$. obtinebitur $ZD = \frac{sb - sx - py}{p}$.

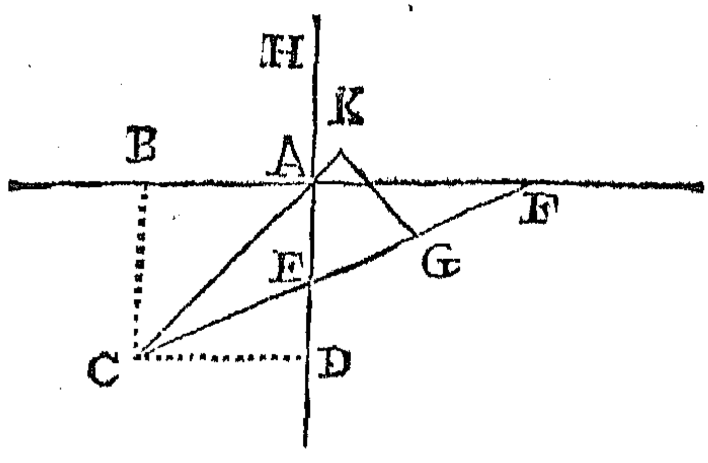
Jam ex statu quæstionis si duarum ZC & ZD summa $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - py}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ æquale gg, habebuntur duæ æquationes pro determinandis x & y. Per posteriorē fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$. & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - py}{p} - \frac{sngg - spyy}{qy} = f$. Et reducendo $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mpq + mps}$. Et abbreviandi causa scripto $2h$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mpq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppy - ppr - mpq + mps}$ fiet $yy = 2hy + kk$, sive $y = h \pm \sqrt{bb + kk}$. Cujus æquationis ope cum

y innotescit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x. Quod sufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur à quo ad plures vel pauciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum summa vel differentia vel contentum detur, aut æquetur cæterarum summæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas conditiones.

PROB. XIII.

Angulum rectum EAF data recta EF subtendere, quæ transibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidistans.



QUadratum ABCD compleatur, & linea EF bisecetur in G. Tum dic CB vel CD esse a, EG vel FG esse b, & CG esse x; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cum $CFq - BCq = BFq$, erit $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique propter similia triangula CDE, FBC, est CE. CD :: CF . BF, sive $x - b . a :: x + b . \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + \frac{ab}{x - b} =$

$\overline{x-b\sqrt{xx+2bx+bb-aa}}$. Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{matrix} 2aa \\ +2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} +2aabb \\ - b^4 \end{matrix}$. Et extracta radice ficut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG fic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati fatisfacit.

Idem aliter.

Sit $CE = x$, $CD = a$, & $EF = b$; eritque $CF = x + b$ & $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Et proinde cum fit $CE \cdot CD :: CF \cdot BF$, five $x \cdot a :: x + b \cdot \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$, erit $ax + ab = x\sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + bb \\ - 2aa \end{matrix} xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio difficilior eft quam in priori cafu. Sic autem investigari poteft. Pone $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + bb \\ - 2aa \end{matrix} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$, & extracta utrobique radice $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa + bb}$.

Ex his occafionem nactus fum tradendi regulam de electione terminorum ad ineundum calculum. Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas five fimilitudo relationis ad cæteros terminos quæftionis, ut oporteret æquationes per omnia fimiles ex utrovis adhibito produci, aut ambos fi fimul adhiberentur eafdem in æquatione finali dimenfiones &

eandem omnino formam (ſignis forte + & − exceptis) habituros eſſe; (id quod facile proſpicitur:) tunc neutrum adhibere convenit, ſed eorum vice tertium quemvis eligere qui ſimilem utrique relationem gerit, puta ſemiſummam vel ſemidifferentiam, vel medium proportionale forſan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferentur & ſine compare relatam. Sic in præcedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit ſi ducas itidem EF in angulo BAH,) atq; adeo nulla ratione ſuaderi poſſem cur ED potius quam BF, vel AE potius quam AF vel CE potius quam CF pro quærenda quantitate adhiberentur: vice punctorum C & F unde hæc ambiguitas proficiſcitur, ſumpſi (in ſolutione priori) intermediũ G quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD obſervat. Deinde ab hoc G non demiſi perpendiculum ad AF pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demiſiſſe ad AD. Et eapropter in neutrum CB vel CD demiſi, ſed inſtitui CG quærendum eſſe quod nullum admittit compar: & ſic æquationem biquadraticam obtinui ſine terminis imparibus.

Potui etiam (animadverſo quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG deſcripti) demiſiſſe GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæſiviſſe AK vel CK, (quippe quæ ſimilem etiam utrique AB & AD relationem gerunt:) atque ita in æquationem quadraticam $yy = \frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidiſſem poſito $AK = y$, $AC = e$, & $EG = b$. Et AK ſic invento erigendum fuiſſet perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G. per quod CF tranſiret.

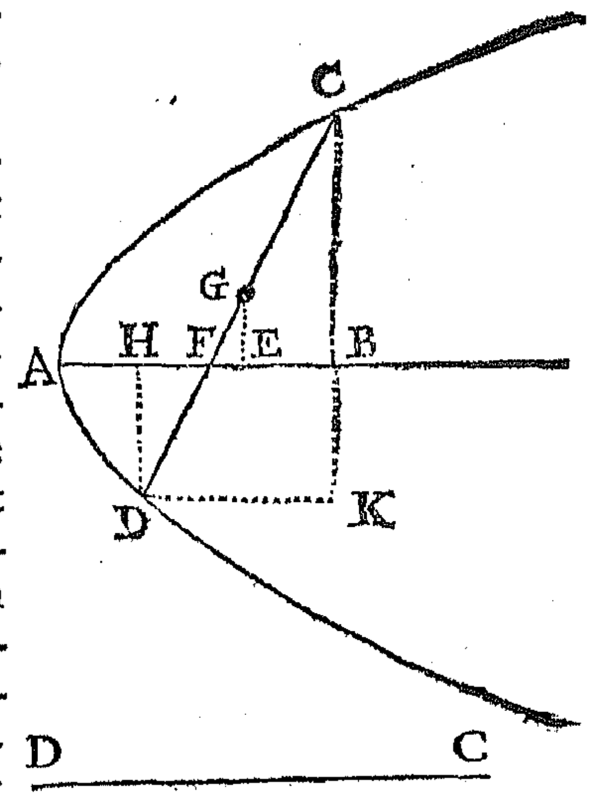
Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 5. & 6. ubi trianguli latera germana BC & AC determinanda erant, quæſivi potius ſemidifferentiam

quam

quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas è ſequenti Problemate magis eluceſcet.

PROB. XIV.

Rectam DC datæ longitudinis in datam Conicam ſectionem DAC ſic inſcribere ut ea per punctum G poſitione datum tranſeat.



SIT AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam poſitionem rectæ DC puncti D aut C inventio proponi poteſt: ſed cum hæc ſint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive comparia DG, DH, aut AH: ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & una determinet. Et hujuſmodi video eſſe punctum F.

Jam ſit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam ſuppono pro Conica ſectione determinanda datam eſſe, ſit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter $GE \cdot EF :: CB \cdot FB$

CB . FB erit iterum FB $= \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

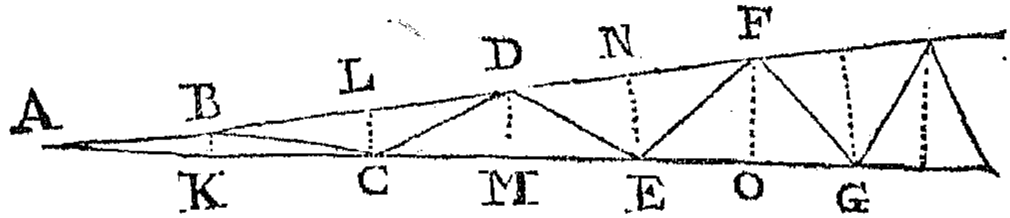
His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola per æquationem $rx = yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$. Et extracta radice, $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ esse differentiam gemini valoris y, id est linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK. Est autem FG . GE : : DC . CK, hoc est $\sqrt{bb + zz}$, $b : : c . \sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$. Ducendoque quadrata extremorũ & medinorũ in invicẽ, & facta ordinando oriētur $z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{matrix} -4abbr \\ -bbrr \end{matrix} zz + 4b^4rz \begin{matrix} -4ab^4r \\ +b^4cc \end{matrix}}{rr}$, æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset si quæsivissem CG vel CB aut AB.

Prob. XV.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

IN angulo quovis FAG inscribe lineas AB, BC, CD, DE, &c. Ejusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, &c. Isoscelia: adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD $=$ ang. A $+$ ACB $= 2$ ang. A, & ang. DCE $=$ ang. A $+$

$A + ADC = 3$ ang. A & ang. $EDF = A + AED = 4$ ang. A, & ang. $FEG = 5$ ang. A, & sic deinceps. Po-



sitis jam AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel posita AB diametro illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo $AB = 2r$ & $AK = x$, dein sic operare.

$$AB \cdot AK :: AC \cdot AL.$$

$$2r \cdot x :: 2x \cdot \frac{xx}{r}.$$

$$\text{Et } \left.\begin{matrix} AL - AB \\ \frac{xx}{r} - 2r \end{matrix}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB \cdot AK :: AD\ (2AL - AB.) \cdot AM.$$

$$2r \cdot x :: \frac{2xx}{r} - 2r \cdot \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$\text{Et } \left.\begin{matrix} AM - AC \\ \frac{x^3}{rr} - 3x \end{matrix}\right\} = CM, \text{ Triplicatio,}$$

$$AB \cdot AK :: AE\ (2AM - AC).\ AN,$$

$$2r \cdot x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x \cdot \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\text{Et } \left.\begin{matrix} AN - AD \\ \frac{x^4}{r^3} - 4\frac{xx}{r} + 2r \end{matrix}\right\} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

 AB. AK

AB . AK :: AF (2AN−AD) . AO.

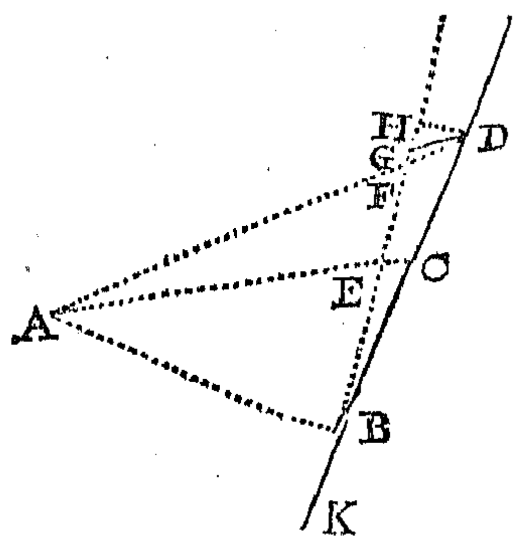
$$2r \cdot x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r \cdot \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\text{Et } \left.\begin{matrix}\text{AO}-\text{AE} \\ \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x\end{matrix}\right\} = \text{EO, Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. & habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem, $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem, $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadrisectionem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem &c.

Prob. XVI.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.



Sit A oculus spectatoris, B locus Cometæ in prima obsertione, C in secunda ac D in tertia: quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaque dantur anguli BAC BAD; adeoque si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumpto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo AB $= a$, BE $= b$, & BF $= c$. Porro ex datis obser-

observationum intervallis dabitur ratio BC ad BD quæ si ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cum sit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b erit $BG = e$, adeoque $GF = e - c$. Adhæc si dimittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF similia & similiter secta lineis AE ac DG, erit FE . AB : : FG . HD, hoc est $c - b \cdot a :: e - c \cdot \frac{ae - ac}{c - b} = HD$. Erit etiam FE. FB : : FG . FH, hoc est $c - b \cdot c :: e - c \cdot \frac{ce - cc}{c - b} = FH$: cui adde BF sive c & fit $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (sive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc est ut tangens anguli HDB sive ABK ad radium. Quare cum a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK, adeoque facta resolutione erit ut $e - c$ ad $e - b$ (sive GF ad GE) ita c (sive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

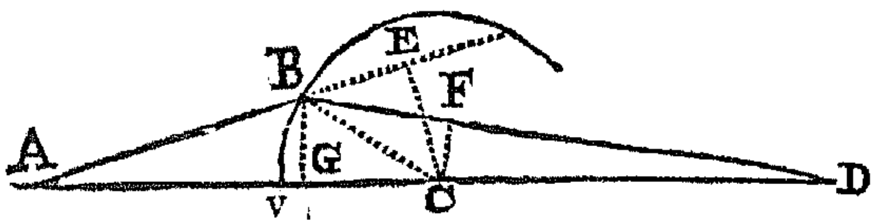
Dic itaque ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandam quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB.

PROB. XVII.

Radiis a puncto lucido ad ſphæricam ſuperficiem refringentem divergentibus, invenire concurſus ſingulorum refractorum cum axe ſphæræ per punctum illud lucidum tranſeunte.

SIT A punctum illud lucidum, & BV ſphæra, cujus axis AD, Centrum C, & vertex V, ſitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demiſ-



ſis ad radios iſtos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic AC $= a$, VC vel BC $= r$, CG $= x$, & CD $= z$, eritque AG $= a - x$, BG $= \sqrt{rr - xx}$, AB $= \sqrt{aa - 2ax + rr}$: & propter ſim. tri. ABG & ACE, CE $= \dfrac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item GD $= z + x$, BD $= \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter ſim. tri. DBG ac DCF, CF $= \dfrac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Præterea cum ratio ſinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem eſſe a ad f, & erit $\dfrac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \dfrac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$, ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$,

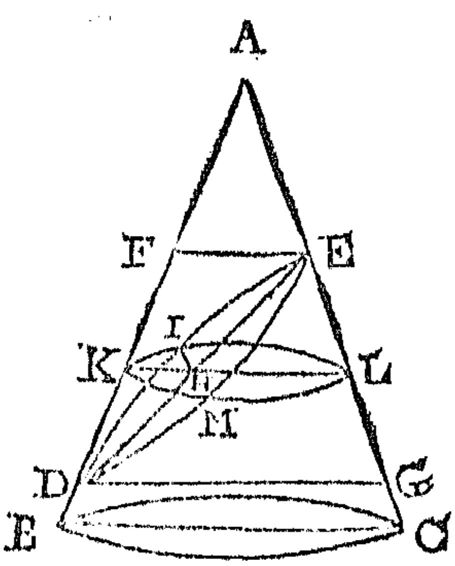
erit

erit $f\sqrt{zz+2zx+rr}=z\sqrt{aa-2ax+rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz=\frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit $zz=\frac{2pxz+prr}{q-2x}$ ac $z=\frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Inventum est itaque z; hoc est longitudo CD, adeoque punctum quæsitum D quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

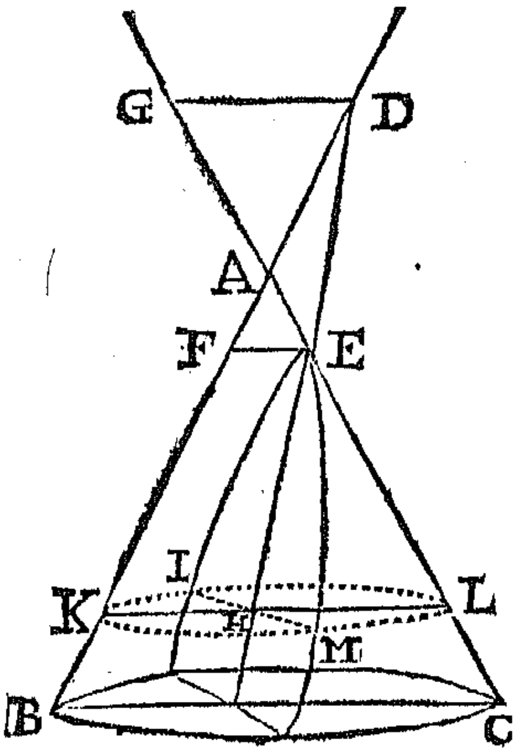
Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

Prob. XVIII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.



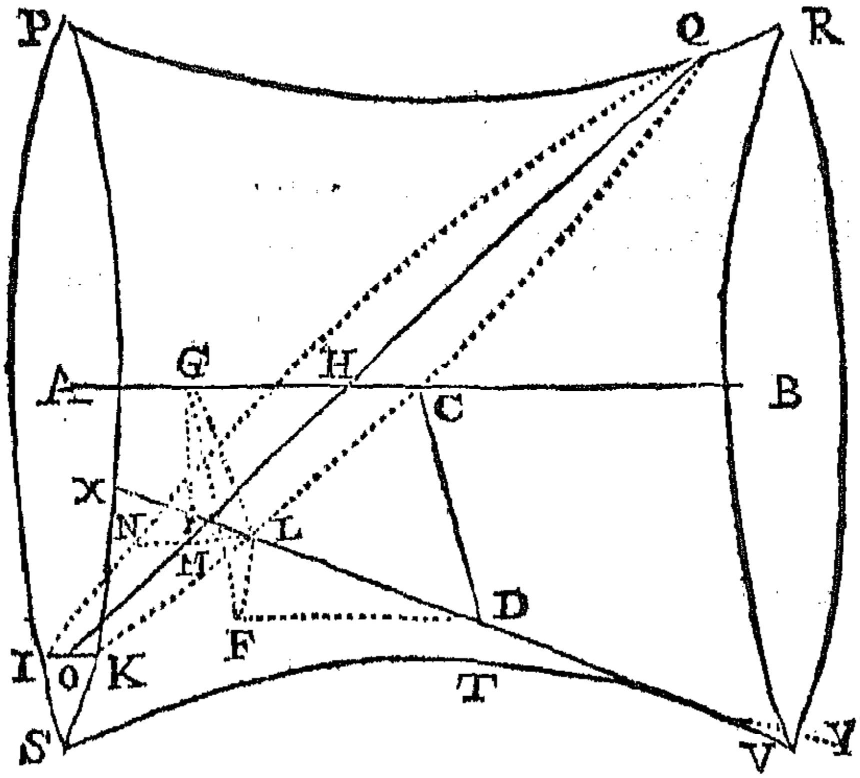
SIT ABC conus circulari basi BC insistens; IEM ejus sectio quæsita; KILM alia quælibet sectio parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI; & ABC tertia sectio perpendiculariter bisecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipsi AK in D, actisque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic EF$=a$, DG$=b$, ED$=c$, ED $= c$, EH $= x$, & HI $= y$: & propter sim. tri. EHL, EDG, erit ED . DG :: EH . HL $= \frac{bx}{c}$. Dein propter sim. tri. DEF, DHK, erit DE . EF :: DH . ($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$. Denique cũ sectio KIL sit parallela basi adeoque circularis, erit HK $\times$ HL $=$ HIq, hoc est $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM, quæ æquatio cum sit ad Ellipsin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2, patet sectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam esse.



Quod si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit AK $=$ EF (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ (HK $\times$ HL) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB. XIX.

Si recta XY circa axem AB, ad distantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum PQRUTS ista convolutione generatum secetur plano quolibet INQLK: invenire figuram Sectionis.



ESto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelā AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque CD $=a$, CH $=b$, HM $=x$, & ML $=y$; & propter datum angulum GHO posito MH . HG : : $d . e$: erit $\frac{ex}{d}=$ GH, & $b+\frac{ex}{d}$ GC vel FD. Adhæc propter angulum

datum

datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito FD . FL :: $g . h$, erit $\frac{hh}{g} + \frac{hex}{dg} = $ FL, cujus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget GL$q = aa + \frac{hhhh}{gg} + \frac{2\,hhhex}{dgg} + \frac{hheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MG$q$ (HMq − HGq seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hhhh}{gg} + \frac{2\,hhhe}{dgg}x + \frac{hhee - ddgg + eegg}{ddgg}xx$ (= MLq) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major sit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus insuper punctis C & H) parallelogrammum.

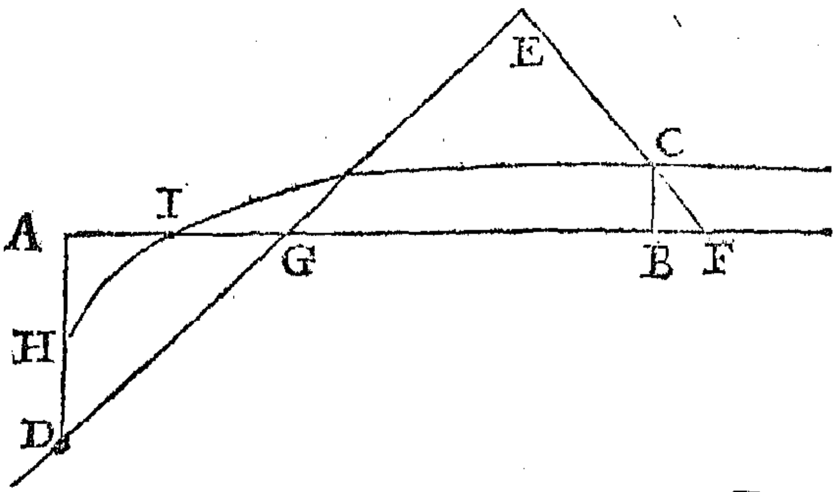
Prob. XX.

Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo transeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur super AF: invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C describit.

SIT EC vel CF $= a$, perpendiculum CB $= y$, AB $= x$, & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF $(\sqrt{aa - yy})$ BC + CF $(y + a)$ ::

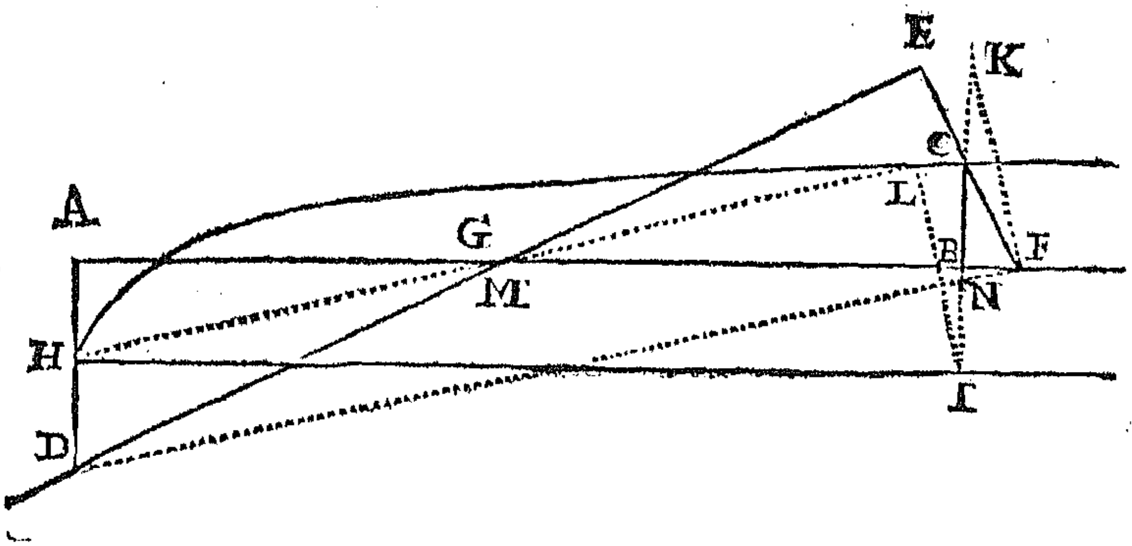
EF

EF ($2a$.) EG + GF (AG + GF) seu AF. Quare



$\frac{2ay + 2aa}{\sqrt{aa - yy}}$ (=AF=AB + BF) $= x + \sqrt{aa - yy}$.
Jam multiplicando per $\sqrt{aa - yy}$ fit $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa - yy}$, seu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa - yy}$, & quadrando partes divisas per $\sqrt{a + y}$, ac ordinando prodit $y^3 + 3ayy \begin{matrix} + 3aa \\ + xx \end{matrix} y \begin{matrix} + a^3 \\ - axx \end{matrix} = 0$.

Idem aliter.

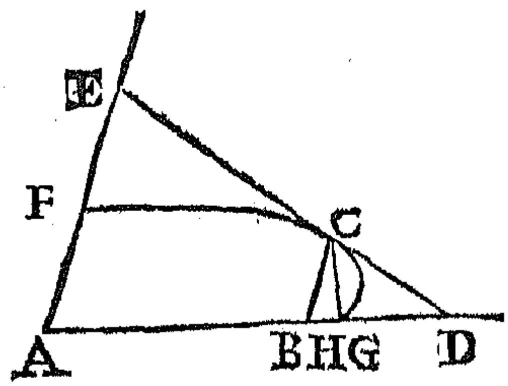


In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF, & age

age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus K $= \frac{1}{2}$ BCF $= \frac{1}{2}$ EGF = GFD = AMH = MHI = CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo FC $= a$, HI $= x$, & IC $= y$; & erit BN $(2a - y.)$ BK (y) :: LC . LH :: CIq (yy). HIq (xx). adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH pertinentem.

PROB. XXI.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant: proponatur Curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit.



A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB $= x$, BC $= y$, CE $= a$ & CD $= b$, & propter similia triangula DCB, DEA erit EC. AB :: CD. BD. hoc est a. x :: b. BD $= \frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH sit a. e. :: BC. BH, & erit BH $= \frac{ey}{a}$. Aufer

hanc

hanc de BD & restabit HD $= \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC est $BCq - BHq = CHq$, hoc est $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, est $CDq - CHq = HDq$, hoc est $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ ($= HDq = \frac{bx - ey}{a}$ quadrato) $= \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et per reductionem $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: Ubi cum incognitæ quantitates sint duarum tantum dimensionum, patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea extracta radice fit $y = \frac{bex \mp b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a . e :: BC . BH$; & BC necessario major est linea quam BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa est quantitas, atque adeo curva erit Ellipsis.

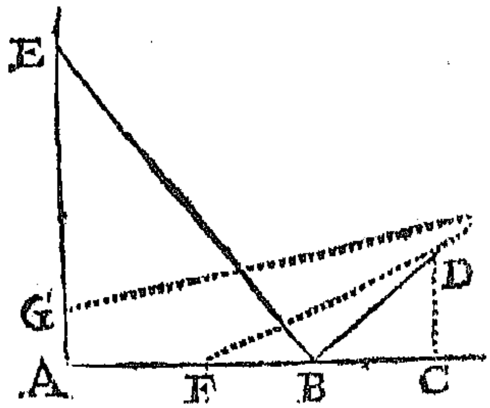
PROB. XXII.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo subtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG: invenire lineam istam FDG quam punctum D describit.

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis AC $= x$, & DC $= y$, atque EB $= a$ & BD $= b$: in triangulo BDC propter

 ter

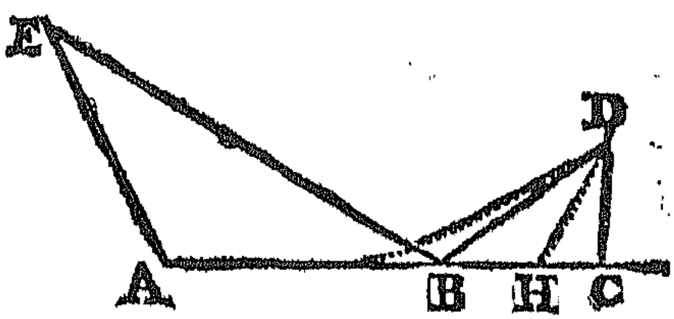
ter angulum rectum ad C, est $BCq = BDq - DCq = bb - yy$. Ergo $BC = \sqrt{bb - yy}$ & $AB = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est BD. DC :: EB. AB. hoc est $b . y :: a . x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$.



Et extracta radice $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$.

Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.

Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt: Sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic proce-

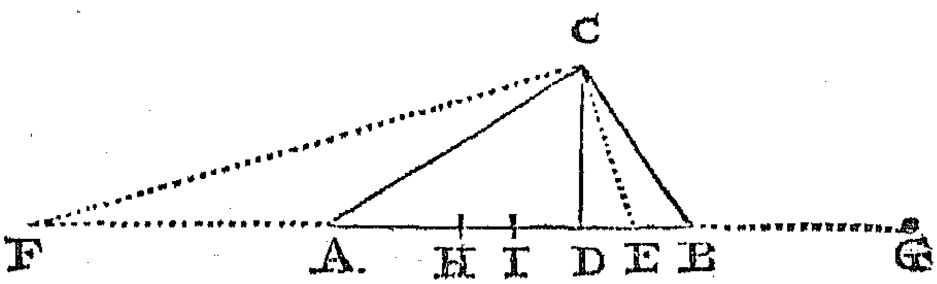


dendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE puta obtusum, dictisque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$ & $HD = y$, propter similia triangula EAB, BHD erit BD. DH :: EB. AB. hoc est $b . y :: a . AB = \frac{ay}{b}$. Aufer ſer hanc de AH, & reſtabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, aſſume DH ad HC in ratione quavis data, puta b ad e, & cum DH ſit y, erit HC $\frac{ey}{b}$, & $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD eſt $BDq = BHq + DHq + 2\,BH \times HC$, hoc eſt $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cum b ſit major e hoc eſt $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam eſſe Ellipſin.

PROB. XXIII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & baſis AB. Biſeca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG &



BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq - BCq$

$= ADq$

$= ADq + CDq - CDq - BDq = ADq - BDq$ $= \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times 2DI$. Ergo $\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI$. Et $2AB \cdot \overline{AC + BC} :: \overline{AC - BC} \cdot DI$. Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis.

De IE, hoc eſt de $AC - \frac{1}{2}AB$ aufer DI, & reſtabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{BC + AC - AB} \times \overline{BC - AC + AB}}{2AB}$, ſive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{AC + AB + BC} \times \overline{AC + AB - BC}}{2AB}$, ſive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. Et cum ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF mediũ proportionale inter DF & EF: erit $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}AB$ & habebitur area $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ ($:: AC \cdot DE$) $::$ radius ad ſinum verſum anguli A.
2. $2AB \times AC \cdot \sqrt{FG \times FH}$ ($:: AC \cdot FD$) $::$ rad. ad coſin. verſ. A.
3. $2AB \times AC \cdot \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ ($:: AC \cdot CD$) $::$ rad. ad ſin. A.

4. $\sqrt{FG}$

4\. $\sqrt{FG \times FH} \cdot \sqrt{HE \times EG}$ (: : CF . CE) : : rad. ad tang. $\frac{1}{2}$ A.

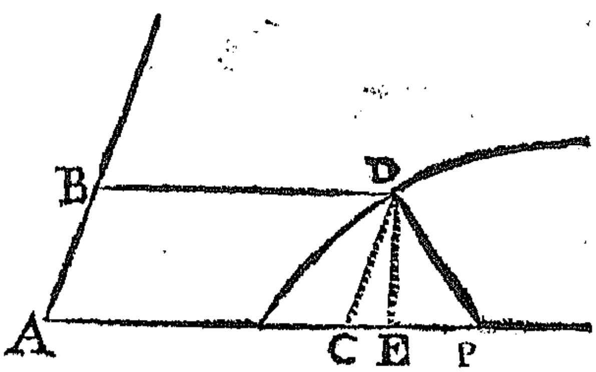
5\. $\sqrt{HE \times EG} \cdot \sqrt{FG \times FH}$ (: : CE . FC) : : rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$ A.

6\. $2\sqrt{AB \times AC} \cdot \sqrt{HE \times EG}$ (: : FE . CE) : : rad. ad ſin. $\frac{1}{2}$ A.

7\. $2\sqrt{AB \times AC} \cdot \sqrt{FG \times FH}$ (: : FE . FC) : : rad. ad coſin. $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XXIV.

In dato angulo PAB actis utcunque rectis BD, PD in data ratione hac ſemper lege, ut BD ſit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum: invenire locum puncti D.



AGE CD parallelam AB & DE perpendicularē AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, ſitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit AC vel $BD = a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit inſuper propter datũ angulũ DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos eſt $CDq - CEq$ $(= EDq) = PDq - EPq$, hoc eſt $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $\frac{ffyy}{dd}$, terminisque rite dispositis $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et extracta radice $y = \frac{fx}{d} \pm \sqrt{\frac{eeaa - 2eeax \begin{array}{l}+ee\\-dd\\+ff\end{array} xx}{dd}}$.

Ubi cum x & y in æquatione penultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipsis prout $ee - dd + ff$, (coeficiens ipsius xx in æquatione posteriori,) sit majus, æquale, vel minus nihilo.

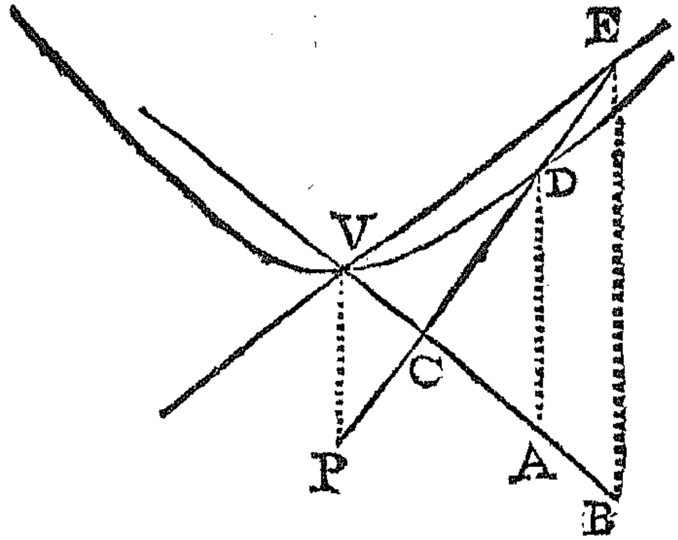
PROB. XXV.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente sectis utcunque in C & E: si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

Age VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP $= a$, VA $= x$, & AD $= y$, & cum detur ratio CD ad DE, vel converse ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB $= \frac{ey}{d}$. Præterea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit VB $= \frac{fy}{d}$. Denique propter

similia

similia triangula CEB, CDA, CPV, est EB . CB



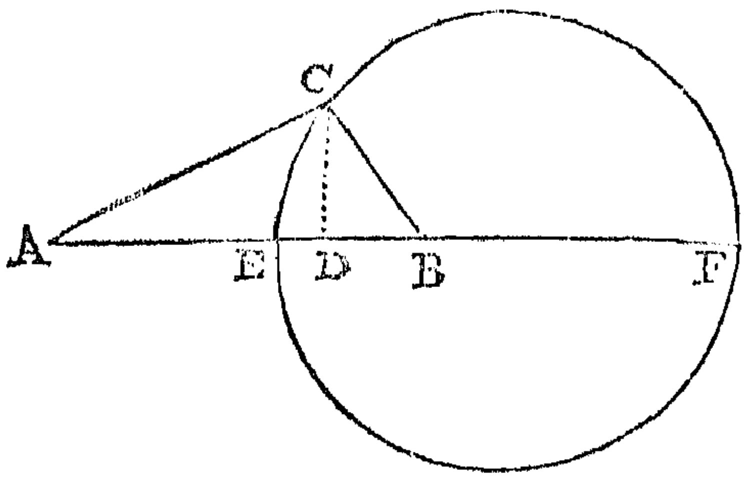
:: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc est $\frac{ey}{d} + a \, . \, \frac{fy}{d} : y + a \, . \, x$. Ductisque extremis & mediis in se $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantum dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

Prob. XXVI.

Si rectæ duæ AC, BC à duobus positione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur: invenire locum puncti concursus C.

Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$: Erit

$AC = \sqrt{xx + yy}$. $BD = x - a$, & BC ($= \sqrt{BDq + DCq}$) $= \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cum detur



ratio AC ad BC, sit ista d ad e; &, extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx + yy} = d\sqrt{xx + 2ax + aa + yy}$. Et per reductionem $\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx} = y$. Ubi cum xx sit negativum, & sola unitate affectum; atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur esse circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut sint $d \cdot e :: AE \cdot BE :: AF \cdot BF$, & erit EF circuli hujus diameter.

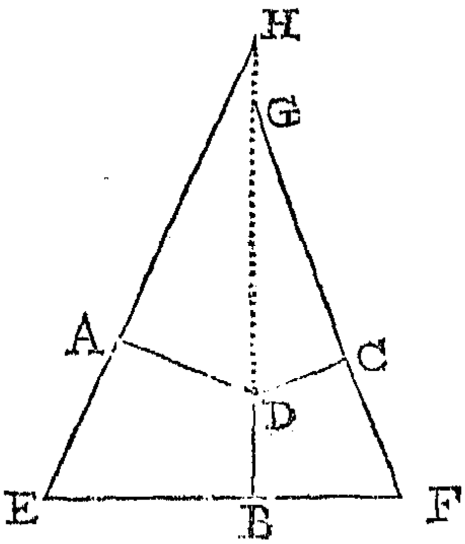
Et hinc è converso patet hoc Theorema, quod in circuli cujusvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut sit $AE \cdot AF :: BE \cdot BF$, & à punctis hisce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C: erit AC ad BC in data ratione AE ad BE.

PROB.

Prob. XXVII.

Invenire punctum D à quo tres rectæ DA, DB, DC ad totidem alias positione datas rectas AE, BF, CF perpendiculariter demissæ, datam inter se rationem obtineant.

E Rectis positione datis producatur una puta BF, ut & ejus perpendicularis BD donec reliquis AE & CF occurrant; BF quidem in E & F; BD autem in H & G. Jam sit EB $= x$ & EF $= a$; eritque BF $= a - x$. Cum autem propter datam positionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorū EBH & FBG dentur: sit EB



ad BH ut d ad e; & erit BH$=\frac{ex}{d}$, & EH ($=\sqrt{EBq + BHq}$) $= \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, hoc est $= \frac{x}{d}\sqrt{dd + ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit BG $= \frac{fa - fx}{d}$ & FG ($= \sqrt{BFq + BGq}$) $= \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd}}$, hoc est $= \frac{a - x}{d}\sqrt{dd + ff}$.

Præterea dicatur BD $= y$, & erit HD $= \frac{ex}{d} - y$,

&

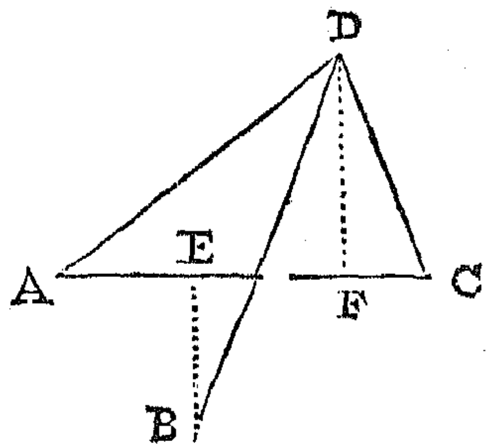
& GD $=\frac{fa-fx}{d}-y$, adeoque cum ſit AD . HD (:: EB . EH) :: $d . \sqrt{dd+ee}$, & DC . GD (:: BF . FG) :: $d . \sqrt{dd+ff}$, erit AD $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & DC $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, ſit BD . AD :: $\sqrt{dd+ee}$. $h-d$, & erit $\frac{hy-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ (= AD) $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, ſive $hy=ex$. Sit etiam BD . DC :: $\sqrt{dd+ff} . k-d$ & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ (= DC) $=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, ſive $ky=fa-fx$. Eſt itaque $\frac{ex}{h}$ $(=y)=\frac{fa-fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fha}{ek+fh}=x$. Quare cape EB . EF :: $h . \frac{ek}{f}+h$, dein BD . EB :: $e . h$, & habebitur punctum quæſitum D.

PROB. XXVIII.

Invenire punctum D, à quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C ductæ, datam inter ſe rationem obtineant.

E Datis tribus punctis junge duo quævis puta A & C; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæſito D: dictiſque AE $=a$, AC $=b$, EB $=c$, AF $=x$, & FD $=y$, erit ADq $=xx+yy$. FC $=b-x$. CDq (= FCq + FDq)

$+ FDq) = bb - 2bx + xx + yy$. $EF = x - a$, ac $BDq (= EFq + \overline{EB + FD}$ quad.$) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Jam cum ſit AD ad CD in data ratione, ſit iſta ratio d ad e; & erit $CD = \frac{e}{d}\sqrt{xx + yy}$.



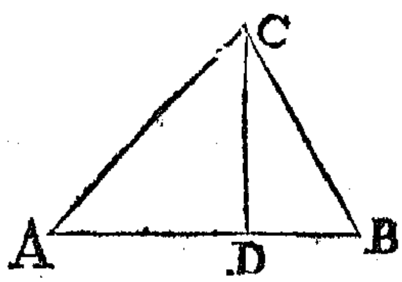
Cum etiam ſit AD ad BD in data ratione, ſit iſta ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx + yy}$. Adeoque eſt $\frac{eexx + eeyy}{dd} (= CDq) = bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx + ffyy}{dd} (= BDq) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus ſi, abbreviandi cauſa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ ſcribatur p, & q pro $\frac{dd - ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem eſt $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in poſteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ ſcribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi cauſa, ſcribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro

bb

$\frac{bbq}{p} - aa - cc$, & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ divisis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi denuo si, abbreviandi causa, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, & $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, habebitur $xx = 2sx - rb$. Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{ss - rb}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD determinatur punctum quæsitum D.

Prob. XXIX.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum DC, sunt in Arithmetica progressione.



DIC AC $= a$, BC $= x$; & erunt DC $= 2x - a$, & AB $= 2a - x$. Erunt etiam AD $(= \sqrt{ACq - DCq})$ $= \sqrt{4ax - 4xx}$ & BD $(= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rursus AB $= \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$.

Quare

Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, sive $2a - x - \sqrt{4ax - 4xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Et partibus quadratis $4aa - 3xx - 4a + 2x\sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$, sive $5aa - 4ax = 4a - 2x\sqrt{4ax - 4xx}$. Et partibus iterum quadratis ac terminis rite dispositis $16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$. Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur $8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0$, æquatio cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcunque a. Habitis a & x constitue triangulum cujus latera erunt $2a - x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a - x$ demissum erit $2x - a$.

Si posuissem differentiam laterum trianguli esse d, & perpendiculum esse x; opus evasisset aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3 = 24ddx - 48d^3$.

PROB. XXX.

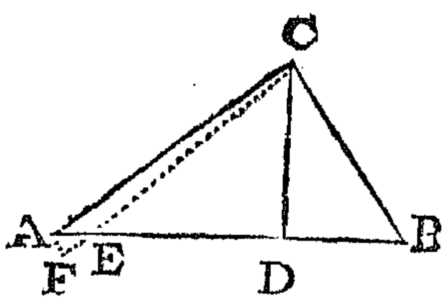
Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, sunt in Geometrica progressione.

DIC $AC = x$, & $BC = a$; & erit $AB = \frac{xx}{a}$. Et $CD = \frac{aa}{x}$. Est & $AD \; (= \sqrt{ACq - CDq}) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; & $BD \; (= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$: adeoque $\frac{xx}{a} \; (= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, sive $\frac{xx}{a} - \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$. Et partibus

æqua-

æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, hoc est $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{xx - aa}$. Et partibus iterum quadratis $x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx$. Hoc est $x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$. Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & orietur $x^4 - aaxx - a^4$. Quare est $x^4 = aaxx + a^4$. Et extracta radice $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, sive $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a sive BC cujusvis longitudinis, & fac BC . AC : : AC . AB : : 1. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC ex his lateribus constituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione.

Idem aliter.



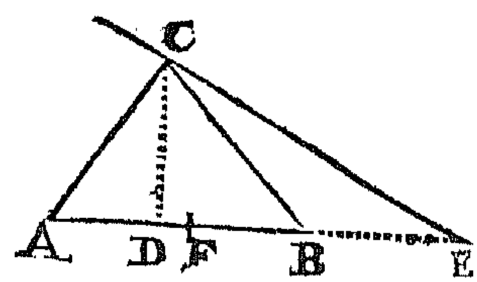
Cum sit AB . AC : : BC . DC dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC similia per 8. VI. Elem. adeoque EB . EC : : BC . DC. hoc est EB . EC : : AB . AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB . EC : : AE . FE : : AB . FC. Ergo per 9. V. Elem. est AC = FC, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $ACq + BCq = ABq$ Sed est $ACq = AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BCq = ABq$, & extracta radice

AB =

$AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus constituto, erunt AB. AC. BC. DC continue proportionales.

PROB. XXXI.

Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectam EC positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.



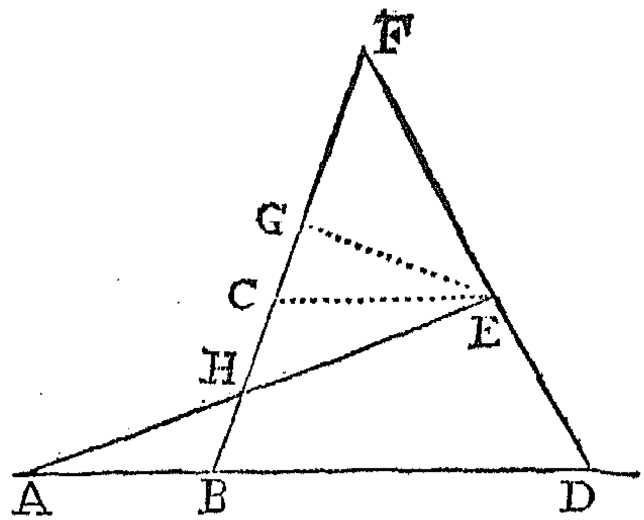
BAsis AB bisecetur in F, & producatur donec rectæ EC positione datæ occurrat in E, & ad ipsam demittatur perpendicularis CD: dictisque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. BD $\left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB}\right) = 2x + \frac{1}{2}a$. Adeoque $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, & CD $(= \sqrt{CBq - BDq}) = \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d . e :: b + 2x . \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur æquatio $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, cujus partibus quadratis & rite dispositis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$. Et radice extracta

$x =$

$x = \frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{2}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}$. Dato autem x, datur $BC = a + x$ & $AC = a - x$.

PROB. XXXII.

Datis positione tribus rectis AD, AE, BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.



AD BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus positione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$. $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter similia triangula ABH, ECH, est $AH . AB :: HE . EC = \frac{ax}{c}$, & $AH . HB :: HE . CH = \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit $CB = \frac{bx + bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC, FDB,

FDB, eſt ED . CB :: EF . CF $= \frac{ebx + ebc}{dc}$. Denique per 12 & 13. II. Elem. eſt $\frac{ECq - EFq}{2FC}$ $+ \frac{1}{2}FC$ ($= CG$) $= \frac{HEq - ECq}{2CH} - \frac{1}{2}CH$, hoc eſt

$$\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}.$$

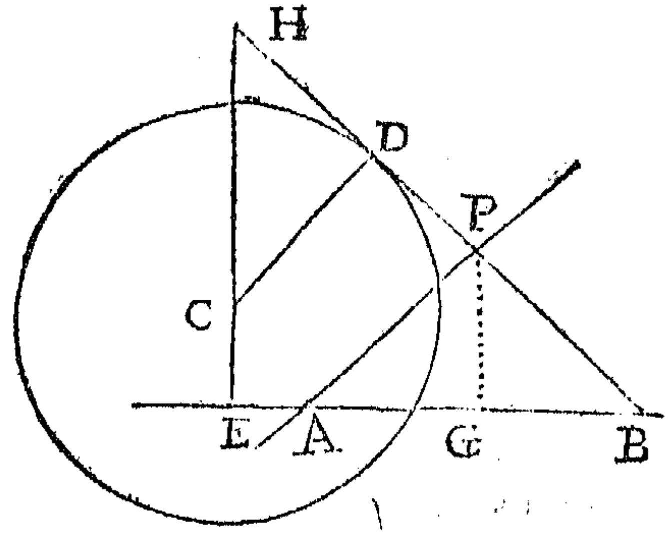
Sive

$$\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}.$$

Hic, abbreviandi cauſa, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$, ac terminis omnibus multiplicatis per $x + c$, fiet $\frac{aadxx - eedcc}{eb} - \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb} - m$, ſcribe p, pro $mc + \frac{ebc}{d}$ ſcribe $2pq$, & pro $\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ ſcribe prr, & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Invento x ſive HE, age EC parallelam AB, & Cape FC . BC :: $e . d$, & acta FED conditionibus quæſtionis ſatisfaciet.

PROB. XXXIII.

Ad Circulum centro C radio CD descriptum ducere Tangentem DB, cujus pars PB inter rectas positione datas AP, AB sita sit datæ longitudinis.



A Centro C ad alterutram rectarum positione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG, & dictis $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, & $PG = x$, propter similia triangula PGB, CDH erit GB $(\sqrt{dd - xx}) \cdot PB :: CD \cdot CH = \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Adde EC; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Porro est $PG \cdot GB :: EH \cdot EB = \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum PAG datum datur ratio PG ad AG, qua posita e ad f erit $AG = \frac{fx}{e}$. Ad-

de

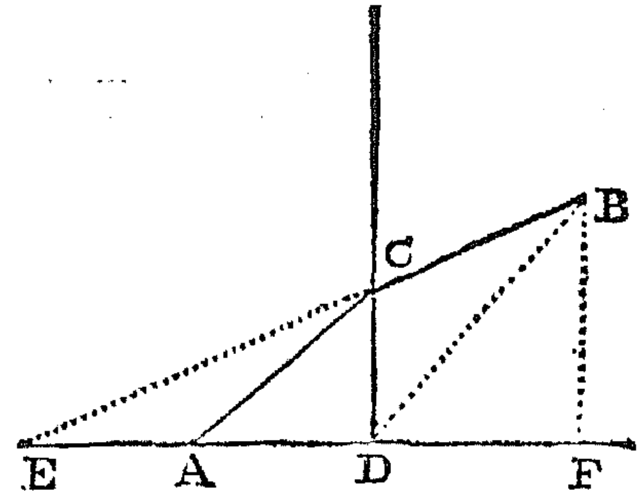
de EA & BG, & habebitur denuo $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$, & per transpositionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{dd - xx}$. Et partibus æquationis quadratis $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et per debitam reductionem

$$\frac{x^4 \begin{matrix}+2aef\\-2bee\end{matrix} x^3 \begin{matrix}+aaee\\+bbee\\-ddee\\-2cdef\end{matrix} xx \begin{matrix}+2bddee\\-2acdee\end{matrix} x \begin{matrix}+ccddee\\-bbddee\end{matrix}}{ee + ff} = 0.$$

PROB. XXXIV.

Si punctum lucidum A radios versus refringentem superficiem planam CD ejiciat: invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum in F, & agatur BD; dictisque $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$, $DC = x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED esse *d* ad *e*, & cum EC & AC (ut notum est) sint in eadem ratione, & AC sit

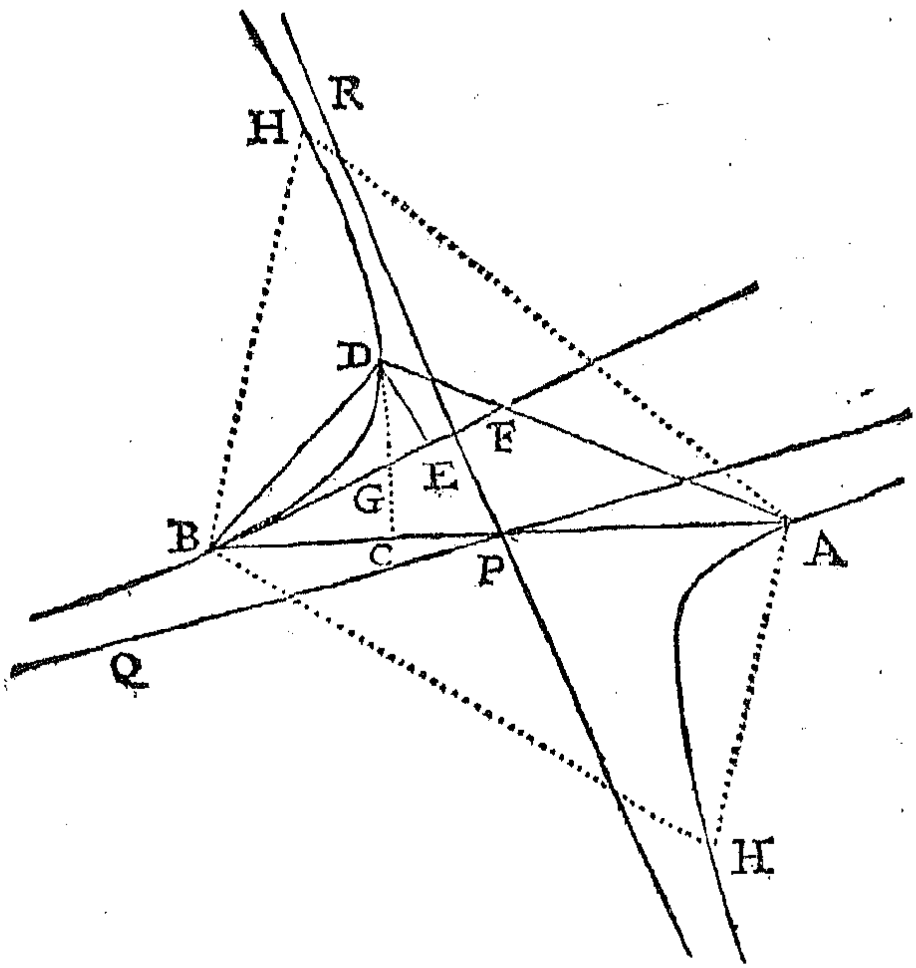


$\sqrt{aa+xx}$ erit $EC = \frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$. Præterea est $ED \left(= \sqrt{ECq - CDq}\right) = \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$, & $DF = \sqrt{bb-cc}$, atque $EF = \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$. Denique propter similia triangula ECD, EBF, est ED . DC :: EF . FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in se, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc} + x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$, sive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et partibus æquationis quadratis & rite dispositis

$$\frac{x^4 - 2cx^3 \begin{matrix}+ddcc\\+ddaa\\-eebb\end{matrix} xx - 2ddaacx + ddaacc}{dd-ee} = 0.$$

PROB. XXXV.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam.



UBI angulus ad Verticem, sive (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F.

III. 29. Euclid.

Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque $AB = a$, $AC = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli dabitur ratio laterum BC & GC; sit ista d ad a, & erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC sive y & restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea propter similia triangula BGC, DGE est $BG \cdot BC :: DG \cdot DE$. Est autem in triangulo BGC, $a \cdot d :: CG \cdot BC$. Adeoque $aa \cdot dd :: CGq \cdot BCq$, & componendo $aa + dd \cdot dd :: BGq \cdot BCq$. Et extractis radicibus $\sqrt{aa + dd} \cdot d\ (:: BG \cdot BC) :: DG \cdot DE$. Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc cum angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia $DA \cdot DC :: DB \cdot DE$. Sed est $DC = y$. $DA\ (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx + yy}$. $DB\ (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, & supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Quare est

$$\sqrt{xx + yy} \cdot y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} \cdot \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}.$$

Et extremorum & mediorum quadratis in se ductis $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa + dd}$ $\frac{- 2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx}{aa + dd}$ $\frac{+ a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}$. Duc

omnes

omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur

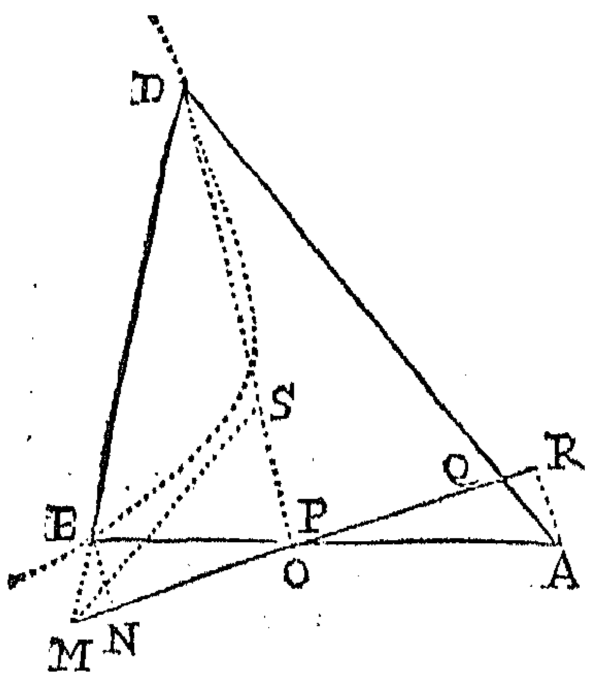
$$x^4 \begin{array}{l} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x^3 \begin{array}{l} -2dy \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{array} x \begin{array}{l} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{array} = 0.$$

Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array}$, & orietur $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$. Eſt ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſumma angulorum DAB DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$. Eſt ad Hyperbolam, locum puncti D ubi ang. FBD ſitum obtinet à recta BF quem in Figura deſcripſimus: hoc eſt ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit,

Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri constituent æquales.

Idem brevius.

Ad PROB. XIII. Regulam de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad basem eodem modo se habet ad utrumque angulum; & in constructione Schematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac substrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec substraho, sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde cum etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC insistit adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potius acta MPQ constituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ab basem, ita ut ea cum rectis AD, BD constituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO & adhibeo DO pro ordinatim applicata, ac PO pro indefinita linea cui insistit. Voco itaque $PO = x$, $DO = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel



$PN = c$. Et propter similia triangula BNM, DOM,

DOM, erit BN . DO :: MN . MO. Et dividendo, DO − BN ($y-b$) . DO (y) :: MO − MN (ON sive $c-x$) . MO. Quare MO $=\frac{cy-xy}{y-b}$.
Similiter ex altera parte propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR . DO :: RQ . QO: & componendo DO + AR ($y+b$) . DO (y) :: QO + RQ (OR sive $c+x$) . QO. Quare QO $=\frac{cy+xy}{y+b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM æquantur MO & QO, hoc est $\frac{cy-xy}{y-b}=\frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb=cy-cb+xy-xb$, sive $cb=xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO − BN . ON :: DO . MO (QO) :: DO + AR . OR. Hoc est DO − BN, DO + BN :: ON . OR, & mixtim DO . BN :: $\frac{ON+OR}{2}$ (NP) . $\frac{OR-ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XXXVI.

Locum verticis trianguli invenire cujus Basis datur, & angulorum ad Basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM dimidium anguli dati, quo angu-

angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biseca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM similia; adeoque OQ . OM :: OD . OS, & dividendo OQ − OM . OM :: SD . OS :: (per 3. VI. Elem.) DM . OM. Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = DM. Dictis jam PO $= x$, OD $= y$, AR vel BN $= b$, & PR vel PN $= c$, erit ut in superiori Problemate OM $= \frac{cy - xy}{y - b}$, & OQ $= \frac{cy + xy}{y + b}$, adeoque OQ − OM $= \frac{2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Pone jam DO$q$ + OMq = DMq, hoc est $yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb}yy = \frac{4bbcc + 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4}yy$. Et per debitam reductionem orietur tandem

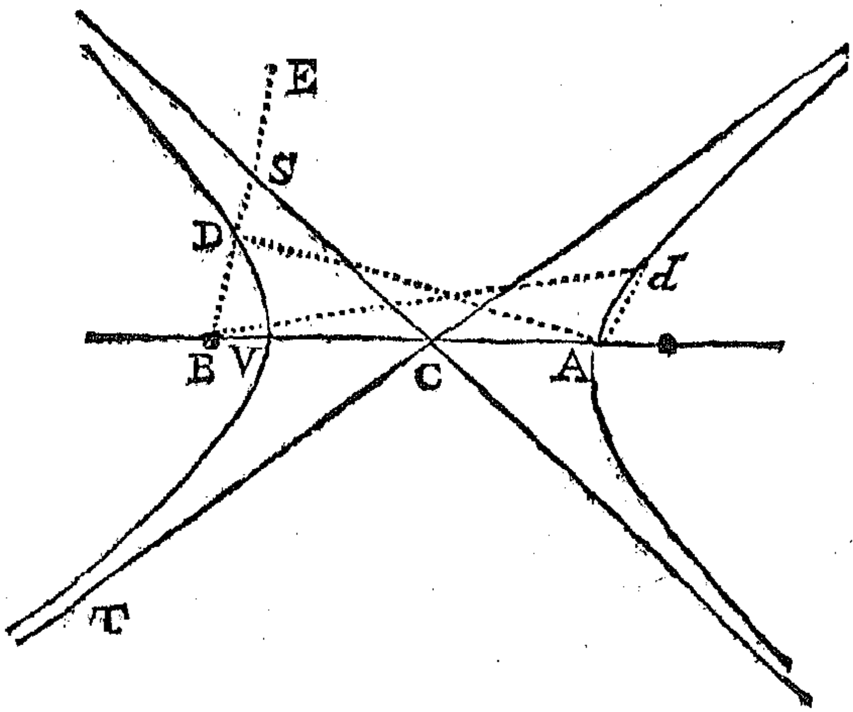
$$y^4 * \begin{array}{l} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{array} yy \begin{array}{l} -2bxx \\ -4bcx \\ -2bcc \end{array} y \begin{array}{l} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ -bbxx \end{array} = 0.$$

Divide omnia per $y + b$, & evadet

$$y^3 - byy \begin{array}{l} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{array} y \begin{array}{l} +b^3 \\ -3bcc \\ -2bcx \\ +bxx \end{array} = 0.$$ Quare punctum

D est ad Curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus DAB duplus alterius DBA. Tunc enim BN, sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. Si centro C, Asymptotis CS, CT, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus describatur Hyperbola quævis DV, cujus semiaxes sint CV, CA; produc CV ad B, ut sit



VB = VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum est de Hyperbola quæ transit per punctum V. Quod si ab iisdem punctis A & B actæ rectæ A*d*, B*d* conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ transit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad basem, ille ad B erit duplus alterius ad A.

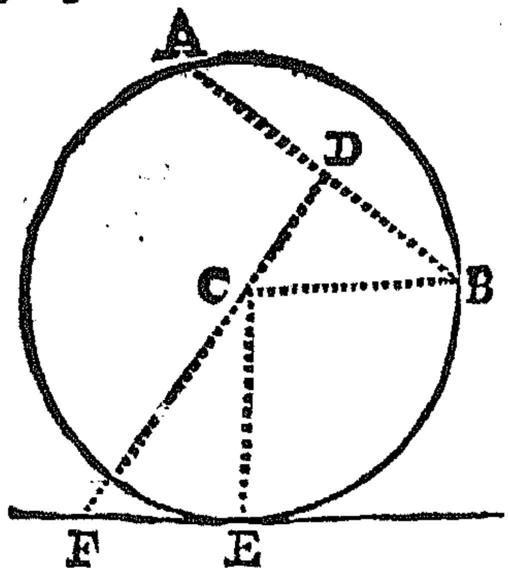
PROB. XXXVII.

Circulum per data duo puncta describere qui rectam positione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere qui contingat rectam istam FE.

Junge

Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti.



Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, esto $DB = a$, ac $DF = b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc est $\sqrt{aa + xx} = CB$. Est & DF − DC sive $b - x = CF$. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e; & erit $CE = \frac{e}{d} \times CF$ hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsiti,) æquales inter se, & habebitur æquatio $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{-2eebx + eebb - aadd}{dd - ee}$. Et extracta radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$.

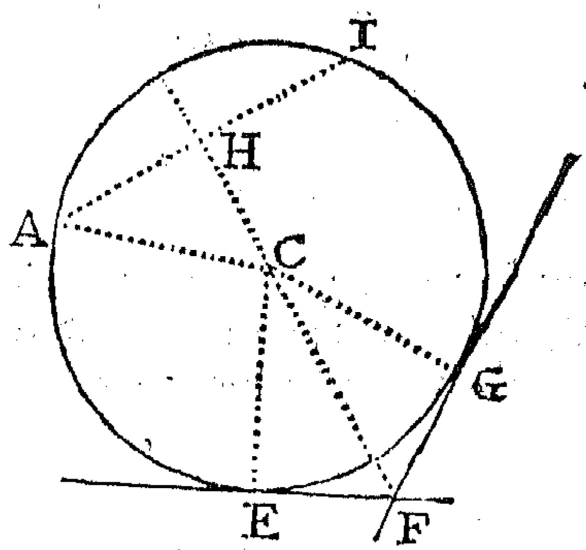
Inventa est ergo longitudo DC adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est ut contingat rectam FE.

PROB.

PROB. XXXVIII.

Circulum per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut Prop. 37. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.



ESto datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Recta CF bisecetur angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendiculis CE, CG, erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur $CF = x$, erit CE vel $CG = \frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b, & ab FH sive b ablato FC sive x restabit $CH = b - x$. Cujus quadrato $bb - 2bx + xx$ adde quadratum ipsius AH, sive aa & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli

AC

AC & CG inter se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus signis erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$. Cujus æquationis extracta radix est $x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa est itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum est circuli quæsiti.

Si inventus valor x sive FC auferatur de b sive HF, restabit $HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

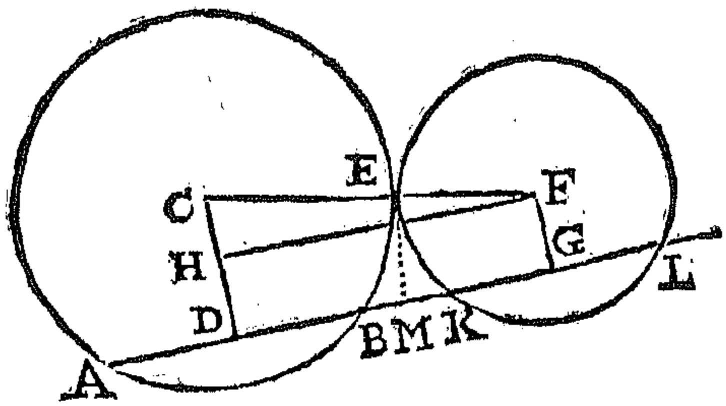
PROB. XXXIX.

Vide Prop. 11.

Circulum per data duo puncta describere, qui alium circulum positione datum continget.

Sint A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendicula CD, & FG & age CF, secantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His constructis dic AD vel

vel DB $= a$, DG vel HF $= b$, GF $= c$, & EF (radium nempe circuli dati) $= d$, atque DC $= x$:



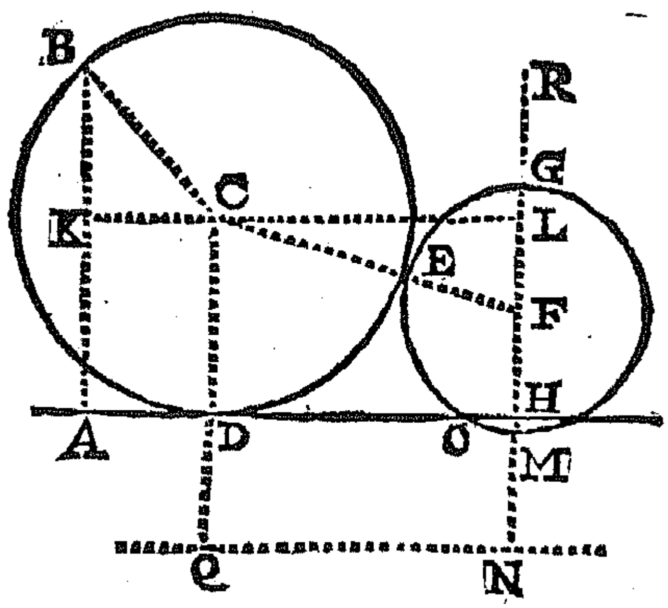
& erit CH ($=$ CD $-$ FH) $= x - c$, & CFq ($=$CHq $+$ HFq) $= xx - 2cx + cc + bb$, atque CBq ($=$ CDq $+$ DBq) $= xx + aa$, adeoque CB vel CE $= \sqrt{xx + aa}$. Huic adde EF, & habebitur CF $= d + \sqrt{xx + aa}$, cujus quadratum $dd + aa + xx + 2d\sqrt{xx + aa}$, æquatur valori ejuſdem CFq prius invento, nempe $xx - 2cx + cc + bb$. Aufer utrobique xx, & reſtabit $dd + aa + 2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - 2cx$. Aufer inſuper $dd + aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Jam, abbreviandi cauſa, pro $cc + bb - dd - aa$, ſcribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx + aa} = 2gg - 2cx$, ſive $d\sqrt{xx + aa} = gg - cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & reſtabit $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa - 2ggcx$. Et partibus æquationis diviſis per $dd - cc$, habebitur $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x = \frac{-ggc + \sqrt{g^4dd - d^4aa + ddaacc}}{dd - cc}$.

Inventa

Inventa igitur x, sivé longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC = \frac{-ggc + d\sqrt{g^4 - aadd + aacc}}{dd - cc}$. Dein centro C per punctum A vel B describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XL.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.



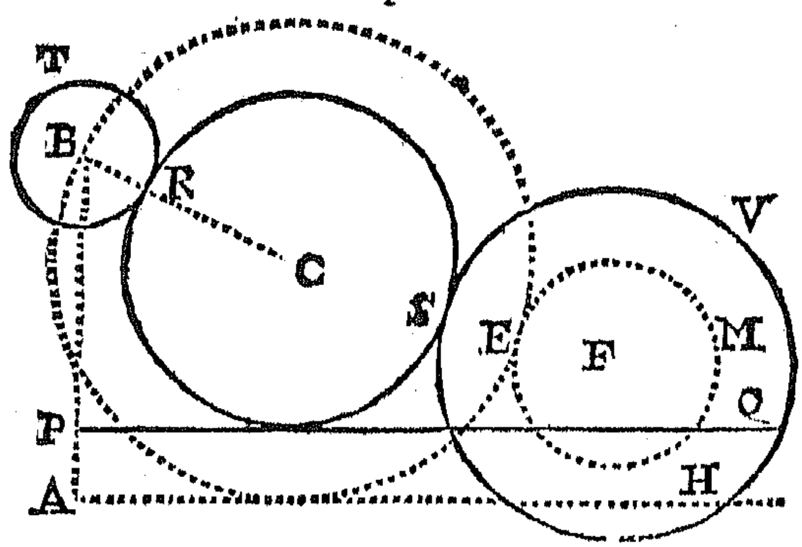
SIT circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF, & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut sit DQ = EF, & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & à C ad AB & FN perpendicula

pendicula CK, CL. Et cum sit $BC = CD$ vel AK, erit $BK (= AB - AK) = AB - BC$, adeoque $BKq = ABq - 2AB \times BC + BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB \times BC - ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB \times \overline{2BC - AB} = CKq$; & eodem argumento erit $FN \times \overline{2FC - FN} = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2FC$. Quamobrem si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c-y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & restabit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN producta secat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur $HR = AB$, cum sit $HN (= DQ = EF) = GF$, addendo FH utrinque erit $FN = GH$, adeoque $AB - FN (= HR - GH) = GR$, & $AB - FN + 2EF$, hoc est $a - b + 2EF = RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare cum supra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque $acc - 2acy$, & restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide

M per

per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et extracta radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.b::d.e$, dein $a-b.a::c.f$; & erit $fe-fc+2fy=yy$, sive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y sive KC vel AD, cape AD $=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$, ad D erige perpendiculum DC ($=$BC) $=\frac{KCq}{2AB}+\frac{1}{2}AB$, & centro C, intervallo CB vel CD describe circulum BDE, nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam positione datam continget.



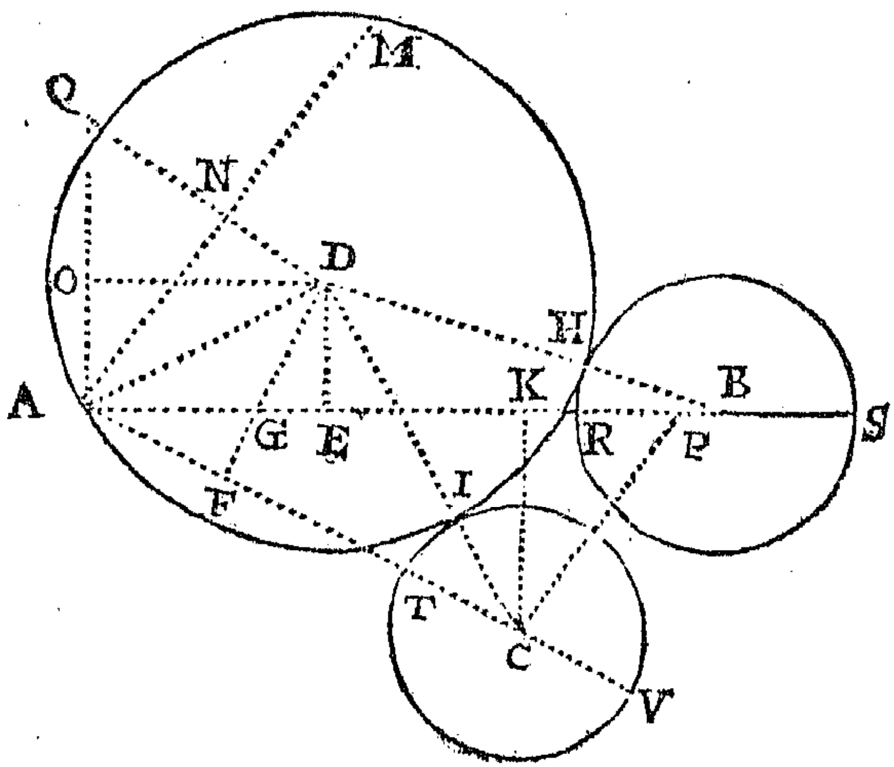
Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra B, F, & recta positione data PQ. Centro F, radio FS$-$BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut sit PA $=$ BR per A age AH parallelam PQ, & circulus describatur qui transeat

per

per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR descriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

Prob. XLI.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.



Esto punctum datum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH, centrum ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$. Et simili ratiocinio in triangulo ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Unde cum sit $AK \cdot AC :: AF \cdot AG$, erit $AG = \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit $GE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$. Unde cum sit $KC \cdot AK :: GE \cdot DE$; erit $DE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP quæ sit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque $DE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$

$- 2PK$

$-\frac{2PK\times AE}{CT}\times\frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ=\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}\times\frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO=\frac{PK\times AE}{KC}$, & erit $AO=DE$. Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt ſimilia, quippe quorum anguli ad O & K ſunt recti, & latera (KC . PK :: AE, vel DO . QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales ſunt, & proinde* QD perpendicularis eſt ad CP. Quamobrem ſi agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK ſimilia; adeoque PC . KC :: AQ . AN. Unde cum AQ ſit $\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}\times\frac{CT}{2KC}$, AN erit $\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}\times\frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut ſit $NM=AN$, & erit $AD=DM$, adeoque circulus quæſitus tranſibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum ſit, ex his, ſine ulteriori Analyſi, talis emergit Problematis reſolutio.

In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ ſit ad $\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope Prob. 39, per puncta A & M deſcribe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et hinc circulus etiam deſcribi poteſt qui tres circulos poſitione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A. B. C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B\pm A$

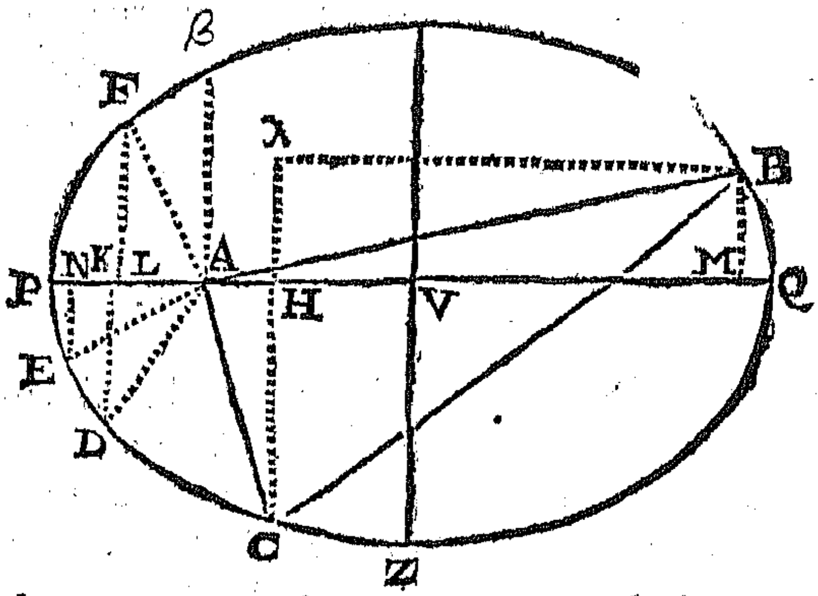
$C \pm A$ describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum A. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio $G \pm A$ descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

Prob. XLII.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horixontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A sit sex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, existente linea AB triginta trium pedum: contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, transire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio solis & elevatio Poli, sive dies locusque ubi hæc evenerint?

Quoniam umbra baculi cujusque descripsit Conicam sectionem, sectionem nempe Coni radiosi cujus vertex est baculi summitas: fingam BCDEF, esse hujusmodi curvam (sive ea sit Hyperbola, Parabola vel Ellipsis) quam umbra baculi A eo die descripsit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuisse cum BC, BA, CA respective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ esse lineam Meridionalem sive axem hujus curvæ ad quem demissæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, sunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite designabo litera

litera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK, AN, & AL litera x. Fingam denique æquationem



$aa \perp bx \perp cxx = yy$, ipsarum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) designare, assumendo aa, b, & c tanquam cognitas ut ex Analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c, quia indeterminata sunt designavi notula $\perp$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $\top$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, D & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur, & proinde si ad punctum A erigatur perpendicum $A\beta$, hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc est, ordinatim applicata y, ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est aa, affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, sicut terminis superfluis non refertur sic neque restrictior est quam ut ad omnes hujus problematis conditiones ſe extendat, Hyperbolam, Ellipſin vel Parabolam quamlibet deſignatura prout ipſorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibuſque ſignis b & c debent affici, & inde quænam ſit hæc curva ex ſequenti Analyſi conſtabit.

Analyſeos pars prior.

Cum umbræ ſint ut altitudines baculorum erit BC . AD :: AB . AE . (:: 18. 6.) :: 3. 1. Item CA . AF (:: 8. 6) :: 4. 3. Quare nominatis AM $= r$, MB $= s$, AH $= t$, & HC $= \perp v$. Ex ſimilitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt AN $= -\frac{r}{3}$. NE $= -\frac{s}{3}$. AL $= -\frac{3t}{4}$. Et LF $= \top\frac{3v}{4}$: quarum ſigna ſignis ipſarum AM, MB, AH, HC contraria poſui quia tendunt ad contrarias plagas reſpectu puncti A à quo ducuntur, axiſve PQ cui inſiſtunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa \perp bx \perp cxx = yy$, reſpective ſcriptis,

$$r \;\&\; s \text{ dabunt } aa \perp br \perp crr = ss.$$
$$-\tfrac{r}{3} \;\&\; -\tfrac{s}{3} \text{ dabunt } aa \top \tfrac{br}{3} \perp \tfrac{1}{9}crr = \tfrac{1}{9}ss.$$
$$t \;\&\; \perp v \text{ dabunt } aa \perp bt \perp ctt = vv.$$
$$-\tfrac{3}{4}t \;\&\; \top\tfrac{3}{4}v \text{ dabunt } aa \top \tfrac{3}{4}bt \perp \tfrac{9}{16}ctt = \tfrac{9}{16}vv.$$

Jam è prima harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\perp b} = r$. Unde patet $\perp b$ eſſe affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et ſcriptis inſu-

per

per $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa + \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa + \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demissa $B\lambda$ perpendiculari in CH, erit BC AD ($::3.1$) $::$ $B\lambda . AK :: C\lambda . DK$. Quare cum sit $B\lambda$ ($= AM - AH = r - t$) $= \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum sit $C\lambda$ ($= CH + BM = v + s$) $= \sqrt{\frac{4aa}{3} + \frac{a^4c}{9bb}} + \sqrt{3aa + \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK ($= \frac{1}{3}C\lambda$) $= \sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^4c}{81bb}} + \sqrt{\frac{1}{3}aa + \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro AK ac DK sive x, & y respective scriptis, prodit $\frac{4aa}{9} + \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa + \frac{37a^4c}{81bb} + 2\sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} + \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et per reductionem $-bb + 4aac = +2\sqrt{36b^4 + 51aabbc + 4a^4cc}$, & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 + 196aabbc$, sive $\frac{-143bb}{196aa} = +c$. Unde constat $+c$ negativam esse, adeoque æquationem fictitiam $aa + bx + cxx = yy$, hujus esse formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam designat Ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo sic eruuntur.

Ponendo $y = 0$, sicut in Figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extra-

cta

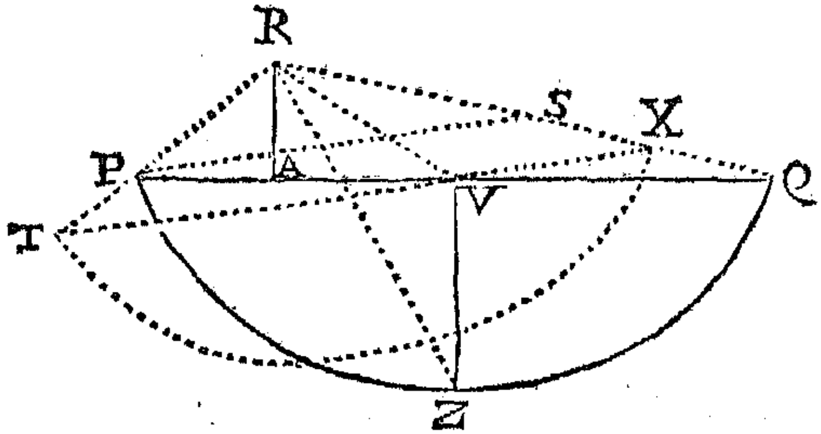
cta radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \begin{matrix}AQ\\AP\end{matrix}$. Adeoque sumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipsis, & VQ vel VP ($\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}$) semiaxis maximus. Si porro ipsius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx - cxx = yy$ scribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare est $aa + \frac{bb}{4c} = UZq$, hoc est quadrato semiaxis minimi. Denique in valoribus ipsarum AV, VQ, VZ jam inventis, scripto $\frac{143\,bb}{196\,aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b} = AV$, $\frac{112\,aa\sqrt{3}}{143\,b} = VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$.

Analyseos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A insistens esse AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radiosus cujus vertex est R. Sit insuper TXZ planum secans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ sectio sit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipsum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum secabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT distabit. Quamobrem si PS ipsi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT, nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde est RX vel RZ ($= \frac{RS + RQ}{2}$) $= \frac{RP + RQ}{2}$.

Deni-

Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter insistat plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam RA $= d$, AV $= e$, VP vel VQ $= f$, & VZ $= g$, erit AP $= f - e$, & RP $= \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item AQ $= f + e$, & RQ $= \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque RZ $\left(= \frac{RP + RQ}{2}\right) = \sqrt{\frac{ff - 2ef}{2}} \overline{\frac{+ ee + dd + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}}$. Cujus quadratum $\frac{dd + ee + ff}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$, est æquale $(RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =)\ dd + ee + gg$. Jam reductione facta est $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4} = dd + ee - ff + 2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$, sive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipsorum AR, AV, VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g restitutis, oritur

36 —

$36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36,14,14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4 + 36,49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In primo Schemate est $AMq + MBq = ABq$, hoc est $rr + ss = 33 \times 33$. Erat autem $r = \frac{2aa}{b}$, & $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (substituto $\frac{143\,bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{4aa}{49}$. Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$, & inde per reductionem iterum resultat $\frac{4,49a^4}{53361 - 4aa} = bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49 fit $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac divisis per 49, exit $4a^4 = 981aa + 274428$, cujus radix aa est $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280{,}2254144$.

Supra inventum fuit $\frac{4,49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, sive $\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Unde AV $\left(\frac{98aa}{143b}\right)$ est $\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel VQ $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}\right)$ est $\frac{8}{143}\sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc est substituendo $280{,}2254144$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, $AV = 11{,}188297$, & VP vel $VQ = 22{,}147085$. Adeoque AP (PV − AV)

= 10

$= 10L958788$, & $AQ(AV+VQ)$ $33L335382$.

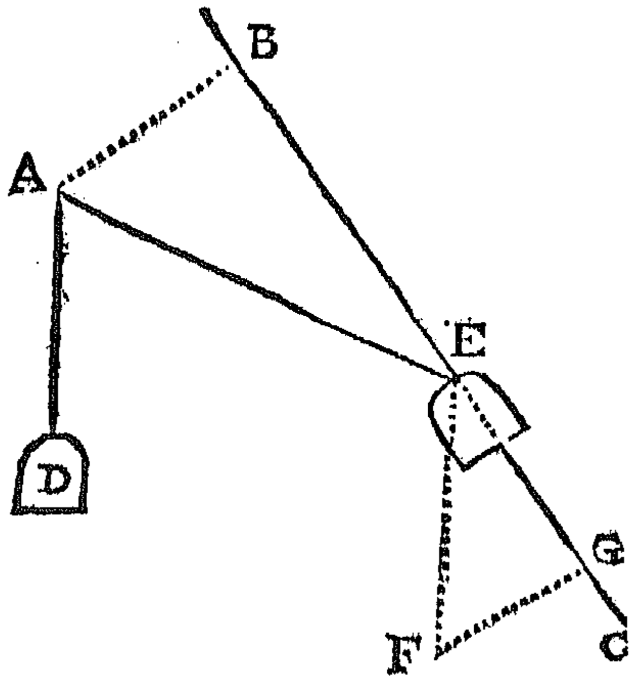
Denique ſi $\frac{1}{6}AR$ ſive 1 ponatur Radius, erit $\frac{1}{6}AQ$ ſive $5L3558970$ tangens anguli ARQ 79 gr. 47′. 48″, & $\frac{1}{6}AP$ ſive $1L826465$ tangens anguli ARP 61 gr. 17′. 52″. Quorum angulorum ſemiſumma 70 gr. 32′. 50″, eſt complementum declinationis ſolis; & ſemidifferentia 9 gr. 14′. 58″, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio ſolis erat 19 gr. 27′. 10″, & Latitudo loci 80 gr. 45′. 20″. Quæ erant invenienda.

PROB. XLIII.

Si ad extremitates fili DAE circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG: invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio conſiſtunt.

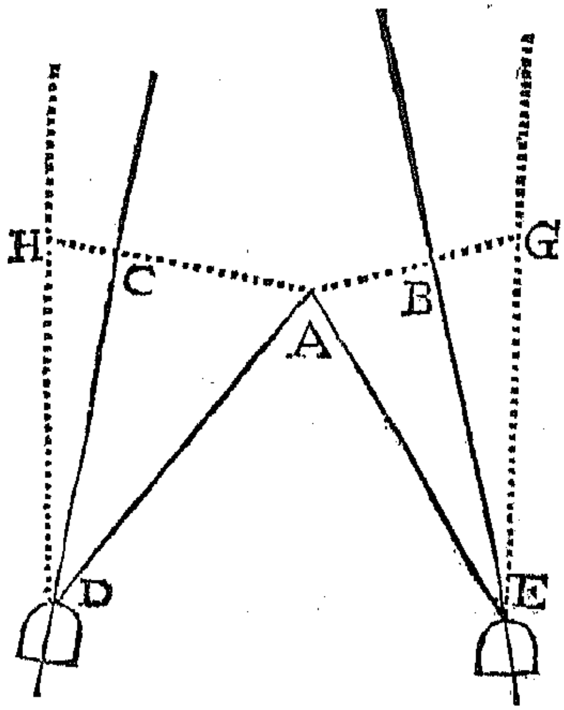
PUta factum, & ipſi AD age parallelam EF quæ ſit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera ex Hypotheſi ſint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas iſtas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus ſive E proprii ponderis vi directa EF tendit verſus F. & vi obliqua EG tendit verſus G. Et idem Corpus E ponderis D, vi directa AE trahitur verſus A, & vi obliqua BE trahitur verſus B. Cum itaque pondera ſe mutuo ſuſtineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur verſus B æqualis eſſe debet vi contrariæ qua tendit verſus G, hoc eſt BE æqualis eſſe debet

bet ipsi EG. Jam vero datur ratio AE ad EF ex Hypothesi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis est. Ergo



datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E facile dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa + xx}$, sit insuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{aa + xx} = dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd - ee}} = x$. Inventa est igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ positione datæ per quas pondera ista D & E descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iisque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas



ipsius E erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim qua filum AE distenditur ut BE ad AE. Adeoque gràvitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius DA + AE longitudo c, sitque pars ejus AE $= x$, & erit altera pars AD $= c - x$. Et quoniam est AEq—ABq=BEq, & ADq — ACq = CDq, sit insuper AB $= a$, & AC $= b$, & erit BE $= \sqrt{xx - aa}$ & CD $= \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH dentur specie, sit BE.EG : : f. E, & CD . DH : : $f.g$, & erit EG $= \frac{e}{f}\sqrt{xx-aa}$, & DH $= \frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$. Quamobrem cum sit GE . AE : : pond. E. tens. AE. Et HD . AD : : pond. D. tens. AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit $\dfrac{Ex}{\frac{e}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = tens.

AE =

$AE =$ tens. $AD = \dfrac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit $gx\sqrt{xx - 2cx + cc - bb} = \overline{Dc - Dx}\sqrt{xx - aa}$, sive

$$\begin{matrix} gg \\ -DD \end{matrix} x^4 \begin{matrix} -2ggc \\ +2DDc \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{matrix} xx - 2DDcaax + DDccaa = 0.$$

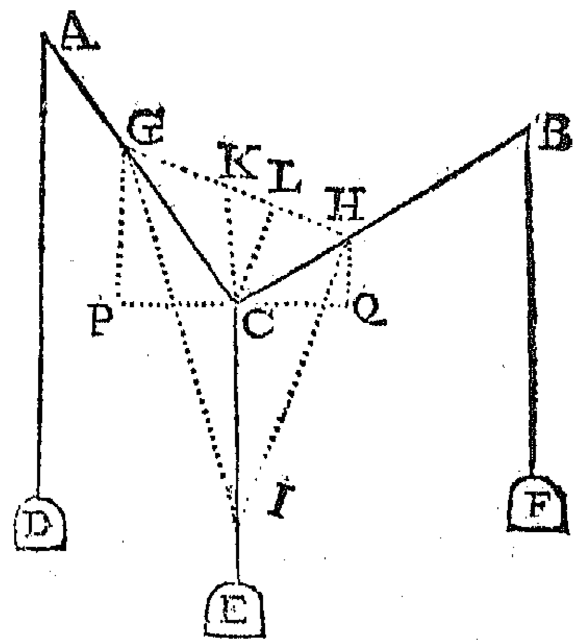
Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $\begin{matrix} aa \\ -bb \end{matrix} xx - 2aacx + aacc = 0$; sive $x = \dfrac{ac}{a+b}$.

Prob. XLIV.

Si ad filum DACBF circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilibrio.

Cum tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In

In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit GK = KH, & CK = $\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare PQ, & huic à punctis G & H perpendicularia GP, HQ. Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit



punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud versus K exponetur per lineam GP. Et similiter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC, simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud versus E, hoc est summa GP + HQ, æqualis erit ipsi CI: & vis qua filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC, trahit idem punctum C versus Q, hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam GK = KH, & CK $\left(= \frac{GP + HQ}{2}\right)$

 $= \frac{1}{2}$CI.

$=\frac{1}{2}CI$. Quod erat oftendendum. Reftat itaque triangulum GCK determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ à vertice C ad medium bafis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad bafem GH perpendiculum CL, & erit $\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}$. Pro 2GK fcribe GH, & rejecto communi divifore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$, five $\sqrt{\frac{1}{2}GCq - KCq + \frac{1}{2}CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur fimul anguli GCK, KCH, five DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis iftis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & iftud C erit punctum quod quæritur.

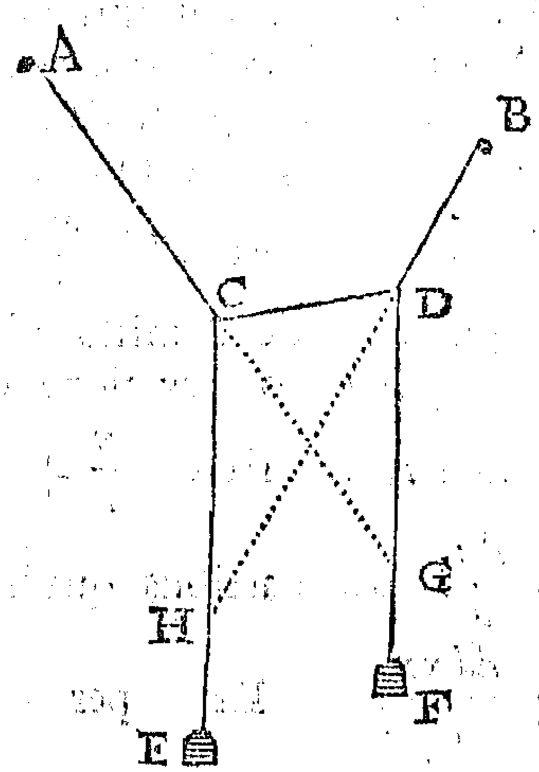
Cæterum quæftiones omnes quæ funt ejufdem generis non femper opus eft per Algebram figillatim folvere, fed ex folutione unius plerumque confectatur folutio alterius. Ut fi jam proponeretur hæc quæftio.

Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB divifo, & extremitatibus ejus ad paxillos duo A, B pofitione datos ligatis, fi ad puncta divifionum C ac D appendantur pondera duo E & F: ex dato pondere F, & fitu punctorum C ac D, cognofcere pondus E.

EX præcedentis Problematis folutione fatis facile colligetur hæcce folutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H: & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et

Et hinc obiter patet ratio componendi ſtate-



ram ex ſolis filis, qua pondus corporis cujuſvis E, ex unico dato pondere F cognoſci poteſt.

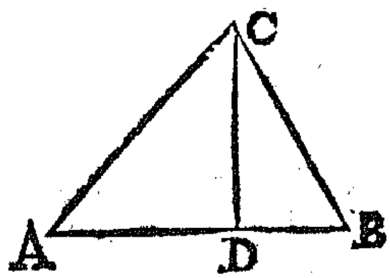
Prob. XLV.

Lapide in puteum decidente, ex ſono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoſcere.

SIT altitudo putei x, & ſi lapis motu uniformiter accelerato deſcendat per ſpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & ſonus motu uniformi tranſeat per idem ſpatium datum a in tempore dato d, lapis deſcendet per ſpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, ſonus autem qui fit à lapide in fundum putei impingente aſcendet per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſus. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ ſumma, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſonus reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}=t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}}=t-\frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a}=tt-\frac{2tdx}{a}+\frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem $xx=\frac{2adt+abb}{dd}x-\frac{aatt}{dd}$. Et extracta radice $x=\frac{adt+\frac{1}{2}abb}{dd}-\frac{ab}{2dd}\sqrt{bb+4dt}$.

PROB. XLVI.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



TRianguli ABC ſit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad baſem AB demiſſum. Detur AB + BC + AC $=a$, & CD $=b$. Pone baſem AB $=x$, & erit laterum ſumma $a-x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus AC $=\frac{a-x+y}{2}$; minus

BC $=$

$BC = \frac{a - x - y}{2}$. Jam ex natura trianguli rectanguli est $ACq + BCq = ABq$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & $AB . AC :: BC . DC$, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per posteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, sive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a + b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo, summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

Prob. XLVII.

Datis trianguli rectanguli basi AB, & summa perpendiculi & laterum $CA + CB + CD$, invenire triangulum.

Esto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit $AC + CB = a - x$. Pone $AC - CB = y$, & erit $AC = \frac{a - x + y}{2}$, & $CB = \frac{a - x - y}{2}$. Est autem $ACq + CBq = ABq$, hoc est

$\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Est & $AC \times CB = AB \times CD$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. Quibus comparatis fit $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo de summa perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, & $AC = x$, & erit $BC = \sqrt{bb - xx}$, $CD = \frac{x\sqrt{bb - xx}}{b}$. Et $x + CB + CD = a$, sive $CB + CD = a - x$, atque adeo $\frac{b + x}{b}\sqrt{bb - xx} = a - x$. Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = aabb - 2abbx + bbxx$. Qua æquatione per transpositionem partium ad hunc modum ordinata $x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +2b^3 \\ +2abb \end{matrix} x \begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +aabb \end{matrix} = \begin{matrix} 2bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +4b^3 \\ +4abb \end{matrix} x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}$, & extracta utrobique radice, orietur $xx + bx + bb + ab = \overline{x + b}\sqrt{2ab + 2bb}$. Et extracta iterum radice $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}$.

Constructio Geometrica.

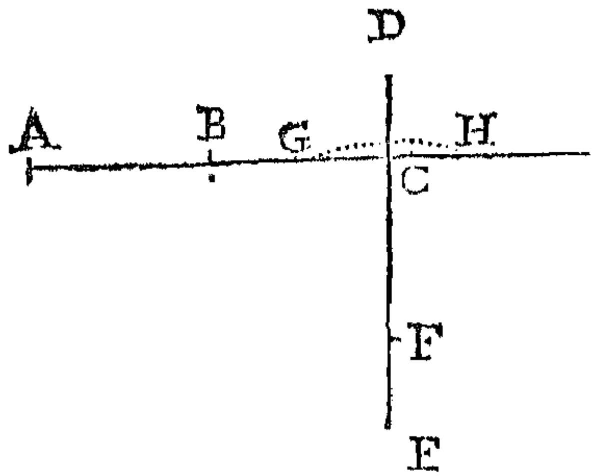
Cape igitur $AB = \frac{1}{2}b$, $BC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

PROB. XLVIII.

Datis in triangulo rectangulo ABC summa laterum AC + BC, & perpendiculo CD invenire triangulum.

SIT $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, & erit $BC = a - x$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + 2xx}$. Est & $CD . AC :: BC . AB$. Ergo rursus $AB = \frac{ax - xx}{b}$. Quare $ax - xx = b\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$, & partibus quadratis & ordinatis $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} + aa \\ - 2bb \end{array} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} + aa \\ - 2bb \end{array} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobiq; radice $xx - ax - bb = - b\sqrt{aa + bb}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa + bb}}$.

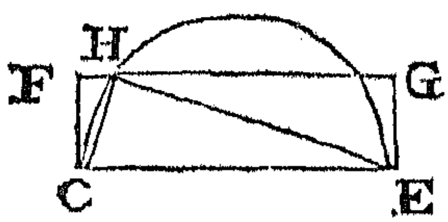
Constructio Geometrica:



Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum $CD = b$. Produc DC ad E ut sit $DE = DA$. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, ac $DC = b$, & erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$, $\frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsiti. Data autem basi & perpendiculo tam in hoc quam in superiore Problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit basis trianguli,



latus

latus alterum CF perpendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.

PROB. XLIX.

In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa perpendiculi & basis invenire Triangulum.

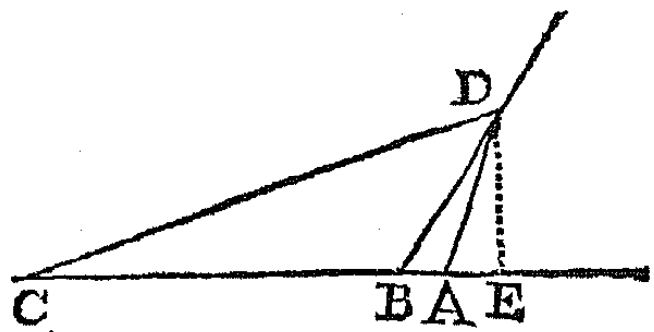
SIT laterum AC & BC summa a, basis AB & perpendiculi CD summa b, latus AC $= x$, basis AB $= y$, & erit BC $= a - x$, CD $= b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$. $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +3aa \\ -2bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -2a^3 \\ +2abb \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +3aa \\ -2bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -2a^3 \\ +2abb \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{smallmatrix} = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b+a$ & $b-a$, & S mediam proportionalem inter R & $b-$R, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a+$S & $\frac{1}{2}a-$S, & erunt $\frac{1}{2}a+$T & $\frac{1}{2}a-$T, latera trianguli.

Prob. L.

Datum angulum CBD recta data CD subtendere; ita ut si à termino istius rectæ D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC æqualis angulo ABD.

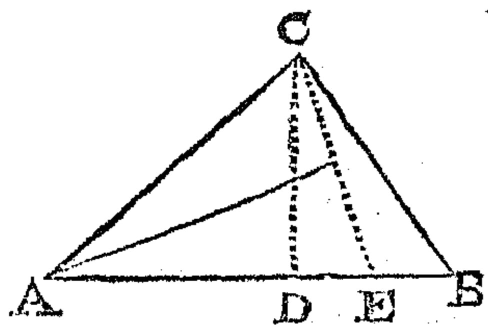


Dicatur CD $=a$, AB $=b$, BD $=x$, & erit BD . BA :: CD . DA $=\frac{ab}{x}$. Demitte perp. DE, Erit BE $=\frac{\text{BD}q-\text{AD}q+\text{BA}q}{2\text{BA}}=\frac{xx-\frac{aabb}{xx}+bb}{2b}$.

Ob datum angulum DBA pone BD . BE :: b . e, & habebitur iterum BE $=\frac{ex}{b}$, ergo $xx-\frac{aabb}{xx}+bb=2ex$. Et $x^4-2ex^3+bbxx-aabb=0$.

Prob. LI.

Datis trianguli lateribus invenire angulos.



Dentur latera AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, quæratur angulus A. Demisso ad AB perpendiculo CD quod angulo isti opponitur, erit imprimis $bb - cc = ACq - BCq = ADq - BDq = AD + BD \times AD - BD = AB \times 2AD - AB = 2AD \times a - aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$. Unde prodit hocce primum Theorema. Ut AB, ad AC + BC, ita AB − BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad Cosinum anguli A.

Adhæc $DCq = ACq - ADq = \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} = \frac{a + b + c \times a + b - c \times a - b + c \times -a + b + c}{4aa}$. Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce Theorema secundum. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $a + b + c \times a + b - c$, & $a - b + c \times -a + b + c$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB Cape AE $=$ AC, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit DE $= b - \frac{1}{2}a$ $- bb - cc$

$$-\frac{bb-cc}{2a}=\frac{cc-aa+2ab-bb}{2a}=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}}{2a},$$

Unde $DEq=\frac{\overline{c+a-b}\times\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}\times\overline{c-a+b}}{4aa}$,

Et hinc conſtit Theorema tertium quartumque, *viz.* Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad ſinum verſum anguli A. Et, Ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea eſt $CEq=CDq+DEq=\frac{2abb+bcc-baa-b^3}{a}=\frac{b}{a}\times\overline{c+a-b}\times\overline{c-a+b}$. Unde Theorema quintum & ſextum: Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medium proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad ſinum dimidii anguli A. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

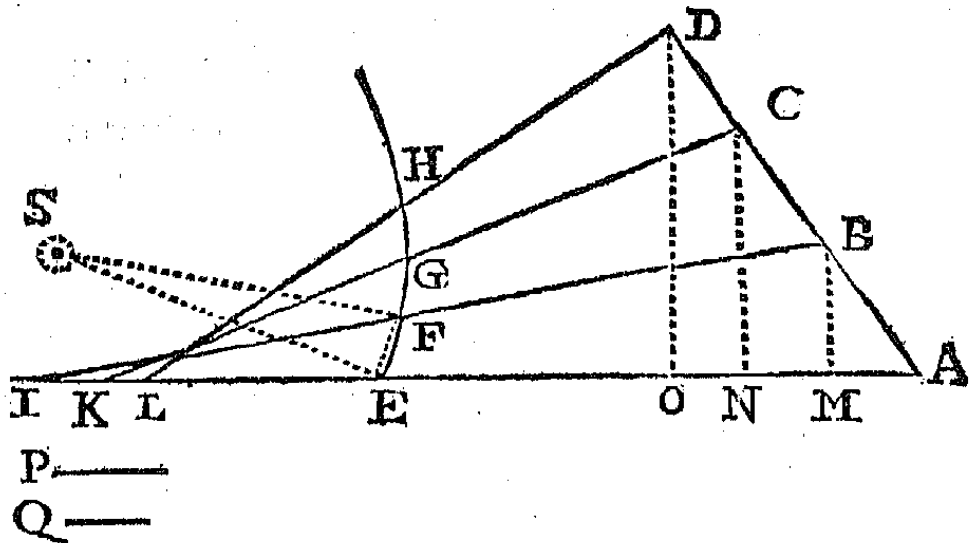
Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}$ABq, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæſita.

PROB.

PROB. LII.

E Cometæ motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam à terra, motusque determinationem, in Hypothesi Copernicæa colligere.

SI è centro Cometæ in locis quatuor observatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula: sintque A, B, C, D puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; Per puncta illa agatur recta AD, & hæc secabitur à perpendiculis in eadem ratione cum linea quam Cometa motu



suo describit, hoc est, ita ut sit AB ad AC ut tempus inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observationibus itaque dantur rationes linearum AB, AC, AD ad invicem.

Insuper in eodem Eclipticæ plano sit S Sol, EH arcus lineæ Eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus observationum,

E lo-

E locus primus, F ſecundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres poſteriores priorem ſecent in I, K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum obſervatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & ſecundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex obſervationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore obſervationis primæ. Quare ſi complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et ſimili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur poſitione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor poſitione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione ſecabitur.

Demiſſis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Eſt & BM ad CN in data ratione BA & CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN: & inde ratio quoque BM ad MI$-$KN, hoc eſt ad MN$+$IK. Cape P ad IK ut eſt AB ad BC, & cum ſit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P $+$ MA ad IK $+$ MN in eadem ratione; hoc eſt in ratione data. Quare datur ratio BM ad P $+$ MA. Et ſimili argumento ſi capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q $+$ MA. Et proinde

ratio

ratio BM ad ipsorum P + MA, & Q + MA differentiam quoque dabitur. At differentia illa, nempe P − Q vel Q − P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur P + MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

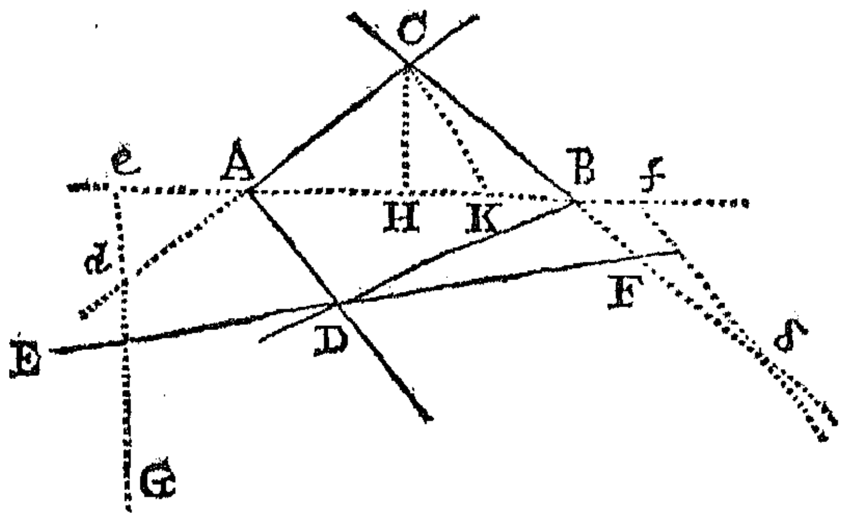
His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in observatione prima ad radium, & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione prima. Unde datur distantia Cometæ à Terra tempore illius observationis. Et eodem modo si è puncto B erigatur perpendicularis quæ sit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illa secunda. Et acta linea à loco primo ad locum secundum, ea est in qua Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LIII.

Si angulus datus CAD circa punctum angulare A positione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B positione datum ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam positione datam EF sese semper intersecent: invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC intersectio C describit.

PRoduc CA ad *d* ut sit A*d* = AD, & CB ad *δ* ut sit B*δ* = BD. Fac angulum A*de* æqualem angulo ADE, & angulum B*δf* æqualem angulo

gulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G,



ut sit $dG = \delta f$, & à puncto C ad lineam AB, ipsi ed parallelam age CH, & ipsi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præscripta circa polos A & B volvantur, semper erit Gd æqualis ipsi $f\delta$, & triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque A$e = a$, eG $= b$, B$f = c$, AB $= m$, BK $= x$, & CK $= y$. Et erit BK . CK :: Bf . $f\delta$. Ergo $f\delta = \frac{cy}{x} =$ Gd. Aufer hoc de Ge, & restabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cum detur specie triangulum CKH, pone CK . CH :: d . e; & CH . HK :: d . f, & erit CH $= \frac{ey}{d}$, & HK $= \frac{fy}{d}$. Adeoque AH $= m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem AH . HC :: Ae . ed, hoc est $m - x - \frac{f}{d}y \cdot \frac{ey}{d} :: a \cdot b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - bf$

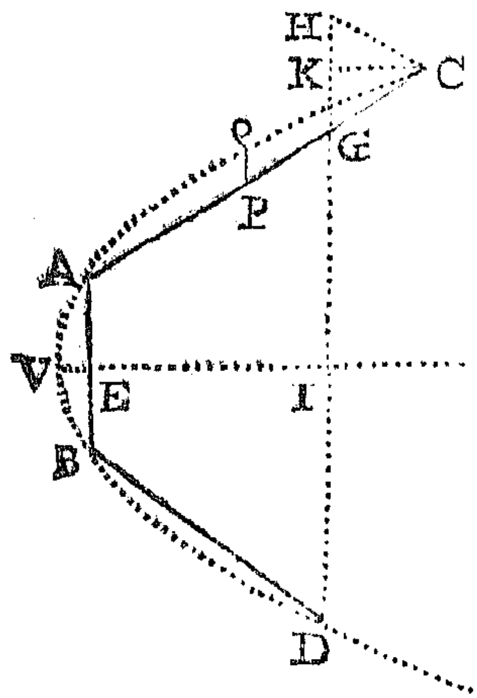
$-\frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eosque in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{matrix} +dc \\ -ae \\ -fb \end{matrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimensiones ascendunt, patet curvam lineam quam punctum C describit esse Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2pxy}{f} + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & non majus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel circulum si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB. LIV.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.

SInt puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique

AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, $GD = d$. In



AC cape AP cujusvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse Parabolæ: dic $AP = x$, $PQ = y$, & æquationem quamvis ad Parabolam assume quæ relationem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Jam si ponatur AP sive $x = 0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ sive $y = 0$, ut & $= -AB$. Scribendo autem in æquatione assumpta 0 pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $= e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e + g$ est $= 0$, minor $e - g = -AB$ sive $-a$. Ergo $e = -g$ & $e - g$, hoc est $-2g = -a$, sive $g = \frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + hx}$.

Adhæc si ponatur AP sive $x = AC$ ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum $PQ = 0$. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC sive b, & pro y, 0, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$, sive $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$; & partibus quadratis $-afb + ffbb = hb$. Sive $ffb - fa = h$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

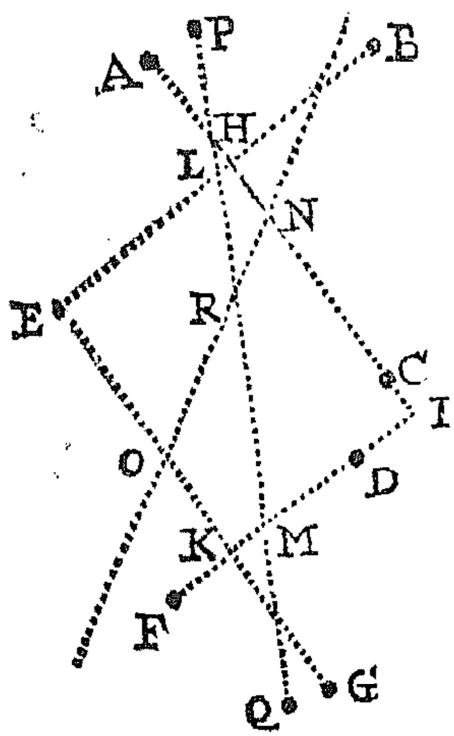
In-

Insuper si ponatur AP sive $x=$ AG sive c, fiet PQ sive $y=-$ GD sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissima scribe c & $-d$, & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Et partibus quadratis $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffbc - fac$. Et æquatione ordinata & reducta $ff = \frac{2d}{b-c}f + \frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$ hoc est pro GC scribe k, & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd-ad}{kc}$. Et extracta radice $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$, plene determinatur: cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit EV . EI : : EBq . DIq $-$ EBq, & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

Prob. LV.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK, parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC . BHE :: AIC . FID :: EKG . FKD, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est. Hoc tamen observare debebis, quod si punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel



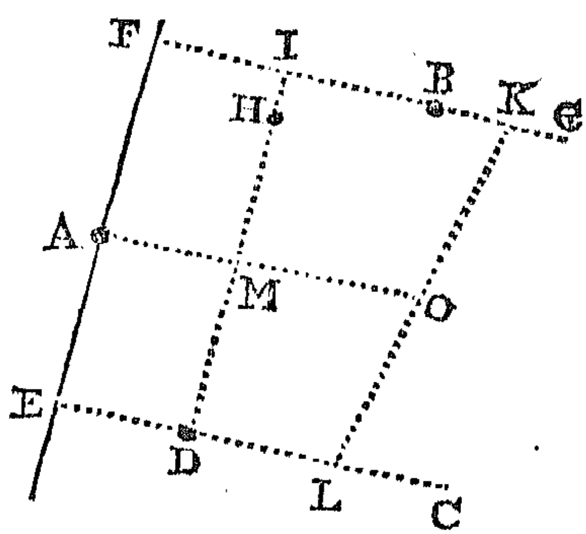
inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo IF, KG ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM se mutuo secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde si opus est ad P & Q ita ut sit BLq . FMq :: PLQ . PMQ, & erunt P & Q vertices Conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac PLQ . LBq :: PQ . T. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoscitur Figura.

Restat

Restat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q ita ut fiat $BLq \cdot FMq :: PLQ \cdot PMQ$. Nempe PLQ sive $PL \times LQ$ est $PR - LR \times PR + LR$, nam PL est $PR - LR$, & LQ est $RQ + LR$ seu $PR + LR$. Porro $PR - LR \times PR + LR$ multiplicando fit $PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $PR + RM \times PR - RM$, seu $PRq - RMq$. Ergo $BLq \cdot FMq :: PRq - LRq \cdot PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq . FMq :: RMq - LRq . PRq - RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq - FMq$, FMq, & $RMq - LRq$ dabitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq, & dabitur summa PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis est.

PROB. LVI.

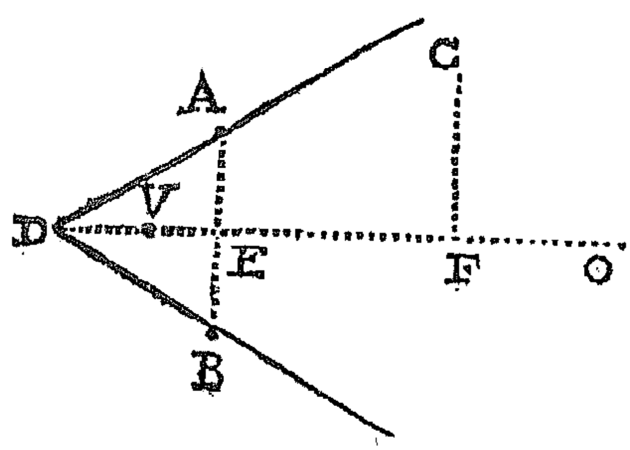
Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta, & in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.



Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta positione data AE, quam conica sectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC, & DC, producta si opus est, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipsi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipsi BF in I. In FB, DI, si opus est productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut sit AEq . CED :: AFq . BFG :: DIH . BIG. Et erunt puncta G & H in Conica sectione, ut notum est: si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in superiore Problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM se mutuo secantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad semidiametrum AO. Quibus cognitis cognoscitur figura.

PROB. LVII.

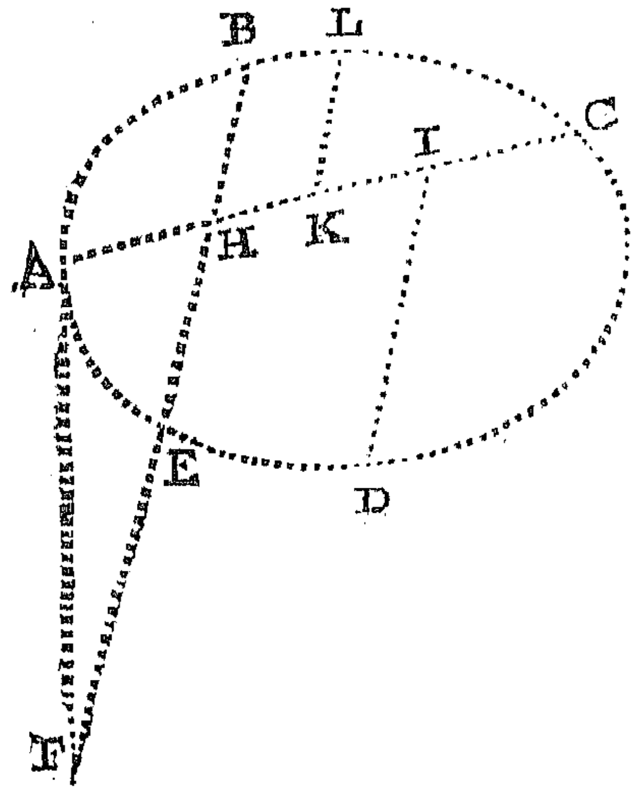
Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.



Sint puncta illa data A, B, C, Tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO, ea lege ut sit etiam $AEq . CFq :: VE \times \overline{VO+OE} . VF \times \overline{VO+OF}$: & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura simul cognoscitur. Est autem $VE = \overline{VO-OE}$, adeoque $VE \times \overline{VO+OE} = \overline{VO-OE} \times \overline{VO+OE} = VOq - OEq$. Præterea quia VO media proportionalis est inter DO & EO erit $VOq = DOE$, adeoque $VOq - OEq = DOE - OEq = DEO$. Et simili argumento erit $VF \times \overline{VO+OF} = VOq - OFq = DOE - OFq$. Ergo $AEq . CFq :: DEO . DOE - OFq$. Est $OFq = EOq - 2FEO + FEq$. Adeoque $DOE - OFq = DOE - OEq + 2FEO - FEq = DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq . CFq :: DEO . DEO + 2FEO - FEq :: DE . DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & restabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque dabitur EO. Dato autem EO simul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii satis expedite resolvuntur hæc problemata: quæ tamen sine istis Theorematibus per Algebram solam resolvi possent. Ut si proponatur primum trium novissimorum Problematum: sint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ Conica sectio transire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo BE rectis se secantibus in H. Ipsi BE parallelem age DI occurrentem AC in I: ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ sectioni in L. Et finge Conicam sectionem datam esse, ita ut cognito puncto K simul cognoscatur

noſcatur punctum L. Et poſito AK $= x$ & KL $= y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume



quamvis æquationem quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt x & y nihil. Proinde æquationis omnes termini præter à evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt a in æquatione illa, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro ſi L incidit in C erit AK ſeu $x =$ AC, & LK ſeu $y = 0$. Pone ergo AC $= f$, & ſubſtituendo f pro x, & 0 pro y æquatio ad curvam $bx + cxx + dy$ $+ exy$

$+exy+yy=0$, evadet $bf+cff=0$, seu $b=-cf$. Et in æquatione illa scripto $-cf$ pro b evadet $-cfx+cxx+dy+exy+yy=0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK seu $x=$ AH, & KL seu $y=$ BH. Pone ergo AH $=g$ & BH $=h$, & perinde scribe g pro x & h pro y, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$. Quod si punctum L incidit in E erit AK=AH seu $x=g$, & KL seu $y=$HE. Pro HE ergo scribe $-k$ cum signo negativo quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & substituendo g pro x & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfx+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de superiori æquatione $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & restabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & restabit $-cfg+cgg+hk=0$, seu $\dfrac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique si punctum L incidit in punctum D, erit AK seu $x=$ AI, & KL seu $y=$ ID. Quare pro AI scribe m & pro ID n, & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n & fiet $\dfrac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$, & restabit $\dfrac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\dfrac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI; hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\dfrac{hk}{fg-gg}=c$ datur c. Dato autem c, per æqua-

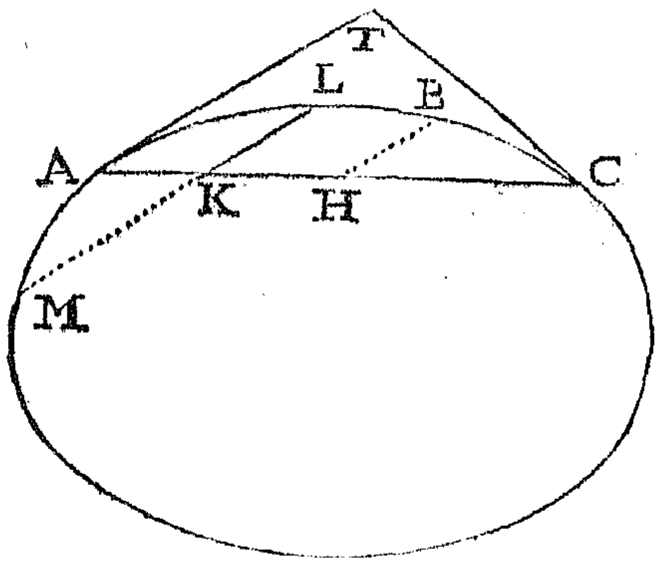
tionem

tionem $\frac{cmm - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$ datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e. Quibus inventis æquatio $d + eg + h - k = 0$, seu $d = k - h - eg$ dabit d. Et his cognitis simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

Quod si quatuor A, B, C, E, & positio rectæ AF quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum A daretur, posset Conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - h - eg$, & $c = \frac{hk}{fg - gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram constare potest. Dic vero FH $= p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione erit $p \cdot g :: y \cdot x$, sive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, scribe $\frac{gy}{p}$, & orietur $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide omnia per y & emerget $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Jam quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL seu y infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{hk}{fg - gg} = c$, dein

dein $\frac{cfg}{p} = d$, denique $\frac{k-b-d}{g} = e$, & inventis c, d & e, æquatio $cfx = cxx + dy + exy + yy$ determinabit conicam ſectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum poſitione duarum rectarum AT, CT quæ tangunt Conicam ſectionem in duobus iſtorum punctorum A & C, obtinebitur ut ſupra ad Conicam ſectionem æquatio hæc $cfx = cxx + dy + exy + yy$.



Deinde ſi ſupponatur ordinatam KL parallelam eſſe tangenti AT, & concipiatur eam produci donec rurſus occurrat Conicæ ſectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A: ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Quamobrem in illo caſu exiſtentibus KL & KM, ſibi invicem æqualibus, hoc eſt duobus valoribus ipſius y (affirmativo ſcilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cfx = cxx + dy + exy + yy$ termini illi in quibus y eſt imparis dimenſionis, hoc eſt termini $dy + exy$ reſpectu termini yy in quo y eſt paris dimenſionis, evaneſcere. Aliter enim duo va-

lores

lores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y, proinde & terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy, non evanescet ut oportet, sed eo major erit nisi d supponatur esse nihil. Delendus est itaque terminus dy, & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiatur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT $= g$, & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f. Æquatio $cfx = cxx + exy + yy$, subducto utrobique cxx fit $cfx - cxx = exy + yy$, hoc est, $\overline{f - x}$ in $cx = y$ in $\overline{ex + y}$. Ergo est $y \cdot f - x :: cx \cdot ex + y$, adeoque $g \cdot f :: cx \cdot ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g \cdot f :: cx \cdot ex$. Divide posteriorem rationem per x, & evadet $g \cdot f :: c \cdot e$, & $\frac{cf}{g} = e$. Quare si in æquatione $cfx = cxx + exy + yy$, scribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT à dato puncto B per quod Conica sectio transire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo casu erit AH $= x$, & BH $= y$. Dic ergo datam AH $= m$, & datam BH $= n$, & perinde pro x & y in æquatione $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$, scribe m & n, & orie-

tur

tur $cfm = cmm + \frac{cf}{g} mn + nn$. Aufer utrobique $cmm + \frac{cf}{g} mn$, & fiet $cfm - cmm - \frac{cf}{g} mn = nn$. Pone $f - m - \frac{fn}{g} = s$, & erit $csm = nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c = \frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam sectionem $cfx = cxx + \frac{cf}{g} xy + yy$. Et inde per methodum Cartesii Conica sectio datur & describi potest.

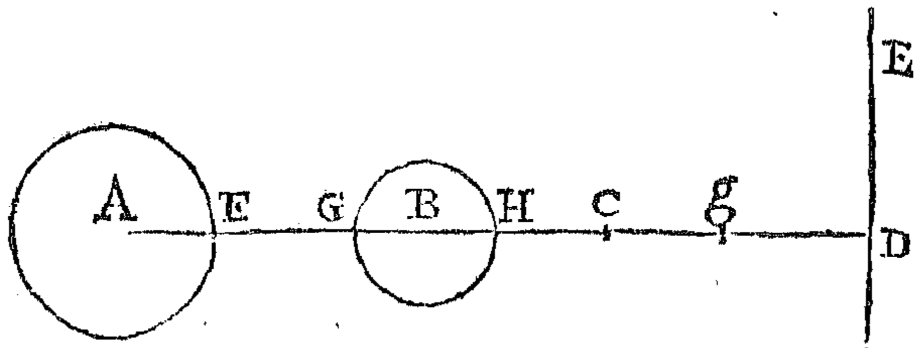
PROB. LVIII.

Dato globo A, positione parietis DE, & centri globi B à pariete distantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in spatiis liberis, & vi gravitatis destitutis, si globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis est, ultra B producta consistit, uniformi cum motu versus D feratur donec is impingat in alterum quiescentem globam B; globus iste B postquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C.

SIT globi A celeritas ante reflexionem a & erit per PROB. XII. p. 91. celeritas globi A post reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi B post

refle-

reflexionem $= \frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B est ut $A - B$ ad $2A$. In GD cape $gD = GH$ diametro nempe globi B, &



celeritates istæ erunt ut GC ad $Gg + gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in superficie globi B existens movetur in linea AD, perget per spatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per spatium gC postquam à pariete reflectitur; hoc est per totum spatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per spatium GC, eo ut globus uterque rursus conveniant & in se mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3$ (: : $A - B . 2A$) : : $m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur

bebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{smallmatrix} + s^3n \\ - 2s^3m \end{smallmatrix} = 0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x; quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F. Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{smallmatrix} + s^3n \\ + 2s^3m \end{smallmatrix} = 0$.

Si datus esset Globus B & quæreretur globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $-5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac divisa utraque parte per $5x - n + 2m$, emergeret $\frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per solam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quod si dato Globo utroque quæreretur punctum C in quo post reflexionem ambo in se mutuo impingerent: eadem æquatio per debitam reductionem daret $m = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}x + \frac{3x^4 - x^3n}{2s^3}$, hoc est $BC = \frac{1}{2}Hg + \frac{1}{2}gC - \frac{B}{2A} \times \overline{HD + DC}$. Nam supra erat $n - 3x = Gg + gC$. Unde si auferas $2x$ seu GH restabit $n - 5x = Hg + gC$. Cujus dimidium est $\frac{1}{2}n - \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}Hg + \frac{1}{2}gC$. Porro de n seu $BD + CD$ aufer x seu BH, & restabit $n - x$ seu $HD + CD$. Unde cum sit $\frac{x^3}{2s^3} = \frac{B}{2A}$ erit

x^3

$\frac{x^3}{2s^3} \times \overline{n - x}$, seu $\frac{nx^3 - x^4}{2s^3} = \frac{B}{2A} \times \overline{HD + CD}$. Et signis mutatis $\frac{x^4 - nx^3}{2s^3} = -\frac{B}{2A} \times \overline{HD + CD}$.

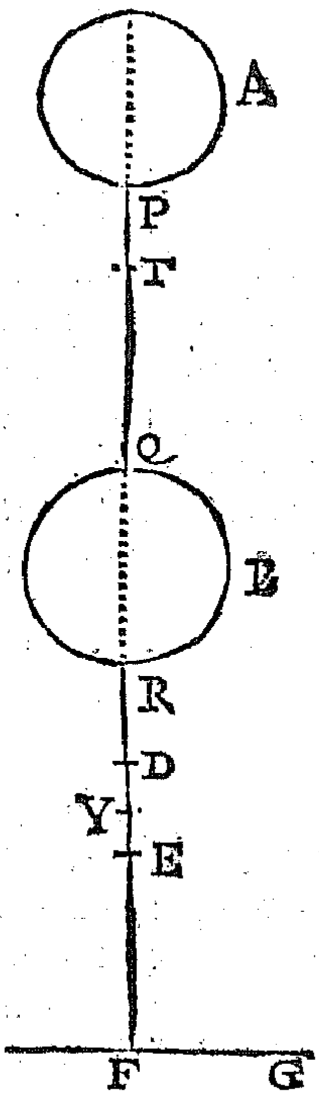
Prob. LIX.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B à globo A, si demittatur globus A, ita ut globus uterque simul sola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, postquam à fundo seu plano horizontali FG sursum reflectitur, superiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D à fundo distantia DF, invenire altitudinem PF, à qua globus superior A ad hunc effectum demitti debet.

SIT fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F sursum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus supremum Q occupet locum E; sitque ED distantia per quam globus ille postquam à fundo reflectitur ascendendo transit antequam globo superiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo distantiam DF, globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo per quam globus ille inferior antequam impingit in fundum cadendo describit RF vel QE $= x$; siqui-

dem

dem ea ignoretur. Et invento x ſi eidem addantur EF & PQ habebitur altitudo PF, à qua globus ſuperior ad effectum deſideratum demitti debet.



Cum igitur ſit $PQ = a$, & $QE = x$, erit $PE = a + x$. Aufer DE ſeu b, & reſtabit $PD = a + x - b$. Eſt autem tempus deſcenſus globi A ut radix ſpatii cadendo deſcripti ſeu $\sqrt{a + x - b}$, & tempus deſcenſus globi alterius B ut radix ſpatii cadendo deſcripti, ſeu $\sqrt{x}$, & tempus aſcenſus ejuſdem ut differentia radicis illius & radicis ſpatii quod cadendo tantum à Q ad D deſcriberetur. Nam hæc differentia eſt ut tempus deſcenſus à D ad E, quod æquale eſt tempori aſcenſus ab E ad D. Eſt autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus deſcenſus & aſcenſus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori deſcenſus globi ſuperioris erit $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{xx - bx}$, ſeu $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, ſeu $aa = 8ax - 16bx$. Et diviſis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x ſeu QE. Q. E. I.

P Quod

Quod si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ seu a: eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id est si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ $= 4$EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times \overline{x-b}}$, seu $\sqrt{xx - bx}$ quod subductum de x, seu QE relinquit EY, cujus quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin vero ex datis tum QE seu x tum fili longitudine PQ seu a, quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E distantia DE seu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b seu DE.

Hactenus supposui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior A verbi gratia prius dimissus, descenderit per spatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis distantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF à qua globus superior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D: sit PQ $= a$, DE $= b$, PT $= c$, & QE $= x$, & erit PD $= a + x - b$ ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE $+$ ED erunt ut $\sqrt{\text{PT}}$, $\sqrt{\text{PD}} - \sqrt{\text{PT}}$, & $2\sqrt{\text{QE}} - \sqrt{\text{QD}}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$.

At

At ultima duo tempora, propterea quod spatia TD, & QE + ED simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$, & partibus quadratis $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ scripto m nec non pro $8e-16b-4c$ scripto n, habebitur per debitam reductionē $\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=nx-m$. Et partibus quadratis $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et ordinata æquatione

$$256cx^3 \begin{array}{l}-128ce\\+256cf\\-nn\end{array} xx \begin{array}{l}-128cef\\+16cee\\+2mn\end{array} x \begin{array}{l}+6ceef\\-mm\end{array}=0.$$

Cujus æquationis constructione dabitur x seu QE, cui si addas datas distantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

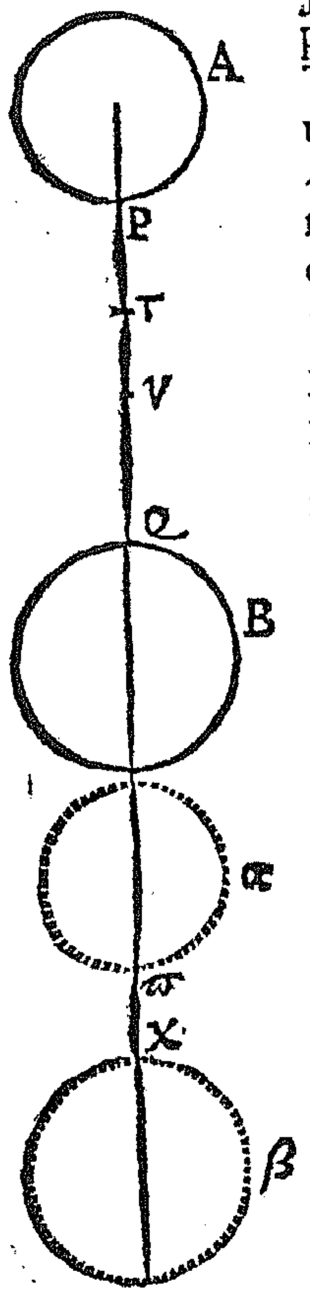
PROB. LX.

Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum ϖχ dato æquale est.

CUM dentur distantiæ PT, PQ, & ϖχ dic primam a, secundam b, tertiam c, & pro Pϖ seu

P 2 spatio

ſpatio quod globus ſuperior antequam pervenit ad locum quæſitum α cadendo deſcribit ponatur x. Jam tempora quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia PT, $P\varpi$, $T\varpi$, & inferior ſpatium $Q\chi$ ſunt ut $\surd PT$, $\surd P\varpi$, $\surd P\varpi - \surd PT$, & $\surd Q\chi$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quod globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia $T\varpi$ & $Q\chi$, ſunt æqualia. Unde & $\surd P\varpi - \surd PT$ æquale erit $\surd Q\chi$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$, & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ ſeu c & à ſumma auferendo PQ ſeu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his ſubſtitutis fiet $\surd x - \surd a = \surd\overline{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\surd ax = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\surd ax$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x, ſeu $4a$ ad $a + b - c$ ſicut $a + b - c$ ad x. Ex invento autem x ſeu $P\varpi$ datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β.



Et hinc ſi punctum quæratur ubi globus ſuperior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe ſeu delendo c,

dic

dic $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud ϖ vel x in quo globus superior incidit in inferiorem, & quæratur locus T quem superioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere: quoniam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu ductis extremis & mediis in se $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$. Cape ergo $V\varpi$ mediam proportionalem inter $P\varpi$ & $Q\varpi$, & versus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quæris. Nam $V\varpi$ erit $= \sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$, hoc est $= \sqrt{x \times \overline{x-b}}$ seu $= \sqrt{xx - bx}$: cujus duplum subductum de $2x - b$, seu de $2P\varpi - PQ$, hoc est de $PQ + 2Q\varpi$ relinquit $PQ - 2VQ$ seu $PV - VQ$, hoc est PT.

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirent: Quærendus erit primo locus ubi superior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum ubi in se impingunt celeritatibus inveniendæ sunt celeritates quas proxime post reflexionem habebunt, idque per modum Prob. XII. pag. 91. Postea quærenda sunt loca summa ad quæ globi celeritatibus hisce si sursum ferantur ascenderent, & inde cognoscentur spatia quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim ex assumpta illa differentia, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

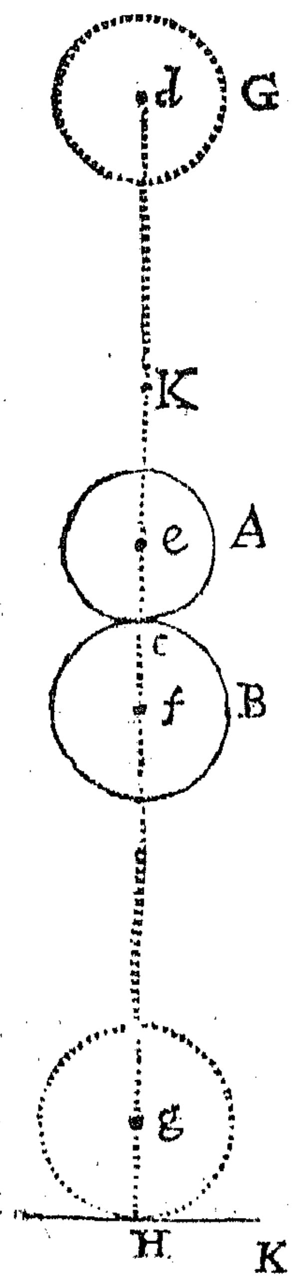
Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & post reflexionem celeritas superioris deorsum tanta sit, ut si sursum esset ascendere faceret globum illum per spatium ϖN, & inferioris celeritas deorsum tanta esset ut, si sursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium ϖM: tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\varpi$, NG, & inferior per spatia $M\varpi$, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium ϖG, & inferior spatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}=\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\varpi G+GH=\varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\varpi=a$, $N\varpi=b$, $GH=c$, $\varpi G=x$: erit juxta posteriorem æquationem $x+c=\varpi H$, Adde $M\varpi$ fiet $MH=a+c+x$. Ad ϖG adde $N\varpi$, & fiet $NG=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b+x}-\sqrt{b}=\sqrt{a+c+x}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b+x}=\sqrt{e+x}+\sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b+x=e+x+f+2\sqrt{ef+fx}$, seu $b-e-f=2\sqrt{ef+fx}$. Pro $b-e-f$ scribe g, & fiet $g=2\sqrt{ef+fx}$, & partibus quadratis $gg=4ef+4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f}-e=x$.

PROB.

PROB. LXI.

Si duo sint globi A, B quorum superior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B à fundo H versus superiora resilentem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rursus decidat, & in globum B à fundo resilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi & loco G à quo globus superior decidit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.

SIT e centrum globi A, & f centrum globi B, d centrum loci G in quo globus superior in maxima est altitudine, g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, a semidiameter globi A, b semidiameter globi B, c punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine de, adeoque est ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus A versus superiora ut ad locum priorem G redeat. Et globus B eadem celeritate deorſum reflecti debet qua aſcenderat ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & poſt reflexionem, ſeu ſub fine aſcenſus & initio deſcenſus. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, ſeu cum globi ſint ut cubi radiorum, ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à qua globus B deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de ſeu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, ſi modo pro altitudine poſteriore ed ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B ſi non impediretur aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$.



Sit

Sit ea fK. Ad fK adde fg, seu $dH-de-ef-gH$, hoc est $p-x$ si modo pro dato $dH-ef-gH$ scribas p, & x pro incognito de; & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6}x + p - x$. Unde celeritas globi B ubi decidit à K ad fundum, hoc est ubi decidit per spatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum describeret, erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus superior A ascendit à loco Ace ad summam altitudinem d, aut vicissim descendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B descendendo ad fundum tantum augebitur quanta est celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat vel ascendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & summa, quæ est ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, seu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. Pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ scribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$ $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss}x + p}$, & partibus quadratis $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiisset simplicior

plicior si modo assumpsissem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$, prodiisset enim $\frac{ss}{p-t}=x$. Unde faciendo ut sit $p-t$ ad s ut s ad x habebitur x seu ed; cui si addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in se mutuo impingent. Q. E. F.

Atque hactenus varia Evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fusius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematîs quæ prima fronte difficilia videantur non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam Problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis quæ quantitates sunt Problemati satisficientes extrahere oportebit.

Quomodo æquationes resolvendæ sunt.

POstquam igitur in Quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet Quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales sumendo r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius, pervenissem ad hanc æquationem $x^5-5rrx^3+5r^4x-r^4q=0$. Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius

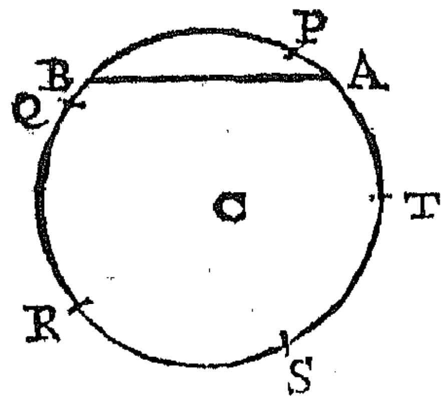
radius r, & linea dati anguli complementum subtendens q; ut quod radius sit 10 & subtensa 3; substituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x, seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

De natura radicum æquationis.

Radix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere. Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas est radix quoniam scripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc est nihil. Sed æquationis ejusdem plures esse possunt radices. Nam si in hac eadem æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x scribas numerum 2, & pro potestatibus x similes potestates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc est nihil. Atque ita si pro x scribas numerum 3 vel numerum negativum -5, utroque casu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hisce quatuor casibus se mutuo destruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3, & -5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse plures radices, sciendum est plures esse posse solutiones ejusdem Problematis. Ut si circulorum duorum datorum quæreretur intersectio: duæ sunt eorum intersectiones, atque adeo quæstio admittit duo responsa; & perinde æquatio intersectionem determinans habebit duas radices quibus intersectionem utramque determinet, si modo nihil in datis sit quo responsum ad unam intersectionem determinetur.

minetur. Sic & ſi arcus APB pars quinta AP inveniendа eſſet, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæſtio ſolvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B: nempe quintam partem arcuũ ASB, APBSAPB. ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB: quæ quintæ partes ſi dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB ſubtendit, ad caſus omnes determinandos circumferentia tota ſecari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes caſus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iiſdem datis, & per ejuſdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem ſemper æquationem incideris ſive quæras quintam partem Arcus APB, ſive quintam partem arcus ASB ſive alterius cujuſvis ex arcubus quintam partem. Unde ſi æquatio qua quinta pars arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, ſequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor eſt, eo quod ſubtenſa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. In omni igitur problemate neceſſe eſt æquationem qua reſpondetur tot habere radices, quot ſunt quæſitæ quantitatis caſus diverſi ab iiſdem datis pen-



dentes

dentes & eadem argumentandi ratione determinandi.

Poteſt vero æquatio tot habere radices quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures. Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices $1, 2, 3$, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris ſcriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes ſe mutuo deſtruere ut dictum eſt; præter hos vero nullus eſt numerus cujus ſubſtitutione hoc eveniet. Cæterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur. Ut ſi ſcire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices ſint $1, 2, 3$, & -5, ſupponendum erit x ambigue ſignificare numeros illos, ſeu eſſe $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$, vel quod perinde eſt, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$: & multiplicando hæc in ſe, prodibit multiplicatione $x - 1$ in $x - 2$, hæc æquatio $xx - 3x + 2 = 0$, quæ duarum eſt dimenſionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimenſionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ut ſupra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in ſe continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, eſſe nihilo æquale ut oportet, niſi his quatuor caſibus ubi eſt $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde ſoli numeri $1, 2, 3$, & -5 valere poſſunt x ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali

mul-

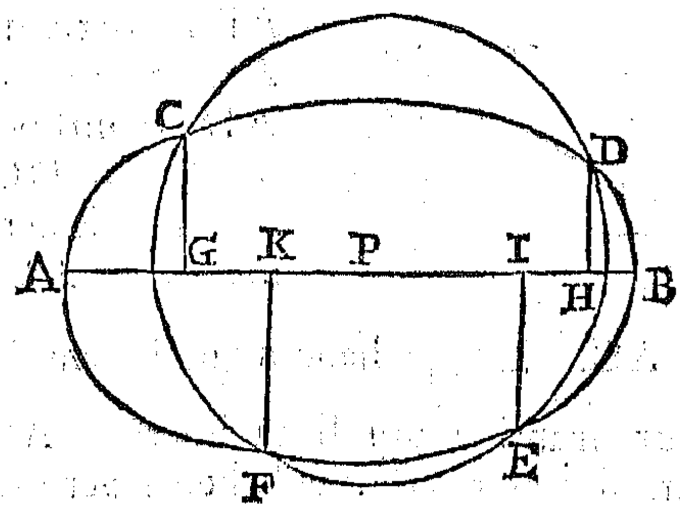
multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radidicibus habentur factores.

Radices vero sunt duplices, affirmativæ ut in allato exemplo 1, 2, & 3, & negativæ ut -5. Ex his vero aliquæ non raro evadunt impossibiles. Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ sunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem sunt ubi aa majus est quam bb, at ubi aa minus est quam bb, evadunt impossibiles eo quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica est impossibilis. Omnis enim radix possibilis sive affirmativa sit, sive negativa, si per seipsam multiplicetur, producet quadratum affirmativum: proinde impossibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ est 2, duas vero impossibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ scripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos se mutuo destruere: sunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impossibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præsupponant.

Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt exhibeant possibiles. Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro littera designante distantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, inter-

sectio

sectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere exprimant. Atque ita si circulus CDEF, & Ellipsis ACBF se mutuo secent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam

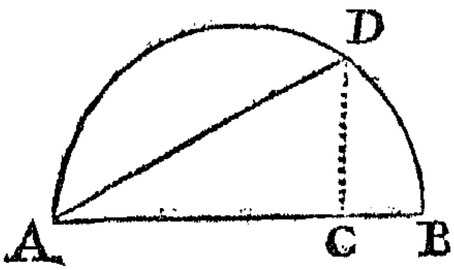


positione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat Ellipsin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quod si circuli radius manente centro ejus minuatur donec punctis E & F coalescentibus circulus tandem tangat Ellipsin, ex radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur ut Ellipsin in puncto EF ne quidem tangat sed secet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI, FK jam facta impossibilia exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impossibiles evadere solent. Et

inde

inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil spectat. Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendiculo DC, quærerem diametri segmentum AC, foret



$\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas ubi linea inscripta AD major est quam diameter AB, per Schema vero AC tunc evadit impossibilis. Nimirum in schemate linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in æquatione vero nihil est quod à conditione illa pendeat. Ex hac sola linearum conditione colligitur æquatio, quod sint AB, AD, & AC continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones schematis non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius est in schemate quam in æquatione potest illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de causa ubi æquationes sunt imparium dimensionum, adeoque radices omnes impossibiles habere non possunt; schemata quantitatibus à quibus radices omnes pendent sæpe limites imponunt quos transgredi servatis schematum conditionibus impossibile est.

Ex radicibus vero quæ reales sunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppositas solent tendere.

Sic

Sic in schemate penultimo quærendo perpendiculum CG incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices CG ac DH à punctis C & D tendentes versus unam plagam, & duæ negativæ EI & FK, tendentes à punctis E & F versus plagam oppositam. Aut si in linea AB ad quam perpendicula demittuntur detur aliquod punctum P, & pars ejus PG à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK quarum quæsita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt; quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum affirmativarum & negativarum ex signis terminorum æquationis cognosci potest. Tot enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie mutationes de $+$ in $-$ & $-$ in $+$; cæteræ negativæ sunt. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine $+ - - + -$ variationes secundi $-$ à primo $+$, quarti $+$ à tertio $-$ & quinti $-$ â quarto $+$, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ impossibiles sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro ambiguis habeantur. Sic in æquatione $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$, signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit hæc æquatio $x^4 - px^3 + ppxx \begin{matrix} -2p^3 \\ -q \end{matrix} x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2pq$

Q.

$+2pq=0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo duæ impossibiles, quæ pro ambiguitate sua priori casu negativæ posteriori affimativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt cognosci fere potest per hanc regulam. Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 1, 2, 3, 4, 5, &c. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum $+$; sin minus, signum $-$. Sub primo vero & ultimo termino colloca signum $+$. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de $+$ in $-$ & $-$ in $+$. Ut si habeatur æquatio $x^3+pxx+3ppx-q=0$: divido seriei hujus $\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}$ fractionum secundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per secundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur.

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{1}{3}. & & \frac{1}{3}. & & & \\ x^3 & +pxx & + & 3ppx & - & q & =0 \\ + & - & & + & & + & \end{array}$$

Dein quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$ minus est quam primi termini x^3, & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$, sub termino pxx colloco signum $-$. At quia

tertii

tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum $+$. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa $+$. Et signornm subscriptorum quæ in hac sunt serie $+ - + +$ mutationes duæ, una de $+$ in $-$, alia de $-$ in $+$ indicant duas esse radices impossibiles.

Sic & æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, duas habet radices impossibiles. Æquatio itẽ $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$, duas habet. Nam hæc fractionum

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3}. & & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & - & 4xx & + & 4x & - & 6 = 0 \\ + & & + & & - & & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \frac{3}{8} & & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & - & 6xx & - & 3x & - & 2 = 0 \\ + & + & & + & & - & & + \end{array}$$

series $\frac{1}{4}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{4}{1}$ dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem $\frac{3}{8}.\ \frac{4}{9}.\ \frac{3}{8}$ super mediis æquationis terminis collocandam. Dein secundi termini qui hic nihil est quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus est quam rectangulum negativum $-6x^6$ sub terminis utrinque positis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo $+$. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series $+ + + - +$ ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \frac{2}{5}. & & \frac{1}{2}. & & \frac{1}{2}. & & \frac{2}{5}. & & \\ x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2xx & - & 5x & - & 4 = 0 \\ + & & + & & - & & + & & + & & + \end{array}$$

$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impossibiles duæ.

Ubi termini duo vel plures simul desunt, sub primo terminorum deficientium collocandum est signum $-$, sub secundo signum $+$, sub tertio signum $-$, & sic deinceps, semper variando signa; nisi quod sub ultimo terminorum simul deficientium semper collocandum est signum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent signa contraria. Ut in æquationibus $\begin{array}{ccccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & +a^5 & =0 \\ + & + & - & + & - & + & \end{array}$, & $\begin{array}{ccccccc} x^5 & +ax^4 & * & * & * & -a^5 & =0 \\ + & + & - & + & + & + & \end{array}$, quarum prior quatuor posterior duas habet impossibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{ccccccccc} & \frac{3}{7}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{5}. & \frac{3}{5}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{7}. & & \\ x^7 & -2x^6 & +3x^5 & -2x^4 & +x^3 & * & * & -3 & =0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + & \end{array}$$

sex habet impossibiles.

Hinc etiam cognosci potest utrum radices impossibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas esse impossibiles quot sunt ipsorum variationes, & tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione. Sic in æquatione $\begin{array}{ccccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4 & =0 \\ + & + & - & + & + & + & \end{array}$ quoniam signis infra scriptis variantibus $+ - +$ quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, signa habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum signa $+ - + - - -$ per tres variationes indicant tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur æquationis unam esse radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impossibiles. Quod

si

si æquatio fuisset $\underset{+}{x^5} \; \underset{+}{-4x^4} \; \underset{-}{-4x^3} \; \underset{-}{-2xx} \; \underset{+}{-5x} \; \underset{+}{-4} = 0$ tunc termini subscriptis signis prioribus variantibus $+ -$ imminentes, nimirum $-4x^4 - 4x^3$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant unam ex negativis radicibus impossibilem esse; & termini *signis subscriptis posterioribus variantibus* $- +$ imminentes, nimirum $-2xx - 5x$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant aliam ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa $+ - - - - -$ per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse: sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

De transmutationibus æquationum.

Cæterum æquationis cujusvis radices omnes affirmativæ in negativas & negativæ in affirmativas mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum. Sic æquationis $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum signa secundi quarti & sexti termini, ut hic fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi, & perinde pro ea ſubſtituere quod æquipollens eſſe fingitur. Ut ſi ſupponamus radicem æqualem eſſe ſummæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam poſſumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate ſubducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ſi radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, ſeu $x = y - 1$, & perinde pro x ſcribo in æquatione $y - 1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x ſimilem poteſtatem de $y - 1$, ad hunc modum,

$$\begin{array}{r|rrrrr}
x^4. & y^4 - 4y^3 & + 6yy & - 4y & + 1 \\
-x^3. & - y^3 & + 3yy & - 3y & + 1 \\
-19xx. & & -19yy & + 38y & -19 \\
+49x. & & & + 49y & -49 \\
-30. & & & & -30 \\
\hline
\text{Summa} & y^4 - 5y^3 & - 10yy & + 80y & - 96 = 0.
\end{array}$$

Et æquationis prodeuntis $y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0$, radices erunt $2, 3, 4, -4$, quæ prius erant $1, 2, 3, -5$, unitate jam factæ majores. Quod ſi pro x ſcripſiſſem $y + 1\frac{1}{2}$ prodiiſſet æquatio $y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, cujus duæ fuiſſent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero ſcribendo $y - 6$ prodiiſſet æquatio cujus radices fuiſſent $7, 8, 9, 1$, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem ſcribendo $y + 4$ radices jam numero quaternario diminutæ evaſiſſent $-3, -2, -1, -9$, negativæ omnes.

Et

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione $x^3 - 3aax - 3a^3 = 0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a scribendo $y - a$ pro x, in æquatione resultante $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, cognitam quantitatem secundi termini quæ est -4 divisam per numerum dimensionum æquationis 3 subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de y, & residuum $y + \frac{4}{3}$ substituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & +4yy & +\frac{16}{3}y & +\frac{64}{27} \\ & -4yy & -\frac{32}{3}y & -\frac{64}{9} \\ & & +4y & +\frac{16}{3} \\ & & & -6 \\ \hline y^3 & * & -\frac{4}{3}y & -\frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, & finge $x = y - e$, & substituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{array}{l} -4e \\ -3 \end{array} y^3 \begin{array}{l} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{array} yy \begin{array}{l} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{array} y \left.\begin{array}{l} +e^4 \\ +9e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{array}\right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus est $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi si $6ee + 9e + 3$ nullum esset, eveniret id ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ divisa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, seu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, seu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc est $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$ scriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ scribi pro x, ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{11}{4}y - \frac{27}{16} = 0$: sin scribatur $y + 1$ orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 12 = 0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquando tolli. Ut si æquatio sit $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3 - 8v - 146 = 0$, & divisis omnibus per 8 fiet $v^3 - v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveniatur v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$,

&

& $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propositæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci. Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam: quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt 3, 2, 1, -5, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x, resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$: radicum affirmativarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ omnium maxime distabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt

Sunt & aliæ æquationum transmutationes sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius ubi tertium æquationis terminum sustulimus confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione constat quod cognita quantitas secundi termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea tertii æqualis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus; ea quarti, si signum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum sub singulis ternis radicibus; ea quinti æqualis aggregato contentorum sub singulis quaternis; & sic in infinitum. Assumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. seu $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra. Jam multiplicando $x - a$ per $x - b$ producetur æquatio $xx \begin{smallmatrix} -a \\ -b \end{smallmatrix} x + ab = 0$: ubi cognita quantitas secundi termini, si signa ejus mutentur, nimirum $a + b$, est summa duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod sub utraque continetur rectangulum. Rursus multiplicando hanc æquationem per $x + c$ producetur æquatio cubica

$$x^3 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix} xx \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix} x + abc = 0,$$

ubi cognita quantitas secundi sub signis mutatis nimirum $a + b - c$ est summa radicum a, b & $-c$; cognita tertii $ab - ac - bc$, summa rectangulorum sub singulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti sub signo mutato $-abc$ illud unicum contentum est quod omnium continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam

bicam illam æquationem per $x-d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix} xx \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix} x - abcd = 0;$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis mutatis $a+b-c+d$, est summa omnium radicum; ea tertii $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti sub signis mutatis $-abc+abd-bcd-acd$ summa contentorum sub singulis ternis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum sub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuscunque, terminos nec fractos nec surdos habentis, radices non surdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit nullum ultimi termini divisorem esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum pluriumve contentum, simul constabit nullam esse radicem radicumve rectangulum aut contentum nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse $p, q, r, s, t, v,$ &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et signis terminorum probe observatis fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & sic in infinitum, observata serie progressionis. Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-

qua-

quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. Et inde orientur $a = (p =)\ 1$. $b = (pa + 2q = 1 + 38 =)\ 39$. $c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) - 89$. $d = (pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =)\ 723$. Quare summa radicum erit 1, summa quadratorum radicum 39, summa cuborum -89, & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt 1, 2, 3, & -5, & harum summa $1 + 2 + 3 - 5$ est 1, summa quadratorum $1 + 4 + 9 + 25$ est 39, summa cuborum $1 + 8 + 27 - 125$ est -89, & summa quadrato-quadratorum $1 + 16 + 81 + 625$ est 723.

De limitibus æquationum.

Et hinc colliguntur limites inter quos consistent radices æquationis ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ. Quamobrem si limitem desideres quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major erit quam radix maxima æquationis. Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc magis si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: & ita in infinitum. Sic in æquatione

præ-

præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{2}$ quam proxime, & $6\frac{1}{2}$ magis distat à nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, −5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ est $5\frac{1}{2}$ circiter propius accedit ad radicem à nihilo remotissimam −5.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum. Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ. Sic in æquatione præcedente media proportionalis inter summam quadratorum radicum 39, & summam quadrato-quadratorum 723 est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat −89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{1}{2}$ circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica quæ est $5\frac{1}{21}$ proxime, transcendit radicem negativam −5. Quo exemplo videre est quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa est vel unica affirmativa. Et tamen propius adhuc accederetur, si inter summam quadrato-quadratorum radicum & summam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur atque ex hujus, & summæ quadrato-cuborum radicum semi-

ſemiſumma & ſemidifferentia radices quadrato-cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel dimnuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata quam proxime poteſt obtineri.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui. Inventa juxta methodum præcedentem ſumma cuborum duarum illarum radicum, ut & ſumma quadrato-cuborum & ſumma quadrato-quadrato-cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & ſummæ cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſemiſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum ſumma cuborum, tum ſumma cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum ſumma tum differentia cuborum habentur cubi ipſi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et ſi in altioribus poteſtatibus opus conſimile inſtitueretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum

minus

minus usui sunt, & ad æquationes tantum extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior sit & ad omnes æquationes extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur quorum signa diversa sunt à signo primi seu altissimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major; qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis. Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum sic multiplico $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes divisos per x rursum multiplico sic $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$, & terminos prodeuntes rursum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$, quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 & fiunt $5x^3 - 6xx - 15x + 15$. Hi itidem multiplicati per progressionem 3. 2. 1. 0, & divisi per x fiunt $15xx - 12x - 15$, & rursum divisi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi

divisi per $2x$ fiunt $5x-2$. Jam cum terminus æquationis altissimus x^5 affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit $5x-2=3$ affirmativum sed $5xx-4x-5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x, evadunt

$$5x-2=8$$
$$5xx-4x-5=7$$
$$5x^3-6xx-15x+15=1$$
$$5x^4-8x^3-30xx+60x+63=79$$
$$x^5-2x^4-10x^3+30xx+63x-120=46.$$

Quare cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perinde est muto signa terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates in quibus numeri substituendi sunt fient

$$5x+2$$
$$5xx+4x-5$$
$$5x^3+6xx-15x-15$$
$$5x^4+8x^3-30xx-60x+63$$
$$x^5+2x^4-10x^3-30xx+63x+120.$$

Ex his seligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur: puta $5x^4+8x^3-30xx-60x+63$, & hic substituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Substituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et similiter in cæteris quantitatibus substituendo numerum 3 pro x prodit semper numerus affirmativus. Id quod ex inspectione sola colli-

colligere licet. Quare numerus −3 transcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & −3 inter quos radices omnes consistunt.

Horum vero limitum inventio usui est tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum surdarum ex ipsis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æqnatione novissima si radices rationales, siquas forte habeat, invenire vellem: ex superioribus certum est has non alias esse posse quam divisores ultimi termini æquationis, qui hic est 120. Proin tentando omnes ejus divisores, si nullus earum scriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evanescere: certum est æquationem non admittere radicem nisi quæ sit surda. At ultimi termini 120, divisores permulti sunt, nimirum 1. −1. 2. −2. 3. −3. 4. −4. 5. −5. 6. −6. 8. −8. 10. −10. 12. −12. 15. −15. 20. −20. 24. −24. 30. −30. 40. −40. 60. −60. 120. & −120. Et hos omnes divisores tentare, tædio esset. Cognito autem quod radices inter limites 2 & −3 consistunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit divisores tentare nisi qui sunt inter hos limites, nimirum divisores 1, −1, & −2. Nam si horum nullus radix est, certum est æquationem non habere radicem nisi quæ sit surda.

Æquationum reductio per divisores surdos.

Hactenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur.

hatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii. Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, & extracta utrobique radice fiet $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, sit ea $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi p, q, r, & s, denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta.$$
$$s - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ, divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet, & per 4 divisus unitatem relinquere, si termininorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$ si p sit par; vel imparis divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum β sit nihil. Aufer Quotum de $\frac{1}{2}pk$, & reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone $\frac{\alpha + nkk}{2}$, & tenta si n dividat $QQ - s$, & Quoti radix sit rationalis, & æqualis l. Si hoc contigerit, ad utramque partem æquationis adde $nkkxx + 2nklx + nll$, & radicem extrahes utrobique, prodeunte $xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}}$ in $kx + l$.

Exem-

Exempli gratia proponatur æquatio $x^4 + 12x - 17 = 0$, & quia p & q hic desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipsorum β & 2ζ seu 12 & -34 communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successive tentandi sunt pro k, & $-3, -2, -1, -\frac{1}{2}$ pro l respective. Est autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id est kk æquale Q. Est & $\sqrt{\frac{QQ - s}{n}}$, id est $\sqrt{\frac{QQ + 17}{2}} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi vero 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque $k = 1$, $l = -3$, & $Q = 1$, & quantitatem $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $2xx - 12x + 18$; addo ad utramque partem æquationis, & prodit $x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12 + 18$, & extracta utrobique radice, $xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Quod si radicis extractionem effugere malueris pone $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, & invenietur ut ante $xx + 1 = \pm\sqrt{2} \times \overline{x - 3}$. Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{-1}{2} \pm 3\sqrt{2}}$, hoc est, secundum signorum variationes, $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Item $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, & $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

Quæ quidem quatuor ſunt radices æquationis ſub initio propoſitæ $x^4 + 12x - 17 = 0$. Sed earum ultimæ duæ ſunt impoſſibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0$, & ſcribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s reſpective, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, ſeu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis diviſor eſt unicus 3, adeoque hic erit n, & ipſius $\frac{\beta}{n}$ ſeu -105 diviſores ſunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi ſunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k ſeu -105 per 3, ſubduco de $\frac{1}{2}pk$, ſeu -3×3, & reſtat 26; cujus dimidium 13 eſſe debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu $\frac{-67 + 27}{2}$ id eſt -20 erit Q, & $QQ - s$ erit 411, qui dividi poteſt per n ſeu 3, ſed quoti 137 radix non poteſt extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 5, eſt -21, & hunc ſubducendo de $\frac{1}{2}pk$ ſeu -3×5 reſtat 6, cujus dimidium 3 erit l. Eſt & Q ſeu $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id eſt $\frac{-67 + 75}{2}$ numerus 4. Et $QQ - s$, ſeu $16 + 11$ dividi poteſt per n; & Quoti, qui eſt 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo eſſe $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$, & ſi $nkkxx + 2nklx + nll$, id eſt $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem æquationis

tionis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, seu $xx-3x+4=\pm\sqrt{3}\times\overline{5x+3}$, & extracta iterum radice $x=\frac{3\pm5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud secus si proponatur æquatio hæcce $x^4-9x^3+15xx-27x+9=0$, scribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s respective, emerget $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$, & $2\frac{7}{64}=\zeta$. Ipsorum β & 2ζ, seu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes divisores sunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; sed 9 quadratus est, & 3, 15, 27, 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n=5$, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu $-\frac{81}{8}$ divisores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{2}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, subductus de $\frac{1}{2}pk$ seu $-\frac{9}{4}$ relinquit 18 pro l, & $\frac{\alpha+nkk}{2}$ seu -2 est Q, & $QQ-s$ seu -5 dividi quidem potest per n seu 5, sed Quoti negativi -1 radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse 18. Quare concludo k non esse $\frac{1}{2}$ & tento jam si sit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k seu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$ nempe Quotum $-\frac{27}{4}$ subduco de $\frac{1}{2}pk$ seu $-\frac{27}{4}$ & restat 0. Unde l jam nihil erit. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$ seu 3 æqualis Q, & $QQ-s$ nihil est; unde rursus l qui hujus $QQ-s$ divisi per n radix est, invenitur

tur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo esse $n = 5$, $k = \frac{3}{2}$, $l = 0$, & $Q = 3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propositæ terminos $nkkxx + 2nlkx + nll$ id est $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{x} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - 4\frac{1}{2}x + 3 = \sqrt{5} \times \frac{3}{2}x$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut si fuerit $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 2aa \\ - cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 = 0$, substituendo $-2a$, $2aa - cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro q, p, r, & s respective, obtinebuntur $aa - cc = \alpha$, $-acc - a^3 = \beta$, & $\frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{4}c^4 = \zeta$. Quantitatum β & 2ζ divisor communis est $aa + cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$ seu $-a$ divisores habet 1 & a. Sed quia n duarum est dimensionum, & $k\sqrt{n}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullius erit, adeoque non potest esse a. Sit ergo $k = 1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ seu $-a$ & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha + nkk}{2}$ seu aa est Q, & $QQ - s$ seu $a^4 - a^4$ nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $aaxx + ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - ax + aa = \pm x\sqrt{aa + cc}$. Et extracta iterum radice $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Hactenus

Hactenus regulam applicui ad extractionem radicum surdarum: potest tamen eadem ad extractionem etiam rationalium applicari, si modo pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut si æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, substituendo $-1, -5, +12,$ & -6, pro $p, q, r,$ & s respective, invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & $-10\frac{57}{64} = \zeta$. Terminorum β & 2ζ, seu $\frac{75}{8}$ & $-\frac{697}{32}$ communis divisor est sola unitas. Quare pono $n = 1$. Quantitatis $\frac{\beta}{n}$ seu $\frac{75}{8}$ divisores sunt $1, 3, 5, 15, 25, 75$: quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l. Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$, id est $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times \overline{2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}}$, seu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$, adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus 1, 3, 9 aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{25}{8} + \frac{1}{2}kk$; id est Q esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respective $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{2} + \frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, adeoque, *cæteris rejectis*, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$ & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo casus examinantur. Atque hactenus de æquationibus quatuor dimensionum.

Si æquatio sex dimensionum reducenda est, sit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac

$$q - \tfrac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta. \quad s - \tfrac{1}{2}p\beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \tfrac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$. Pro l, divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ si

Q sit

Q ſit integer; vel diviſoris imparis dimidium ſi Q ſit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil ſi dividuum iſtud $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ ſit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + \frac{1}{2}nkl$. Dein tenta ſi $RR - v$ dividi poteſt poſſit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea ſi radix iſta æqualis ſit tam quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propoſitæ ſcribe hanc $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + r = \pm\sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propoſitam. Quod ſi ea omnia in nullo caſu evenerint, reductio erit impoſſibilis, ſi modo prius conſtet æquationem per diviſorem rationalem reduci non poſſe.

Exempli gratia proponatur æquatio

$$x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0,$$

& ſcribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb + 2a^3b - 4ab^3$, 0, & $3aab^4 - a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v reſpective, prodibunt $2bb - aa = \alpha$. $4abb - a^3 = \beta$. $2a^3b + 2aabb - 4ab^3 - a^4 = \gamma$. $-b^4 + 2a^3b + 3aabb - 4ab^3 - \frac{5}{4}a^4 = \zeta$. $\frac{1}{2}a^5 - a^3bb = \eta$. & $3aab^4 - a^4bb - \frac{1}{4}a^6 = \theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis diviſor eſt $aa - 2bb$, ſeu $2bb - aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus ſit. Sed eſto aa majus quam $2bb$, & $aa - 2bb$ erit n. Debet enim n ſemper affirmativum eſſe. Porro $\frac{\zeta}{n}$ eſt $-\frac{5}{4}aa + 2ab + \frac{1}{2}bb$, $\frac{\eta}{n}$ eſt $\frac{1}{2}a^3$, & $\frac{\theta}{n}$ eſt $-\frac{1}{4}a^4$

$-\frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{2}aabb$, adeoque $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{4nn}$, seu $\frac{\lambda}{2nn}$ est $\frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b + \frac{1}{4}a^4bb - \frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{1}{4}aab^4$, cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n} \times k$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l, qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + \frac{1}{2}nkl$ dat abb pro R. Et $RR - v$ est $-2aab^4 + a^4bb$, quod dividi potest per n seu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ seu $\frac{0}{0}$ non est inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m, & loco æquationis propositæ scribi potest $x^3 - \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$, id est $x^3 - axx + abb = \sqrt{aa - 2bb} \times \overline{xx - ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2aabbxx + 2a^3bxx - 4ab^3xx + 3aab^4 - a^4bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo dimensionum sit ea $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$, & fiat $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \epsilon$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$. & $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2δ, 2ϵ, 2ζ, 8η, quæ-

quære communem divisorem qui integer sit, & non quadratus nec per quadratum divisibilis, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum ejusmodi reductiones raro possibiles sint, finem operi ut plurimum imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest. Ut si ea sit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa$, & quærendus communis divisor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, qui integer sit & non quadratus, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem si modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis sit impar.

Sic si duodecim dimensionum æquatio sit $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5$ $bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa$, $e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon = \lambda$, $f - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon = \mu$, & quærendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo termi-

norum

norum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis sit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad z ubi n est par vel ad $4z$ ubi n est impar successive addantur $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$, & deinceps donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S si n est par, vel 2S si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS - z}{n}}$ dic h. Debent autem s & h esse numeri integri si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & M, Q & l, P & k, post inveniendis observandum est. Et omnes numeri S & h, qui intra præfatum limitem inveniri possunt in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successivo ſive qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum eſt in omni caſu $\frac{nkk + \alpha}{2} = Q$. Dein pro l tentandi ſunt ſucceſſive numeri omnes qui non efficiunt $nl \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk + 2\beta}{4} + nkl = R$. Denique pro m tentandi ſunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in caſu quovis ſi fiat $s - QQ - PR + nll = 2H$, & $H + nkm = S$, ſit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erant; & præterea ſi alter numerus ei S reſpondens, qui pro h in eundem Catalogum relatus erat ſit his tribus $\frac{2RS - w}{2nm}$, $\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl}$ & $\frac{PS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ ſcribenda erit hæcce $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times kx^3 + lxx + mx + h$.

Exempli gratia proponatur æquatio $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10xx - 10x - 5 = 0$. Et erit $q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8}$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta$. $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \eta$. Ergo 2δ, 2ϵ, 2ζ, 8η reſpective, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5, qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cum itaque inventus ſit diviſor communis n ſeu 5

qui

qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$ ſeu -20 ſucceſſive addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus ſolum 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ ſunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$, id eſt 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpective pro h. Sed quia $S+nh$ ſi ſcribatur 20 pro S & 9 pro h, fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolum refero in tabulam ut ſequitur.

h	1. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{2}$.
S	0. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$.

His ita diſpoſitis, tento pro k numero omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\pm nk$ ſeu $2\pm 5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id eſt numeros -8. -7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, ponendo $\frac{nkk+\alpha}{2}$ ſeu $\frac{5kk-5}{2}$ id eſt numeros $\frac{315}{2}$. 120. $\frac{175}{2}$. 60. $\frac{75}{2}$. 20. $\frac{15}{2}$. 0. $-\frac{5}{2}$. 0. $\frac{15}{2}$. 20. $\frac{75}{2}$. 60. $\frac{175}{2}$. 120 reſpective pro Q. Imo vero cum $Q\pm nl$, & multo magis Q non debeat majus eſſe quam 40, rejiciendos eſſe ſentio $\frac{315}{2}$. 120. $\frac{175}{2}$ & 60, & qui his reſpondent -8. -7. -6. -5. 5. 6. 7, adeoque ſolos -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4 pro k & $\frac{75}{2}$. 20. $\frac{15}{2}$. 0. $-\frac{5}{2}$. 0. $\frac{15}{2}$. 20. $\frac{75}{2}$ pro Q reſpective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc caſu pro l tentandi deinceps erunt ſucceſſive omnes numeri qui non efficiunt $Q\pm nl$ majus quam 40, id eſt omnes numeri inter 10 & -10, & pro R reſpective numeri

meri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, seu $-5-5l$ id est -55. -50. -45. -40. -35. -30. -25. -20. -15. -10. -5. 0. 5. 10. 15. 20. 25. 35. 40. 45, quorum tamen tres priores & ultimum quia majores quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ seu $5 \pm$ majus quam 40, id est numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an si ponendo $s - QQ - pR + nll$, id est $5 - 20 + 20$ seu $5 = 2H$, sit $H + nkm$ seu $\frac{5}{2} - 5m = S$, id est si ex his numeris $\frac{-65}{2}$. $\frac{-55}{2}$. $\frac{-45}{2}$. $\frac{-35}{2}$. $\frac{-25}{2}$. $\frac{-15}{2}$. $\frac{-5}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{25}{2}$. $\frac{35}{2}$. $\frac{45}{2}$. $\frac{55}{2}$. $\frac{65}{2}$. $\frac{75}{2}$. $\frac{85}{2}$, aliquis æqualis sit alicui numerorum 0. $\pm\frac{5}{2}$. $\pm\frac{15}{2}$ qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt $-\frac{15}{2}$. $-\frac{5}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$ quibus respondent $\pm\frac{7}{2}$. $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. $\pm\frac{7}{2}$ pro h in eadem tabula scripti, ut & 2. 1. 0. -1 pro m substitui. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro h, & fiet $\frac{2RS - w}{2nm} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$,

& $\frac{2QS + RR - Vnmm}{2nl} = \frac{25 + 10 - 5}{-20} = -\frac{3}{2}$, &

$\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10 + 5 + 20}{-10} = -\frac{3}{2}$.

Quare cum prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu h, concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + h}$, id est $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5} \times \overline{-x^3 - 2xx + x - 1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum quæ sub initio proponebatur. Quod

Quod si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius b nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non potuisse.

Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, sed quæ brevitatis causa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potius quam praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem surdæ radicis quadraticæ.

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per extractionem surdæ radicis cubicæ, sed & has, ut quæ perraro utiles sint, brevitatis gratia prætereo. Sunt tamen reductiones quædam cubicarum æquationum vulgo notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Et supponatur x esse $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id est x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id est $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem est $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per posteriorem est $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, seu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$, & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et supra erat $-\frac{q}{3a} = b$,

&

& $a+b=x$. Ergo $a-\frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3-6yy+6y+12=0$. Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum ponatur $x+2=y$, & orietur $x^3 * -6x+8=0$, ubi est $q=-6$, $r=8$, $\frac{1}{4}rr=16$, $\frac{q^3}{27}=-8$, $a^3=-4\pm\sqrt{8}$, $a-\frac{q}{3a}=x$, & $x+2=y$, id est $2+\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}}=y$.

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affirmativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles. At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu tres sunt radices possibiles quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter designantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: sed omnes tres lege præfata exprimere impossibile est. Quantitas $a-\frac{q}{3a}$ qua x designatur multiplex esse non potest, eaque de causa Hypothesis quod x, hoc in casu ubi

S triplex

triplex est, æqualis esse potest binomio $a - \frac{q}{3a}$, seu $a + b$ cujus nominum cubi $a^3 + b^3$ conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Est & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de $a^3 + b^3 + r$ id est de nihilo, aufer $a^3 + r$, seu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & restabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Est itaque $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; vel $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, adeoque horum summa $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, erit $= x$.

Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi. Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4 + qxx + rx + s = 0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$ generari, id est eandem esse cum

cum hac $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix} xx \begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix} x + fg = 0$, & collatis terminis fiet $f+g-ee=q$, $eg-ef=r$, & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$, $\frac{r}{e}=g-f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$. $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$. $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}\ (=fg)=s$, & per reductionem $e^6+2qe^4 \begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix} ee - rr = 0$. Pro ee scribe y, & fiet $y^3+2qyy \begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix} y - rr = 0$, æquatio cubica cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem vel secus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo $\sqrt{y}=e$, $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$, $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$, & æquationes duæ $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $\overline{x^4+qxx+rx+s}=0$, nimirum $x=-\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum est quod si æquationis biquadraticæ radices quatuor possibiles sunt, æquationis cubicæ $y^3+2qyy \begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix} y - rr = 0$ radices tres possibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. Sic & si æquationis quinque vel plurium dimensionum radices affectæ in radices non affectas mediis æquationis terminis quoquo pacto sublatis convertantur, illa radicum expressio semper erit impossibilis ubi plures quam una radix in æquatione imparium dimenſionum poſſibiles ſunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimenſionum quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ methodo ſupra expoſita reduci nequeunt.

Docuit Carteſius æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis ſupra reducta $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Tolle ſecundum terminum ſcribendo $v + \frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4 - \frac{43}{8}vv + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0$. Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0$. Hic eſt $-86 = q$, $600 = r$, & $-851 = s$, adeoque $y^3 + 2qyy \begin{smallmatrix} +qq \\ -4s \end{smallmatrix} y - rr = 0$, ſubſtitutis æquipollentibus fiet $y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0$. Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps uſque ad 100 invenietur tandem $y = 100$. Quod idem multo expeditius per methodum à nobis ſupra expoſitam inveniri potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$, ſeu -23 erit f, & $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2}$ ſeu 37 erit g, adeoque æquationes $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$, ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus evadent $zz + 10z - 23 = 0$, & $zz - 10z + 37 = 0$. Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, & $vv - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Reſtitue inſuper $x - \frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx + 2x - 2 = 0$, & $xx - 3x + 3 = 0$, æquationes duæ quarum radices quatuor $x = -1 \pm \sqrt{3}$, & $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$, eaedem eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$. Sed hæ facilius per methodum inveniendi diviſores à nobis ſupra explicatam inveniri potuerunt.

Extractio Radicum ex binomiis.

Hactenus æquationum reductiones modis ni fallor facilioribus & magis generalibus quam ab aliis factum eſt tradidiſſe ſuffecerit. Sed quoniam in hujuſmodi operationibus ſæpe devenimus ad radicales complexas quæ ad ſimpliciores reduci poſſunt, convenit etiam harum reductiones exponere. Eæ fiunt per extractiones radicum ex binomiis, aut ex quantitatibus magis compoſitis quæ ut binomia conſiderari poſſunt.

[Verum cum hoc jamdudum præſtitum ſit in Capite *De Reductione Radicalium ad ſimpliciores radicales per extractionem Radicum*, pluribus impræſentiarum ſuperſedemus.]

pg 278 - blank page

ÆQUATIONUM

Constructio linearis.

HActenus æquationum proprietates, transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam absque nimiis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu Geometricam sive Mechanicam consit. Qua de causa non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

Veteres, ut ex Pappo discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum mediæ proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoidem, & Conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt Problemata. Tandem re penitius examinata, & Conicis sectionibus in Geometriam receptis, Problemata distinxerunt in tria genera: Plana quæ per lineas à plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum ſolvi poſſunt; Solida quæ per lineas ortum à ſolidi id eſt Coni conſideratione derivantes ſolvebantur; & Linearia ad quorum ſolutionem requirebantur lineæ magis compoſitæ. Et juxta hanc diſtinctionem, problemata ſolida per alias lineas quam Conicas ſectiones ſolvere à Geometria alienum eſt; præſertim ſi nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas ſectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longius progreſſi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi poſſunt, & pro dimenſionibus æquationum diſtinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere Problema per lineam ſuperioris generis conſtruere quod conſtrui poteſt per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, diſtinctionem earum in genera juxta dimenſiones æquationum per quas definiuntur laudo. At æquatio non eſt, ſed deſcriptio quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica eſt, non quod per æquationem exprimi poteſt; ſed quod deſcriptio ejus poſtulatur. *Æquationis* ſimplicitas non eſt, ſed deſcriptionis facilitas, quæ lineam ad conſtructiones Problematum prius admittendam eſſe indicat. Nam æquatio ad Parabolam ſimplicior eſt quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob ſimpliciorem deſcriptionem prius admittitur. Circulus & Coni ſectiones ſi æquationum dimenſiones ſpectentur ejuſdem ſunt ordinis, & tamen circulus in conſtructione problematum non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per

Conicas vero sectiones construere quod per circulum construi potest vitio vertatur. Aut igitur legem à dimensionibus æquationum in circulo observandam esse statue, & sic distinctionem inter problemata plana & solida ut vitiosam tolle; aut concede legem illam in lineis superiorum generum non ita observandam esse quin aliquæ ob simpliciorem descriptionem præferantur aliis ejusdem ordinis, & in constructione Problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In constructionibus quæ sunt æque Geometricæ præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem vero constructionis expressiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ descriptiones linearum hic in censum veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ sunt faciles vel difficiles constructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque à rei natura alienum est leges constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum & forte Conicas sectiones è Geometria cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes secundum descriptionis simplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione secare. Numquid ergo reprehenderes siquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur adhibendas esse? Igitur si angulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium de-

scribere

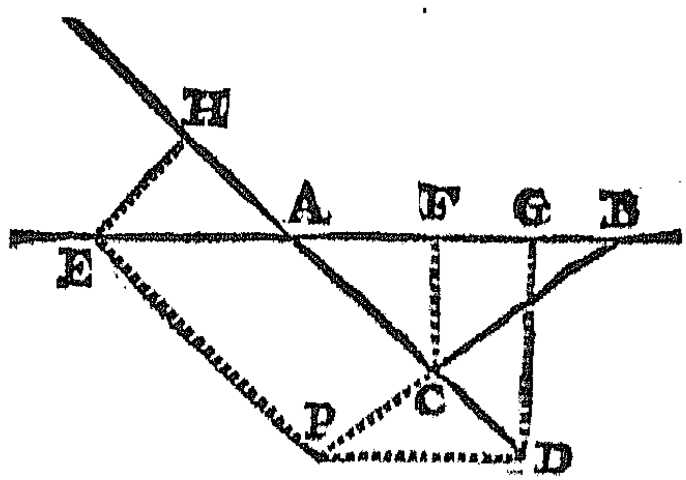
ſcribere nedum intelligere valeret; & hanc anteponere Trochoidi quæ linea notiſſima eſt, & per motum rotæ vel circuli faciliime deſcribitur. Quod quam abſurdum ſit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non eſt admittenda, aut in conſtructione Problematum curvis omnibus difficilioris deſcriptionis anteferenda. Et eadem eſt ratio de reliquis curvis. Quo nomine triſectiones anguli per Conchoidem quas Archimedes in Lemmatis & Pappus in collectionibus poſuere præ aliorum hac de re inventis omnibus laudamus: ſiquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometria excludere debeamus, aut ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem admittere, & Conchoides ſimplicitate deſcriptionis nulli curvarum præter circulum cedit. Æquationes ſunt expreſſiones computi Arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, niſi quatenus quantitates vere Geometricæ (id eſt lineæ, ſuperficies, ſolida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Diviſiones, & ejuſmodi computa in Geometriam recens introducta ſunt; idque inconſulto, & contra primum inſtitutum ſcientiæ hujus. Nam qui conſtructiones Problematum per rectam & circulum à primis Geometris adinventas conſiderabit, facile ſentiet Geometriam excogitatam eſſe ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ ſcientiæ confundi non debent. Veteres tam ſedulo diſtinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundendo amiſerunt ſimplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis conſiſtit. Eſt itaque Arithmetice quidem ſimplicius

cius quod per simpliciores æquationes determinatur, at Geometrice simplicius est quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometria prius & præstantius esse debet quod est ratione Geometrica simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, Archimede, aliisque Veteribus Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometrica sed qualicunque sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc problema Lemmaticum.

Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P.

SI circa polum P gyret linea BC, & simul termino ejus C incedat super recta AC, ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci potest ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

Sicui constructio hæcce per Conchoidem minus placeat, potest alia per conicam sectionem ejus



vice substitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE constituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte

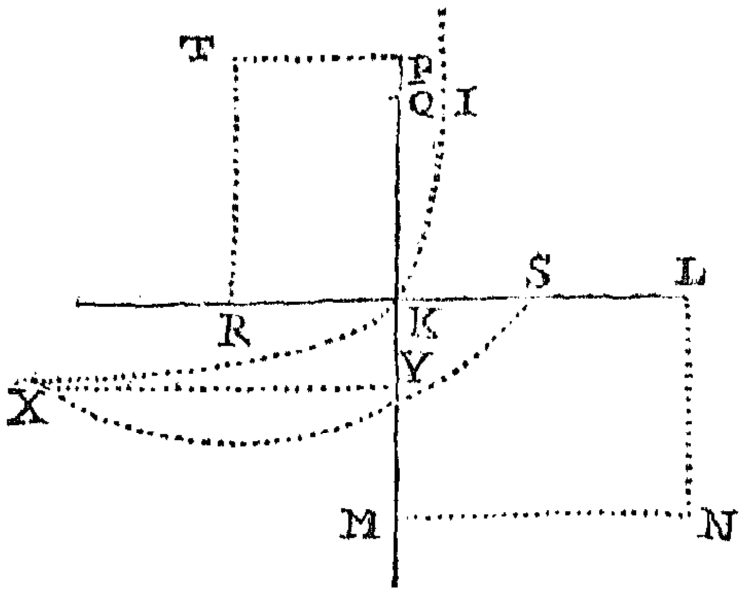
mitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH, & dictis AD $= a$. PD $= b$. BC $= c$. AG $= d$, AB $= x$, & AC $= y$. Erit AD . AG :: AC . AF, adeoque AF $= \frac{dy}{a}$. Erit & AB . AC :: CD . PD, seu $x . y :: b . a - y$. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam. Rursus per 13. II. Elem. erit BCq = ACq + ABq − 2FAB, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

In KM versus K producta cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL producta versus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS describe circulum.

Secet

Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis

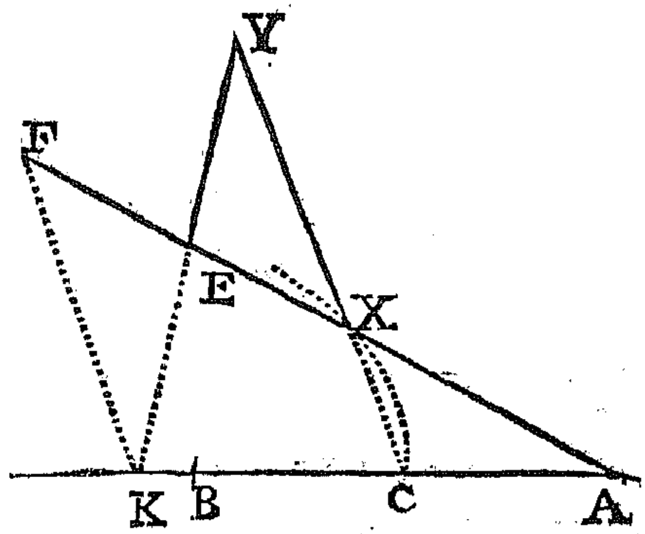


AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB vel una earum cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ BC. Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus Problematis determinandis non immoror.

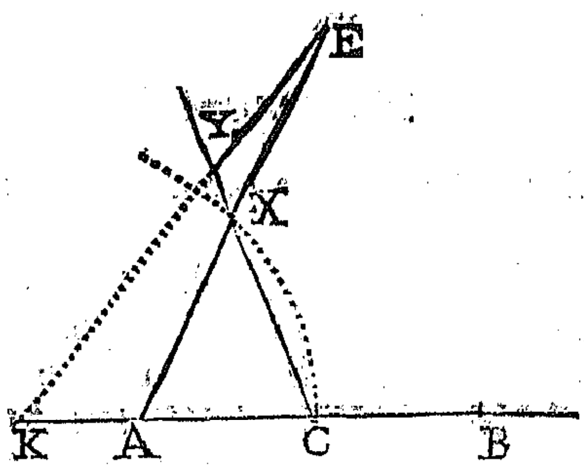
Hac, inquam, constructione solvi potest Problema sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per Conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minus Geometricam; & quæ resolutioni æquationum à nobis propositæ optime conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate construimus Geometrice Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci possunt*] ut sequitur.

Pro-

Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus terminus ſecundus deeſt, tertius vero ſub



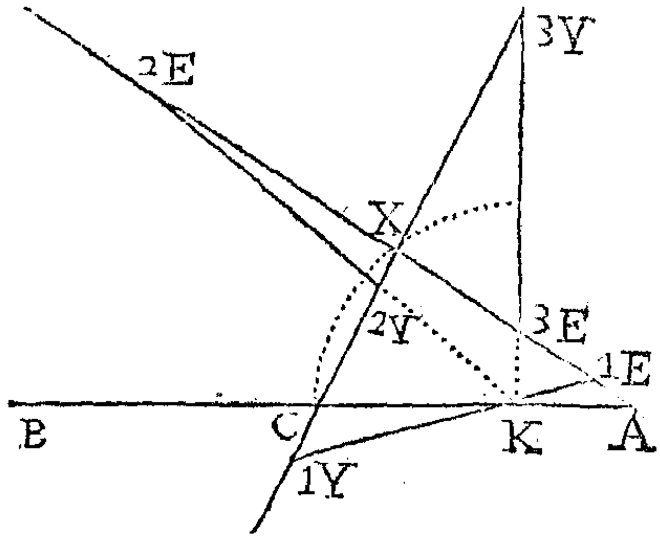
ſigno ſuo deſignatur per $+q$, & quartus per $+r$. Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque



producta cape $KB = \frac{q}{n}$ ad eaſdem partes cum KA ſi habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC fac circulum CX,

cui

cui inſcribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX



inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, quæque producta tranſeat per punctum K, & XY erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X verſus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, ſi habeatur $+r$, & contra ſi habeatur $-r$.

Demonſtratio.

Ad demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

LEM. I. Eſt YX ad AK ut CX ad KE: Etenim age KF parallelam CX, & ob ſimilia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF, & YX ad YE ſeu AC ut KF ad KE, adeoque ex æquo perturbate YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

LEM. II. Eſt YX ad AK ut CY ad AK+KE. Nam componendo eſt YX ad AK ut YX+CX, id eſt CY ad AK+KE. Q. E. D.

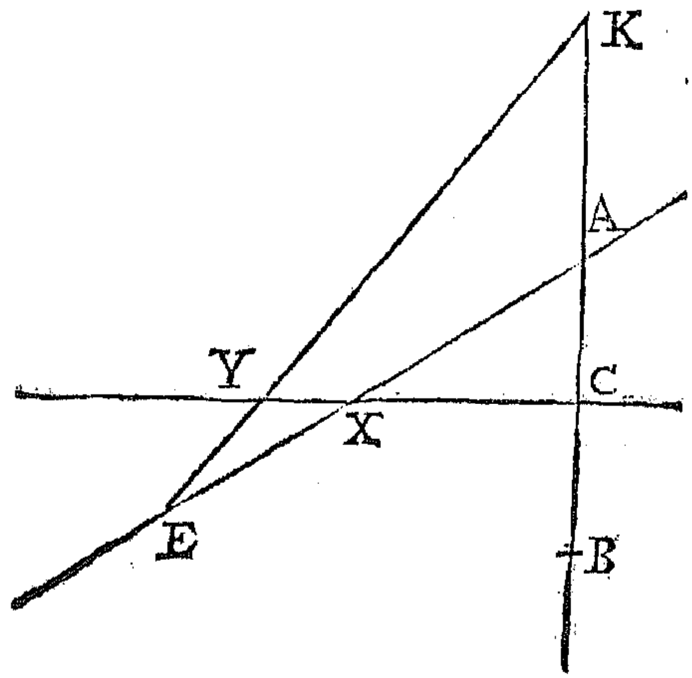
duc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, ita ut ea ſi producatur tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X ſi modo habeatur $+r$, & contra ſi habeatur $-r$.

Ad hujus Propoſitionis demonſtrationem Schemata & Lemmata de priori propoſitione mutuo ſumantur, & Demonſtratio erit ut ſequitur.

Per Lemma 1, erat YX ad AK ut CX ad KE ſeu $YX \times KE = AK \times CX$, & per Lemma 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (ſumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK, adeoque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, ſeu $AK \times CX$ ut YX ad AK, ſeu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipſarum KE, KB, AK, & CK reſtitutis valoribus ſupra aſſignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimenſionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, nullo termino carentem, & cujus tres radices non ſunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ. Et primo ſi terminus q negativus eſt, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$ & $KB = p$, idque ad eaſdem partes puncti K ſi p & $\frac{r}{q}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias. Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inſcribatur recta EY quæ æqualis ſit rectæ AC, & pro-

producta transeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis, quæ quidem affirmativa erit si



punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versus A.

Quod si terminus q affirmativus est, in recta KB capiantur longitudinis illæ duæ $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K, si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias: Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum x cadat inter puncta A & E, affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris.

Per Lemma primum erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE + AK, id est KY + KC ad CX + YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq − KCq, id est æquale KY + KC in KY − KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY − KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK − KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE + AK ad KE − KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* − KB × KEq = CXq × KE + CXq × AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

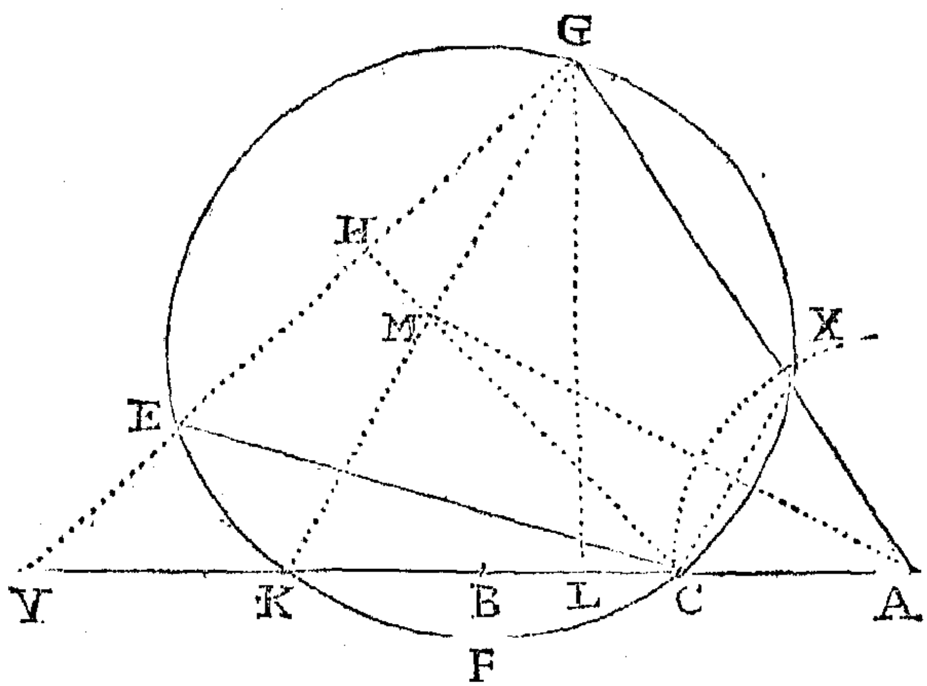
Demonstratio casus secundi.

Per Lemma primum est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se fit KE × YX = CX × AK. Scribe ergo in superioribus KE × YX pro CX × AK, & fiet KE *cub.* − KB × KEq = CXq × KE + CX × KE × YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KEq − KB × KE = CXq + CX × YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK × KEq − AK × KB × KE = AK × CXq + AK × CX × YX: Ac rursus scripto KE × YX pro CX × AK, fiet AK × KEq − AK × KB × KE = KE × YX × CX + KE × YXq: & applicatis omnibus ad KE orietur AK × KE − AK × KB = YX × CX + YXq: ductisque omnibus in YX emerget AK × KE × YX − AK × KB × YX = YXq × CX + YX *cub.* & pro KE × YX scriptis in primo termino CX × AK, fiet CX × AKq − AK

$- AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX\,cub.$ seu quod perinde est $YX\,cub. + CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB substitutis valoribus supra assignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $\sqrt{\frac{q-r}{p}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio construenda.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus terminus secundus deest. Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur $-q$, aliter



ad diversas. Biseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

Lem. I. Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KY.

Nam recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q.E.D.

Lem. II. Demisso ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE × CX.

Nam

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo $EC \times CX$. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK, AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per Corol. Prop. 36. lib. III. Elem.) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG, AK.

Lem. III. Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY, CE, KA, sunt continue proportionales.

Nam (per Prop. 12. lib. II. Elem.) est $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per Lem. 2.) æquale est rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale est $CEq + CE \times CX$, id est $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale est $CEq + CE \times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera propornalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro $CY + EY$, & BY pro $CY - EY$, & fiet $CE + CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed (per Lem. 1.) est CE ad KA ut $CE + CX$ ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris Problematis sic demonstratur.

Per Lemma 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per Lemma tertium est $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in se provenit CEq æquale $BK \times KA + \frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, $KB\ \frac{q}{n}$, & $CX\ \frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX substitutis oritur $x^3 = qx + r$, seu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio construenda; ubi q & r negativa prodeunt sumptis KA & KB ad easdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic unus casus est Constructionis demonstrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id est mutetur

mutetur ſignum ejus ſeu ſignum ipſius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde eſt, ſignum termini q, & habebitur conſtructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: Qui caſus eſt alter. In his caſibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eaſdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad eaſdem mutato ſigno ipſius CX ſeu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde eſt) ſigno ipſius r, & habebitur caſus tertius $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes ſunt negativæ. Et mutato rurſus ſigno ipſius KB ſeu $\frac{q}{n}$ vel ſolius q, incidetur in caſum quartum $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium caſuum conſtructiones percurrere licebit, & ſigillatim demonſtrare ad modum caſus primi. Nos uno caſu demonſtrato cæteros leviter attingere ſatis eſſe putavimus. Hi verbis iiſdem mutato ſolum linearum ſitu demonſtrantur.

Conſtruenda jam ſit æquatio cubica $x^3 + pxx * + r = 0$, cujus tertius terminus deeſt.

In figura ſuperiore aſſumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad eaſdem partes puncti K, ſi modo ſigna terminorum p & r ſint eadem, ſecus ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K intervallo KC deſcribe circulum CXG. In eo aptes rectam CX æqualem longitudini aſſumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, deſcribe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inſcribe rectam EY ejuſdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inſcripta recta tranſeat

ſeat per punctum G, ſi modo ipſa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K verſus punctum A ſi modo habeatur $+r$; ſin habeatur $-r$, affirmativæ ſunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et ſi affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ ſunt quæ jacent ex altera.

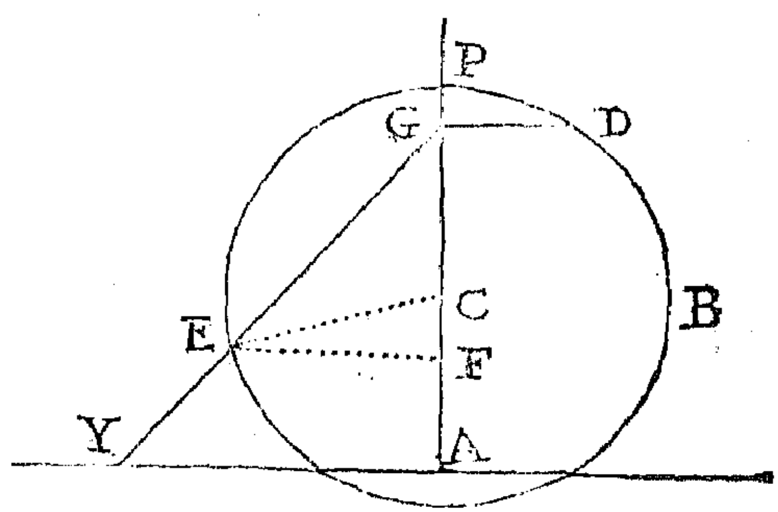
Demonſtratur autem hæc conſtructio ope Lemmatum trium noviſſimorum in hunc modum.

Per Lemma tertium ſunt BY, CE, KA continue proportionales; & per Lemma primum ut eſt CE ad KA ita eſt CX ad KY. Ergo BY eſt ad CE ut CX ad KY. BY idem eſt quod KY − KB. Ergo KY − KB eſt ad CE ut CX ad KY. Sed ut eſt KY − KB ad CE ita eſt KY − KB in KY ad CE in KY, idque per Prop. 1. lib. VI. Elem. & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY eſt CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY − KB in KY eſt ad KA in CX (ut KY − KB ad CE, hoc eſt) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in ſe invicem fit KY − KB in KYq æquale KA in CXq: id eſt KY *cub.* − KB × KY *quad.* æquale KA × CX *quad.* Erat autem in conſtructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX reſpective, & fiet $x^3 - pxx = r$, ſeu $x^3 - pxx - r = 0$.

Reſolvi poteſt conſtructio demonſtranda in hoſce quatuor æquationum caſus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Caſum primum jam demonſtratum dedi, di, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumendo KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* $-$ KB $\times$ KYq $=$ KA $\times$ CXq, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY *cub.* $+$ KB $\times$ KYq $=$ KA $\times$ CXq, & inde $x^3 + pxx - r = 0$. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* $+$ KB $\times$ KYq $= -$ KA $\times$ CXq, seu $x^3 + pxx + r = 0$, & KY *cub.* $-$ KB $\times$ KYq $= -$ KA $\times$ CXq, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, nullo (nisi forte tertio) termino carens. Ea construetur ad hunc modum.

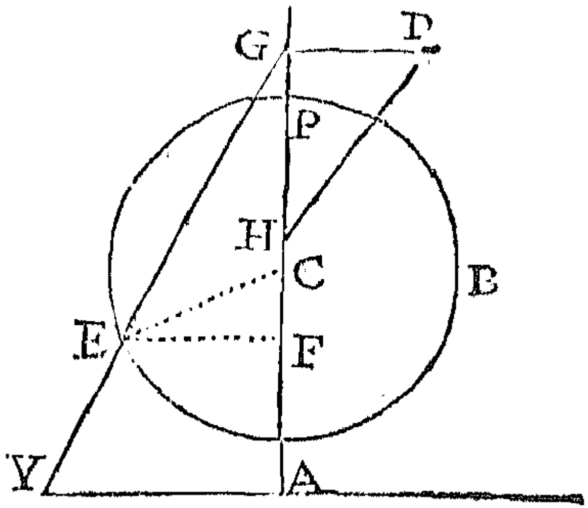
Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$.



Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE.

Sin

Sin eadem sunt eorum signa, centro D intervallo GC describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH describe circulum PBE. Tum fac $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n}$



$-\frac{r}{np}$ (signis terminorum p, q, r in æquatione construenda probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.

Demonstrationi hujus constructionis præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. Demisso ad AG perpendiculo EF & acta recta EC: est $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Nam per Prop. 12. lib. II. Elem. est $EGq = ECq + GCq + 2GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF$. Sed $2GCq + 2GCF$ est $2GC$ in $GC + CF$ id est $2CGF$. Ergo $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Q. E. D.

LEM.

LEM. II. In constructionis casu primo ubi circulus PBE transit per punctum D, est $EGq - GDq = 2CGF$. Nam per Lemma primum est $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem est quod $CDq - GCq$, hoc est idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$, & subducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. In constructionis casu secundo, ubi circulus PCD non transit per punctum D, est $EGq + GDq = 2CGF$. Namque in Lemmate primo erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. Est $2CGF$ in $GY = 2CG$ in AGE. Namque ob similia triangula GEF, GYA est GF ad GE ut AG ad GY; hoc est (per Prop. 1. lib. VI. Elem.) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.

In casu primo est (per Lem. 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per Lem. 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} - GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG - GDq \times EY = 0$.

In casu secundo est (per Lem. 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per Lem. 4.) $= 2CG$

$=2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\,cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\,cub. + EY \times EGq \begin{matrix} + GDq \\ - 2CGA \end{matrix} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum p & r diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius p vel r mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$, & caſu primo fiet $x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x - r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx - r = 0$, caſu autem ſecundo $x^3 + px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x + r = 0$, id eſt $x^3 + pxx + qx + r = 0$. Eſt igitur in utroque caſu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdiſtinguitur autem caſus uterque in caſus plures particulares: Nimirum prior in hoſce $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + pxx - qx - r = 0$, $x^3 - pxx + qx + r = 0$, $x^3 - pxx - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$ & $x^3 - pxx + r = 0$; poſterior in hoſce $x^3 + pxx + qx + r = 0$, $x^3 + pxx - qx + r = 0$, $x^3 - pxx + qx - r = 0$, $x^3 - pxx - qx - r = 0$, $x^3 + pxx + r = 0$, & $x^3 - pxx - r = 0$. Quorum omnium demonſtrationes verbis iiſdem ac duorum jam demonſtratorum, mutato tantum linearum ſitu, compinguntur.

Hæ

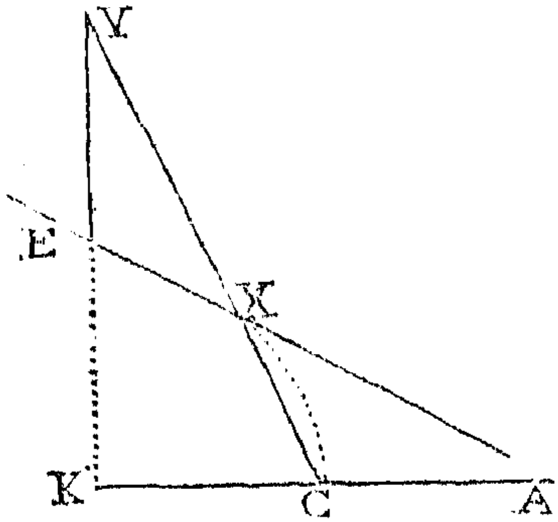
Hæ ſunt Problematum conſtructiones præcipuæ per inſcriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam poſitione datam ea lege ut inſcripta ad datum punctum convergat. Inſcribitur autem talis recta ducendo Conchoidem veterum, cujus Polus ſit punctum illud ad quod recta inſcribenda debet convergere, Regula ſeu Aſymptotos recta altera poſitione data, & intervallum longitudo rectæ inſcribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inſcribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum, & alteram poſitione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hiſce autem conſtructionibus notandum eſt quod quantitas n, ubique indeterminata & ad arbitrium aſſumenda relinquitur, id adeo ut ſingulis problematis conſtructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli triſectione dabimus.

Inveniendæ ſit inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam ſunt $a.\ x.\ y.\ b$ continue proportionales erit a^2 ad x^2 ut x ad b, adeoque $x^3 = aab$, ſeu $x^3 - a^2b = 0$. Hic deſunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-a^2b$. Igitur in conſtructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inſeritur inter alias duas poſitione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id eſt æqualis $\frac{-aab}{nn}$, aſſumo n æqualem a, & ſic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit conſtructio.

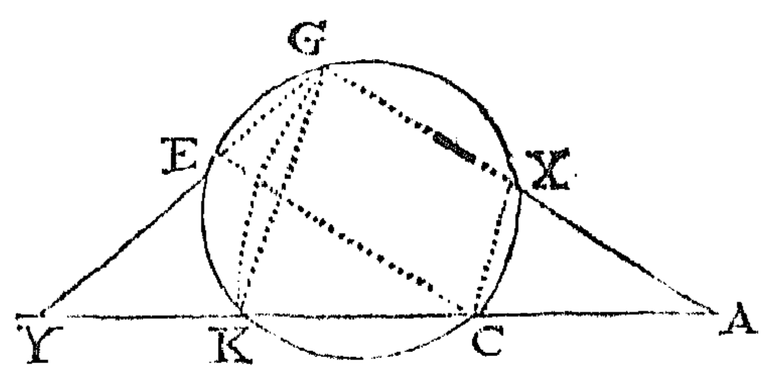
Duco quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum

culum CX ad quem apto rectam CX æqualem b, & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ mediæ proportionales inter a & b. Constructio nota est.



In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque $CX = \frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & sic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.

Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C & centro A intervallo AK describo

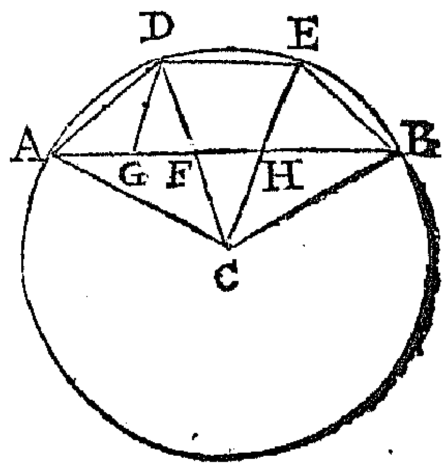


circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem

ad

ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id est EC & KY, duæ medie proportionales erunt inter datas a & b.

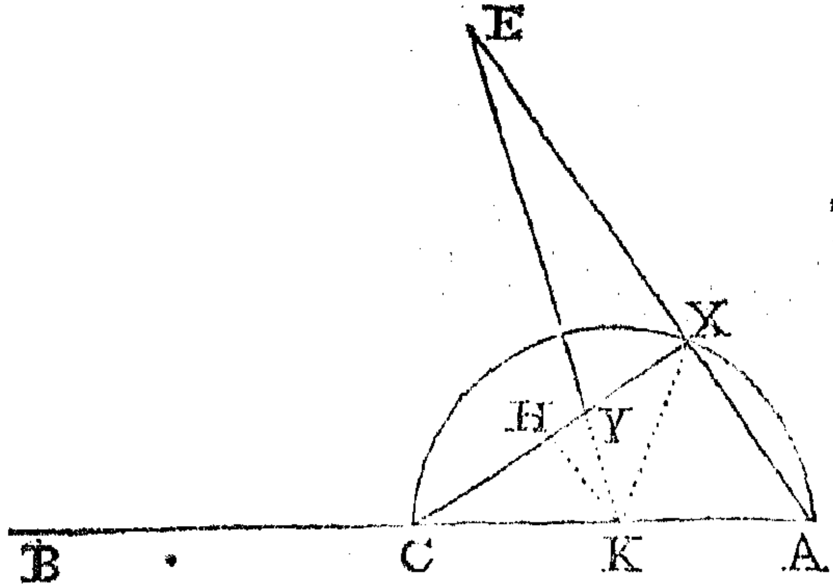
Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB. Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G.



Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur AC $=a$, & AD $=x$, fiet DF $=\frac{xx}{a}$, & FG $=\frac{x^3}{aa}$. Est autem AB $=$ BH $+$ HG $+$ FA $-$ GF $=3$ AD $-$ GF $=3x-\frac{x^3}{aa}$. Dic AB $=b$, & fiet $b=3x-\frac{x^3}{aa}$, seu $x^3-3aax+aab=0$. Hic deest æquationis terminus secundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in constructionum formula prima ubi erat $p=0$, KA $=n$, KB $=\frac{q}{n}$, & CX $=\frac{r}{nn}$, id est in problemate jam construendo KB $=-\frac{3aa}{n}$, & CX $=\frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam simplicissimæ pono $n=a$, & sic fit KB $=-3a$, & CX $=b$.

$=b$. Unde talis emergit Problematis constructio.

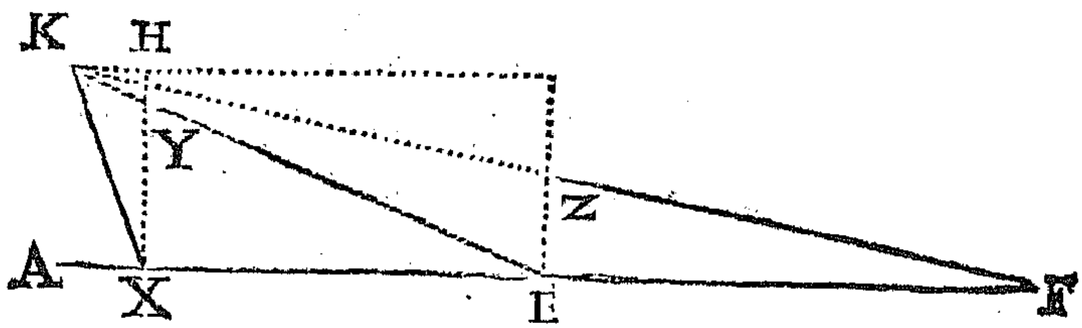
Ago quamvis $KA=a$, & ad contrarias partes $KB=3a$. Biseco BA in C, centroque K intervallo KC describo circulum, cui inscribo rectam



$CX=b$. Et acta recta AX, inter ipsam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit $XY=x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales subtensas AB, CX, nec non æquales subtensarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujusvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinite productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K.

Hinc si à circuli centro K ad subtensam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut si detur quilibet angulus HKX inveniri possit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriusvis KX puncto

cto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. Vel sic. Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum



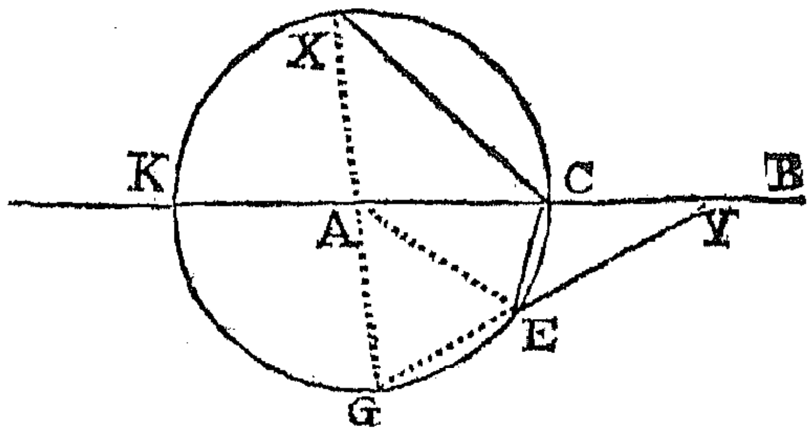
AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud Pappum, lib. 4. Prop. 32.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris: hic etiam erunt KB $= \frac{q}{n}$, & CX $= \frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus KB $= \frac{-3aa}{n}$, & CX $= \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet KB $= -3a$, & CX $= b$. Et inde talis emerget constructio.

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ KA $= a$, & KB $= 3a$. Biseca AB in

 C, cen-

C, centroque A intervallo AC deſcribe circulum. In eo pone rectam $CX = b$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum ſecet circulum jam

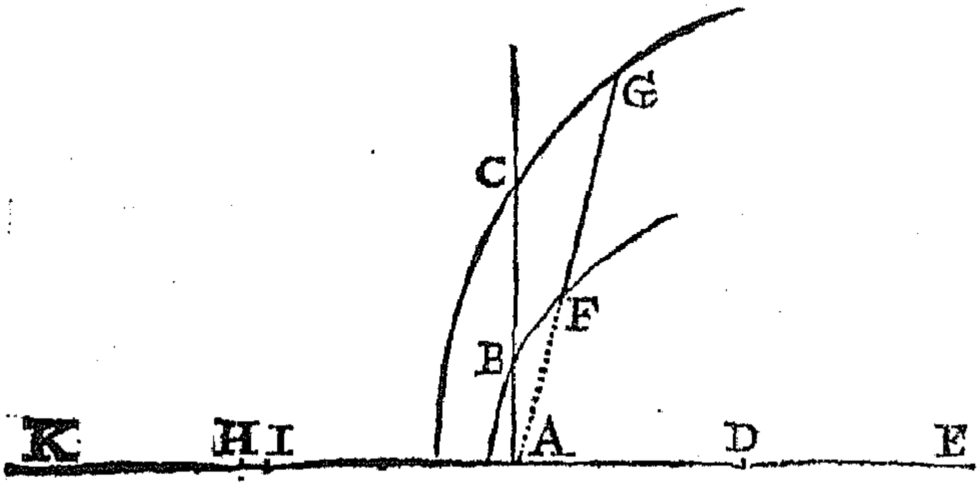


deſcriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæſita x, qua tertia pars anguli dati ſubtenditur.

Talis conſtructio conſequitur formulam ſuperius allatam: quæ tamen ſic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales ſubtenſas CX & AB, æquales ſunt anguli CAX ſive KAG & ACB, adeoque CE ſubtenſa eſt tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KCG, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli ſemidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit Archimedes angulum trifariam ſecare. Eædem conſtructiones facilius explicari poſſint quam hic factum eſt; ſed in his volui oſtendere quomodo ex generalibus Problematum conſtructionibus ſuperius expoſitis conſtructiones ſimpliciſſimas particularium problematum derivare liceat.

Lemma Archim. 8.

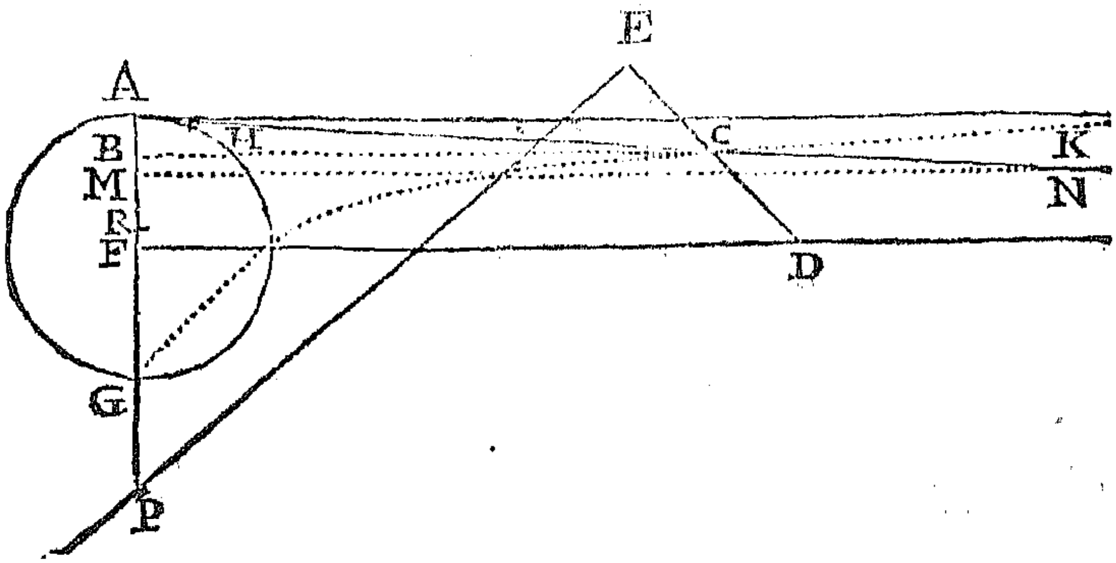
Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. Ut si inter a & b inveniendæ essent duæ medie proportionales, Age quamvis



AK $=b$, & huic perpendiculare AB $=a$. Biseca AK in I, & in eadem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in linea AB producta subtensæ BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & E intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF prima duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per Cissoidem; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem Cissois pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crus ejus EP perpetuo transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD,

& cruris hujus medium punctum C describet Cissoidem desideratam GCK ut supra exposui. Quare



si inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: cape $AM = a$, erige perpendiculum $MN = b$. Junge AN; & lege præfata moveatur norma PED, usque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demisso ad AP perpendiculo CB, cape t ad BH, & v ad BG, ut est MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b.

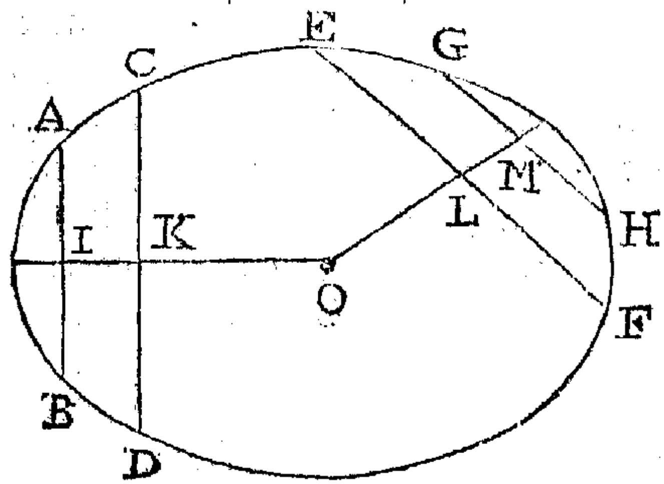
Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratia proponatur æquatio cubica $x^3\ pxx - qx + r = 0$: ubi q semper negativum sit, r affirmativum, & p signi utriusvis. Fac $AG = \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape $FR = \frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$ aliter versus P. Fac insuper $AB = \sqrt{q}$, & erige normales FD, BC. In normæ autem crure ED cape ED & EC ipsis AG & AR æquales respective, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam BC, & erit BC æquationis radix quæsita x. Sed in his nimius sum. Hactenus

Hactenus constructionem solidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex Pappo discimus. Sic magnus ille Archimedes trisectionem anguli per coni sectiones à superioribus Geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo à nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum Coni sectionibus conjungendus esset, quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis conjungatur cum recta, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam figuræ omnes sunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulant in plano describere. Et problema omne planum est quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida & plus quam solida quæ per has figuras construi possunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analytice simplicior est quam circulus; hoc non obstante Problemata ejusdem sunt ordinis quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipsis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis speculando Ellipsin incideret in problema aliquod solidum, & ipsum beneficio ejusdem Ellipseos, & circuli construeret: hoc problema jam pro plano habendum esset, eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis quæ superest absolvitur per circuli solius descriptionem. Eadem de causa problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratia si datæ Ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani

pro-

problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometrice gene-



retur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipsin construi possunt, planaque omnia per Ellipsin licebit construere.

Necesse est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & siqua forsan alia detur aliquando in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometria plana sectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano quibus hodierni Geometræ tan-

topere

topere indulgent. Nec tamen ideo Coni ſectiones è Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur Geometrice, generantur vero in ſolidi Geometrici ſuperficie plana. Conus conſtituitur Geometrice, & plano Geometrico ſecatur. Tale Coni ſegmentum figura Geometrica eſt, eundemque habet locum in Geometria ſolida ac ſegmentum circuli in plana, & hac ratione baſis ejus, quam Coni ſectionem vocant, figura Geometrica eſt. Locum igitur habet Coni ſectio in Geometria quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam ſolidi ſectione generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitus admiſſa fuit. Talis autem Conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ Mechanicæ: ſic & conſtructiones per Coni ſectiones in plano (ut jam moris eſt) deſcriptas Mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas Coni ſectiones Geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſcunque figuras datas Geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ ſunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ à ſectione Coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verum tamen ne conſtructiones per Conicas ſectiones omnino prætercam, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ conſulatur.

Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt Ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali

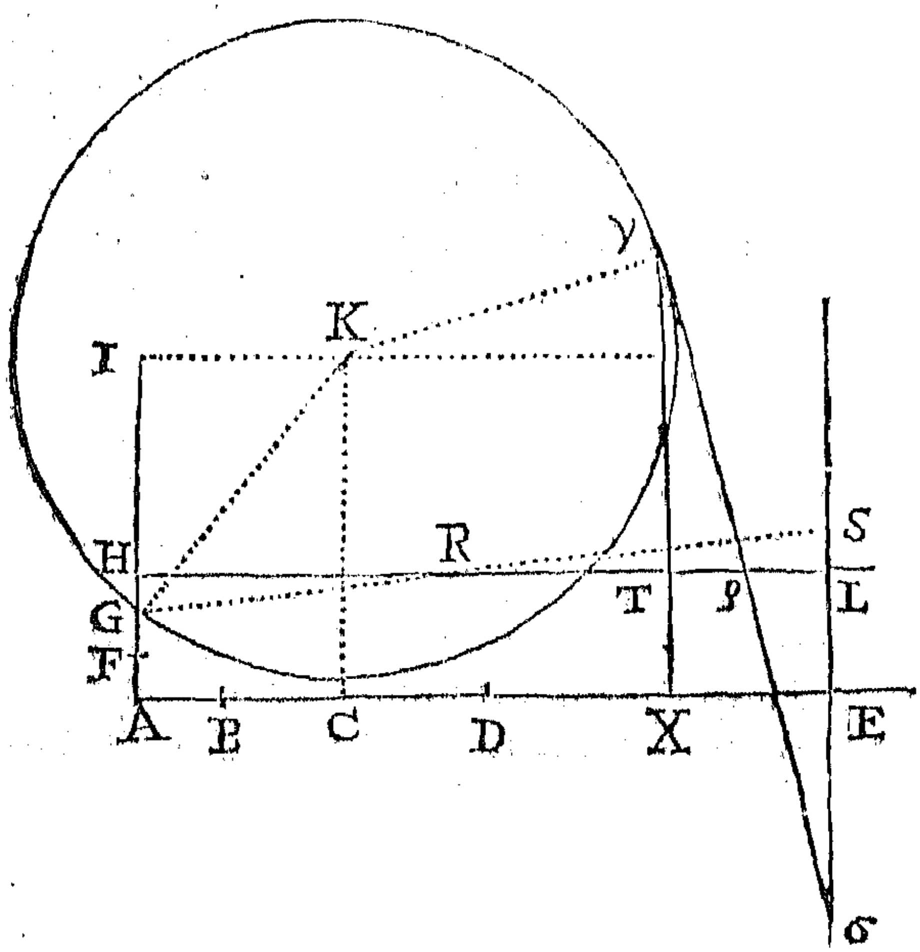
manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius vera consit quam liberatur ab omni Analysi. Insit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est, & à mixtura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive Geometrica sive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, ubi p, q & r datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis $+$ & $-$ significant, & alteruter terminorum p & q, vel etiam uterque deesse potest. Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta BA $= \frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes

con-

contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum A, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad



partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE; Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo Ellipsin, occurrat circulo

circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\varrho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem Regulæ GRS vel $\gamma\varrho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices. Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio Lemmatum sequentium.

LEM. I. Positis quæ in superiore constructione, est $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per prop. 4. lib. II. Elem.) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, seu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. II. Positis quæ in superiore constructione, est $2EAX - AXq$ æquale $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum

Notum est enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ superius assignato describit Ellipsin cujus centrum est L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ sive 2GR, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ sive 2GS. Et horum ratio ad invicem ea est quæ lineæ HR ad lineam HL, sivæ lineæ BD ad lineam BE. Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut BE ad BC sive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipseos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH}T\gamma q$. Est autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Est autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenusa est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsis AE & $GH + LS$ æqualia. Est & (ob similia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo $GH + LS$ ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex $GH + LS$, est ad GHq ut HLq ad HRq, hoc est (per constructionem) ut BEq ad BDq, id est ut BE ad BC, seu FI ad FH, adeoque quadratum ex $GH + LS$ æquale est $\frac{FI}{FH}GHq$. Est itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH}GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH}GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH}GHq$, & restabit $2EAX$

$- AXq$

$- AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$, & subducto utrinque GHq restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG \times FH$, atque adeo est $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$ id est $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. III. Iisdem positis est AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.

Nam si de æqualibus in Lemmate secundo subducantur æqualia in Lemmate primo, restabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Est autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per constructionem HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$, & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per prop. 9. lib. V. Elem.) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$ id est ad $X\gamma - AG$) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

LEM.

LEM. IV. Iisdem positis, est $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, subducantur æqualia in Lemmate primo, & restabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc est (per Lemma tertium) ut $X\gamma$ ad $2BC$. Q. E. D.

Præstratis his Lemmatibus, Constructio Problematis sic tandem demonstratur.

Per Lemma quartum est $X\gamma$ ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc est (per prop. 1. lib. VI. Elem.) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, seu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per Lemma tertium est AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad $2BC$, seu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ est ad $2BC$ ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in se, fit $X\gamma\, cub. - 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma\, cub. = 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat autem in constructione demonstranda, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus substitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol.

Corol. Hinc ſi AF & AB ponantur nulla, per Lemma tertium & quartum fiet 2FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2BC. Unde conſtat inventio duarum medie proportionalium inter datas quaſlibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ conſtructionem per Ellipſin ſolummodo expoſui: ſed regula ſua natura generalior eſt, ſeſe ad omnes coni ſectiones indifferenter extendens. Nam ſi loco Ellipſeos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet ſumi ad partes ipſius F contra I, & quod HR non in linea HL, ſed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro aſymptotis Hyperbolæ. Cum iſtis itaque aſymptotis LR, LR deſcribe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum interſectionibus ad rectam AE demiſſorum erunt radices æquationis propoſitæ. Quæ omnia, ſignis + & − probe mutatis, demonſtrantur ut prius.

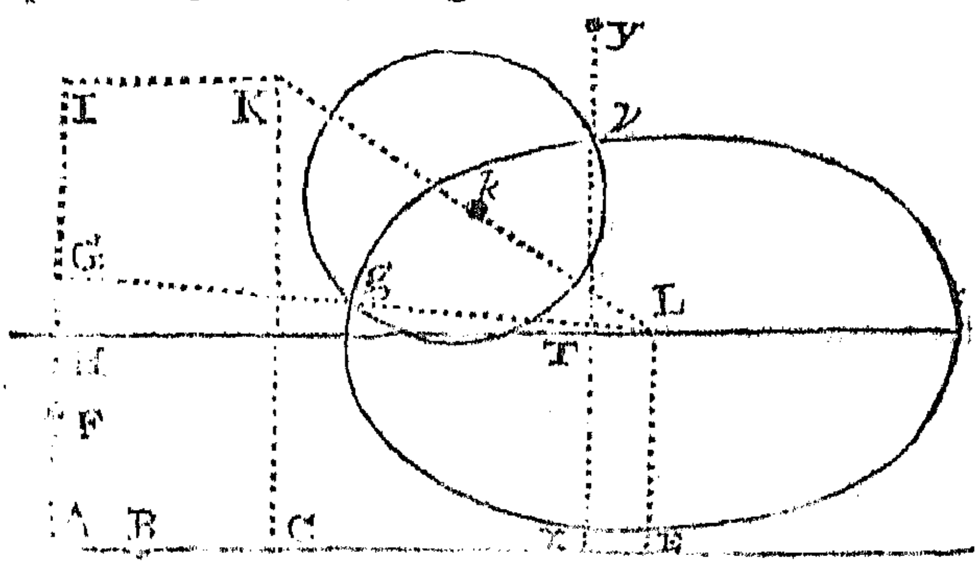
Quod ſi Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet, eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A deſcribenda, ſito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B ſitum eſt reſpectu puncti C.

Sic ſunt conſtructiones per Parabolam, ſi ſimplicitatem analyticam ſpectes, ſimpliciſſimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipſin abſolvuntur. Quod ſi praxeos manualis in deſcribendis figuris ſpectetur ſimplicitas, mutandus eſt ordo.

In hiſce autem conſtructionibus obſervandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus tranſverſum determinatur ſpecies Ellipſeos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem eſt quæ linearum BC & BE, atque adeo aſſumi poteſt: Parabolæ vero ſpecies eſt unica quam artifex ponendo BE infinite longam aſſequitur. Sic igitur penes artificem eſt æquationem quamcunque cubicam per conicam ſectionem imperatæ ſpeciei conſtruere. A figuris autem ſpecie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ ſpecie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam quamvis Conicam ſectionem conſtruere licebit. Id quod ſic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx \cdot qx \cdot r$, ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere.

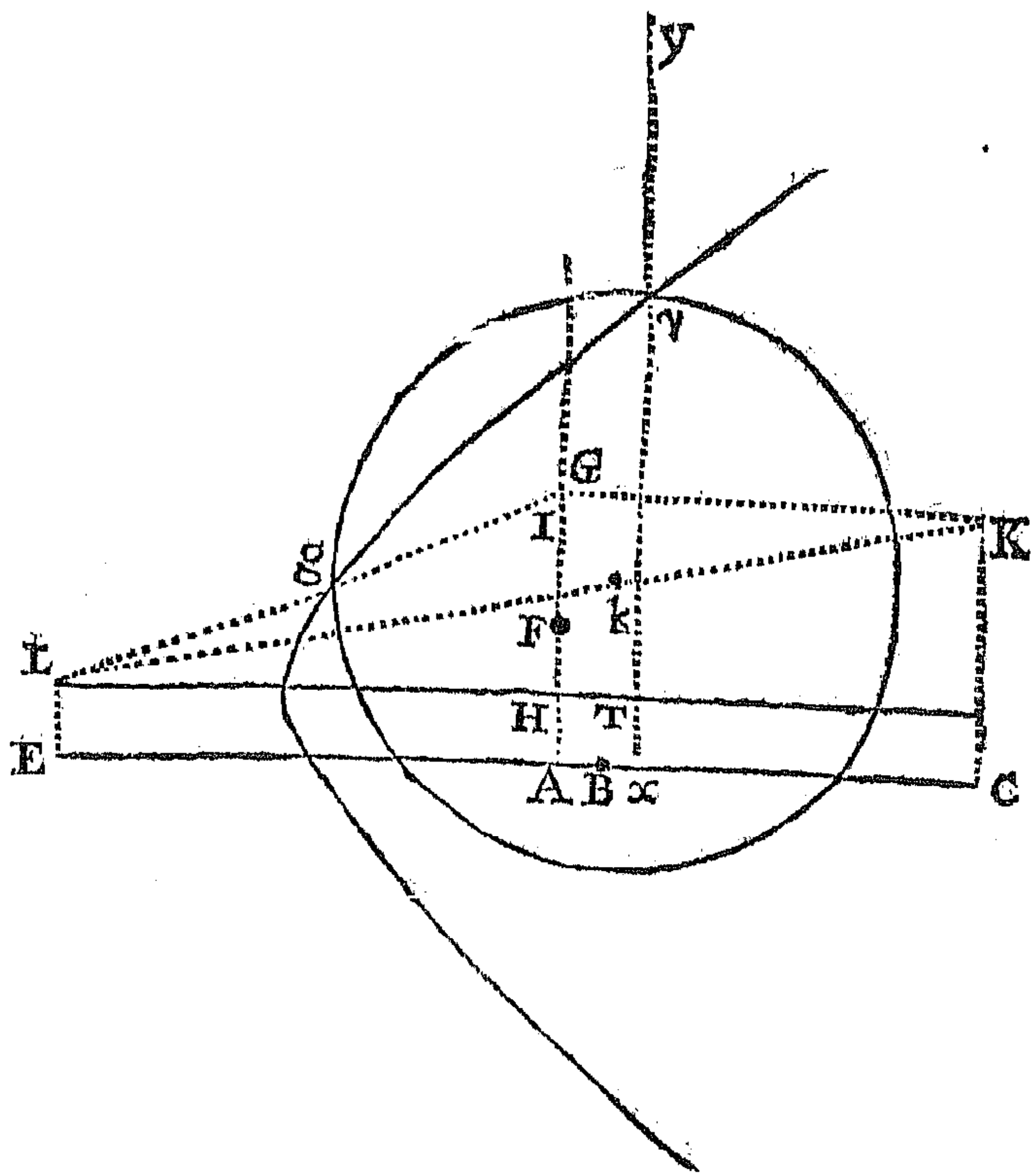
A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quaſcunq; longitudines BC, BE ad eaſdem



[illegible]s ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias

ſi

si ea sit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata N, cape BA $= \frac{q}{n}$, idque



versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero FI versus G

 si

ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter verſus A. Dein fac ut ſit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F verſus I ſi ſectio ſit Ellipſis, aut ad partes contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma JACK & HAEL, & hæ omnes jam deſcriptæ lineæ transferantur ad datam ſectionem Conicam, aut quod perinde eſt, his ſuperponatur curva, ita ut axis ejus ſive tranſverſa diameter principalis conveniat cum recta LA, & centrum cum puncto L. His ita conſtitutis agatur recta KL ut & recta GL ſecans conicam ſectionem in g. In LK cape Lk quæ ſit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg deſcribe circulum. A punctis ubi hic ſecuerit curvam impoſitam demitte perpendicula ad lineam LH, cujuſmodi ſit γT. Denique verſus γ, cape TY quæ ſit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta ſecet rectam AB in X, eritque recta XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes ſi modo habeatur $+r$, & contra ſi $-r$ obvenerit.

Hoc modo conſtruuntur æquationes cubicæ per Ellipſes & Hyperbolas datas: Quod ſi detur Parabola, capienda eſt BC æqualis lateri recto ipſius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG deſcribendus eſt circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam deſcriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipſa tranſeat per puncta A & G, & axis ejus ipſi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita conſtitutis, ſi perpendicula ab ejus occurſibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia ſunt radices æquationis conſtruendæ.

Et

Et notes quod ubi ſecundus æquationis terminus deeſt, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc conſtructio evadet eadem cum illa quam Carteſius attulit in Geometria ſua, præterquam quod lineamenta hic ſunt illorum duplicia.

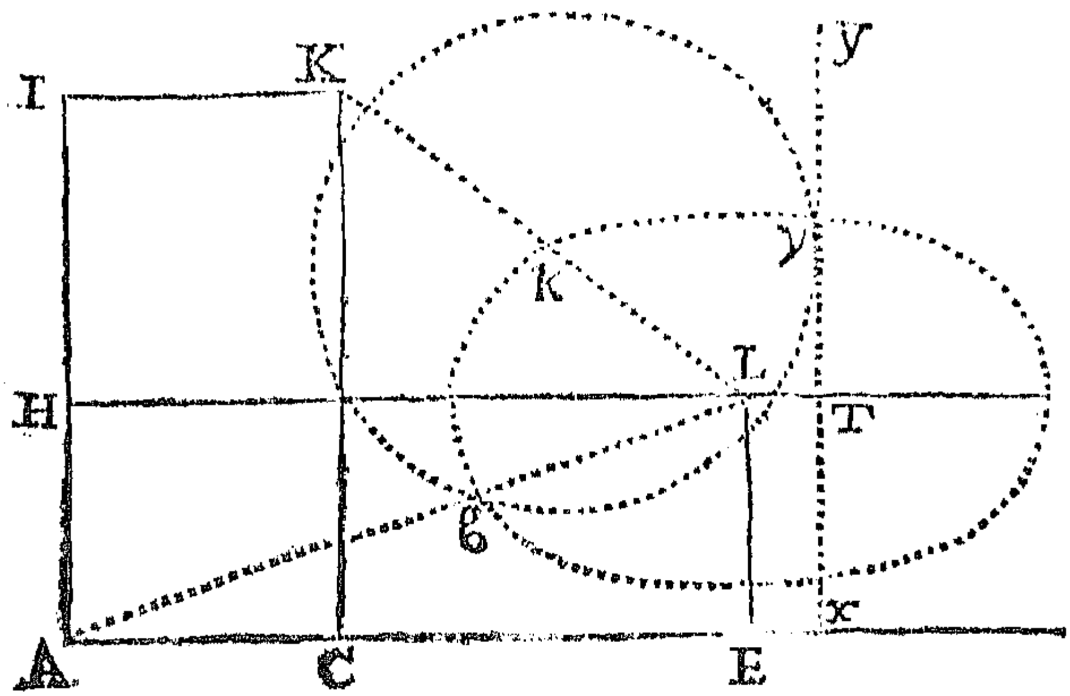
Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione conſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

Detur Ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x & $a.\ x.\ \frac{xx}{a}.\ b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab = \frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3 = aab$ æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hic deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, & FI eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n = a$, & fiet $FI = b$. Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape $AC = a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AE ad AC ut eſt Ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo AI cape $AI = b$, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma JACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur Ellipſis data. Secet ea rectam AL in puncto g. Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans Ellipſin in γ.

Ad

Ad AE demittatur perpendiculum γX secans HL in T, & producatur id ad Y ut sit TY ad $T\gamma$ si-



cut TA ad Tg. Sic fiet XY prima duarum medie proportionalium x. Q. E. I.

Methodus

Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcunque generaliter, sine prævia Reductione. Per Edm. Halley, *Geom. Prof. Savil.* [Edita in Actis Philosoph. N°. 210. A.D. 1694.]

ARtis Analyticæ præcipuus quidem usus est Problemata Mathematica ad æquationes perducere, easque terminis quantum fieri possit simplicissimis exhibere. Ars autem ista manca quodammodo, nec satis Analytica merito videretur, nisi Methodi quædam subministrarentur, quarum ope Radices, sive Lineæ sive Numeri sint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine Problemata soluta dare.

Veteribus sane vix quicquam supra Quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero scripsere de Solidorum Problematum Effectione Geometrica ope Parabolæ, Cissoïdis, aliusve Curvæ, particularia tantum sunt, ac casibus particularibus destinata; de Numericâ vero Extractione ubique altum silentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præstamus, modernorum inventis fere totum debetur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac restaurator *Franciscus Vieta*, annis abhinc circiter centum, Methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque sub titulo *De Numerosâ potestatum ad Exegesin Resolutione* publico donavit, *ubique* ut ait *observando retrogradam Compositionis viam.* Hujusque Vestigiis insistentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam nostrates quam extranei, quæcunque de hac re scriptis mandarunt, à *Vietâ* desumpta debent agnoscere. Qualia vero in hoc negotio præstiterit sagacissima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore Specimine à Clarissimo *Wallisio*, Cap. XCIV. Algebræ suæ, edito, potius conjecturâ assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata Authoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Josephus Ralphson*, *R. S. S.* *Analysin Æquationum Universalem* Anno 1690. evulgavit, suæque Methodi præstantiam pluribus exemplis abunde illustravit; quo Genii Mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par est credere) *D. de Lagney*, haud vulgaris apud *Parisienses* Mathematum Professor, idem argumentum aggressus est; qui cum totus fere sit in eliciendis Potestatum purarum radicibus, præsertim Cubica, pauca tantum eaque perplexa nec satis demonstrata de affectarum radicum extractione subjungit. Regulas autem binas compendiosas admodum pro approximatione radicis Cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe Cubi $aaa + b$ latus esse inter $a + \frac{ab}{3aaa + b}$ ac $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} + \frac{1}{2}a$. Radicem autem potestatis Quintæ $a^5 + b$ sic exprimit $= \frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$ (non $\frac{1}{2}aa$ ut perperam legitur in libro Gallico impresso)

preſſo.) Has Regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam Demonſtrationem inveſtigare: Ea vero inventa ad Univerſalem Æquationum omnium reſolutionem eandem methodum accommodari poſſe ſtatim cognovi; Eoque magis eas excolere ſtatui, quia uno intuitu rem totam Synoptice explicari poſſe videbam, quodque hoc pacto ſingulis calculi reſtaurati vicibus ſaltem triplicarentur notæ ſive Ciphræ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non niſi pari cum datis numero augentur.

Demonſtrantur autem Regulæ prædictæ ex Geneſi Cubi & Proteſtatis quintæ. Poſito enim Latere Cubi cujuſque $a + e$, Cubus inde conflatus fit $aaa + 3aae + 3aee + eee$, adeoque ſi ſupponatur aaa Numerus Cubus proxime minor dato quovis non Cubo, eee minor erit Unitate, ac reſiduum ſive b æquabitur reliquis Cubi membris $3aae + 3aee + eee$: rejectoque eee ob parvitatem, $b = 3aae + 3aee$. Cumque aae multo majus ſit quam aee, $\frac{b}{3aa}$ non multum excedet ipſam e, poſitoque $e = \frac{b}{3aa}$, $\frac{b}{3aa + 3ae}$, cui proxime æquatur quantitas e, invenietur $= \frac{b}{3aa + \frac{3ab}{3aa}}$ ſive $\frac{b}{3aa + \frac{b}{a}}$: hoc eſt $\frac{ab}{3aaa + b} = e$, adeoque latus

Cubi

Cubi $aaa+b$ habebitur $a+\frac{ab}{3aaa+b}$, quæ eſt ipſa formula rationis *Dni de Lagney*. Quod ſi aaa fuerit Numerus Cubus proxime major dato, Latus Cubi $aaa-b$ pari ratiocinio invenietur $a-\frac{ab}{3aaa-b}$; atque hæc Radicis Cubicæ approximatio ſatis expedita ac facilis parum admodum fallit in defectu, cum ſcilicet e reſiduum Radicis hoc pacto inventum paulo minus juſto ſit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, *viz.* $b=3aae+3aee$, ſive $\frac{b}{3a}=ae+ee$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}=\frac{1}{2}a+e$, atque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\frac{1}{2}a=a+e$, ſive Radici quæſitæ. Latus vero Cubi $aaa-b$ eodem modo habebitur $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{b}{3a}}$. Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad ſcopum collimat, in exceſſu peccans ſicut altera in defectu, ac ad praxin magis commoda videtur, cum reſtitutio Calculi nihil aliud ſit quam continua additio vel ſubductio ipſius $\frac{eee}{3a}$, ſecundum ac quantitas e innoteſcat; ita ut potius ſcribendum ſit $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b-eee}{3a}}+\frac{1}{2}a$ in priori caſu, ac in poſteriori $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{eee-b}{3a}}$. Utraque autem formula Ciphræ jam cognitæ in Radice extrahendâ ad minimum triplicantur, quod quidem

quidem Arithmeticæ ſtudioſis omnibus gratum fore confido, atque ipſe Inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius ſentiatur, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quæratur Latus Cubi dupli, ſive $aaa + b = 2$. Hic $a = 1$ atque $\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$, adeoque $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$ ſive 1,26 invenietur Latus prope verum. Cubus autem ex 1,26 eſt 2,000376, adeoque $0{,}63 + \sqrt{,3969 - \frac{,000376}{3{,}78}}$ ſive $0{,}63 + \sqrt{,3968005291005291} = 1{,}259921049895 -$; quod quidem tredecim figuris Latus Cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, *viz.* unâ Diviſione & Lateris Quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum deſudaſſet Arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quouſque velis continuare licet, augendo quadratum additione $\frac{eee}{3a}$. Quæ quidem correctio hoc in caſu non niſi unitatis in Radicis figurâ decima-quartâ augmentum affert.

Exemp. II. Quæratur Latus Cubi æqualis menſuræ *Anglicæ Gallon* dictæ, uncias ſolidas 231 continentis. Cubus proxime minor eſt 216 cujus Latus $6 = a$, ac reſiduum $15 = b$, adeoque pro prima approximatione provenit $3 + \sqrt{9 + \frac{5}{6}} =$ Radici. Cumque $\sqrt{9{,}8333\ldots}$ ſit $3{,}1358\ldots$ patet $6{,}1358 = a + e$. Supponatur jam $6{,}1358 = a$, & habebimus Cubum ejus 231,000853894712, ac juxta regulam $3{,}0679 + \sqrt{9{,}41201041 - \frac{,000853894712}{18{,}4074}}$ æquatur accu-

ratiſſime

ratissime Lateri Cubi dati, id quod intra horæ spatium calculo obtinui 6.135792439661958977, in octodecima figura justum, at deficiens in decima nona. Hæc vero formula merito præferenda est rationali, ob ingentem divisorem, non sine magno labore tractandum; cum Lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro Radice Sursolidi Puri sive potestatis quintæ paulo altioris indaginis est, atque etiam adhuc multo perfectius rem præstat: datas enim in Radice Ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multi nec operosi est Calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejusve demonstrationem concedit, etiamsi maxime desiderari videatur: præsertim cum in Libro impresso non recte se habeat; id quod imperitos facile illudere possit. Potestas autem Quinta Lateris $a+e$ conficitur ex his membris $a^5 + 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2eee + 5ae^4 + e^5 = a^5 + b$, unde $b = 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2e^3 + 5ae^4$, rejecto e^5 ob parvitatem suam: quo circa $\frac{b}{5a} = a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4$, atque utrinque addendo $\frac{1}{4}a^4$ habebimus $\sqrt{\frac{1}{4}aaaa + \frac{b}{5a}} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4} = \frac{1}{2}aa + ae + ee$. Dein utrinque subducendo $\frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a+e$ æquabitur $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$ cui si addatur $\frac{1}{2}a$, erit $a+e$ $= \frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa} =$ radici potestatis $a^5 + b$. Quod si fuisset $a^5 - b$, (assumpta a justo

justo majore,) regula sic se haberet, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 - \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$.

Atque hæc regula mirum in modum approximat, ut vix restitutione opus sit; at dum hæc mecum pensitavi, incidi in formularum methodum quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in superioribus potestatibus datas radicis figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita se habent tam rationales quam irrationales.

$$\sqrt{aa+b} = \sqrt{aa+b} \text{ vel } a + \frac{ab}{2aa + \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} \text{ vel } a + \frac{ab}{3aaa + b}$$

$$\sqrt[4]{a^4+b} = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a + \frac{ab}{4a^4 + \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5+b} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a + \frac{ab}{5a^5 + 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6+b} = \frac{4}{5}a + \sqrt{\frac{1}{25}aa + \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6 + \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7+b} = \frac{5}{6}a + \sqrt{\frac{1}{36}aa + \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7 + 3b}$$

Et sic de cæteris etiam adhuc superioribus. Quod si assumeretur a radice quæsita major; (quod cum fructu fit quoties Potestas resolvenda multo propior sit potestati Numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eædem radicum expressiones proveniunt.

$$\sqrt{aa-b} = \sqrt{aa-b} \text{ vel } a - \frac{ab}{2aa - \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{aaa-b} = \tfrac{1}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa - b}$$

$$\sqrt[4]{a^4-b} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4 - \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5-b} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5 - 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6-b} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7-b} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}.$$

Atque inter hos duos terminos ſemper conſiſtit vera Radix, aliquanto proprior irrationali quam rationali; *e* vero juxta formulam irrationalem inventa, ſemper peccat in exceſſu, ſicut in defectu a rationali formula reſultans Quotus; adeoque ſi fuerit $+b$, Irrationalis majorem juſto exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero ſi fuerit $-b$. Atque hæc de eliciendis radicibus è Poteſtatibus puris dicta ſunto, quæ quidem, ad uſus ordinarios ſufficientes multo facilius habentur ope Logarithmorum: quoties vero ultra Tabularum Logarithmicarum vires accuratiſſime definienda eſt radix, ad hujuſmodi methodos neceſſario recurrendum eſt. Præterea cum ex harum formularum inventione ac contemplatione, Univerſalis Regula pro æquationibus affectis (quam non ſine fructu Geometriæ ac Algebræ ſtudioſis omnibus uſurpandam confido) mihi ipſi oblata ſit, volui ipſius inventi primordia qua poſſim claritate aperire.

Æqua-

Æquationum quidem affectarum Quadrato-quadratum non excedentium Constructionem Generalem concinnam admodum ac facilem, *Num.* 188. harum *Transact.* jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupido animum incessit, idem Numeris efficiendi. Atque brevi post *D^{us}* *Ralphson* magna ex parte voto satisfecisse visus est, usque dum *D^{us} de Lagney* etiam adhuc compendiosius rem peragi posse hoc suo libello mihi suggessit. Methodus autem nostra hæc est.

Supponatur Radix cujusvis æquationis z composita ex partibus $a +$ vel $-e$, quarum a ex hypothesi assumatur ipsi z quantum fieri possit propinqua, (quod tamen commodum est, non necessarium) & ex quantitate $a +$ vel $-e$ formentur Potestates omnes ipsius z in Æquatione inventæ, iisque affigantur Numeri Coefficientes respective: deinde Potestas Resolvenda subducatur è summa partium datarum in prima columna, ubi e non reperitur, quam Homogeneum Comparationis vocant, sitque differentia $\pm b$. Dein habeatur summa omnium coefficientium ipsius lateris e in secunda Columna, quæ sit s; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati ee, quarum summam vocemus t: Ac radix quæsita z, formula rationali habebitur $= a +$ vel $- \frac{sb}{ss + vel - tb}$: Irrationali vero fiet $z = a \mp \frac{-\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss \mp bt}}{t}$, id quod exemplis illustrare fortasse operæ pretium erit. Instrumenti vero loco adsit Tabella, Potestatum omnium ipsius $a +$ vel $-e$ Genesin exhibens, quæ si opus fuerit continuari facile possit. A septima vero incipiam, cum pauca Problemata eo-

usque

usque assurgere deprehendantur. Hanc Tabellam jure optimo *Speculum Analyticum Generale* appellare licet. Potestates autem prædictæ ex continua multiplicatione per $a + e = z$ ortæ, sic proveniunt, cum suis coefficientibus adjunctis.

Tabella Potestatum.

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & & s & t & u & w & x & y & \\
lz^7 & = la^7 & + 7la^6e & + 21la^5ee & + 35la^4e^3 & + 35la^3e^4 & + 21la^2e^5 & + 7lae^6 & + le^7 \\
kz^6 & = ka^6 & + 6ka^5e & + 15ka^4ee & + 20ka^3e^3 & + 15ka^2e^4 & + 6ka\,e^5 & + k\,e^6 & \\
hz^5 & = ha^5 & + 5ha^4e & + 10ha^3ee & + 10ha^2e^3 & + 5ha\,e^4 & + h\,e^5 & & \\
gz^4 & = ga^4 & + 4ga^3e & + 6ga^2ee & + 4ga\,e^3 & + g\,e^4 & & & \\
fz^3 & = fa^3 & + 3fa^2e & + 3fa\,ee & + f\,e^3 & & & & \\
dz^2 & = da^2 & + 2da\,e & + d\,ee & & & & & \\
cz & = ca & + c\,e & & & & & &
\end{array}
$$

Quod

Quod si fuerit $a - e = z$, ex iisdem membris conficitur Tabella, negatis solummodo imparibus Potestatibus ipsius e, ut e, e^3, e^5, e^7: & affirmatis paribus e^2, e^4, e^6. Sitque Summa Coefficientium lateris $e = s$; Summa Coefficientium Quadrati $ee = t$; Cubi $= u$; Biquadrati $= w$; Surfolidi $e^5 = x$; Summa vero coefficientium Cubocubi $= y$; *&c.*

Cum autem supponatur e exigua tantum pars radicis inquirendæ, omnes potestates ipsius e multo minores evadunt similibus ipsius a Potestatibus, adeoque pro prima Hypothesi rejiciantur superiores, (ut in potestatibus puris ostensum est) ac formata æquatione nova, substituendo $a \pm e = z$ habebimus ut diximus $\pm b = \pm se \pm tee$. Cujus rei cape exempla sequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Pro prima Hypothesi ponatur $a = 10$, ac consequenter prodibit æquatio,

$$\begin{array}{rl} z^4 = & + a^4 \quad 4a^3e + 6a^2ee \quad 4ae^3 + e^4 \\ -dz^2 = & - da^2 \quad da\,e - d\,ee \\ +cz = & + ca \qquad ce \end{array}$$

$$\begin{array}{l} = +10000 \quad 4000e + 600ee \quad 40e^3 + e^4 \\ \quad - \quad 300 \quad 60e - \quad 3ee \\ \quad + \quad 750 \quad 75e \\ \quad -10000 \end{array}$$

$$+ \quad 450 - \underset{s}{4015}e + \underset{t}{597}ee - \underset{u}{40}e^3 + e^4 = 0$$

Signis $+$ ac $-$ (respectu e ac e^3) in dubio relictis, usque dum sciatur an e sit negativa vel affirmativa; Quod quidem aliquam parit difficultatem, cum in æquationibus plures radices admittentibus, sæpe augeantur Homogenea Comparationis, ut appellant, à minuta quantitate a, ac è contra ea aucta minuantur. Determinatur autem signum ipsius e ex signo quantitatis b; sublata enim Resolvenda ex Homogeneo ab a formato, signum ipsius se, ac proinde partium in ejus compositione prævalentium, semper contrarium erit signo differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, sive an a major vel minor radice vera assumpta sit. Ipsa autem e semper æquatur $\dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$, quoties b ac t eodem signo notantur; quoties vero diverso signo connectuntur, eadem e fit $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t}$. Postquam vero compertum sit fore $-e$, in affirmatis æquationis membris negentur $e, e^3, e^5,$ &c. in negatis affirmentur; scribantur scilicet signo contrario; si vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc nostro exemplo 10450 loco Resolvendæ 10000, sive $b = +450$, unde constat a majorem justo assumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit $10450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^4 = 10000$. Hoc est $450 - 4015e + 597ee = 0$. Adeoque $450 = 4015e - 597ee$ sive $b = se - tee$ cujus Radix e fit $\dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$.

Vel si mavis $\dfrac{s}{2t} - \sqrt{\dfrac{ss}{4tt} - \dfrac{b}{t}}$, id est, in præsenti casu,

$e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, unde provenit Radix quæsita prope verum, 9,886. Hoc vero pro secunda Hypothesi substituto, emergit $a + e = z$ accuratissime 9,8862603936495 ...., in ultima figura vix binario justum superans; nempe cum $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$. Atque hoc etiam si opus fuerit, multo ulterius verificari possit, subducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss + tb}}$ si fuerit $+e$, vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}$ radici prius inventæ, si sit $-e$. Cujus compendium eo pluris æstimandum quod quandoque, ex sola prima suppositione, semper vero ex secunda, iisdem conservatis coefficientibus quousque velis calculum continuare possis. Cæterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, *viz.* $x = 10,26....$ quam cuilibet accuratius expiscari licet.

Exemp. II. Sit $z^3 - 17zz + 54z = 350$ ac ponatur $a = 10$. Ex præscripto Regulæ,

$$\begin{aligned} zzz &= aaa + 3aae + 3aee + eee \\ -dzz &= daa - 2dae - dee \\ +cz &= c\,a + c\,e \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} & & b & s & t \\ \text{Id est} & +1000 & +300e & +30ee & +eee \\ & -1700 & -340e & -17ee & \\ & +540 & +54e & & \\ & -350 & & & \end{array}$$

Sive $-510 + 14e + 13ee + eee = 0$.

Cum autem habeatur -510, conſtat a minorem juſto aſſumi, ac proinde e affirmativam eſſe, ac ex $510 = 14e + 13ee$ fit $\frac{\sqrt{bt + \frac{1}{4}ss} - \frac{1}{2}s}{t} = e =$ $= \frac{\sqrt{6679} - 7}{13}$, unde z fit $15,7\ldots$ quæ nimia quidem eſt ob late ſumptam a; ideo ſupponatur ſecundo $a = 15$, ac pari ratiocinio habebimus $e = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$ ac proinde $z = 14,954068$. Quod ſi calculum adhuc tertio reſtaurare velis, uſque in vigeſimam quintam figuram vero conformem invenies radicem: Paucioribus vero contentus, ſcribendo $tb \pm teee$ loco tb, vel ſubtrahendo aut addendo radici prius inventæ $\frac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{\frac{1}{4}ss \mp tb}}$ ad ſcopum ſtatim pervenies.

Æquatio vero propoſita nulla alia radice explicari poteſt, quia Poteſtas Reſolvenda 350 major eſt Cubo ex $\frac{1}{3}7$ vel $\frac{1}{3}d$.

Exemp. III. Sit Æquatio illa quam in Reſolutione difficillimi Problematis Arithmetici adhibet Clariſſimus *Walliſius*, Cap. LXII. Algebræ ſuæ, quo radicem *Vietæ* Methodo accuratiſſime quidem aſſecutus eſt: Eandemque exemplum Methodi ſuæ affert laudatus *Ds Ralphſon, pag.* 25, 26. nempe $z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0$. Hæc autem æquatio ejus formulæ eſt, ut plures habeat radices Affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes ſunt Coefficientes reſpectu Reſolvendæ datæ: Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum

regulas

regulas ponatur $-z^4+8z^3-20z^2+15z=0,5$ (ubi z eſt $\frac{1}{10}z$ in æquatione propoſita) ac pro prima Hypotheſi habeamus $a=1$. Proinde
$+2-5e-2ee+4e^3-e^4-0,5=0$.

Hoc eſt $1\frac{1}{2}=5e+2ee$; hinc $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss+bt}-\frac{1}{2}s}{t}$ $=e$ fit $\frac{\sqrt{37}-5}{4}$ adeoque $z=1,27$: Unde conſtat 12,7 radicem eſſe æquationis propoſitæ vero vicinam. Secundo loco ſupponatur $z=12,7$ ac juxta præſcriptum Tabellæ Poteſtatum oritur

$$\begin{array}{lllll}
\quad b & \quad s & \quad t & \quad u & \\
-26014,4641 & -8193,532e & -967,74ee & -50,8e^3 & -e^4 \\
+163870,640 & +38709,60e & +3048\ ee & +80\ e^3 & \\
-322257,42 & -50749,2\ e & -1998\ ee & & \\
+189699,9 & +14937\ e & & & \\
-5000 & & & & \\
\hline
+298,6559 & -5296,132e & +82,26ee & +29,2e^3 & -e^4=0.
\end{array}$$

Adeoque $-298,6559=-5296,132e+82,26ee$, cujus radix e juxta regulam $=\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}{t}$ fit $\frac{2648,066-\sqrt{6987686,106022}}{82,26}$ $=,0564408033\,1\ldots=e$ minori vero: Ut autem corrigatur, $\frac{\frac{1}{2}ue^3-\frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}$ ſive $\frac{,0026201\ldots\ldots}{2643,423\ldots\ldots}$ fit $,00000099117$, ac proinde e correcta $=05644179448$; Quod ſi adhuc plures radicis figuras deſideras, formetur ex e correcta tue^3-te^4 $=0,43105602423\ldots$, ac $\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt-tue^3+te^4}}{t}$ ſive $\frac{2648,066-\sqrt{6987685,67496597577\ldots}}{82,26}$

$=,05644179448074402=e$, unde $a+e=z$, radix accuratissima fit 12,75644179448074402.... qualem invenit Cl. *Wallisius* in loco citato. Ubi observandum redintegrationem calculi semper triplicare notas veras in assumpta a, quas prima correctio sive $\frac{\frac{1}{2}ue^3-\frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss-bt}}$ quintuplices reddit, quæque etiam commode per Logarithmos efficitur. Altera autem correctio post primam, etiam duplum Ciphrarum numerum adjungit, ut omnino assumptas septuplicet; prima tamen plerumque usibus Arithmetices abunde sufficit. Quæ vero dicta sunt de numero ciphrarum in radice recte assumptarum, ita intelligi velim, ut cum a non nisi decima parte distet à vera radice, prima figura recte assumatur; si intra centesimam partem, duæ primæ: Si intra millesimam tres priores rite se habeant; quæ deinde juxta nostram regulam tractatæ statim novem evadunt.

Restat jam ut nonnulla adjiciam de nostra formula rationali, *viz.* $e=\frac{sb}{ss\pm tb}$, quæ quidem satis expedita videbitur, nec multum cedit priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex $a\pm e=z$, ut prius, statim patebit an a assumpta sit major vel minor vero, cum scilicet se signo semper notari debeat contrario signo differentiæ Resolvendæ ac Homogenei sui ex a producti. Deinde posito quod $\pm b\mp se$ $+$ vel $-tee=0$; divisor fit $ss-tb$ quoties b ac t iisdem signis notantur; idem vero fit $ss+bt$, si signa ista diversa sint. Praxi autem magis accommodata

commodata videtur, si scriberetur Theorema, $e = \frac{b}{s \pm \frac{tb}{s}}$ nempe cum una multiplicatione ac duabus divisionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam divisionem alias requireret. Hujus etiam Methodi exemplum capiamus à prædictæ Æquationis radice 12,7 . . . : ubi

$$\underset{+b}{298{,}6559} \underset{-s}{- 5296{,}132e} \underset{+t}{+ 82{,}26ee} \underset{+u}{+ 29{,}2e^3} - e^4 = 0,$$

adeoque $\frac{b}{s - \frac{tb}{s}} = e$, hoc est, fiat ut s ad t ita b ad $\frac{tb}{s} = 5296{,}132)\, 298{,}6559$ in $82{,}26(4{,}63875\ldots$ quocirca divisor fit $s - \frac{tb}{s} = 5291{,}49325\ldots)\, 298{,}6559(0{,}056441\ldots = e$, *viz.* quinque figuris veris adjectis radici assumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula sicut præsens irrationalis; adeoque si plures desiderentur radicis figuræ, præstat assumpta nova Hypothesi calculum de integro repetere: ac novus Quotus triplicando figuras in radice cognitas supputatori etiam maxime scrupuloso abunde satisfaciet.

FINIS.